Vorlesung Banachalgebren und Numerische Analysis SS 2018

Steffen Roch

Banachalgebren und Numerische Analysis

In dieser Vorlesung soll gezeigt werden, wie sich einige typische Fragestellungen aus der Numerischen Analysis mit Mitteln der Funktionalanalysis studieren lassen. Besonderes Gewicht liegt auf Techniken aus der Theorie der Banachalgebren (sogenannte lokale Prinzipien oder nichtkommutative Gelfandtheorien). In der Vorlesung werden sich eher theoretisch orientierte Abschnitte mit der Untersuchung ganz konkreter Näherungsverfahren abwechseln. Leiten lassen werden wir uns insbesondere von der näherungsweisen Lösung von Integral- und damit verwandten Gleichungen.

Literatur (chronologisch geordnet)

- Gohberg/Feldman: Faltungsgleichungen und Projektionsverfahren zu ihrer Lösung (1971 Russisch, 1974 Deutsch, Englisch).
- Prößdorf/Silbermann: Projektionsverfahren und die näherungsweise Lösung singulärer Gleichungen (Teubner 1977).
- Hackbusch: Integralgleichungen – Theorie und Numerik (Teubner 1989, Birkhäuser 1995 Englisch).
- Hagen/R./Silbermann: Spectral theory of approximation methods for convolution equations (Birkhäuser 1995)
- Böttcher/Silbermann: Introduction to large truncated Toeplitz matrices (Springer 1999).
- Hagen/R./Silbermann: C^*-Algebras and numerical analysis (Marcel Dekker 2000).

Vorkenntnisse Grundlagen Funktionalanalysis + Numerik.

1 Einleitung

1.1 Wiederholung: Konvergenz von Operatorfolgen

Seien X, Y Banachräume über dem gleichen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (wir werden später meist in Räumen über $\mathbb{C}$ arbeiten). Mit $L(X, Y)$ bezeichnen wir den Banachraum der linearen beschränkten Operatoren von X nach Y. Sei (A_n) eine Folge aus $L(X, Y)$ und $A \in L(X, Y)$. Die Folge (A_n) konvergiert *gleichmäßig* (oder *in der Norm*) gegen A, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{L(X,Y)} = 0.$$

Die Folge (A_n) konvergiert *punktweise* (oder *stark*) gegen A, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\|_Y = 0 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Offenbar folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz die punktweise. Wir schreiben $A_n \rightrightarrows A$ bzw. $A_n \to A$ für die gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz.

Satz 1.1 (Banach-Steinhaus) (*a*) *Sei (A_n) eine Folge in $L(X, Y)$, und für jedes $x \in X$ konvergiere die Folge $(A_n x)$ gegen ein Element $Ax \in Y$. Der so erklärte Operator $A : X \to Y$ ist linear und beschränkt, und*

$$\|A\|_{L(X,Y)} \le \liminf \|A_n\|_{L(X,Y)}.$$

(*b*) *Die Folge (A_n) konvergiert genau dann punktweise gegen $A \in L(X, Y)$, wenn*

1. $\sup \|A_n\| < \infty$ *und*
2. $\|A_n x - Ax\| \to 0$ *für alle x aus einer dichten Teilmenge von X.*

Der schwierigste Teil des Beweises ist die Aussage

$$A_n \to A \qquad \Rightarrow \qquad \sup \|A_n\| < \infty$$

(Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit).

Weiter gilt offenbar für die Banach- und Hilbertraumadjungierten

$$A_n \rightrightarrows A \qquad \Rightarrow \qquad A_n^* \rightrightarrows A^*.$$

Dagegen gibt es Folgen $(A_n) \subseteq L(X, Y)$ mit

$$A_n \to A, \qquad \text{aber} \quad A_n^* \not\to A^*.$$

Der Übergang von A zu A^* ist also stetig bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz, nicht aber bzgl. punktweiser Konvergenz. Außerdem hat man die folgenden algebraischen Eigenschaften (wobei A_n, B_n, A, B zwischen geeigneten Räumen wirken):

$$\begin{aligned} A_n \rightrightarrows A,\, B_n \rightrightarrows B \quad &\Rightarrow \quad A_n + B_n \rightrightarrows A + B, \quad A_n B_n \rightrightarrows AB, \\ A_n \to A,\, B_n \to B \quad &\Rightarrow \quad A_n + B_n \to A + B, \quad A_n B_n \to AB. \end{aligned}$$

Ein linearer Operator $K : X \to Y$ heißt *kompakt*, wenn er beschränkte Mengen (aus X) in relativ kompakte Mengen (in Y) überführt. Äquivalent dazu ist, dass K die Einheitskugel von X in eine relativ kompakte Menge überführt. Offenbar ist jeder kompakte Operator beschränkt. Wir bezeichnen die Menge aller kompakten Operatoren von X nach Y mit $K(X, Y)$. Statt $L(X, X)$ bzw. $K(X, X)$ schreiben wir auch $L(X)$ bzw. $K(X)$.

Einige Eigenschaften kompakter Operatoren

- $K(X, Y)$ ist ein linearer Raum.
- $K(X, Y)$ ist abgeschlossen bzgl. der Normkonvergenz, d. h.

  $$(K_n) \subseteq K(X, Y), \quad K_n \rightrightarrows K \in L(X, Y) \quad \Rightarrow \quad K \in K(X, Y).$$

  (Jedoch ist i. Allg. $K(X, Y)$ nicht abgeschlossen bzgl. punktweiser (= starker) Konvergenz!)
- $B \in L(W, X)$, $K \in K(X, Y)$, $A \in L(Y, Z) \quad \Rightarrow \quad AKB \in K(W, Z)$.
- $K \in K(X, Y) \Leftrightarrow K^* \in K(Y^*, X^*)$ (Satz von Schauder).

Insbesondere ist $K(X)$ ein norm-abgeschlossenes Ideal von $L(X)$.

Grob gesagt ist der Inhalt des folgenden Satzes, dass kompakte Operatoren stark konvergente Folgen in normkonvergente Folgen überführen.

Satz 1.2 *Seien $B, B_n \in L(W, X)$, $K \in K(X, Y)$ und $A, A_n \in L(Y, Z)$ Operatoren mit $A_n \to A$ und $B_n^* \to B^*$. Dann gilt $A_n K B_n \rightrightarrows AKB$.*

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} \|A_n K B_n - AKB\| &\leq \|(A_n - A)KB_n\| + \|AK(B_n - B)\| \\ &\leq \|(A_n - A)K\| \|B_n\| + \|A\| \|K(B_n - B)\| \\ &\leq C\left(\|(A_n - A)K\| + \|(B_n^* - B^*)K^*\|\right) \end{aligned}$$

(Satz 1.1 (Banach-Steinhaus) und Normgleichheit $\|R\| = \|R^*\|$) genügt es zu zeigen, dass $\|(A_n - A)K\| \to 0$. Wir zeigen dazu

$$C_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad C_n K \rightrightarrows 0, \tag{1.1}$$

woraus die Behauptung (mit $C_n := A_n - A$) folgt. Angenommen, es ist $C_n K \not\rightrightarrows 0$. Dann gibt es ein $d > 0$ und eine Teilfolge (n_k) von $\mathbb{N}$ so, dass $\|C_{n_k} K\| > d$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter findet man Vektoren $x_k \in X$ mit $\|x_k\| = 1$ und so, dass $\|C_{n_k} K x_k\| > d$ für alle k.

Da K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(y_l) := (K x_{k_l})$ von $(K x_k)$, die gegen ein $y \in Y$ konvergiert. Für die Elemente y und y_l gilt

$$\begin{aligned} 0 < d < \|C_{n_{k_l}} K x_{k_l}\| &= \|C_{n_{k_l}} y_l\| \\ &\leq \|C_{n_{k_l}} y\| + \|C_{n_{k_l}} (y_l - y)\| \leq \|C_{n_{k_l}} y\| + C\|y_l - y\| \to 0 \end{aligned}$$

(wobei die Abschätzung aus dem Satz 1.1 (Banach-Steinhaus) folgt). Der erhaltene Widerspruch zeigt, dass (1.1) gilt. ■

1.2 Wiederholung: Unterräume und Projektoren

Sei X ein Banachraum und U ein abgeschlossener linearer Unterraum von X. Man sagt, dass U ein *direktes Komplement* in X besitzt, wenn es einen abgeschlossenen linearen Teilraum V von X gibt mit

$$U + V = X \quad \text{und} \quad U \cap V = \{0\}.$$

In diesem Fall schreiben wir $X = U \oplus V$ und sagen, dass X die *direkte Summe* von U und V ist. In Hilberträumen besitzt jeder abgeschlossene lineare Unterraum ein direktes Komplement (z. B. das orthogonale Komplement von U). In Banachräumen gilt dies i. Allg. nicht mehr. Man kann sogar zeigen, dass ein Banachraum genau dann zu einem Hilbertraum isomorph ist, wenn in ihm jeder abgeschlossene lineare Teilraum ein direktes Komplement besitzt (Satz von Lindenstrauss/Tzafriri).

Ist $X = U \oplus V$, so lässt sich jedes Element $x \in X$ eindeutig schreiben als $x = u + v$ mit $u \in U$ und $v \in V$. Durch

$$P : X \to X, \quad x = u + v \mapsto u \tag{1.2}$$

wird eine Abbildung P definiert, die *Projektion von X auf U parallel zu V*.

Satz 1.3 *Der durch* (1.2) *erklärte Operator ist linear und beschränkt. Außerdem ist P idempotent, d. h. es ist $P^2 = P$.*

Die Beschränktheit folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen. Die übrigen Aussagen sind leicht zu sehen.

Satz 1.3 legt es nahe, einen Operator $P \in L(X)$ einen („abstrakten“) Projektor zu nennen, wenn $P^2 = P$. Ist P ein Projektor in diesem Sinn, so ist auch $I - P$ ein Projektor, und es gilt $P + (I - P) = I$, $P(I - P) = 0$ sowie

$$\operatorname{im} P = \ker(I - P), \quad \ker P = \operatorname{im}(I - P).$$

Da der Kern eines linearen beschränkten Operators abgeschlossen ist, folgt, dass Bildräume von Projektoren abgeschlossen sind. Insbesondere sind also $\operatorname{im} P$ und $\operatorname{im}(I-P)$ abgeschlossene lineare Teilräume von X, und es ist

$$\operatorname{im} P + \operatorname{im}(I-P) = X \quad \text{und} \quad \operatorname{im} P \cap \operatorname{im}(I-P) = \{0\}.$$

Also ist $X = \operatorname{im} P \oplus \operatorname{im}(I-P)$, und P projiziert X auf $\operatorname{im} P$ parallel zu $\operatorname{im}(I-P)$. Die „geometrische" Definition (1.2) und die „abstrakte" Definition $P^2 = P$ beschreiben also die gleiche Klasse von Operatoren.

In Hilberträumen H gibt es für *jeden* abgeschlossenen linearen Teilraum U einen „natürlichen" Projektor von H auf U, nämlich den Projektor von H auf U parallel zu $U^\perp$. Dieser heißt der „Orthoprojektor" von H auf U. Abstrakt lassen sich Orthoprojektoren durch die beiden Bedingungen $P^2 = P$ und $P^* = P$ charakterisieren. Orthoprojektoren sind also selbstadjungierte Projektoren.

1.3 Näherungsfolgen

Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$. Um etwas Konkretes vor Augen zu haben, kann man etwa an $X = C[0,1]$ und $A \in L(C[0,1])$ mit

$$(Au)(t) = u(t) + \int_0^1 k(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s, \quad k \in C([0,1]\times[0,1])$$

denken. Um auf numerischem Weg etwas über A in Erfahrung zu bringen (etwa die Lösungen der Gleichung $Au = f$, das Spektrum von A, die Norm von A, die Dimension von $\ker A, \ldots$), muss man A diskretisieren, d. h. näherungsweise durch „einfachere" Operatoren ersetzen. „Einfacher" ist in dem Sinn zu verstehen, dass sich die Näherungsoperatoren numerisch bearbeiten lassen, also z. B. $n \times n$ Matrizen sind. Die Diskretisierungen von A hängen von einem Parameter ab, den wir meist in $\mathbb{N}$ wählen. Wir fassen den Begriff der Diskretisierung zunächst sehr weit: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ soll es einen abgeschlossenen linearen Unterraum X_n von X mit direktem Komplement geben, und A wird ein Operator $A_n \in L(X_n)$ zugeordnet. Das direkte Komplement benötigen wir aus folgendem Grund: Um A mit A_n „vergleichen" zu können, ist es wünschenswert, sich A_n als Operator auf ganz X vorstellen zu können. Da Ausdrücke wie $A_n x$ für beliebiges $x \in X$ keinen Sinn ergeben, benötigen wir einen Mechanismus, der jedem $x \in X$ ein Element aus X_n zuordnet, d. h. einen Projektor $P_n : X \to X_n$. Ein solcher existiert genau dann, wenn X_n ein direktes Komplement in X besitzt. Um etwas über die Güte der Näherung zwischen A und A_n aussagen zu können, vergleicht man nun A mit $A_n P_n$.

Unsere Forderungen lassen zu, dass $X = X_n$ ist. Von besonderem Interesse für numerische Belange ist aber der Fall, dass X_n ein endlich-dimensionaler Teilraum von X ist (etwa $\dim X_n = n$). In diesem Fall kann $A_n \in L(X_n)$ als $n \times n$-Matrix aufgefasst werden, und $A_n P_n$ ist ein kompakter Operator auf X

(genauer: ein Operator von endlichem Rang). Nun ist aber $K(X)$ abgeschlossen bzgl. der Normkonvergenz. Bezüglich der Normkonvergenz lassen sich also *nur kompakte Operatoren* durch Operatoren auf endlich-dimensionalen Räumen approximieren. Für die Approximation nichtkompakter Operatoren muss die Normkonvergenz durch einen geeigneten schwächeren Konvergenzbegriff ersetzt werden. Als geeignet erweist sich die starke (oder punktweise) Konvergenz. Wir verlangen also $A_n P_n \to A$. Es ist auch natürlich zu verlangen, dass der identische Operator I auf X durch die identischen Operatoren auf X_n approximiert wird, d. h. dass $P_n \to I$. Wir fassen zusammen:

Definition 1.4 *Sei X ein Banachraum, $(P_n) \subseteq L(X)$ eine Folge von Projektoren mit $P_n \to I$, und $A \in L(X)$. Eine Folge (A_n) von Operatoren $A_n \in L(\operatorname{im} P_n)$ heißt* Näherungsfolge *für A, wenn $A_n P_n \to A$ stark.*

Die numerische Analysis (so wie wir sie hier verstehen wollen) befasst sich mit dem Verhältnis zwischen dem Operator A und seinen Näherungen A_n für große n. Typische Fragestellungen sind

- Beziehungen zwischen der Invertierbarkeit von A und der von A_n,
- Beziehungen zwischen den Spektren $\sigma(A)$ und $\sigma(A_n)$ und zwischen den Eigenfunktionen von A und den Eigenvektoren von A_n,
- Beziehungen zwischen $\|A\|$ und $\|A_n\|$, ...

Nicht besprechen werden wir dagegen Fragen wie: Ist A_{99} invertierbar? Wie berechnet man A_{100}^{-1}? Was sind die Eigenwerte von A_{101}?

1.4 Näherungsweise Lösung von Operatorgleichungen

Seien X, P_n, A und A_n wie in Definition 1.4. Wir wollen die Gleichung

$$Au = f, \quad f \in X \tag{1.3}$$

näherungsweise lösen, indem wir sie durch Gleichungen mit A_n als Systemmatrix ersetzen. Dazu müssen wir die rechte Seite f durch Elemente aus $\operatorname{Im} P_n$ approximieren, etwa durch $P_n f$. Wir gelangen so zu einer Folge von Gleichungen

$$A_n u_n = P_n f, \quad f \in X, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.4}$$

deren Lösungen u_n wir in $\operatorname{Im} P_n$ suchen.

1.4.1 Anwendbare und stabile Verfahren

Definition 1.5 *Die Näherungsfolge* (A_n) *heißt* anwendbar *auf die Lösung der Gleichung* (1.3) *oder auch* konvergent*, wenn es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass die Gleichungen* (1.4) *für jedes* $f \in X$ *und jedes* $n \geq n_0$ *eindeutig lösbar sind und wenn für jedes* $f \in X$ *die Folge der Lösungen konvergiert.*

Wir werden sehen, dass dann die Folge $(u_n)_{n \geq n_0}$ gegen eine Lösung von (1.3) konvergiert.

Das Auftreten der Zahl n_0 in dieser Definition ist in dem Sinn natürlich, dass für kleine n die Lösbarkeit von (1.4) nicht garantiert werden kann und mögliche Lösungen dieser Gleichung nur wenig mit der Lösung von (1.3) gemeinsam haben werden. Andererseits benötigt man für numerische Rechnungen natürlich kleine n_0. Die Ausgabe eines n_0 (oder gar des kleinstmöglichen) ist i. Allg. schwierig.

Definition 1.6 *Die Folge* (A_n) *heißt* stabil*, wenn es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass die Operatoren* A_n *für* $n \geq n_0$ *invertierbar sind und dass*

$$\sup_{n \geq n_0} \|A_n^{-1}\| < \infty. \tag{1.5}$$

Bedingung (1.5) ist gleichbedeutend mit $\sup_{n \geq n_0} \|A_n^{-1} P_n\| < \infty$. Für jeden Operator $B \in L(X_n)$ (mit $X_n := \operatorname{im} P_n$) ist nämlich

$$\begin{aligned} \|B\| &= \sup_{x \in X_n : \|x\|=1} \|Bx\| = \sup_{x \in X_n : \|x\|=1} \|BP_n x\| \leq \sup_{x \in X : \|x\|=1} \|BP_n x\| \\ &= \|BP_n\| \leq \|B\| \, \|P_n\|. \end{aligned}$$

Aus $P_n \to I$ folgt mit Satz 1.1 (Banach-Steinhaus) $C := \sup \|P_n\| < \infty$, und somit ist

$$\|B\| \leq \|BP_n\| \leq C\|B\|$$

für alle $B \in L(X_n)$.

Satz 1.7 (Polski) *Eine Näherungsfolge* (A_n) *für* $A \in L(X)$ *ist genau dann anwendbar, wenn* A *invertierbar und* (A_n) *stabil ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Wir zeigen zuerst die Stabilität von (A_n). Ist das Verfahren anwendbar, so sind die A_n für alle $n \geq n_0$ invertierbar, und alle Folgen $(u_n)_{n \geq n_0} = (A_n^{-1} P_n f)_{n \geq n_0}$ mit $f \in X$ konvergieren. Die Folge $(A_n^{-1} P_n)$ konvergiert also stark, und aus Satz 1.1 (Banach-Steinhaus) folgt

$$\sup_{n \geq n_0} \|A_n^{-1} P_n\| < \infty.$$

Wie wir oben gesehen haben, ist dies die Stabilität von (A_n).

Wir zeigen nun die Invertierbarkeit von A. Zunächst zur Surjektivität von A: Sei $f \in X$. Wir bilden die Folge $(u_n) := (A_n^{-1} P_n f)$ der zugehörigen Lösungen von (1.4) und bezeichnen mit u ihren Grenzwert. Dann ist

$$\begin{aligned} \|A_n u_n - Au\| &\leq \|A_n P_n u_n - A_n P_n u\| + \|A_n P_n u - Au\| \\ &\leq \underbrace{\|A_n P_n\|}_{\text{glm. beschr.}} \underbrace{\|u_n - u\|}_{\to 0} + \underbrace{\|A_n P_n u - Au\|}_{\to 0}, \end{aligned}$$

also $A_n u_n \to Au$. Geht man in $A_n u_n = P_n f$ mit $n \to \infty$, so folgt $Au = f$, d. h. $f \in \operatorname{Im} A$.

Nun zur Injektivität von A: Für alle $u \in X$ und $n \geq n_0$ ist

$$\begin{aligned} \|u - A_n^{-1} P_n A u\| &\leq \|A_n^{-1} P_n A_n P_n u - A_n^{-1} P_n A u\| + \|u - P_n u\| \\ &\leq \underbrace{\|A_n^{-1} P_n\|}_{\text{glm. beschr.}} \underbrace{\|A_n P_n u - Au\|}_{\to 0} + \underbrace{\|u - P_n u\|}_{\to 0}; \end{aligned}$$

es ist also $A_n^{-1} P_n A u \to u$ für jedes $u \in X$. Für $u \in \ker A$ folgt insbesondere $u = 0$. Also ist A auch injektiv und somit invertierbar.

($\Leftarrow$) Sei A invertierbar und (A_n) stabil. Für alle $f \in X$ und alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} \|A_n^{-1} P_n f - A^{-1} f\| &\leq \|A_n^{-1} P_n f - P_n A^{-1} f\| + \|P_n A^{-1} f - A^{-1} f\| \\ &\leq \|A_n^{-1} P_n\| \|f - A_n P_n A^{-1} f\| + \|P_n A^{-1} f - A^{-1} f\|, \end{aligned}$$

und mit $u := A^{-1} f$ erhalten wir

$$\|A_n^{-1} P_n f - A^{-1} f\| \leq \underbrace{\|A_n^{-1} P_n\|}_{\text{glm. beschr.}} \underbrace{\|Au - A_n P_n u\|}_{\to 0} + \underbrace{\|P_n u - u\|}_{\to 0}. \tag{1.6}$$

Die Folge $(A_n^{-1} P_n)$ konvergiert also stark, und zwar gegen A^{-1}. Also konvergieren die Lösungen $A_n^{-1} P_n f$ von (1.4) gegen die Lösung $A^{-1} f$ von (1.3). ∎

Folgerung 1.8 *Das Näherungsverfahren (A_n) sei anwendbar auf A, und es sei $X_n \ni f_n \to f$. Dann sind die Gleichungen $A_n u_n = f_n$ für alle hinreichend großen n eindeutig lösbar, und ihre Lösungen konvergieren gegen die Lösung von $Au = f$.*

Dies folgt sofort aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|A_n^{-1} f_n - A^{-1} f\| &\leq \|A_n^{-1} f_n - A_n^{-1} P_n f\| + \|A_n^{-1} P_n f - A^{-1} f\| \\ &\leq \underbrace{\|A_n^{-1} P_n\|}_{\text{glm. beschr.}} \underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0} + \underbrace{\|A_n^{-1} P_n f - A^{-1} f\|}_{\to 0}. \end{aligned}$$ ∎

Die Konvergenz von $A_n \to A$ und $f_n \to f$ bezeichnet man oft als *Konsistenz* des Verfahrens. In Kurzfassung sagt Satz 1.7 (Polski) für invertierbares A

$$\text{Konvergenz des Verfahrens} \;=\; \text{Konsistenz} \;+\; \text{Stabilität}.$$

Dieses „Metatheorem der Numerischen Analysis“ findet man in vielen Situationen. Bekannt könnte es von Mehrschrittverfahren zur Lösung von AWP für gewöhnliche Differentialgleichungen sein.

Will man mit Satz 1.7 (Polski) die Anwendbarkeit eines Verfahrens zeigen, hat man die Invertierbarkeit des Operators sowie die Konsistenz und Stabilität des Verfahrens nachzuweisen. Wir werden die Invertierbarkeit des Operators meist als gegeben voraussetzen (diese ist Gegenstand der Operatortheorie oder folgt aus dem praktischen Hintergrund). Auch wird sich zeigen, dass die Konsistenz in vielen Situationen leicht zu sehen ist. Daher ist gerade die Untersuchung der Stabilität eine der grundlegenden Aufgaben der numerischen Analysis.

Es folgen noch einige Ergänzungen, die auf dem Begriff der Stabilität beruhen.

1.4.2 Kleine Störungen

Satz 1.9 *Sei (A_n) eine stabile Folge von Operatoren $A_n : X_n \to X_n$, und sei (S_n) eine Folge von Operatoren $S_n : X_n \to X_n$ mit*

$$\limsup \|S_n\| < \liminf \|A_n^{-1}\|^{-1}. \tag{1.7}$$

Dann ist die Folge $(A_n + S_n)$ ebenfalls stabil.

Der Beweis benutzt den folgenden einfachen Hilfssatz.

Lemma 1.10 *Seien X ein Banachraum und $B, C \in L(X)$. Ist B invertierbar und $\|C\| < \|B^{-1}\|^{-1}$, so ist auch $B + C$ invertierbar, und es gilt*

$$\|(B+C)^{-1}\| \le \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \|B^{-1}C\|}.$$

Beweis. Es ist $\|B^{-1}C\| \le \|B^{-1}\|\|C\| < 1$. Also ist $I + B^{-1}C$ invertierbar, und

$$(I + B^{-1}C)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (B^{-1}C)^k$$

(Neumann-Reihe). Dann ist auch $B + C = B(I + B^{-1}C)$ invertierbar, und

$$(B+C)^{-1} = (I + B^{-1}C)^{-1}B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (B^{-1}C)^k B^{-1}.$$

Hieraus folgt

$$\|(B+C)^{-1}\| \le \|B^{-1}\| \sum_{k=0}^{\infty} \|B^{-1}C\|^k = \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \|B^{-1}C\|}. \qquad \blacksquare$$

Beweis von Satz 1.9. Sei A_n für $n \ge n_0$ invertierbar. Wir setzen

$$M := \liminf \|A_n^{-1}\|^{-1}$$

und wählen $d > 0$ so, dass

$$\limsup \|S_n\| < M - 2d.$$

Nach Definition von lim sup und lim inf gibt es ein $n_1 \geq n_0$ so, dass

$$\|S_n\| < M - 2d < M - d < \|A_n^{-1}\|^{-1} \quad \text{für } n \geq n_1.$$

Wir wenden Lemma 1.10 mit $B := A_n$ und $C := S_n$ an und erhalten wegen

$$\|B^{-1}C\| = \|A_n^{-1}S_n\| \leq \|A_n^{-1}\|\|S_n\| < \frac{M-2d}{M-d} < 1,$$

dass $A_n + S_n$ für $n \geq n_1$ invertierbar ist und dass

$$\|(A_n + S_n)^{-1}\| \leq \frac{\|A_n^{-1}\|}{1 - \|A_n^{-1}S_n\|} \leq \frac{\sup \|A_n^{-1}\|}{1 - \frac{M-2d}{M-d}} = \frac{M-d}{d} \sup \|A_n^{-1}\|.$$

Also ist die Folge $(A_n + S_n)$ stabil. ■

Folgerung 1.11 *Die Voraussetzungen seien wie in Satz* 1.9. *Zusätzlich gelte* $A_nP_n \to A$ *mit einem invertierbaren Operator* A *und* $S_nP_n \to 0$*. Dann ist* $(A_n + S_n)$ *ein anwendbares Verfahren für den Operator* A*.*

Man beachte, dass Bedingung (1.7) für jede Folge (S_n) mit $\|S_n\| \to 0$ gilt.

1.4.3 Fehlerabschätzung und Konvergenzgeschwindigkeit

In Anwendungen möchte man nicht nur die Konvergenz $\|u - u_n\| \to 0$ feststellen, sondern auch etwas über ihre Geschwindigkeit wissen.

Satz 1.12 *Sei* (A_n) *auf* A *anwendbar,* $f_n \to f$*, und seien* u *bzw. (für hinreichend großes* n*)* u_n *die Lösungen von* $Au = f$ *bzw.* $A_nu_n = f_n$*. Dann ist für alle hinreichend großen* n

$$\begin{aligned}\|u - u_n\| &\leq \|A_n^{-1}\| \left(\|A_nP_nu - Au\| + \|f - f_n\|\right) + \|u - P_nu\| \\ &\leq \max\left\{\|A_n^{-1}\|, 1\right\} \left(\|A_nP_nu - Au\| + \|f - f_n\| + \|u - P_nu\|\right).\end{aligned}$$

Beweis. Aus $A_n(P_nu - u_n) = A_nP_nu - A_nu_n = A_nP_nu - f_n$ folgt $P_nu - u_n = A_n^{-1}(A_nP_nu - f_n)$ und somit

$$\begin{aligned}\|P_nu - u_n\| &\leq \|A_n^{-1}\|\|A_nP_nu - f_n\| \\ &\leq \|A_n^{-1}\|(\|A_nP_nu - Au\| + \|f - f_n\|).\end{aligned}$$

Mit $\|u - u_n\| \leq \|P_nu - u_n\| + \|P_nu - u\|$ folgt die Behauptung. ■

Da die Normen $\|A_n^{-1}\|$ gleichmäßig beschränkt sind, hängt die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens wesentlich davon ab, wie schnell A_nP_nu gegen A_n, f_n gegen f und P_nu gegen u konvergiert.

2 Projektionsverfahren

Wir betrachten nun Verfahren, bei denen die Näherungsoperatoren A_n durch Projektion und Einschränkung von A auf Teilräume X_n von X entstehen. Wir beginnen mit dem einfachsten Projektionsverfahren, dem Reduktionsverfahren.

2.1 Das Reduktionsverfahren

Sei H ein separabler unendlich-dimensionaler Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ist $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis von H gegeben, so lässt sich jedes $x \in H$ in seine Fourierreihe

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$$

entwickeln, und man kann x die Folge $(\langle x, e_i \rangle)_{i=1}^{\infty}$ seiner Fourierkoeffizienten zuordnen. Diese Folge liegt wegen der Parsevalschen Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

in l^2, und die Abbildung $J : H \to l^2$, $x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i=1}^{\infty}$ ist eine lineare Isometrie. Liegt umgekehrt $(x_i) \in l^2$, so konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ in H, und für ihre Summe x gilt $\langle x, e_i \rangle = x_i$. Die Abbildung J ist also eine Isometrie von H *auf* l^2 (Satz von Riesz/Fischer).

Um eine Operatorgleichung $Au = f$ mit $A \in L(H)$ und $f \in H$ zu lösen, genügt es also, die Fourierkoeffizienten von u zu bestimmen. Dazu entwickeln wir Au und f in ihre Fourierreihen

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Au, e_i \rangle e_i, \quad f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i,$$

wählen den Ansatz $u = \sum_{j=1}^{\infty} u^{(j)} e_j$ mit unbekannten Koeffizienten $u^{(j)} \in \mathbb{C}$, und erhalten durch Einsetzen in $Au = f$

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle A \sum_{j=1}^{\infty} u^{(j)} e_j, e_i \right\rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle Ae_j, e_i \rangle u^{(j)} \right) e_i \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle Ae_j, e_i \rangle u^{(j)} = \langle f, e_i \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

die man als ein unendliches Gleichungssystem schreiben kann:

$$\begin{pmatrix} \langle Ae_1, e_1 \rangle & \langle Ae_2, e_1 \rangle & \langle Ae_3, e_1 \rangle & \ldots \\ \langle Ae_1, e_2 \rangle & \langle Ae_2, e_2 \rangle & \langle Ae_3, e_2 \rangle & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, e_1 \rangle \\ \langle f, e_2 \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Die Matrix auf der linken Seite definiert einen linearen beschränkten Operator $\tilde{A}$ auf l^2 (nämlich JAJ^{-1}), und die rechte Seite von (2.1) definiert ein Element $\tilde{f}$ von l^2 (nämlich Jf). Man kann (2.1) also als Operatorgleichung $\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{f}$ auf l^2 mit der gesuchten Folge $\tilde{u} = Ju$ deuten.

Um das unendliche System (2.1) auf eine Folge endlicher Systeme zurückzuführen, schneiden wir aus der Systemmatrix und aus der rechten Seite endliche Abschnitte heraus:

$$A_1 := (\langle Ae_1, e_1\rangle)\,, \qquad\qquad f_1 := (\langle f, e_1\rangle)\,,$$
$$A_2 := \begin{pmatrix} \langle Ae_1, e_1\rangle & \langle Ae_2, e_1\rangle \\ \langle Ae_1, e_2\rangle & \langle Ae_2, e_2\rangle \end{pmatrix}, \qquad\qquad f_2 := \begin{pmatrix} \langle f, e_1\rangle \\ \langle f, e_2\rangle \end{pmatrix}$$

usw., und wir betrachten an Stelle von (2.1) die endlichen Gleichungssysteme

$$A_n u_n = f_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.2}$$

Der Übergang von (2.1) zu (2.2) ist ein Näherungsverfahren im obigen Sinn: Die Operatoren A_n wirken auf dem Teilraum $l_n^2 := \{(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) : x_i \in \mathbb{C}\}$ von l^2, und die Orthoprojektoren P_n von l^2 auf l_n^2 sind gegeben durch

$$P_n : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

und konvergieren offensichtlich stark gegen den identischen Operator. Dieses Näherungsverfahren heißt das *Reduktionsverfahren für A bzgl. der Basis* (e_i) oder das Reduktionsverfahren für $\tilde{A}$ bzgl. der Standardbasis von l^2.

Unter Benutzung der Projektoren P_n lassen sich die Systeme (2.2) auch schreiben als

$$P_n \tilde{A} u_n = P_n f, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei nun u_n in $\operatorname{im} P_n = l_n^2$ gesucht wird. Die Näherungsoperatoren $A_n \widehat{=} P_n \tilde{A}|_{\operatorname{im} P_n}$ entstehen durch Einschränkung von $\tilde{A}$ auf $\operatorname{im} P_n$ und anschließende Projektion auf $\operatorname{im} P_n$. Das Reduktionsverfahren ist daher ein spezielles Projektionsverfahren. Diese Klasse sehen wir uns im nächsten Abschnitt genauer an.

Beispiel 2.1 Sei $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, und A sei durch seine Matrixdarstellung

$$A = \operatorname{diag}(C, C, C, \ldots)$$

bzgl. der Standardbasis des l^2 definiert. Der Operator A ist linear, beschränkt und invertierbar, und er hat eine Reihe weiterer guter Eigenschaften wie $A = A^* = A^{-1}$. Dennoch ist das Reduktionsverfahren bzgl. der Standardbasis des l^2 auf diesen Operator nicht anwendbar! Schneidet man aus

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

endliche Abschnitte A_n heraus, so enthält jedes A_n mit ungeradem n eine Nullzeile und ist demzufolge nicht invertierbar. Die Folge (A_n) ist also *nicht* stabil! Wählt man dagegen an Stelle der Standardbasis $(e_i)_{i=1}^\infty$ mit

$$e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \qquad \text{(mit der 1 an der } i\text{. Stelle)}$$

die folgende:

$$f_{2k-1} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2k-1} + e_{2k}), \quad f_{2k} := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2k-1} - e_{2k}) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gerade $Af_{2k-1} = f_{2k-1}$ und $Af_{2k} = -f_{2k}$. Die Matrixdarstellung von A bzgl. der Basis $(f_i)_{i=1}^\infty$ von l^2 ist also die Diagonalmatrix

$$\operatorname{diag}(1, -1, 1, -1, \ldots),$$

und das Reduktionsverfahren bzgl. dieser Basis ist offensichtlich konsistent und stabil. ■

Die Anwendbarkeit des Reduktionsverfahrens hängt somit offenbar von der Wahl der Basis ab. Wir vermerken dazu zwei Resultate. Zur Erinnerung: Ein Operator $A \in L(H)$ heißt *positiv definit*, wenn $A^* = A$ und wenn es ein $c > 0$ gibt mit

$$\langle Ax, x \rangle \geq c\|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in H.$$

Satz 2.2 *Sei $B \in L(H)$ positiv definit und $C \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann ist der Operator $A := B + iC$ invertierbar, und auf A ist das Reduktionsverfahren bzgl. einer* beliebigen *Orthonormalbasis von H anwendbar.*

Beweis. Sei $(e_k)_{k=1}^\infty$ Orthonormalbasis von H und P_n der Orthoprojektor von H auf den linearen Span von $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Weiter sei $c > 0$ eine Konstante mit

$$\langle Bx, x \rangle \geq c\|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in H.$$

Für alle $x \in H$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\begin{aligned} \|P_n x\| \|P_n A P_n x\| &\geq |\langle P_n(B + iC)P_n x, P_n x\rangle| \quad \text{(Cauchy/Schwarz)} \\ &= |\langle P_n B P_n x, P_n x\rangle + i\langle P_n C P_n x, P_n x\rangle| \\ &= |\underbrace{\langle B P_n x, P_n x\rangle}_{\geq 0} + i\underbrace{\langle C P_n x, P_n x\rangle}_{\in \mathbb{R}}| \geq \langle B P_n x, P_n x\rangle \geq c\|P_n x\|^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\|P_nAP_nx\| \geq c\|P_nx\| \qquad \text{für alle } x \in H \tag{2.3}$$

bzw.

$$\|A_nx\| \geq c\|x\| \qquad \text{für alle } x \in \operatorname{im} P_n \tag{2.4}$$

mit $A_n := P_nA|_{\operatorname{im} P_n}$. Aus (2.4) folgt $\ker A_n = \{0\}$. Da A_n auf einem endlichdimensionalen Raum wirkt, ist damit $A_n : \operatorname{im} P_n \to \operatorname{im} P_n$ bereits invertierbar. Wir setzen in (2.4) $x := A_n^{-1}y$ mit $y \in \operatorname{im} P_n$ und erhalten

$$\|y\| \geq c\|A_n^{-1}y\| \quad \text{bzw.} \ \|A_n^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\|y\| \quad \text{für alle } y \in \operatorname{im} P_n.$$

Also ist $\|A_n^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$ für alle n, und die Folge (A_n) ist stabil. Außerdem konvergiert die Folge (A_nP_n) offenbar stark gegen A. Wir zeigen noch die Invertierbarkeit von A. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz von Polski.

Der Grenzübergang $n \to \infty$ in (2.3) liefert $\|Ax\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in H$. Also ist $\ker A = \{0\}$, und $\operatorname{im} A$ ist abgeschlossen ($\nearrow$ Übung). Wir wiederholen nun alle Überlegungen für den Operator $A^* := B - iC$, der ebenfalls von der Gestalt „positiv definit $+i\cdot$ selbstadjungiert“ ist. Also ist auch $\ker A^* = \{0\}$. Nun ist aber für jeden Operator $R \in L(H)$

$$\operatorname{clos} \operatorname{im} R = (\ker R^*)^\perp.$$

Damit ist klar, dass

$$\operatorname{im} A = \operatorname{clos} \operatorname{im} A = (\ker A^*)^\perp = \{0\}^\perp = H.$$

Zusammen mit $\ker A = \{0\}$ zeigt dies die Invertierbarkeit von A. ∎

Man beachte, dass in diesem Fall $n_0 = 1$ gewählt werden kann. Derselbe Beweis liefert auch die folgende Verallgemeinerung von Satz 2.2: Für *jede* stark gegen I konvergente Folge (P_n) von Orthoprojektoren ist das Verfahren (P_nAP_n) auf $A = B + iS$ (mit B und S wie oben) anwendbar.

Satz 2.3 *Für* jeden *invertierbaren Operator $A \in L(H)$ gibt es eine Orthonormalbasis von H, bezüglich derer das Reduktionsverfahren auf A anwendbar ist.*

Beweisidee. Für jeden invertierbaren Operator gibt es einen positiv-definiten Operator D und einen unitären Operator U mit $A = DU$ (Polardarstellung; man wählt $D := (AA^*)^{1/2}$). Das Spektrum von U liegt auf der Einheitskreislinie. Wir zerlegen es in eine Vereinigung abgeschlossener Mengen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ so, dass $\sigma_i \cap \sigma_j$ für $i \neq j$ aus höchstens einem Punkt besteht und dass der Durchmesser jeder der Mengen σ_j nicht größer als ε ist (diese Zahl wird später gewählt).

Man kann dann H darstellen als orthogonale Summe von abgeschlossenen Unterräumen $H_1, \ldots, H_r$, die invariant bzgl. U sind (d. h. $UH_j \subseteq H_j$) und für die das Spektrum von $U|_{H_k}$ in σ_k liegt. In jedem der Räume H_j wählt man eine Orthonormalbasis. Die Vereinigung dieser Basen ist eine Orthonormalbasis von H. Wird $\varepsilon > 0$ geeignet gewählt, so ist das Reduktionsverfahren bzgl. dieser Basis auf A anwendbar. Details finden Sie in [Gohberg/Feldman], S. 66 – 67. ■

Die Bestimmung einer geeigneten Basis nach Satz 2.3 ist i. Allg. schwierig. Daher ist dieser Satz für praktische Belange wenig nützlich. Wir werden die Idee der Basiswahl nicht weiter verfolgen und betrachten die Basis meist als gegeben und fixiert. Unsere Fragestellung ist also: Gegeben ist ein invertierbarer Operator $A \in L(H)$ und eine Orthonormalbasis von H. Ist das Reduktionsverfahren bzgl. dieser Basis auf A anwendbar? Wenn nicht: Welchen zusätzlichen Bedingungen muss A genügen, damit das Verfahren anwendbar wird?

2.2 Allgemeine Projektionsverfahren

Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$. Wir suchen Näherungslösungen der Gleichung $Au = f$ in abgeschlossenen Teilräumen $X_n = \operatorname{im} P_n$, wobei die P_n Projektoren mit $P_n \to I$ sind. Die Näherungsoperatoren gewinnen wir wie folgt. Sei (Q_n) eine weitere Folge von Projektoren mit $\operatorname{im} Q_n = \operatorname{im} P_n = X_n$. Anstelle von $Au = f$ betrachten wir die Näherungsgleichungen

$$Q_n A u_n = Q_n f, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.5}$$

deren Lösung wir in X_n suchen. Man beachte, dass die Projektoren P_n für das Aufstellen der Näherungsoperatoren $Q_n A|_{\operatorname{im} P_n} = Q_n A|_{\operatorname{im} Q_n}$ keine Rolle spielen. Wir benötigen die P_n nur für die starke Konvergenz von $Q_n A P_n$. In vielen Anwendungen kann man daher die P_n als „sehr gut“ wählen (z. B. als Orthoprojektoren, falls X ein Hilbertraum ist), während die Q_n „schlechter“ sein dürfen (sie müssen z. B. nur auf AX_n erklärt sein, um der linken Seite von (2.5) einen Sinn zu geben). Zunächst nehmen wir aber an, dass $P_n \to I$ und $Q_n \to I$. Dann ist $Q_n A P_n \to A$, d. h. $(Q_n A|_{\operatorname{im} P_n})$ ist ein Näherungsverfahren für A, das durch die Folgen (P_n) und (Q_n) bestimmte *Projektionsverfahren*. Ist dieses Verfahren auf A anwendbar, so schreiben wir auch $A \in \Pi(P_n, Q_n)$.

2.2.1 Fehlerabschätzung und Konvergenzgeschwindigkeit

Satz 2.4 *Sei $P_n \to I$, $Q_n \to I$ und $A \in \Pi(P_n, Q_n)$. Weiter seien $u \in X$ und $u_n \in \operatorname{im} P_n$ (letzteres für hinreichend großes n) die Lösungen von $Au = f$ bzw. $Q_n A u_n = Q_n f$. Dann gibt es ein von u und f unabhängiges $C > 0$ mit*

$$\|u - u_n\| \leq C \|u - P_n u\|.$$

Beweis. Von $Q_nAu_n = Q_nf$ subtrahieren wir die Identität $Q_nAP_nu = Q_nAP_nu$ und erhalten

$$Q_nAP_n(u_n - u) = Q_nAu - Q_nAP_nu = Q_nA(u - P_nu).$$

Für große n sind die Operatoren Q_nAP_n auf $\operatorname{im} P_n$ invertierbar. Also ist

$$P_n(u_n - u) = (Q_nAP_n)^{-1}Q_nA(u - P_nu)$$

bzw.

$$u_n - u = (P_nu - u) + (Q_nAP_n)^{-1}Q_nA(u - P_nu).$$

Die Behauptung folgt aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Normen $\|Q_n\|$ und $\|(Q_nAP_n)^{-1}\|$. ■

2.2.2 Kleine Störungen

Satz 2.5 *Seien $P_n \to I$, $Q_n \to I$ und $A \in \Pi(P_n, Q_n)$. Dann gibt es ein $C > 0$ so, dass $A + S \in \Pi(P_n, Q_n)$ für alle $S \in L(X)$ mit $\|S\| < C$. Die Menge $\Pi(P_n, Q_n)$ ist also offen.*

Beweis. Nach Polski ist (Q_nAP_n) stabil und A invertierbar. Nach Satz 1.9 ist wegen

$$\|Q_nSP_n\| \le \underbrace{\|P_n\|\,\|Q_n\|}_{\text{glm. beschr.}}\underbrace{\|S\|}_{<C}$$

für hinreichend kleines C auch das gestörte Verfahren $(Q_n(A+S)P_n)$ stabil, und nach Lemma 1.10 ist für hinreichend kleines C auch $A + S$ invertierbar. Nach Polski ist also $A + S \in \Pi(P_n, Q_n)$, wenn C hinreichend klein ist. ■

2.2.3 Kompakte Störungen

Satz 2.6 *Seien $P_n \to I$, $Q_n \to I$, $P_n^* \to I^*$ und $A \in \Pi(P_n, Q_n)$. Weiter sei $K \in L(X)$ kompakt und $A + K$ invertierbar. Dann ist $A + K \in \Pi(P_n, Q_n)$.*

Im Beweis ist es zweckmäßig, mit Näherungsoperatoren zu arbeiten, die nicht nur auf $\operatorname{im} P_n$, sondern auf ganz X definiert sind. Wir überlegen uns vorab, dass dies stets möglich ist.

Lemma 2.7 *Sei $P_n \to I$, und sei (B_n) mit $B_n \in L(\operatorname{im} P_n)$ ein Näherungsverfahren für $B \in L(X)$. Dann ist auch $(B_nP_n + I - P_n)$ (nun mit $B_nP_n + I - P_n \in L(X)$) ein Näherungsverfahren für B, und beide Verfahren sind gleichzeitig anwendbar oder nicht.*

Beweis. Wegen $I - P_n \to 0$ ist auch $(B_nP_n + I - P_n)$ ein Näherungsverfahren für B. Nach Polski müssen wir noch zeigen, dass die Folge (B_n) genau dann stabil ist, wenn die Folge $(B_nP_n + I - P_n)$ stabil ist.

Sei zunächst (B_n) stabil. Dann ist $B_n : \operatorname{im} P_n \to \operatorname{im} P_n$ für $n \geq n_0$ invertierbar, und $B_n^{-1} P_n + I - P_n$ ist die Inverse von $B_n P_n + I - P_n$. Weiter ist

$$\|B_n^{-1} P_n + I - P_n\| \leq \|B_n^{-1}\| \, \|P_n\| + \|I - P_n\| \leq \text{const},$$

woraus die Stabilität der Folge $(B_n P_n + I - P_n)$ folgt. Sei nun umgekehrt $(B_n P_n + I - P_n)$ eine stabile Folge und C_n die Inverse von $B_n P_n + I - P_n$ für $n \geq n_0$. Wir multiplizieren die Identität

$$C_n(B_n P_n + I - P_n) = (B_n P_n + I - P_n) C_n = I$$

von beiden Seiten mit P_n, beachten, dass P_n mit $B_n P_n + I - P_n$ vertauscht und dass $(I - P_n) P_n = 0$, und erhalten

$$P_n C_n P_n B_n P_n = P_n B_n P_n C_n P_n = P_n.$$

Also ist B_n invertierbar und $B_n^{-1} = (P_n C_n P_n)|_{\operatorname{im} P_n}$. Aus

$$\|B_n^{-1}\| = \|(P_n C_n P_n)|_{\operatorname{im} P_n}\| \leq \|P_n C_n P_n\| \leq \|P_n\|^2 \|C_n\|$$

folgt die Stabilität von (B_n). ■

Beweis von Satz 2.6. Nach Polski ist nur die Stabilität von $(Q_n(A + K)P_n)$ zu zeigen. Dies tun wir, indem wir die Stabilität von $(Q_n(A + K)P_n + I - P_n)$ zeigen. Nach Voraussetzung ist $(Q_n A P_n)$ und damit $(Q_n A P_n + I - P_n)$ stabil. Es ist daher

$$\begin{aligned} Q_n(A + K)P_n + I - P_n &= Q_n A P_n + I - P_n + Q_n K P_n \\ &= (Q_n A P_n + I - P_n)(I + (Q_n A P_n + I - P_n)^{-1} Q_n K P_n). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da $(Q_n A P_n + I - P_n)$ ein auf A anwendbares Verfahren ist, gilt

$$(Q_n A P_n + I - P_n)^{-1} \to A^{-1} \quad \text{stark.}$$

Nach Satz 1.2 ist dann sogar

$$(Q_n A P_n + I - P_n)^{-1} Q_n K P_n \rightrightarrows A^{-1} K \quad \text{in der Norm.}$$

Also ist auch

$$I + (Q_n A P_n + I - P_n)^{-1} Q_n K P_n \rightrightarrows I + A^{-1} K.$$

Da $I + A^{-1}K = A^{-1}(A + K)$ invertierbar ist, ist nach Folgerung 1.11 die Folge $(I + (Q_n A P_n + I - P_n)^{-1} Q_n K P_n)$ ein anwendbares Verfahren für $I + A^{-1}K$. Da nach Voraussetzung $(Q_n A P_n + I - P_n)$ ein anwendbares Verfahren für A ist, definiert die rechte Seite von (2.6) ein anwendbares Verfahren für $A(I + A^{-1}K) = A + K$. Also ist auch die linke Seite von (2.6) ein anwendbares Verfahren für $A + K$, d. h. $A + K \in \Pi(P_n, Q_n)$. ■

Für $A = I$ ist die Bedingung $A \in \Pi(P_n, Q_n)$ automatisch erfüllt. Daher gilt:

Folgerung 2.8 *Seien P_n, Q_n und K wie in Satz 2.6, und sei $I+K$ invertierbar. Dann ist $I+K \in \Pi(P_n, Q_n)$.*

Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass $I+K$ genau dann invertierbar ist, wenn $\ker(I+K) = \{0\}$.

2.3 Anwendung: Reduktionsverfahren

Satz 2.9 *Sei H Hilbertraum, $B \in L(H)$ positiv definit, $C \in L(H)$ selbstadjungiert, $K \in L(H)$ kompakt, $\alpha \in \mathbb{C}$, und der Operator $A := \alpha(B+iC)+K$ sei invertierbar. Dann ist auf A das Reduktionsverfahren bzgl. einer beliebigen Orthonormalbasis von H anwendbar.*

Beweis. Kompakte Operatoren auf unendlich-dimensionalen Banachräumen sind nicht invertierbar. Aus der Invertierbarkeit von $\alpha(B+iC)+K$ folgt daher $\alpha \neq 0$. Weiter wissen wir aus Satz 2.2, dass $B+iC$ invertierbar ist und $B+iC \in \Pi(P_n, P_n)$ (P_n ist wieder der Orthoprojektor von H auf span $\{e_1, \ldots, e_n\}$). Wegen $\alpha \neq 0$ ist dann auch $\alpha(B+iC) \in \Pi(P_n, P_n)$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.6. ∎

Es ist bemerkenswert, dass auch die Umkehrung von Satz 2.9 gilt:

Satz 2.10 (Markus/Vainikko) *Sei H ein Hilbertraum, und für $A \in L(H)$ sei das Reduktionsverfahren bzgl. einer beliebigen Orthonormalbasis von H anwendbar. Dann ist A notwendig von der Form*

$$A = \alpha(B+iC)+K \tag{2.7}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $B > 0$, $C = C^*$ und $K \in K(H)$.

Den Beweis führen wir hier nicht (vgl. [Gohberg/Feldman], S. 67 – 69). Wir überlegen uns aber eine äquivalente Beschreibung für Operatoren der Gestalt (2.7), die im Beweis von Satz 2.10 benötigt wird und auch für sich von Interesse ist.

Satz 2.11 *Ein Operator $A \in L(H)$ ist genau dann von der Gestalt* (2.7)*, wenn es ein $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ein $S \in L(H)$ mit $\|S\| < 1$ und ein $K \in K(H)$ gibt mit*

$$A = \beta(I+S)+K. \tag{2.8}$$

Für den Beweis benötigen wir einen neuen Begriff und einen Hilfssatz. Sei $A \in L(H)$. Unter dem *numerischen Wertebereich* von A versteht man die Menge

$$W(A) := \{\langle Ax, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Der numerische Wertebereich hat eine Reihe nützlicher Eigenschaften, von denen wir uns einige in der Übung ansehen (vgl. auch [Gustafson/Rao: Numerical Range], Springer 1997).

- $W(A)$ ist konvex (Satz von Toeplitz-Hausdorff),
- $\frac{1}{2}\|A\| \le \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| \le \|A\|$ (d. h. der Radius der kleinsten Kreisscheibe, die $W(A)$ enthält, definiert eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm),
- für $A = A^*$ ist $\sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| = \|A\|$,
- das Spektrum von A liegt in $\operatorname{clos} W(A)$.

Lemma 2.12 *Ein Operator $A \in L(H)$ ist genau dann von der Gestalt*

$$A = \alpha(I + S) \tag{2.9}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\|S\| < 1$, wenn $0 \notin \operatorname{clos} W(A)$.

Beweis. Sei A wie in (2.9). Für alle $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ ist dann

$$\langle Ax, x\rangle = \alpha\langle x, x\rangle + \alpha\langle Sx, x\rangle = \alpha + \alpha\langle Sx, x\rangle$$

und folglich

$$|\langle Ax, x\rangle - \alpha| \le |\alpha|\,\|S\|.$$

$W(A)$ liegt also in einem Kreis um α mit einem Radius, der kleiner als $|\alpha|$ ist. Damit ist $0 \notin \operatorname{clos} W(A)$.

Wir zeigen die umgekehrte Implikation. Mit $W(A)$ ist auch $\operatorname{clos} W(A)$ konvex. Wegen $0 \notin \operatorname{clos} W(A)$ gibt es eine Gerade, die 0 und $\operatorname{clos} W(A)$ trennt. Nach einer geeigneten Drehung um den Punkt 0 kann man erreichen, dass diese Gerade senkrecht auf der positiven reellen Achse steht.

Es gibt also ein $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| = 1$ und ein $\delta > 0$ so, dass

$$0 < \delta < \operatorname{Re}\langle \mu A x, x\rangle \quad \text{für alle } x \in H \text{ mit } \|x\| = 1. \tag{2.10}$$

Nun ist für jeden Operator $D \in L(H)$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle &= \frac{1}{2}\left(\langle Dx, x\rangle + \overline{\langle Dx, x\rangle}\right) = \frac{1}{2}\left(\langle Dx, x\rangle + \langle x, Dx\rangle\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\langle Dx, x\rangle + \langle D^*x, x\rangle\right) = \langle (\operatorname{Re} D)x, x\rangle\end{aligned}$$

mit $\operatorname{Re} D := \frac{1}{2}(D + D^*)$. Aus (2.10) folgt also

$$0 < \delta < \langle \operatorname{Re}(\mu A)x, x\rangle \quad \text{für alle } x \in H \text{ mit } \|x\| = 1.$$

Wegen $\delta = \delta\langle x, x\rangle = \langle \delta I x, x\rangle$ für $\|x\| = 1$ ist dies gleichbedeutend mit

$$0 < \langle (\operatorname{Re}(\mu A) - \delta I)x, x\rangle \quad \text{für alle } x \in H \text{ mit } \|x\| = 1$$

bzw. mit $\operatorname{Re}(\mu A) \geq \delta I$. Sei $B := \mu A$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}(I - \varepsilon B)(I - \varepsilon B)^* &= I - \varepsilon B - \varepsilon B^* + \varepsilon^2 B B^* \\ &= I - \varepsilon(2 \operatorname{Re} B - \varepsilon B B^*). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Wegen $BB^* \geq 0$ und $\operatorname{Re} B \geq \delta I$ ist der Operator $C := 2 \operatorname{Re} B - \varepsilon BB^*$ für hinreichend kleines ε positiv definit. Es gibt also ein $\nu > 0$ mit

$$\langle Cx, x\rangle \geq \nu \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in H.$$

Für hinreichend kleines ε und $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ ist dann

$$\langle (I - \varepsilon C)x, x\rangle = \langle x, x\rangle - \varepsilon\langle Cx, x\rangle \leq \|x\|^2 - \varepsilon\nu\|x\|^2 = 1 - \varepsilon\nu < 1.$$

Hieraus folgt aber $\|I - \varepsilon C\| < 1$ (vgl. die dritte Eigenschaft von $W(A)$).

Aus der für alle $T \in L(H)$ gültigen Identität $\|TT^*\| = \|T\|^2$ folgt mit (2.11)

$$\|I - \varepsilon B\|^2 = \|(I - \varepsilon B)(I - \varepsilon B)^*\| = \|I - \varepsilon C\| < 1.$$

Mit $S := \varepsilon B - I$ wird schließlich $A = \frac{1}{\varepsilon\mu}(I + S)$ mit $\|S\| < 1$. ■

Beweis von Satz 2.11. Sei $A = B + iC$ mit $B \geq \delta I > 0$ und $C = C^*$. Dann ist

$$\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle + i\langle Cx, x\rangle \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \delta\}$$

für alle $x \in H$ mit $\|x\| = 1$. Also liegt $W(A)$ rechts der zur imaginären Achse parallelen Geraden durch δ. Folglich ist $0 \notin \operatorname{clos} W(A)$, woraus mit Lemma 2.12 die Behauptung folgt.

Ist umgekehrt $A = I + S$ mit $\|S\| < 1$, so ist $A = I + \operatorname{Re} S + i \operatorname{Im} S$ eine Zerlegung wie in (2.7). Es sind nämlich $I + \operatorname{Re} S$ und $\operatorname{Im} S$ selbstadjungiert, und $I + \operatorname{Re} S$ ist positiv definit wegen $\|\operatorname{Re} S\| < 1$:

■

Operatoren, die sich in der Form (2.7) bzw. (2.8) darstellen lassen, heißen *stark elliptisch*.

2.4 Anwendung: Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art

Wir machen nun die Überlegungen aus Abschnitt 2.2 konkret und betrachten Gleichungen der Gestalt $(I+K)u = f$, wobei K der Integraloperator

$$(Ku)(t) := \int_0^1 k(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1]$$

ist. Für $k \in C([0,1]\times[0,1])$ bzw. $k \in L^2([0,1]\times[0,1])$ wirkt K als kompakter Operator auf dem Banachraum $C[0,1]$ bzw. $L^2[0,1]$. Sei X einer dieser Räume, und die Kernfunktion k erfülle die entsprechende Bedingung. Die Gleichung $(I+K)u = f$ mit $f \in X$ heißt dann eine *Fredholmsche Integralgleichung 2. Art.*

2.4.1 Galerkinverfahren

Sei H ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum, (H_n) eine Folge abgeschlossener Teilräume von H und $P_n : H \to H_n$ die zugehörigen Orthoprojektoren, wobei wir verlangen, dass $P_n \to I$ stark. Für jedes Element $x \in H$ ist $P_n x \in H_n$ das Element der besten Approximation von x durch Elemente aus H_n:

$$\|x - P_n x\| \le \|x - y\| \quad \text{für alle } y \in H_n.$$

Es gilt daher $P_n \to I$ genau dann, wenn $\operatorname{dist}(x, H_n) \to 0$ für jedes $x \in H$.

Sei nun $K \in L(H)$ kompakt und $A := I + K$. Beim Galerkinverfahren ersetzt man die Gleichung

$$Au = (I+K)u = f, \quad f \in H,$$

durch die Folge der Näherungsgleichungen

$$P_n A u_n = P_n(I+K)u_n = P_n f, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.12}$$

deren Lösung u_n in H_n gesucht wird.

Satz 2.13 *Die Orthoprojektoren P_n sollen stark gegen I konvergieren, und $K \in L(H)$ sei kompakt. Weiter sei $\ker(I+K) = \{0\}$. Dann ist das Galerkinverfahren (2.12) zur Lösung der Gleichung $(I+K)u = f$ anwendbar, und für die Lösungen u von $(I+K)u = f$ und u_n von (2.12) (für großes n) gilt*

$$\|u - u_n\|_H \le C\|u - P_n u\|_H$$

mit einer Konstanten $C > 0$.

Beweis. Bekanntlich ist jeder Punkt in $\sigma(K) \setminus \{0\}$ ein Eigenwert von K. Aus $\ker(I+K) = \{0\}$ folgt also bereits die Invertierbarkeit von $A = I + K$. Weiter ist offensichtlich $I \in \Pi(P_n, P_n)$. Aus Satz 2.6 über kompakte Störungen folgt nun sofort $I + K \in \Pi(P_n, P_n)$, und die Fehlerabschätzung folgt aus Satz 2.4. ∎

Sei speziell $H = L^2[0,1]$ und

$$(Ku)(t) = \int_0^1 k(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1]$$

mit einer Kernfunktion $k \in L^2([0,1]\times[0,1])$. Dann ist K kompakt, und $A = I+K$ ist invertierbar, falls -1 kein Eigenwert von K ist. Geeignete Galerkinverfahren zur Lösung der Gleichung $(I+K)u = f$ erhält man wie folgt.

Beispiel A: *Stückweise konstante Ansatzfunktionen.*

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir eine Zerlegung $0 = x_{0n} < x_{1n} < \ldots < x_{nn} = 1$ von $[0,1]$. Sei X_n^0 die Menge aller Funktionen auf $[0,1]$, die auf jedem Teilintervall $[x_{in}, x_{i+1,n}]$ konstant sind (betrachtet als Funktionen in $L^2[0,1]$; Funktionswerte in einzelnen Punkten sind also uninteressant). Weiter sei $P_n : L^2[0,1] \to X_n^0$ der Orthoprojektor und

$$h_n := \max_{0\le i<n} |x_{i+1,n} - x_{i,n}|.$$

Satz 2.14 *(a) Wenn $h_n \to 0$, dann $P_n \to I$ stark.*
(b) Für $f \in C^1[0,1]$ ist

$$\|f - P_n f\|_2 \le \frac{2}{3} h_n \|f'\|_2. \tag{2.13}$$

Beispiel B: *Stückweise lineare Ansatzfunktionen.*

Für jede Zerlegung $0 = x_{1n} < x_{2n} < \ldots < x_{nn} = 1$ von $[0,1]$ sei X_n^1 die Menge der auf $[0,1]$ stetigen Funktionen, deren Einschränkung auf jedes Teilintervall $[x_{in}, x_{i+1,n}]$ ein Polynom vom Grad ≤ 1 ist. Weiter sei $P_n : L^2[0,1] \to X_n^1$ der Orthoprojektor und

$$h_n := \max_{1\le i<n} |x_{i+1,n} - x_{in}|.$$

Satz 2.15 *(a) Wenn $h_n \to 0$, dann $P_n \to I$ stark.*
(b) Für $f \in C^2[0,1]$ ist

$$\|f - P_n f\|_2 \le \sqrt{\frac{1}{90}} h_n^2 \|f''\|_2. \tag{2.14}$$

Die Anzahl der x_{in} ist jeweils so gewählt, dass $\dim H_n = n$. Die Abschätzungen (2.13) und (2.14) zeigen, dass eine höhere Glattheit der Ansatzfunktionen und der rechten Seiten f eine höhere Konvergenzgeschwindigkeit erzwingen (während man für $f \in L^2$ nicht mehr als $\|f - P_n f\|_2 \to 0$ sagen kann). Wir werden uns einige dieser Resultate in der Übung genauer ansehen.

Zur Aufstellung der (2.12) entsprechenden Gleichungssysteme nehmen wir an, dass (wie in den Beispielen A und B) $\dim H_n = n$ ist. Wir wählen eine Basis

$\varphi_{n1}, \ldots, \varphi_{nn}$ von H_n. Bekanntlich sind die Elemente $\varphi_{1n}, \ldots, \varphi_{nn} \in H_n$ genau dann linear unabhängig, wenn die Gramsche Matrix $(\langle \varphi_{in}, \varphi_{jn} \rangle)_{i,j=1}^{n}$ invertierbar ist. In diesem Fall ist die Gramsche Matrix positiv definit.

Nun stimmen zwei Elemente $f, g \in H_n$ genau dann überein, wenn

$$\langle f, \varphi_{in} \rangle = \langle g, \varphi_{in} \rangle \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Die Gleichungen (2.12) sind also äquivalent zu

$$\langle P_n A u_n, \varphi_{in} \rangle = \langle P_n f, \varphi_{in} \rangle \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n,$$

wobei wir die Projektoren noch überwälzen können:

$$\langle A u_n, \varphi_{in} \rangle = \langle f, \varphi_{in} \rangle \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Mit dem Ansatz $u_n = \sum_{j=1}^{n} u^{(j)} \varphi_{jn}$ erhalten wir hieraus ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der $u^{(j)}$:

$$\left\langle A \sum_{j=1}^{n} u^{(j)} \varphi_{jn}, \varphi_{in} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle A\varphi_{jn}, \varphi_{in} \rangle u^{(j)} = \langle f, \varphi_{in} \rangle \text{ für } i = 1, \ldots, n,$$

welches wir mit den Abkürzungen

$$A_n := (\langle A\varphi_{jn}, \varphi_{in} \rangle)_{i,j=1}^{n}, \quad E_n := (\langle \varphi_{jn}, \varphi_{in} \rangle)_{i,j=1}^{n}, \quad K_n := (\langle K\varphi_{jn}, \varphi_{in} \rangle)_{i,j=1}^{n}$$

und

$$f_n := (\langle f, \varphi_{1n} \rangle, \ldots, \langle f, \varphi_{nn} \rangle)^T, \quad u_n = \left(u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}\right)^T$$

schreiben können als

$$A_n u_n = (E_n + K_n) u_n = f_n.$$

Dabei ist E_n (als Gramsche Matrix) positiv definit. Im Fall, dass die φ_{in} eine Orthonormalbasis bilden, ist E_n gleich der Einheitsmatrix. Die Berechnung jedes Eintrags von f_n erfordert eine Integration, während zur Bestimmung jedes Eintrags von K_n zwei Integrationen erforderlich sind:

$$\langle K\varphi_{jn}, \varphi_{in} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 k(t, s) \varphi_{jn}(s) \, \mathrm{d}s \, \overline{\varphi_{in}(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Dieser Aufwand ist für praktische Belange oft zu hoch. Weniger aufwändig sind die im folgenden Abschnitt betrachteten Kollokationsverfahren.

2.4.2 Kollokationsverfahren

Wir nehmen hier an, die Kernfunktion k sei stetig auf $[0,1]\times[0,1]$ und betrachten die Fredholmsche Integralgleichung $(I+K)u=f$ auf $C[0,1]$. Dann ist K wieder ein kompakter Operator.

Beim Kollokationsverfahren zur Lösung der Gleichung

$$u(t)+\int_0^1 k(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s=f(t), \quad t\in[0,1], \tag{2.15}$$

gibt man sich für jedes $n\in\mathbb{N}$ einen n-dimensionalen Teilraum X_n von $C[0,1]$ sowie Stützstellen $x_{1n},\dots,x_{nn}\in[0,1]$ vor und versucht, Näherungslösungen $u_n\in X_n$ aus den Gleichungen

$$u_n(x_{in})+\int_0^1 k(x_{in},s)u_n(s)\,\mathrm{d}s=f(x_{in}), \quad i=1,\dots,n, \tag{2.16}$$

zu gewinnen. Zur Lösung von (2.16) wählen wir wieder eine Basis $\varphi_{1n},\dots,\varphi_{nn}$ von X_n und suchen u_n in der Form $\sum_{j=1}^n u^{(j)}\varphi_{jn}$. Eingesetzt in (2.16) ergibt sich

$$\sum_{j=1}^n u^{(j)}\varphi_{jn}(x_{in})+\sum_{j=1}^n u^{(j)}(K\varphi_{jn})(x_{in})=f(x_{in}), \quad i=1,\dots,n.$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} E_n &:= (\varphi_{jn}(x_{in}))_{i,j=1}^n\,, \quad K_n=((K\varphi_{jn})(x_{in}))_{i,j=1}^n\,,\\ f_n &:= (f(x_{1n}),\dots,f(x_{nn}))^T\,, \quad \hat{u}_n := \left(u^{(1)},\dots,u^{(n)}\right)^T \end{aligned}$$

wird daraus das lineare Gleichungssystem

$$(E_n+K_n)\hat{u}_n=f_n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Die x_{in} und φ_{jn} können oft so gewählt werden, dass die Aufstellung der Matrix E_n einfach ist. Dagegen ist K_n im Allgemeinen vollbesetzt, und die Bestimmung jedes Eintrags von K_n erfordert eine Integration:

$$(K\varphi_{jn})(x_{in})=\int_0^1 k(x_{in},s)\varphi_{jn}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Die volle Besetztheit der Matrix K_n ist eine Besonderheit von Integraloperatoren. Sie „verschmieren“ den Träger einer Funktion (während Differentialoperatoren lokal wirken).

Wir betrachten zunächst den Fall $k\equiv 0$. Dann wird aus (2.16) ein reines *Interpolationsproblem*:

> Gibt es zu jeder Funktion $f \in C[0,1]$ eine Funktion $u_n \in X_n$, die in allen Punkten $x_{1n}, \ldots, x_{nn}$ mit f übereinstimmt, und ist diese eindeutig bestimmt?

In diese Allgemeinheit ist das Interpolationsproblem sicher nicht lösbar. Wählt man z. B. X_n als Menge aller stetigen Funktionen, deren Einschränkung auf $[1/2, 1]$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist und deren Einschränkung auf $[0, 1/2]$ konstant ist, und liegen wenigstens zwei der Stützstellen x_{in} in $[0, 1/2)$, so gibt es offenbar keine Funktion in X_n, die die Funktion $f(x) = x$ interpoliert.

Lemma 2.16 *Das Interpolationsproblem ist genau dann lösbar, wenn es eine Basis $\varphi_{1n}, \ldots, \varphi_{nn}$ von X_n gibt, für die die Matrix $(\varphi_{jn}(x_{in}))_{i,j=1}^n$ invertierbar ist. In diesem Fall ist die Lösung des Interpolationsproblems eindeutig.*

Beweis. Ist $\varphi_{1n}, \ldots, \varphi_{nn}$ eine Basis von X_n, so kann jedes $u_n \in X_n$ geschrieben werden als $u_n = \sum_{j=1}^n u^{(j)} \varphi_{jn}$. Die Interpolationsforderung $u_n(x_{in}) = f(x_{in})$ für $i = 1, \ldots, n$ lautet dann

$$\sum_{j=1}^n u^{(j)} \varphi_{jn}(x_{in}) = f(x_{in}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dieses Gleichungssystem hat genau dann für jede rechte Seite eine Lösung, wenn die Systemmatrix invertierbar ist. In diesem Fall ist die Lösung eindeutig bestimmt. ∎

Ist das Interpolationsproblem lösbar, so gibt es für jedes $j = 1, \ldots, n$ eine Funktion $L_{jn} \in X_n$ mit $L_{jn}(x_{in}) = \delta_{ij}$. Diese Funktionen heißen *Lagrangefunktionen*. Sie bilden eine Basis von X_n, und mit ihnen lässt sich die Lösung des Interpolationsproblems sofort hinschreiben: Für $f \in C[0,1]$ ist

$$u_n := \sum_{j=1}^n f(x_{jn}) L_{jn}$$

die eindeutig bestimmte Funktion aus X_n, die mit f in allen Punkten x_{in} übereinstimmt. Wir bezeichnen diese Funktion mit $Q_n f$.

Lemma 2.17 *Q_n ist ein stetiger Projektor von $C[0,1]$ auf X_n mit*

$$\|Q_n\| = \max_{t \in [0,1]} \sum_{j=1}^n |L_{jn}(t)|.$$

Beweis. Aus der vorausgesetzten Eindeutigkeit der Lösung des Interpolationsproblems folgt $Q_n^2 = Q_n$. Die Beschränktheit von Q_n und eine Normabschätzung von oben bekommt man aus

$$\|Q_n f\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} \left| \sum_{j=1}^n f(x_{jn}) L_{jn}(t) \right| \leq \|f\|_\infty \max_{t \in [0,1]} L(t),$$

wobei $L(t) := \sum_{j=1}^n |L_{jn}(t)|$.

Für die umgekehrte Normabschätzung wählen wir $\xi \in [0,1]$ so, dass $L(\xi) = \|L\|_\infty$ (beachte: L ist stetig und nichtnegativ). Wir setzen $y_{in} := \operatorname{sgn} L_{in}(\xi)$. Dann sind nicht alle y_{in} gleich 0. Andernfalls wäre nämlich $L_{in}(\xi) = 0$ für alle i, also $L(\xi) = 0$ und damit L die Nullfunktion. Dann wären alle L_{in} identisch 0, was unmöglich ist.

Sei f_0 die eindeutig bestimmte Funktion aus X_n mit $f_0(x_{in}) = y_{in}$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $f_1 := \min\{f_0, 1\}$ stetig auf $[0,1]$, und wegen $y_{in} \leq 1$ ist $f_1(x_{in}) = y_{in}$ für $i = 1, \ldots, n$. Schließlich sei $f := \max\{f_1, -1\}$. Auch f ist stetig auf $[0,1]$, und wegen $y_{in} \geq -1$ ist immer noch $f(x_{in}) = y_{in}$ für $i = 1, \ldots, n$. Außerdem ist nach Konstruktion $\|f\|_\infty = 1$. (Zunächst ist $\|f\|_\infty \leq 1$ nach Konstruktion. Es gibt aber ein y_{in} vom Betrag 1.) Nun ist also

$$Q_n f = \sum_{j=1}^n f(x_{jn}) L_{jn} = \sum_{j=1}^n y_{jn} L_{jn}$$

und damit

$$(Q_n f)(\xi) = \sum_{j=1}^n y_{jn} L_{jn}(\xi) = \sum_{j=1}^n |L_{jn}(\xi)| = L(\xi) = \|L\|_\infty = \|L\|_\infty \|f\|_\infty,$$

woraus $\|Q_n\| \geq \|L\|_\infty$ folgt. ∎

Wir kommen nun zum Kollokationsverfahren für $(I + K)u = f$ zurück. Wir nehmen an, dass die Räume X_n und die Stützstellen x_{in} so gewählt sind, dass das Interpolationsproblem für jedes $f \in C[0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Dann sind die Interpolationsprojektoren Q_n wohldefiniert. Nun gilt für zwei Funktionen $f, g \in C[0,1]$ genau dann $f(x_{in}) = g(x_{in})$ für $i = 1, \ldots, n$, wenn $Q_n f = Q_n g$ ist. Wir können daher die Gleichungen

$$(u_n + K u_n)(x_{in}) = f(x_{in}), \quad i = 1, \ldots, n$$

auch in der Form

$$Q_n (I + K) u_n = Q_n f \tag{2.17}$$

schreiben. Das Kollokationsverfahren ist also ein spezielles Projektionsverfahren. Eine direkte Anwendung von Folgerung 2.8 würde die starken Konvergenzen $Q_n \to I$ *und* $Q_n^* \to I^*$ verlangen. Dank der speziellen Struktur der betrachteten Operatoren kommt man aber mit weniger aus.

Satz 2.18 *Die Interpolationsprojektoren Q_n seien korrekt definiert, und es gelte $Q_n \to I$ stark auf $C[0,1]$. Weiter sei K kompakt auf $C[0,1]$, und es sei* $\ker(I + K) = \{0\}$. *Dann ist das Kollokationsverfahren* (2.17) *zur Lösung der Gleichung $(I + K)u = f$ anwendbar, und für die Lösungen u dieser Gleichung und u_n von* (2.17) *(mit n hinreichend groß) gilt: Es gibt ein $C > 0$ mit*

$$\|u - u_n\|_\infty \leq C \|u - Q_n u\|_\infty. \tag{2.18}$$

Beweis. Wir gehen vor wie beim Reduktionsverfahren für stark elliptische Operatoren. Ist u_n eine Lösung von

$$Q_n u_n + Q_n K u_n = Q_n f, \quad u_n \in X_n = \operatorname{im} Q_n, \tag{2.19}$$

so ist u_n offenbar auch eine Lösung von

$$u_n + Q_n K u_n = Q_n f, \quad u_n \in C[0,1]. \tag{2.20}$$

Ist umgekehrt u_n eine Lösung von (2.20), so liegt u_n notwendig in $\operatorname{im} Q_n$ und ist folglich auch eine Lösung von (2.19). Es genügt daher, die Anwendbarkeit des Verfahrens (2.20) zu zeigen. Dies ist ein Näherungsverfahren im Sinne von Abschnitt 1.4 mit

$$X = X_n = C[0,1], \quad A = I + K, \quad A_n = I + Q_n K \text{ und } f_n = Q_n f.$$

Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens folgt sofort aus der Invertierbarkeit von $I + K$ (vgl. den Beweis von Satz 2.13) und aus der Normkonvergenz $I + Q_n K \rightrightarrows I + K$ (Satz 1.2 aus 1.1 und Lemma 1.10). Die Fehlerabschätzung folgt aus

$$\begin{aligned} u - u_n &= A_n^{-1} A_n u - A_n^{-1} f_n = A_n^{-1}(A_n u - f_n) \\ &= A_n^{-1}(u + Q_n K u - Q_n f) \\ &= A_n^{-1}\big(u + Q_n K u - Q_n(u + Ku)\big) = A_n^{-1}(u - Q_n u) \end{aligned}$$

und aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Folge (A_n^{-1}). ■

Anmerkung. Wir haben keinen Gebrauch davon gemacht, wie die Räume X, X_n und die Projektoren Q_n konkret aussehen. Satz 2.18 gilt also für beliebige Projektionsverfahren für Gleichungen $(I + K)u = f$ mit kompaktem K. ■

Zur Anwendung von Satz 2.18 müssen die Räume X_n und die Stützstellen x_{in} so gewählt werden, dass das Interpolationsproblem eindeutig lösbar wird und die Q_n stark gegen I konvergieren. Wir diskutieren einige spezielle Wahlen.

Beispiel C: *Stückweise lineare Ansatzfunktionen.*

Wir wählen Stützstellen $0 = x_{1n} < x_{2n} < \ldots < x_{nn} = 1$, und X_n bestehe aus allen stetigen Funktionen auf $[0,1]$, deren Einschränkung auf jedes Intervall $[x_{in}, x_{i+1,n}]$ ein Polynom vom Grad ≤ 1 ist. Anschaulich ist sofort klar, dass das Interpolationsproblem mit diesen Festlegungen stets und eindeutig lösbar ist. Sei

$$h_n := \max_{1 \leq i < n} |x_{i+1,n} - x_{in}|.$$

Satz 2.19 *(a) Wenn* $h_n \to 0$*, dann* $Q_n \to I$ *stark auf* $C[0,1]$.
(b) Für $f \in C^2[0,1]$ *gilt*

$$\|Q_n f - f\|_\infty \leq h_n^2 \|f''\|_\infty. \tag{2.21}$$

Anmerkung 1. Um mit (2.21) arbeiten zu können, muss man wissen, dass die Lösung u von $(I+K)u = f$ zu $C^2[0,1]$ gehört. Dies kann man garantieren, wenn $f \in C^2[0,1]$ und wenn K den Raum $C[0,1]$ in $C^2[0,1]$ abbildet (was für genügend glatte Kernfunktionen k der Fall ist (Satz über Differentiation von Parameterintegralen)). Wegen $u = f - Ku$ liegt dann jede stetige Lösung u von $(I+K)u = f$ automatisch in $C^2[0,1]$. ∎

Anmerkung 2. Für höhere Konvergenzgeschwindigkeiten muss man eine höhere Glattheit von f *und* der Ansatzfunktionen voraussetzen. Häufig benutzt werden kubische Splines. ∎

Beispiel D: *Algebraische und trigonometrische Polynome als Ansatzfunktionen.*

Eine naheliegende Idee ist es, Polynome als Ansatzfunktionen zu wählen. Sind $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ vorgegebene Stützstellen, so gibt es für jede stetige Funktion f auf $[0,1]$ genau ein Polynom p_n vom Grad $\leq n$ mit $p_n(x_i) = f(x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Die Bestimmung der Koeffizienten von p_n führt nämlich auf ein lineares Gleichungssystem, dessen Systemmatrix die Vandermonde-Matrix von $\{x_0, \ldots, x_n\}$ ist. Diese ist wegen $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ invertierbar. Also existiert der Interpolationsprojektor Q_n von $C[0,1]$ auf den Raum aller Polynome vom Grad $\leq n$. Außerdem ist $Q_n p = p$ für jedes Polynom vom Grad $\leq n$. Insbesondere gilt also

$$Q_n f \to f \text{ für alle } f \text{ aus einer dichten Teilmenge von } C[0,1].$$

Für die starke Konvergenz $Q_n \to I$ ist also ausschließlich das Verhalten der Normen $\|Q_n\|$ entscheidend. Für dieses Verhalten hat man die folgenden ernüchternden Resultate, die wir aus verschiedenen Gründen für das Intervall $[-1,1]$ statt $[0,1]$ formulieren.

Satz 2.20 *Auf* $[-1,1]$ *betrachten wir äquidistante Stützstellen* $x_{in} = -1 + \frac{2i}{n}$ *für* $i = 0, \ldots, n$*. Für den entsprechenden Interpolationsprojektor auf den Raum der Polynome vom Grad* $\leq n$ *gilt dann*

$$\|Q_n\| \geq \frac{1}{4n^2} 2^n.$$

Die Normen wachsen also exponentiell! Äquidistante Stützstellen erweisen sich bei Polynominterpolation als besonders nachteilig. Aber auch die Verwendung anderer Stützstellen verbessert die Situation nicht wirklich.

Satz 2.21 (Losinsky/Kharshiladze) *Für jede Folge von Interpolationsprojektoren Q_n von $C[-1,1]$ auf den Raum der Polynome vom Grad $\leq n$ gibt es ein von n unabhängiges $C > 0$ mit*

$$\|Q_n\| \geq C \ln n.$$

Starke Konvergenz von Q_n auf $C[-1,1]$ ist also *prinzipiell* nicht erreichbar! Die besten Resultate erhält man noch, wenn man als Stützstellen die Nullstellen

$$t_{jn} := \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi j}{n}\right), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{2.22}$$

der Chebyshev-Polynome wählt (in diesem Fall sind die Endpunkte ± 1 des Intervalls keine Stützstellen!). Die Chebyshev-Polynome T_n werden auf $[-1,1]$ rekursiv durch

$$T_0 \equiv 1, \quad T_1 \equiv 1, \quad T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t) \quad \text{für } n \geq 1$$

oder auch durch

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t)$$

definiert.

Satz 2.22 (Bernstein) *Für $i = 0, \ldots, n$ sei $x_{in} := t_{i,n+1}$, wobei die t_{jn} die durch (2.22) gegebenen Nullstellen sind. Für die zugehörigen Interpolationsprojektoren auf den Raum der Polynome vom Grad $\leq n$ gilt*

$$\|Q_n\| = O(\ln n).$$

Ähnliche Resultate bekommt man bei Verwendung trigonometrischer Polynome

$$p_n(s) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos ks + \beta_k \sin ks) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{iks}$$

(mit $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ bzw. $\gamma_k = \overline{\gamma_{-k}}$ damit p_n reellwertig wird) als Ansatzfunktionen. Die „Koordinatentransformation" $t := \cos s$ ordnet nämlich jeder stetigen Funktion $t \mapsto f(t)$ auf $[-1,1]$ eine stetige Funktion $s \mapsto f(\cos s)$ auf $[0,\pi]$ zu. Diese Transformation überführt t^k in $(\cos s)^k$, was bekanntlich als trigonometrisches Polynom geschrieben werden kann.

3 Das Reduktionsverfahren für Toeplitzoperatoren

Wir betrachten in diesem Abschnitt das Reduktionsverfahren für Operatoren auf l^2, deren Matrixdarstellung bzgl. der Standardbasis von l^2 eine Toeplitzstruktur aufweist, d. h. von der Form $(a_{i-j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ ist. Die Einträge der Matrix sind also konstant entlang jeder zur Hauptdiagonalen parallelen Diagonalen. Warum interessiert man sich für diese Operatoren?

- Sie sind eng verwandt mit anderen (insbesondere Integral-)Operatoren, und Toeplitzstrukturen entstehen häufig bei Diskretisierungen (einige Beispiele folgen im nächsten Abschnitt).
- Sie bilden eine der einfachsten Klassen von Operatoren, die über die gut untersuchten Operatorklassen der Funktionalanalysis (I + kompakt, normal, selbstadjungiert, unitär, ...) hinausgeht.
- Die analytischen und numerischen Eigenschaften dieser Operatoren sind einer Untersuchung relativ leicht zugänglich. Die Untersuchung dieser Operatoren hat daher in Operatortheorie (Indexformeln) und in der Numerischen Analysis oft eine „Pionierrolle“ gespielt.

3.1 Einige Probleme, die auf Toeplitzstruktur führen

3.1.1 Singuläre Integraloperatoren auf $\mathbb{T}$

Auf der Einheitskreislinie $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ betrachten wir die Gleichung

$$(Au)(t) := a(t)u(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{u(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s = f(t), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Der Operator A ist zusammengesetzt aus den Operatoren der Multiplikation mit den Funktionen a, $b \in L^\infty(\mathbb{T})$ und aus dem Operator $S_{\mathbb{T}}$ der singulären Integration auf $\mathbb{T}$,

$$(S_{\mathbb{T}}u)(t) := \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{u(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Dieses Integral existiert selbst für gutartige (z. B. Hölderstetige) Funktionen u nur im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes. Mit $s = e^{ix}$, $t = e^{iy}$ hat man daher formal

$$(S_{\mathbb{T}}u)(e^{iy}) = \frac{1}{\pi i}\int_y^{y+2\pi} \frac{u(e^{ix})}{e^{ix}-e^{iy}} ie^{ix}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{y+\varepsilon}^{y+2\pi-\varepsilon} \frac{u(e^{ix})}{1-e^{i(y-x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Um eine Vorstellung vom Wirken von $S_{\mathbb{T}}$ zu bekommen, berechnen wir $S_{\mathbb{T}}e_n$ für $e_n(t) := t^n$ mit $t \in \mathbb{T}$.

Satz 3.1 *Es ist $S_{\mathbb{T}}e_n = e_n$ für $n \geq 0$ und $S_{\mathbb{T}}e_n = -e_n$ für $n < 0$.*

Beweis. Für $n = 0$ ist

$$\begin{aligned}
(S_{\mathbb{T}}e_0)(e^{iy}) &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{y+\varepsilon}^{y+2\pi-\varepsilon}\frac{1}{1-e^{-(x-y)i}}\,\mathrm{d}x \quad \text{(Substitution } x := x-y\text{)}\\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{1}{1-e^{-ix}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}(\cot(x/2)+i)\,\mathrm{d}x = 1,
\end{aligned}$$

da die Funktion $x \mapsto \cot(x/2)$ auf $(0, 2\pi)$ bezüglich des Mittelpunktes π dieses Intervalles ungerade ist. Hieraus folgt leicht für $n > 0$, dass

$$\begin{aligned}
(S_{\mathbb{T}}e_n)(t) &= \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{s^n}{s-t}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{s^n-t^n}{s-t}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{t^n}{s-t}\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{t^n}{\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{1}{s-t}\,\mathrm{d}s = t^n(S_{\mathbb{T}}e_0)(t) = t^n.
\end{aligned}$$

Schließlich ist für $n > 0$

$$\begin{aligned}
(S_{\mathbb{T}}e_{-n})(t) &= \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{s^{-n}}{s-t}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{s^{-n}-t^{-n}}{s-t}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{t^{-n}}{s-t}\,\mathrm{d}s\\
&= t^{-n} - \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}}\sum_{k=0}^{n-1}t^{k-n}s^{-k-1}\,\mathrm{d}s = t^{-n} - 2t^{-n} = -t^{-n},
\end{aligned}$$

da

$$\frac{s^{-n}-t^{-n}}{s-t} = \frac{-1}{st}\,\frac{s^{-n}-t^{-n}}{s^{-1}-t^{-1}} = \frac{-1}{st}\sum_{k=0}^{n-1}s^{-k}t^{-n+1+k} = -\sum_{k=0}^{n-1}s^{-k-1}t^{-n+k}$$

und da

$$\int_{\mathbb{T}} z^n\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq -1,\\ 2\pi i & \text{falls } n = -1.\end{cases}$$

(wie wir aus der Funktionentheorie wissen). ■

Der einfache Satz 3.1 hat eine Reihe bemerkenswerter Konsequenzen, wenn man beachtet, dass $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes $L^2(\mathbb{T})$ bildet. Das Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{T})$ ist erklärt durch

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{ix})\overline{g(e^{ix})}\,\mathrm{d}x.$$

Folgerung 3.2 *Der Operator $S_\mathbb{T}$ lässt sich stetig fortsetzen zu einer Isometrie von $L^2(\mathbb{T})$ auf sich.*

Beweis. $S_\mathbb{T}$ ist zunächst erklärt auf dem linearen Teilraum von $L^2(\mathbb{T})$, der aus allen endlichen Summen $\sum_{n=-k}^{k} a_n e_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ besteht. Auf diesem gilt nach Satz 3.1

$$S_\mathbb{T}\left(\sum_{n=-k}^{k} a_n e_n\right) = \sum_{n=0}^{k} a_n e_n - \sum_{n=-k}^{-1} a_n e_n \tag{3.1}$$

und folglich $\|S_\mathbb{T} u\|_2 = \|u\|_2$. Auf dem betrachteten Teilraum wirkt $S_\mathbb{T}$ also als Isometrie. Da dieser Raum dicht in $L^2(\mathbb{T})$ liegt, kann $S_\mathbb{T}$ stetig zu einer Isometrie auf ganz $L^2(\mathbb{T})$ fortgesetzt werden. ■

Wir bezeichnen diese Fortsetzung wieder mit $S_\mathbb{T}$.

Folgerung 3.3 *(a) Es ist $S_\mathbb{T}^2 = I$ und $S_\mathbb{T}^* = S_\mathbb{T}$.*
(b) $P_\mathbb{T} := \frac{1}{2}(I + S_\mathbb{T})$ und $Q_\mathbb{T} := \frac{1}{2}(I - S_\mathbb{T})$ sind komplementäre Orthoprojektoren.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen aus (3.1) und der Rest durch Nachrechnen. ■

Der Operator $A = aI + bS_\mathbb{T}$ lässt sich also schreiben als

$$aI + bS_\mathbb{T} = a(P_\mathbb{T} + Q_\mathbb{T}) + b(P_\mathbb{T} - Q_\mathbb{T}) = (a+b)P_\mathbb{T} + (a-b)Q_\mathbb{T}.$$

Mit $c := a+b$ und $d := a-b$ können wir $aI + bS_\mathbb{T}$ daher schreiben als $cP_\mathbb{T} + dQ_\mathbb{T}$, was für viele Überlegungen zweckmäßig ist.

Folgerung 3.4 *Seien $c, d \in \mathbb{C}$. Dann ist $cP_\mathbb{T} + dQ_\mathbb{T}$ genau dann invertierbar, wenn $cd \neq 0$. In diesem Fall ist $(cP_\mathbb{T} + dQ_\mathbb{T})^{-1} = \frac{1}{c}P_\mathbb{T} + \frac{1}{d}Q_\mathbb{T}$.*

Wir sehen uns die Matrixdarstellung des Operators $cP_\mathbb{T} + dQ_\mathbb{T}$ bezüglich der Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von $L^2(\mathbb{T})$ an. Für $S_\mathbb{T}$ haben wir diese Matrixdarstellung in Satz 3.1 bestimmt: es ist die Diagonalmatrix

$$S_\mathbb{T} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} \ddots & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ \hline & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \end{array}\right).$$

Da I in die Einheitsmatrix überführt wird, findet man für die Matrixdarstellungen von $P_{\mathbb{T}}$ und $Q_{\mathbb{T}}$

$$P_{\mathbb{T}} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ \hline & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \end{array}\right), Q_{\mathbb{T}} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \end{array}\right).$$

Wir betrachten noch den Operator der Multiplikation mit $c \in L^\infty(\mathbb{T})$. Die Einträge seiner Matrixdarstellung sind

$$\begin{aligned} \langle ce_k, e_j\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(e^{ix})e^{ikx}e^{-ijx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(e^{ix})e^{-i(j-k)x}\,\mathrm{d}x =: c_{j-k}. \end{aligned}$$

Offenbar hängt der Eintrag $\langle ce_k, e_j\rangle$ nur von der Differenz der Argumente ab. Die Matrixdarstellung von cI lautet dementsprechend

$$cI \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & c_0 & c_{-1} & c_{-2} & c_{-3} & c_{-4} \\ \ddots & c_1 & c_0 & c_{-1} & c_{-2} & c_{-3} & \ddots \\ \hline \ddots & c_2 & c_1 & c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \ddots \\ \ddots & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_{-1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right).$$

Wir erhalten eine reine Toeplitzstruktur. Dem ursprünglichen singulären Integraloperator $cP_{\mathbb{T}} + dQ_{\mathbb{T}}$ entspricht somit eine Matrix der Gestalt

$$cP_{\mathbb{T}} + dQ_{\mathbb{T}} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & & & & & \\ d_1 & d_0 & d_{-1} & c_{-2} & c_{-3} & c_{-4} \\ d_2 & d_1 & d_0 & c_{-1} & c_{-2} & c_{-3} \\ \hline d_3 & d_2 & d_1 & c_0 & c_{-1} & c_{-2} \\ d_4 & d_3 & d_2 & c_1 & c_0 & c_{-1} \\ & & & & & \ddots \end{array}\right).$$

Zur näherungsweisen Lösung einer singulären Integralgleichung $(cP_{\mathbb{T}}+dQ_{\mathbb{T}})u = f$ könnte man aus dieser Matrix die markierten endlichen Abschnitte herausschneiden und als Näherungsoperatoren wählen. Die Aufgabe lautet dann, die Stabilität dieses (leicht modifizierten) Reduktionsverfahrens zu studieren.

3.1.2 Singuläre Integraloperatoren auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $[0,1]$

Wir betrachten nun den Operator der singulären Integration auf der reellen Achse,

$$(S_{\mathbb{R}}u)(t) := \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s, \quad t\in\mathbb{R},$$

den man wieder als Cauchyschen Hauptwert zu verstehen hat. Das Studium dieses Operators kann auf das von $S_{\mathbb{T}}$ zurückgeführt werden. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$(Bf)(t) := \begin{cases} \frac{1}{t-1} f\left(i\frac{t+1}{t-1}\right) & \text{falls } t\in\mathbb{T}\setminus\{1\} \\ 0 & \text{falls } t=1, \end{cases}$$

die jeder auf $\mathbb{R}$ stetigen Funktion f mit kompaktem Träger eine stetige Funktion auf $\mathbb{T}$ zuordnet. Die folgenden Sachverhalte beweist man durch einfaches Nachrechnen. Man beachte, dass $f\left(i\frac{t+1}{t-1}\right)=0$ für alle t aus einer Umgebung von 1.

Satz 3.5 *(a) Für alle $f\in C(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger ist*

$$\|Bf\|_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.2}$$

Der Operator B lässt sich also stetig zu einem Operator auf $L^2(\mathbb{R})$ fortsetzen, den wir wieder mit B bezeichnen. Für die Erweiterung gilt (3.2) für alle $f\in L^2(\mathbb{R})$, und der Operator $B: L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{T})$ ist invertierbar. Seine Inverse ist

$$(B^{-1}g)(s) = 2i\frac{1}{s-i}\,g\left(\frac{s+i}{s-i}\right), \quad s\in\mathbb{R}.$$

(b) Es ist $B^{-1}S_{\mathbb{T}}B = -S_{\mathbb{R}}$.

Mit Satz 3.5 (b) können die Folgerungen 3.2 – 3.4 sofort auf den Operator $S_{\mathbb{R}}$ übertragen werden:

- $S_{\mathbb{R}}$ ist eine Isometrie von $L^2(\mathbb{R})$ auf sich.
- $S_{\mathbb{R}}^2 = I$, $S_{\mathbb{R}}^* = I$.
- $P_{\mathbb{R}} := \frac{1}{2}(I+S_{\mathbb{R}})$ und $Q_{\mathbb{R}} := \frac{1}{2}(I-S_{\mathbb{R}})$ sind komplementäre Orthoprojektoren.
- Für $c,d\in\mathbb{C}$ ist $cP_{\mathbb{R}}+dQ_{\mathbb{R}}$ genau dann invertierbar, wenn $cd\neq 0$. Dann ist $(cP_{\mathbb{R}}+dQ_{\mathbb{R}})^{-1} = \frac{1}{c}P_{\mathbb{R}}+\frac{1}{d}Q_{\mathbb{R}}$.

Wir betrachten nun singuläre Integrale auf Teilintervallen von $\mathbb{R}$ wie

$$(S_{[0,1]}u)(t) := \frac{1}{\pi i}\int_0^1\frac{u(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s, t\in[0,1], \quad (S_{\mathbb{R}^+}u)(t) := \frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{u(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s, t\in\mathbb{R}^+.$$

Mit den charakteristischen Funktionen $\chi_{[0,1]}$ und $\chi_{\mathbb{R}^+}$ von $[0,1]$ bzw. $\mathbb{R}^+$ kann man identifizieren

$$S_{[0,1]} \text{ mit } \chi_{[0,1]} S_{\mathbb{R}}|_{L^2[0,1]} \quad \text{ und } \quad S_{\mathbb{R}^+} \text{ mit } \chi_{\mathbb{R}^+} S_{\mathbb{R}}|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Man sieht sofort:

Folgerung 3.6 *$S_{[0,1]} \in L(L^2[0,1])$ und $S_{\mathbb{R}^+} \in L(L^2(\mathbb{R}^+))$, und beide Operatoren sind selbstadjungiert.*

Durch dieses „Herunterprojizieren“ geht aber die Eigenschaft verloren, dass das Quadrat des Operators gleich I ist. Mehr noch: $S_{[0,1]}$ und $S_{\mathbb{R}^+}$ sind auf $L^2[0,1]$ bzw. $L^2(\mathbb{R}^+)$ nicht einmal mehr invertierbar: Ihr Spektrum ist jeweils das Intervall $[-1,1]$, während das Spektrum von $S_{\mathbb{R}}$ gleich $\{-1,1\}$ ist! Dann ist natürlich auch die Lösung der singulären Integralgleichung

$$au(t) + b(S_{[0,1]}u)(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \tag{3.3}$$

selbst im Falle konstanter Koeffizienten $a, b \in \mathbb{C}$ keine triviale Aufgabe mehr. Wir sehen uns daher ein Näherungsverfahren für die Gleichung (3.3) an. Wir unterteilen $[0,1]$ äquidistant:

$$x_{in} := i/n \quad \text{für } i = 0, \ldots, n,$$

und bezeichnen mit X_n die Menge aller Funktionen, die auf jedem Intervall $[x_{in}, x_{i+1,n}]$ konstant sind. Die Funktionen

$$\varphi_{in}(t) := \begin{cases} \sqrt{n} & \text{falls } t \in [x_{in}, x_{i+1,n}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bilden eine Orthonormalbasis von X_n. Schließlich sei L_n der Orthoprojektor von $L^2[0,1]$ auf X_n (es ist klar, dass $X_n \subseteq L^2[0,1]$ ist). Wir suchen Näherungslösungen von

$$(aI + bS_{[0,1]})u = f, \quad f \in L^2[0,1],$$

mit Hilfe des Galerkinverfahrens

$$L_n(aI + bS_{[0,1]})u_n = L_n f, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.4}$$

wobei wir die Lösung u_n in X_n suchen. Die Gleichungen (3.4) entsprechen den linearen Gleichungssystemen $(aI_n + bS_n)\hat{u}_n = f_n$ mit der Einheitsmatrix I_n sowie mit

$$f_n := (\langle f, \varphi_{0n} \rangle, \ldots, \langle f, \varphi_{n-1,n} \rangle)^T, \quad S_n := (\langle S_{[0,1]}\varphi_{jn}, \varphi_{in} \rangle)_{i,j=0}^{n-1},$$

deren Lösung $\hat{u}_n$ wir in $\mathbb{C}^n$ suchen.

Da uns allgemeine Sätze über die Anwendbarkeit von Näherungsverfahren nicht weiterhelfen, sehen wir uns die Einträge der Matrizen S_n genauer an. Es ist

$$\langle S_{[0,1]}\varphi_{jn}, \varphi_{in}\rangle = \sqrt{n}\int_{i/n}^{(i+1)/n} (S_{[0,1]}\varphi_{jn})(t)\,\mathrm{d}t = n\int_{i/n}^{(i+1)/n} \frac{1}{\pi i}\int_{j/n}^{(j+1)/n} \frac{1}{s-t}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Mit den Substitutionen $x := n(s - j/n)$, $y := n(t - i/n)$ bzw. $s = (x + j)/n$ und $t = (y + i)/n$ wird hieraus

$$\begin{aligned}\langle S_{[0,1]}\varphi_{jn}, \varphi_{in}\rangle &= \frac{n}{\pi i}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\frac{x+j}{n} - \frac{y+i}{n}} \cdot \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x\,\frac{1}{n}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi i}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{x-(y+i-j)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (S_{[0,1]}1)(y+i-j)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Einträge $\langle S_{[0,1]}\varphi_{jn}, \varphi_{in}\rangle$ *nicht* von n sondern *nur von der Differenz* $i - j$ abhängen. Setzen wir zur Abkürzung

$$c_k := \int_0^1 (S_{[0,1]}1)(y+k)\,\mathrm{d}y,$$

so erhalten wir

$$S_1 = (c_0), \quad S_2 = \begin{pmatrix} c_0 & c_{-1} \\ c_1 & c_0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} \\ c_1 & c_0 & c_{-1} \\ c_2 & c_1 & c_0 \end{pmatrix} \text{ usw.},$$

d. h. (S_n) ist eine Folge von Toeplitzmatrizen, so wie sie auch beim Reduktionsverfahren für den Toeplitzoperator $(c_{i-j})_{i,j=0}^{\infty}$ entstehen würde. Das Spline-Galerkin-Verfahren für einen singulären Integraloperator auf $[0, 1]$ mit konstanten Koeffizienten ist also äquivalent zum Reduktionsverfahren für einen speziellen Toeplitzoperator.

3.1.3 Differenzenverfahren für Randwertaufgaben

Wir betrachten die Randwertaufgabe mit Neumann-Randbedingungen

$$y''(t) = f(t) \quad \text{für } t \in [a, b] \text{ mit } y'(a) = 0,\ y'(b) = 0.$$

Wir diskretisieren diese Aufgabe und wählen dazu äquidistante Knoten $t_{in} = a + hi$ mit $i = 0, \dots, n + 1$ und $h = (b - a)/(n + 1)$. Die zweiten Ableitungen approximieren wir an Knoten im Inneren des Intervalls durch

$$y''(t_{in}) \approx \frac{y(t_{i-1,n}) - 2y(t_{in}) + y(t_{i+1,n})}{h^2},$$

und die ersten Ableitungen in den Randpunkten approximieren wir durch

$$y'(a) \approx \frac{y(t_{1n}) - y(t_{0n})}{h}, \quad y'(b) \approx \frac{y(t_{n+1,n}) - y(t_{nn})}{h}.$$

Auf diese Weise erhalten wir ein Gleichungssystem, dessen Lösungen u_i, $i = 0, \ldots, n+1$, man als Näherungen für $y(t_{in})$ betrachten kann:

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = h^2 f(t_{in}) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$
$$\frac{1}{h}(u_1 - u_0) = 0, \quad \frac{1}{h}(u_{n+1} - u_n) = 0$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ f(t_{1n}) \\ f(t_{2n}) \\ \vdots \\ f(t_{nn}) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Die Systemmatrix in (3.5) ist keine reine Toeplitzmatrix mehr. Sie ist vielmehr die Summe aus einer reinen Toeplitzmatrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}_{(n+2)\times(n+2)}$$

und der beiden $(n+2) \times (n+2)$ Diagonalmatrizen

$$\operatorname{diag}(1, 0, 0, \ldots, 0) \quad \text{und} \quad \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, 0, 1).$$

Wir können die Folge der Systemmatrizen von (3.5) also auffassen als ein Reduktionsverfahren für den Toeplitzoperator

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in L(l^2),$$

welches durch zwei Folgen gestört wird. Die Störungen aus der ersten Folge sind von der Gestalt

$$\operatorname{diag}(1, 0, 0, \ldots, 0) = P_{n+2} K|_{\operatorname{im} P_{n+2}},$$

wobei $P_n : (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots)$ ein Orthoprojektor ist und $K := \operatorname{diag}(1, 0, 0, \ldots) = P_0$ offenbar kompakt ist. Diese Störungen sind also genau von der in Abschnitt 2.2.3 betrachteten Form und können mit Satz 2.6 untersucht werden. Die Störungen aus der zweiten Folge sind nicht von dieser Gestalt. Für ihre Behandlung müssen wir uns etwas Neues einfallen lassen.

3.2 Laurent-, Toeplitz- und Hankeloperatoren

Sei $a \in L^\infty(\mathbb{T})$, und für jedes $k \in \mathbb{Z}$ sei a_k der k. Fourierkoeffizient von a:

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{ix}) e^{-ikx}\, \mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

Wir definieren den durch a erzeugten *Laurentoperator* $L(a)$ auf $l^2(\mathbb{Z})$, den *Toeplitzoperator* $T(a)$ auf $l^2(\mathbb{Z}^+)$ und den *Hankeloperator* $H(a)$ auf $l^2(\mathbb{Z}^+)$ durch ihre Matrixdarstellung bzgl. der Standardbasen von $l^2(\mathbb{Z})$ bzw. $l^2(\mathbb{Z}^+)$ wie folgt:

$$L(a) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & & \\ & & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & & \\ \hline & & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & & \\ & & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \end{array}\right), \quad T(a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$H(a) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & \\ a_3 & \iddots & \end{pmatrix},$$

Laurent- und Toeplitzoperatoren zeigen also die oben diskutierte Toeplitzstruktur, während Hankeloperatoren eine ähnliche Struktur bzgl. der Nebendiagonalen aufweisen.

Am einfachsten ist die Untersuchung der Laurentoperatoren, da wir aus Abschnitt 3.1.1 wissen, dass diese nichts anderes sind als Matrixdarstellungen von Multiplikationsoperatoren. Genauer: Jede Funktion $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ definiert wegen

$$\|af\|_2 \le \|a\|_\infty \|f\|_2 \quad \text{für alle } f \in L^2(\mathbb{T}) \tag{3.7}$$

einen linearen beschränkten Operator auf $L^2(\mathbb{T})$, den wir mit aI bezeichnen. Ist $J : L^2(\mathbb{T}) \to l^2(\mathbb{Z})$ die Isometrie, die dem Basiselement $e_n : t \mapsto t^n$ von $L^2(\mathbb{T})$ die Folge $(\ldots, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots) \in l^2(\mathbb{Z})$ mit der 1 an der n. Stelle zuordnet, so ist $JaJ^{-1} = L(a)$. Die Eigenschaften von Laurentoperatoren

$$L(a+b) = L(a) + L(b), \quad L(ab) = L(a)L(b), \quad L(a)^* = L(\overline{a}) \tag{3.8}$$

für $a, b \in L^\infty(\mathbb{T})$ sind daher offensichtlich.

Lemma 3.7 *Für $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ ist $L(a) \in L(l^2(\mathbb{Z}))$, und es gilt*

$$\|L(a)\|_{L(l^2(\mathbb{Z}))} = \|aI\|_{L(L^2(\mathbb{T}))} = \|a\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \tag{3.9}$$

Beweis. Die erste Identität folgt aus $JaJ^{-1} = L(a)$ und der Isometrie von J, und die Ungleichung $\|aI\| \leq \|a\|_\infty$ haben wir in (3.7) gesehen. Wir zeigen noch, dass $\|aI\| \geq \|a\|_\infty$. Dazu erinnern wir an die Definition der Norm in $L^\infty(\mathbb{T})$. Die *Norm* $\|a\|_\infty$ von $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ ist das Infimum über alle Zahlen M, für die das Maß der Menge $\{x \in \mathbb{T} : |a(x)| \geq M\}$ gleich 0 ist. Diese Zahl heißt auch das *wesentliche Supremum* von $|a|$.

Sei $r := \|a\|_\infty > 0$. Dann hat für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $M_\varepsilon := \{x \in \mathbb{T} : |a(x)| \geq r - \varepsilon\}$ ein positives Maß. Sei χ_ε die charakteristische Funktion dieser Menge (d. h. χ_ε ist 1 auf M_ε und 0 auf $\mathbb{T} \setminus M_\varepsilon$). Dann ist $\chi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{T})$ und

$$\|a\chi_\varepsilon\|_2^2 = \int_{M_\varepsilon} |a(x)|^2 \,\mathrm{d}x \geq (r-\varepsilon)^2 \int_{M_\varepsilon} \mathrm{d}x = (r-\varepsilon)^2 \|\chi_\varepsilon\|_2^2.$$

Da $\|\chi_\varepsilon\|_2^2$ gleich dem Maß von M_ε und damit positiv ist, folgt weiter

$$\|aI\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|af\|_2}{\|f\|_2} \geq \frac{\|a\chi_\varepsilon\|_2}{\|\chi_\varepsilon\|_2} \geq r - \varepsilon.$$

Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$. Somit ist $\|aI\| \geq r = \|a\|_\infty$ im Falle $r > 0$. Für $r = 0$ gilt diese Abschätzung offenbar ebenfalls. ■

Schließlich ist auch leicht einzusehen, dass ein Laurentoperator $L(a)$ genau dann invertierbar ist, wenn das *wesentliche Infimum* von $|a|$, also das Supremum über alle Zahlen M, für die $\{x \in \mathbb{T} : |a(x)| \leq M\}$ das Maß 0 hat, positiv ist. Ist a insbesondere stetig, so fällt das wesentliche Infimum von $|a|$ mit dem Minimum zusammen. Die Bedingung $\min|a(t)| > 0$ heißt aber nichts anderes, als dass $a(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$ sein muss. Für stetiges a ist also $L(a)$ genau dann invertierbar, wenn 0 nicht auf der Kurve $a(\mathbb{T})$ liegt. In diesem Fall ist $L(a)^{-1} = L(a^{-1})$.

Toeplitz- und Hankeloperatoren lassen sich als „Bausteine" für Laurentoperatoren betrachten. Dazu stellen wir uns den $l^2(\mathbb{Z})$ vor als orthogonale Summe von $l^2(\mathbb{Z}^+)$ mit $l^2(\mathbb{Z}^+)$, d. h. wir identifizieren

$$(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots) \in l^2(\mathbb{Z}) \text{ mit } \big((x_{-1}, x_{-2}, \ldots), (x_0, x_1, x_2, \ldots)\big).$$

Unter dieser Identifikation geht der Laurentoperator

$$L(a) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & & \ddots & & & & \\ & a_0 & a_{-1} & & a_{-2} & a_{-3} & \\ \ddots & a_1 & a_0 & & a_{-1} & a_{-2} & \\ \hline & a_2 & a_1 & & a_0 & a_{-1} & \\ & a_3 & a_2 & & a_1 & a_0 & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{array}\right)$$

über in den „Blockoperator" auf $l^2(\mathbb{Z}^+) \oplus l^2(\mathbb{Z}^+)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_0 & a_1 & a_2 & & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & & a_{-2} & a_{-3} & & \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \ddots & a_{-3} & & \iddots & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ \hline a_1 & a_2 & a_3 & & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \\ a_2 & a_3 & & & a_1 & a_0 & a_{-1} & \\ a_3 & & \iddots & & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ & & & & & & \ddots & \ddots \end{array}\right).$$

In der unteren Zeile stehen der Toeplitzoperator $T(a)$ und der Hankeloperator $H(a)$. Die Operatoren in der oberen Zeile haben ebenfalls Toeplitz- bzw. Hankelstruktur. Bezeichnen wir die gemeinsame erzeugende Funktion mit $\tilde{a}$, so ist diese durch die Forderung $\tilde{a}_k = a_{-k}$ für $k \in \mathbb{Z}$ bestimmt. Hieraus folgt leicht, dass $\tilde{a}(t) = a(1/t)$ ist.

Fazit. Unter der Identifizierung $l^2(\mathbb{Z}) \leftrightarrow l^2(\mathbb{Z}^+) \oplus l^2(\mathbb{Z}^+)$ entsprechen sich

$$L(a) \leftrightarrow \begin{pmatrix} T(\tilde{a}) & H(\tilde{a}) \\ H(a) & T(a) \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Der Operator $L(ab)$ entspricht also

$$\begin{pmatrix} T(\tilde{a}\tilde{b}) & H(\tilde{a}\tilde{b}) \\ H(ab) & T(ab) \end{pmatrix},$$

und wegen $L(a)L(b) = L(ab)$ auch

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} T(\tilde{a}) & H(\tilde{a}) \\ H(a) & T(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(\tilde{b}) & H(\tilde{b}) \\ H(b) & T(b) \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} T(\tilde{a})T(\tilde{b}) + H(\tilde{a})H(b) & T(\tilde{a})H(\tilde{b}) + H(\tilde{a})T(b) \\ H(a)T(\tilde{b}) + T(a)H(b) & H(a)H(\tilde{b}) + T(a)T(b) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Einträge liefert:

Lemma 3.8 *Für beliebige Funktionen $a, b \in L^\infty(\mathbb{T})$ ist*

$$T(ab) = T(a)T(b) + H(a)H(\tilde{b}), \quad H(ab) = T(a)H(b) + H(a)T(\tilde{b}).$$

Ganz analog erhält man aus $L(a)^* = L(\overline{a})$ und

$$L(a)^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} T(\tilde{a}) & H(\tilde{a}) \\ H(a) & T(a) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} T(\tilde{a})^* & H(a)^* \\ H(\tilde{a})^* & T(a)^* \end{pmatrix} \text{ und } L(\overline{a}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} T(\tilde{\overline{a}}) & H(\tilde{\overline{a}}) \\ H(\overline{a}) & T(\overline{a}) \end{pmatrix}$$

die folgende Aussage.

Lemma 3.9 *Für $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ ist $T(a)^* = T(\overline{a})$ und $H(a)^* = H(\tilde{\overline{a}})$.*

Aus (3.10) erhält man auch sofort die Beschränktheit der Operatoren $T(a)$ und $H(a)$ sowie die Abschätzung

$$\max\{\|T(a)\|, \|H(a)\|\} \le \|L(a)\| = \|aI\| = \|a\|_\infty.$$

Genauer ist das folgende Resultat.

Satz 3.10 (*a*) **(Brown/Halmos)** *Für $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ ist $\|T(a)\|_{L(l^2(\mathbb{Z}^+))} = \|a\|_\infty$.*
(*b*) **(Nehari)** *Für $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ ist $\|H(a)\|_{L(l^2(\mathbb{Z}^+))} = \mathrm{dist}_{L^\infty(\mathbb{T})}(a, \overline{H^\infty})$.*

Dabei besteht $\overline{H^\infty}$ aus allen Funktionen aus $L^\infty(\mathbb{T})$, die sich analytisch in das Äußere des Einheitskreises fortsetzen lassen (wie zum Beispiel $f(t) = t^{-1}$). Einen Beweis dieses Satzes finden Sie in [Böttcher/Silbermann], Analysis of Toeplitz Operators, Theorem 2.7, 2.11. ■

Für die Invertierbarkeit eines Toeplitzoperators mit L^∞-Erzeugerfunktion hat man kein einfach handhabbares Kriterium. Bemerkenswert ist aber das folgende Resultat.

Satz 3.11 (Coburn/Simonenko) *Sei $a \in L^\infty(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$. Dann ist* $\ker T(a) = \{0\}$ *oder* $\mathrm{clos\,im}\, T(a) = l^2(\mathbb{Z}^+)$.

Ein Beweis ist in Böttcher/Silbermann, Theorem 2.38. ■

Dagegen hat man für *stetige* Erzeugerfunktionen ein einfaches Invertierbarkeitskriterium. Wir benötigen dafür das folgende topologische Resultat.

Satz 3.12 *Sei f stetig auf $\mathbb{T}$ und ohne Nullstellen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $n \in \mathbb{Z}$ und eine Funktion $\varphi \in C(\mathbb{T})$ mit $f(t) = t^n e^{\varphi(t)}$ für $t \in \mathbb{T}$.*

Diese Zahl n heißt *Windungszahl* von f. Sie beschreibt, wie oft sich die Kurve $f(\mathbb{T})$ um den Nullpunkt windet, wenn man $f(\mathbb{T})$ mit der durch $\mathbb{T}$ induzierten

Orientierung versieht und die Windungen im Gegenuhrzeigersinn zählt. Wir bezeichnen diese Zahl mit $\operatorname{wind} f$.

Satz 3.13 *Sei $a \in C(\mathbb{T})$. Dann ist $T(a)$ genau dann invertierbar, wenn a keine Nullstelle auf $\mathbb{T}$ hat und* $\operatorname{wind} a = 0$ *ist.*

Ein Beweis steht in Böttcher/Silbermann, Theorem 2.42. ∎

Wir erinnern noch an folgenden Begriff aus der Funktionalanalysisvorlesung. Ein Operator $A \in L(X)$ heißt ein *Fredholmoperator*, wenn sein Kern $\ker A$ und sein Kokern $\operatorname{coker} A := X/\operatorname{im} A$ endlich-dimensionale Räume sind. In diesem Fall heißt $\operatorname{ind} A := \dim \ker A - \dim \operatorname{coker} A$ der *Index* von A.

Hier sind einige wichtige Eigenschaften von Fredholmoperatoren:

- Die Menge der Fredholmoperatoren ist offen in $L(X)$, und ind ist eine stetige Funktion auf dieser Menge.

- Ist A Fredholmsch und K kompakt, so ist $A+K$ Fredholmsch und $\operatorname{ind}(A+K) = \operatorname{ind} A$.

- Sind A und B Fredholmsch, so ist AB Fredholmsch und $\operatorname{ind}(AB) = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B$.

- Ist A Fredholmsch, so auch A^*, und es ist $\operatorname{ind} A^* = -\operatorname{ind} A$.

Satz 3.14 *Sei $a \in C(\mathbb{T})$. Dann ist $T(a)$ genau dann Fredholmsch, wenn a keine Nullstelle auf $\mathbb{T}$ hat. In diesem Fall ist* $\operatorname{ind} T(a) = -\operatorname{wind} a$.

Dieses bemerkenswerte Resultat verknüpft analytische Größen (den Index) mit topologischen Größen (der Windungszahl). Es ist die Keimzelle aller späteren Indexsätze (Atiyah/Singer).

Abschließend ein Resultat, das die unterschiedliche Natur der Operatoren $T(a)$ und $H(a)$ verdeutlicht.

Satz 3.15 (a) *Für alle $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ und $K \in K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ gilt*

$$\|T(a)\| \le \|T(a) + K\|.$$

Insbesondere ist $T(a)$ genau dann kompakt, wenn $T(a) = 0$.
(b) *Für alle $a \in C(\mathbb{T})$ ist $H(a)$ kompakt.*

Beweis. (a) Seien $V_1, V_{-1} : l^2(\mathbb{Z}^+) \to l^2(\mathbb{Z}^+)$ die Verschiebungsoperatoren

$$V_1 : (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots), \quad V_{-1} : (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots),$$

und für $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n := V_1^n$ und $V_{-n} := V_{-1}^n$. Wegen $\|V_n\| = \|V_{-n}\| = 1$ ist dann

$$\|V_{-n}(T(a) + K)V_n\| \leq \|T(a) + K\|. \tag{3.11}$$

Nun ist $V_{-n}T(a)V_n = T(a)$, und man rechnet leicht nach, dass $V_{-n} \to 0$ stark sowie $V_n^* = V_{-n} \to 0$ stark. Nach Satz 1.2 konvergiert daher $V_{-n}KV_n$ in der Norm gegen 0. Grenzübergang $n \to \infty$ in (3.11) liefert $\|T(a)\| \leq \|T(a)+K\|$. Die zweite Behauptung von (a) folgt unmittelbar hieraus.

(b) Ist $a(t) = a_{-n}t^{-n} + \ldots + a_n t^n$ ein trigonometrisches Polynom, so ist

$$H(a) = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n & 0 & \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \\ & \iddots & & & \\ a_n & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

offenbar ein Operator mit endlich-dimensionalem Bild und somit kompakt. Ist $a \in C(\mathbb{T})$, so kann a in der Supremumsnorm durch eine Folge trigonometrischer Polynome p_n approximiert werden (Approximationssatz von Weierstraß). Aus $\|H(a) - H(p_n)\| \leq \|a - p_n\|_\infty \to 0$, der Kompaktheit von $H(p_n)$ und der Abgeschlossenheit von $K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ folgt die Behauptung. ■

3.3 Das Reduktionsverfahren für Toeplitzoperatoren (stetige Erzeuger)

Wir untersuchen das Reduktionsverfahren für $T(a)$ mit $a \in C(\mathbb{T})$ bezüglich der Standardbasis von $l^2(\mathbb{Z}^+)$. Die entsprechenden Projektoren sind dementsprechend

$$P_n : (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots).$$

Satz 3.16 *Sei $a \in C(\mathbb{T})$. Das Reduktionsverfahren $(P_nT(a)P_n)$ ist genau dann auf $T(a)$ anwendbar, wenn $T(a)$ invertierbar ist.*

Es gibt zahlreiche Beweise dieses Satzes. Der folgende Beweis führt am Ende alles auf den Satz über kompakte Störungen zurück. Zur Vorbereitung des Beweises zeigen wir zwei Hilfsaussagen.

Lemma 3.17 (Kozak, mathematische Folklore) *Sei X ein linearer Raum, P ein Projektor auf X, $Q := I - P$, und A ein invertierbarer linearer Operator auf X. Dann ist der Operator $PAP : \operatorname{im} P \to \operatorname{im} P$ genau dann invertierbar, wenn der Operator $QA^{-1}Q : \operatorname{im} Q \to \operatorname{im} Q$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$(PAP)^{-1}P = PA^{-1}P - PA^{-1}Q(QA^{-1}Q)^{-1}QA^{-1}P. \tag{3.12}$$

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen der Kozak'schen Formel (3.12) und ist Übungsaufgabe.

Lemma 3.18 *Sei $a \in L^\infty(\mathbb{T})$, und $T(a)$ sei invertierbar auf $l^2(\mathbb{Z}^+)$. Dann ist das Reduktionsverfahren $(P_nT(a)^{-1}P_n)$ auf den inversen Toeplitzoperator $T(a)^{-1}$ anwendbar.*

Beweis. Sei $Q_n := I - P_n$. Aus der Kozakschen Formel (3.12) folgt, dass der Operator $P_nT(a)^{-1}P_n$ genau dann auf $\operatorname{im} P_n$ invertierbar ist, wenn $Q_nT(a)Q_n$ auf $\operatorname{im} Q_n$ invertierbar ist. Außerdem liefert (3.12) die Normabschätzung

$$\begin{aligned} &\|(P_nT(a)^{-1}P_n)^{-1}P_n\| \\ &\quad \le \|P_nT(a)P_n\| + \|P_nT(a)Q_n\|\,\|(Q_nT(a)Q_n)^{-1}Q_n\|\,\|Q_nT(a)P_n\|. \end{aligned}$$

Die gleichmäßige Beschränktheit der Normen $\|(Q_nT(a)Q_n)^{-1}Q_n\|$ impliziert also die gleichmäßige Beschränktheit der Normen $\|(P_nT(a)^{-1}P_n)^{-1}\|$. Da auch die umgekehrte Implikation gilt, folgt:

$$(P_nT(a)^{-1}P_n) \text{ ist stabil} \quad \Leftrightarrow \quad (Q_nT(a)Q_n) \text{ ist stabil} .$$

Die Stabilität der Folge $(Q_nT(a)Q_n)$ für invertierbare Toeplitzoperatoren $T(a)$ ist aber offensichtlich, da $T(a)$ und $Q_nT(a)Q_n|_{\operatorname{im} Q_n}$ exakt die gleiche Matrixdarstellung besitzen:

$$T(a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad Q_1T(a)Q_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & a_0 & a_{-1} & \\ 0 & a_1 & a_0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{array}\right). \blacksquare$$

Beweis von Satz 3.16. Mit dem Satz von Polski folgt aus der Anwendbarkeit des Reduktionsverfahrens $(P_nT(a)P_n)$ die Invertierbarkeit von $T(a)$. Sei umgekehrt $T(a)$ invertierbar. Nach Satz 3.13 ist dann $0 \notin a(\mathbb{T})$ und $\operatorname{wind} a = 0$. Also ist a^{-1} wohldefiniert und liegt wieder in $C(\mathbb{T})$, und es ist $\operatorname{wind} a^{-1} = 0$. Aus Lemma 3.8 folgt

$$I = T(aa^{-1}) = T(a)T(a^{-1}) + H(a)H(\widetilde{a^{-1}}).$$

Satz 3.13 zeigt weiter, dass auch $T(a^{-1})$ invertierbar ist. Also ist

$$T(a^{-1})^{-1} = T(a) + H(a)H(\widetilde{a^{-1}})T(a^{-1})^{-1}$$

bzw.

$$P_nT(a)P_n = P_nT(a^{-1})^{-1}P_n - P_nH(a)H(\widetilde{a^{-1}})T(a^{-1})^{-1}P_n.$$

Der Operator $H(a)H(\widetilde{a^{-1}})T(a^{-1})^{-1}$ ist kompakt nach Satz 3.15 (b), und die Folge $(P_nT(a^{-1})^{-1}P_n)$ ist stabil nach Lemma 3.18. Der Satz über kompakte Störungen liefert die Stabilität von $(P_nT(a)P_n)$ und somit die Anwendbarkeit des Reduktionsverfahrens auf $T(a)$. $\blacksquare$

3.4 Kompakte Störungen des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren

Wir beginnen mit Störungen von einer Gestalt, wie wir sie oben für allgemeine Projektionsverfahren betrachtet haben.

Satz 3.19 *Sei $a \in C(\mathbb{T})$ und $K \in L(l^2(\mathbb{Z}^+))$ kompakt. Das Reduktionsverfahren $(P_n(T(a)+K)P_n)$ ist genau dann anwendbar, wenn $T(a)+K$ invertierbar ist.*

Beweis. Aus der Anwendbarkeit des Verfahrens folgt die Invertierbarkeit von $T(a)+K$. Sei umgekehrt $T(a)+K$ invertierbar. Dann ist $T(a)$ ein Fredholmoperator vom Index 0. Es ist also

$$\dim\ker T(a) = \dim\operatorname{coker} T(a) = \dim(l^2(\mathbb{Z}^+)/\operatorname{im} T(a)). \tag{3.13}$$

Nach dem Satz von Coburn/Simonenko ist aber eine der Zahlen $\dim\ker T(a)$ und $\dim(l^2(\mathbb{Z}^+)/\operatorname{im} T(a))$ gleich Null. Nach (3.13) ist dann auch die andere dieser Zahlen gleich Null, d. h. $T(a)$ ist invertierbar. Mit Satz 3.16 folgt dann die Anwendbarkeit des Reduktionsverfahrens für $T(a)$. Da K kompakt und $T(a)+K$ invertierbar ist, folgt die Behauptung schließlich aus dem Satz über kompakte Störungen. ■

Im Abschnitt 3.1.3 (über Differenzenverfahren) erhielten wir eine Folge von $n\times n$-Matrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & -2 & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

welche man als Summe der Toeplitzmatrix $P_nT(a)P_n$ mit $a(t) = t^{-1} - 2 + t$ und der Störungen

$$\operatorname{diag}(1,0,0,\ldots,0)_{n\times n} \quad \text{und} \quad \operatorname{diag}(0,\ldots,0,0,1)_{n\times n}$$

darstellen kann. Die erste dieser Störungen lässt sich schreiben als P_nKP_n mit $K = \operatorname{diag}(1,0,0,\ldots)$. Der Operator K ist kompakt, und die Folge (P_nKP_n) kann mit dem Satz über kompakte Störungen behandelt werden. Zur Modellierung der zweiten Störung betrachten wir die Operatoren

$$R_n : l^2(\mathbb{Z}^+) \to l^2(\mathbb{Z}^+), \quad (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0, 0, 0, \ldots).$$

Offenbar ist $\operatorname{im} R_n = \operatorname{im} P_n$, $R_nP_n = P_nR_n$ und $R_n^2 = P_n$. Wir können die zweite Störung damit schreiben als R_nKR_n mit K wie oben. Es ist also

$$A_n = P_nT(a)P_n + P_nKP_n + R_nKR_n.$$

Die Frage nach der Stabilität dieser Folge wird durch folgenden allgemeineren Satz geklärt.

Satz 3.20 *Sei $a \in C(\mathbb{T})$, und $K, L \in L(l^2(\mathbb{Z}^+))$ seien kompakte Operatoren. Dann ist $(P_nT(a)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n)$ ein Näherungsverfahren für $T(a) + K$. Dieses ist genau dann anwendbar, wenn die Operatoren $T(a) + K$* und *$T(\tilde{a}) + L$ invertierbar sind.*

Man beachte: Die Folge $(P_nT(a)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n)$ liefert zwar ein Näherungsverfahren für $T(a) + K$, die Invertierbarkeit dieses Operators ist aber *nicht* ausreichend für die Stabilität dieser Folge. Hierfür benötigt man die Invertierbarkeit eines weiteren Operators, $T(\tilde{a}) + L$. Dies ist plausibel, da $T(a) + K$ keine Informationen über L enthält, dieser Operator das Stabilitätsverhalten aber offenbar beeinflusst.

Für den Beweis von Satz 3.20 benötigen wir zwei Lemmas, die wir uns in der Übung ansehen.

Lemma 3.21 *Für $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ ist $R_nT(a)R_n = P_nT(\tilde{a})P_n$.*

Lemma 3.22 *Für $K \in K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ konvergiert R_nKR_n stark gegen 0.*

Beweis von Satz 3.20. Aus Lemma 3.22 folgt

$$P_nT(a)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n \to T(a) + K \quad \text{stark.}$$

Daher ist $(P_nT(a)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n)$ ein Näherungsverfahren für $T(a) + K$.

Nehmen wir zunächst an, dass dieses Verfahren anwendbar ist. Dann ist nach Polski der Operator $T(a) + K$ invertierbar und die Folge $(P_nT(a)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n)$ stabil. Dann ist aber auch die Folge

$$(R_n(P_nT(a)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n)R_n) = (P_nT(\tilde{a})P_n + R_nKR_n + P_nLP_n)$$

stabil. Diese Folge konvergiert stark gegen $T(\tilde{a}) + L$, und die adjungierte Folge

$$(P_nT(\tilde{a})P_n + R_nKR_n + P_nLP_n)^* = (P_nT(\tilde{a})^*P_n + R_nK^*R_n + P_nL^*P_n)$$

konvergiert ebenfalls stark (gegen $T(\tilde{a})^* + L^*$). Aus der 2. Übung wissen wir, dass dann $T(\tilde{a}) + L$ invertierbar ist.

Seien nun umgekehrt $T(a) + K$ und $T(\tilde{a}) + L$ invertierbar. Nach Satz 3.19 ist dann $(P_nT(a)P_n + P_nKP_n)$ eine stabile Folge. Dann ist auch

$$(R_n(P_nT(a)P_n + P_nKP_n)R_n) = (P_nT(\tilde{a})P_n + R_nKR_n)$$

eine stabile Folge. Wie im ersten Teil dieses Beweises folgt, dass $T(\tilde{a})$ invertierbar und $(P_nT(\tilde{a})P_n + R_nKR_n)$ ein anwendbares Verfahren für diesen Operator ist. Da

$T(\tilde{a}) + L$ nach Voraussetzung invertierbar ist, ist nach dem Satz über kompakte Störungen $(P_nT(\tilde{a})P_n+R_nKR_n+P_nLP_n)$ ein anwendbares Verfahren für $T(\tilde{a})+L$. Insbesondere ist diese Folge stabil, was die Stabilität der Folge

$$(R_n(P_nT(\tilde{a})P_n + R_nKR_n + P_nLP_n)R_n) = (P_nT(a)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n)$$

impliziert. Mit Polski ist nun klar, dass $(P_nT(a)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n)$ ein anwendbares Verfahren für $T(a) + K$ ist. ■

Was bedeutet dies für die Folge (A_n) aus dem Differenzenverfahren für die Randwertaufgabe aus 3.1.3? Für die Anwendbarkeit dieses Verfahrens benötigen wir die Invertierbarkeit von $T(a)+K$ mit $a(t) = t^{-1}+2+t$ und K kompakt. Wäre dieser Operator invertierbar, so wäre $T(a)$ ein Fredholmoperator. Wegen $a(-1) = 0$ und Satz 3.14 ist dies unmöglich. Also ist dieses Verfahren nicht anwendbar.

In dieser konkreten Situation kann man natürlich auch leicht direkt einsehen, dass das System (3.5) i. Allg. nicht lösbar ist. Die Summe aller Zeilen der Systemmatrix ist nämlich 0. Notwendig für die Lösbarkeit von (3.5) ist daher, dass auch $\sum_{i=1}^{n} f(t_{in}) = 0$ ist. Das widerspiegelt die Tatsache, dass die Randwertaufgabe

$$y''(t) = f(t), \quad y'(a) = y'(b) = 0$$

nur lösbar ist, wenn $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ ist (man integriere einfach $y'' = f$ über $[a, b]$).

3.5 Ein Spline-Galerkinverfahren für singuläre Integralgleichungen auf $[0, 1]$

Wir wenden uns der Anwendbarkeit des in Abschnitt 3.1.2 besprochenen Galerkinverfahrens

$$L_n(aI + bS_{[0,1]})u_n = L_nf, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.14}$$

auf die singuläre Integralgleichung $(aI + bS_{[0,1]})u = f$ mit konstanten Koeffizienten a und b zu. Hier ist L_n der Orthoprojektor von $L^2[0, 1]$ auf den Raum der bzgl. der Unterteilung von $[0, 1]$ in n gleichlange Intervalle stückweise konstanten Funktionen. Wir wissen bereits, wie die Matrixdarstellung des Operators aus (3.14) bzgl. der aus den Funktionen

$$\varphi_{in}(t) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{falls } t \in [i/n, (i + 1)/n] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $i = 0, \ldots, n - 1$ bestehenden Basis von $\operatorname{Im} L_n$ aussieht:

$$\begin{aligned} \left(\langle (aI + bS_{[0,1]})\varphi_{jn}, \varphi_{in}\rangle\right)_{i,j=0}^{n-1} &= a(\delta_{ij})_{i,j=0}^{n-1} + b\left(\langle S_{[0,1]}\varphi_{jn}, \varphi_{in}\rangle\right)_{i,j=0}^{n-1} \\ &= a(\delta_{ij})_{i,j=0}^{n-1} + b(c_{i-j})_{i,j=0}^{n-1} \\ &= P_nT(a + bc)P_n. \end{aligned}$$

Hier ist $c \in L^\infty(\mathbb{T})$ eine Funktion, deren k. Fourierkoeffizient c_k gleich

$$\int_0^1 (S_{[0,1]}1)(y+k)\,\mathrm{d}y$$

ist. Das Spline-Galerkinverfahren für $aI + bS_{[0,1]}$ ist also genau dann anwendbar, wenn das Reduktionsverfahren $(P_nT(a+bc)P_n)$ für den Toeplitzoperator $T(a+bc)$ anwendbar ist. Um letzteres zu untersuchen, müssen wir mehr über die Funktion c wissen. Für diese Funktion ist kein geschlossener Ausdruck bekannt. Man kann aber mittels Fouriertransformation F die folgende Reihenentwicklung ableiten

$$c(e^{2\pi iy}) = -\frac{\sin^2 \pi y}{\pi^2} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\operatorname{sgn}(m+1/2)}{(y+m)^2}, \quad y \in (0,1).$$

(Man benötigt dabei beispielsweise, dass $S_\mathbb{R} = F^{-1}\operatorname{sgn} F$. Details finden Sie in Hagen/R./Silbermann, Abschnitt 2.1.2.) Schreibt man diese Funktion als

$$c(e^{2\pi iy}) = -\frac{\sin^2(\pi y)}{\pi^2 y^2} + \frac{\sin^2 \pi(y-1)}{\pi^2(y-1)^2} - \frac{\sin^2 y\pi}{\pi^2} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}} \frac{\operatorname{sgn}(m+1/2)}{(y+m)^2},$$

so erkennt man, dass

$$\lim_{y\searrow 0} c(e^{2\pi iy}) = -1, \quad \lim_{y\nearrow 1} c(e^{2\pi iy}) = 1.$$

In allen Punkten $e^{2\pi iy}$ mit $y \in (0,1)$ ist dagegen c stetig und monoton wachsend.

Halten wir fest: Die Funktion c ist auf $\mathbb{T}$ nicht stetig! Sie ist vielmehr stückweise stetig mit 1 als einziger Unstetigkeitsstelle. Dort springt c von 1 auf -1. Unsere bisherigen Resultate sind somit nicht anwendbar. Mehr noch: die Beweise sind nicht übertragbar! Hauptproblem ist, dass für stückweise stetige Funktionen c der Hankeloperator $H(c)$ nicht mehr kompakt sein muss, so dass Satz über kompakte Störungen nicht mehr hilft. Um hier weiterzukommen, benötigen wir stärkere Hilfsmittel. Das werden sogenannte lokale Prinzipien sein, die in der Sprache von Banach- und C^*-Algebren formuliert werden. Mit diesen beschäftigen wir uns in den folgenden Abschnitten.

4 Banach- und C^*-Algebren

4.1 Grundbegriffe

Wir betrachten hier ausschließlich Vektorräume über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Ein komplexer Vektorraum $\mathcal{A}$ mit einer bilinearen Abbildung

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad (a,\, b) \mapsto ab \tag{4.1}$$

heißt eine *Algebra*, wenn

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{für alle } a,\, b,\, c \in \mathcal{A}.$$

Wir nennen die Abbildung (4.1) *Multiplikation* und ab das *Produkt* von a und b. Eine Teilmenge einer Algebra $\mathcal{A}$ heißt eine *Unteralgebra* von $\mathcal{A}$, wenn sie bezüglich der in $\mathcal{A}$ erklärten Operationen ebenfalls eine Algebra ist. Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt *kommutativ*, wenn $ab = ba$ für alle $a,\, b \in \mathcal{A}$.

Eine Algebra heißt *unital* (oder eine *Algebra mit Einselement*), wenn es ein Element $e \in \mathcal{A}$ gibt mit $ae = ea = a$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Wenn es ein solches Element gibt, so ist es eindeutig bestimmt und heißt das *Einselement* von $\mathcal{A}$. Wir werden meist verlangen, dass $e \neq 0$.

Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt *normiert*, wenn auf dem unterliegenden Vektorraum eine Norm gegeben ist, die submultiplikativ in folgendem Sinn ist:

$$\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\| \quad \text{für alle } a,\, b \in \mathcal{A}.$$

Ist $\mathcal{A}$ bezüglich dieser Norm vollständig, so heißt $\mathcal{A}$ eine *Banachalgebra*.

Lemma 4.1 *In einer normierten Algebra ist die Multiplikation stetig.*

Beweis. Aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ folgt

$$\|a_n b_n - ab\| = \|a_n b_n - ab_n + ab_n - ab\| \leq \|a_n - a\|\,\|b_n\| + \|a\|\,\|b_n - b\|.$$

Da die Folge der $\|b_n\|$ beschränkt ist, folgt die Behauptung. ■

Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt *Algebra mit Involution*, wenn sie mit einer Abbildung $a \mapsto a^*$ versehen ist, so dass für alle $a,\, b \in \mathcal{A}$ und alle $\lambda,\, \mu \in \mathbb{C}$ gilt:

- $(a^*)^* = a$,
- $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$,
- $(ab)^* = b^* a^*$.

In einer involutiven Algebra gilt $0^* = 0$; in einer involutiven Algebra mit Eins e gilt $e^* = e$.

Eine Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit Involution heißt eine *Banach-$*$-Algebra*, wenn

$$\|a^*\| = \|a\| \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}. \tag{4.2}$$

Gilt in einer Banachalgebra mit Involution sogar

$$\|aa^*\| = \|a\|^2 \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}, \tag{4.3}$$

so heißt $\mathcal{A}$ eine *C^*-Algebra*. Das C^*-Axiom (4.3) impliziert (4.2).

Beispiel 4.2 Ist X ein normierter linearer Raum über $\mathbb{C}$, so ist die Menge $L(X)$ der linearen beschränkten Operatoren auf X eine normierte Algebra bzgl. der üblichen Operationen und der durch die Norm auf X induzierten Operatornorm. Das Einselement von $L(X)$ ist die identische Abbildung I. Ist X ein Banachraum, so ist $L(X)$ eine Banachalgebra.

Im Falle $X = H$ eines Hilbertraums ist auf $L(H)$ eine Involution $A \mapsto A^*$ durch

$$\langle Ax,\, y\rangle = \langle x,\, A^*y\rangle \quad \text{für alle } x,\, y \in H$$

definiert, die $L(H)$ zu einer Banach-$*$-Algebra macht. Wir zeigen, dass $L(H)$ sogar eine C^*-Algebra ist. Für beliebiges $A \in L(H)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|A\|^2 &= \sup\{\langle Ax,\, Ax\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\
&= \sup\{\langle x,\, A^*Ax\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\
&\le \sup\{\|A^*Ax\| : x \in H, \|x\| = 1\} \\
&= \|A^*A\|.
\end{aligned}$$

Die umgekehrte Ungleichung $\|A^*A\| \le \|A^*\|\,\|A\| = \|A\|^2$ gilt offenbar ebenso. Aus $\|A\| = \|A^*\|$ folgt somit das C^*-Axiom.

Ist X ein Banachraum, so ist mit $L(X)$ auch jede abgeschlossene Unteralgebra von $L(X)$ eine Banachalgebra. Ist H ein Hilbertraum, so ist mit $L(H)$ auch jede abgeschlossene und symmetrische Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $L(H)$ eine C^*-Algebra (*symmetrisch* heißt: $b \in \mathcal{A} \Rightarrow b^* \in \mathcal{A}$). Ein zentraler Satz von Gelfand-Naimark-Segal besagt, dass auch die Umkehrung dieser Aussage richtig ist:

Jede C^*-Algebra ist im wesentlichen von dieser Gestalt.

Insbesondere bildet die Menge $K(X)$ der kompakten Operatoren auf einem Banach- bzw. Hilbertraum X eine Banach- bzw. C^*-Algebra. Falls X unendlichdimensional ist, besitzt $K(X)$ kein Einselement. ■

Beispiel 4.3 Zur Erinnerung: ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn sich aus jeder Überdeckung von X durch offene Mengen eine endliche Überdeckung auswählen lässt, und X heißt *lokal-kompakt*, wenn jeder Punkt von X

eine offene Umgebung besitzt, deren Abschließung kompakt ist. Schließlich heißt X *Hausdorffsch* (oder ein T_2-*Raum*), wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten x, $y \in X$ offene Umgebungen U_x, U_y von x bzw. y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$ gibt.

Sei nun X ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist jede stetige komplexwertige Funktion f auf X beschränkt, und die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ nimmt ihr Supremum auf X an. Die Menge $C(X)$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen, versehen mit punktweisen Operationen, der Supremumsnorm (Maximumsnorm) und der Involution

$$f^*(x) := \overline{f(x)}, \quad x \in X, \tag{4.4}$$

bildet eine kommutative C^*-Algebra mit Einselement $x \mapsto 1$.

Ist X ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum, so bildet die Menge $C_0(X)$ der komplexwertigen stetigen Funktionen auf X, die im Unendlichen verschwinden, bezüglich punktweiser Operationen, der Involution (4.4) und der Supremumsnorm ebenfalls eine C^*-Algebra. Diese besitzt kein Einselement, falls X nicht kompakt ist. (Man sagt, dass eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ *im Unendlichen verschwindet*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq X$ so gibt, dass $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$.)

Wir werden später sehen, dass jede kommutative C^*-Algebra von der Gestalt $C_0(X)$ mit einem lokal-kompakten Hausdorff Raum X und jede kommutative C^*-Algebra mit Einselement von der Gestalt $C(X)$ mit einem kompakten Hausdorff-Raum X ist. ■

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Algebren. Eine lineare Abbildung $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *Homomorphismus*, wenn

$$W(ab) = W(a)W(b) \quad \text{für alle } a,\, b \in \mathcal{A}.$$

Haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Einselemente $e_{\mathcal{A}}$ bzw. $e_{\mathcal{B}}$, so heißt ein Homomorphismus $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *unital*, wenn $W(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ involutiv, so heißt ein Homomorphismus $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *symmetrisch* oder *-*Homomorphismus*, wenn $W(a^*) = W(a)^*$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Bijektive Homomorphismen heißen *Isomorphismen*. Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Algebren.

Im Falle normierter Algebren interessiert man sich besonders für *stetige* Homomorphismen, d.h. für solche mit

$$\|W(a)\| \leq C\|a\| \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}$$

mit einer gewissen Konstanten C. Gibt es einen stetigen Isomorphismus einer Banachalgebra $\mathcal{A}$ auf eine Banachalgebra $\mathcal{B}$, so nennen wir $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ *topologisch isomorph* und schreiben $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Nach dem Satz von Banach ist die Inverse eines stetigen Isomorphismus wieder ein stetiger Isomorphismus. Topologische Isomorphie ist also eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Banachalgebren.

Ein linearer Teilraum $\mathcal{J}$ einer Algebra $\mathcal{A}$ heißt ein *Linksideal*, wenn

$$aj \in \mathcal{J} \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A},\, j \in \mathcal{J}.$$

Analog erklärt man *Rechtsideale*. Ein Teilraum, der sowohl Links- als auch Rechtsideal ist, heißt *Ideal*. Die Algebra $\mathcal{A}$ selbst sowie der Nullraum $\{0\}$ sind stets Ideale von $\mathcal{A}$. Diese heißen die *trivialen Ideale*. Besitzt $\mathcal{A}$ nur die trivialen Ideale, so heißt $\mathcal{A}$ *einfach*. Beispielsweise ist die Algebra $\mathbb{C}^{n \times n}$ der $n \times n$-Matrizen mit komplexen Einträgen einfach.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Idealen und den Kernen

$$\ker W := \{a \in \mathcal{A} : W(a) = 0\}$$

von Homomorphismen.

Lemma 4.4 *Der Kern jedes Homomorphismus ist ein Ideal, und jedes Ideal ist Kern eines gewissen Homomorphismus.*

Beweis. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass der Kern jeder linearen Abbildung ein linearer Raum ist. Ist nun $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Homomorphismus und sind $a \in \mathcal{A}$, $j \in \ker W$, so ist

$$W(aj) = W(a)W(j) = 0 = W(j)W(a) = W(ja),$$

d.h. aj und ja liegen in $\ker W$, und $\ker W$ ist ein Ideal.

Für die zweite Aussage betrachten wir den (linearen) Faktorraum $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ für ein Ideal $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}$. Dieser lineare Raum kann zu einer Algebra (der sogenannten *Faktor-* oder *Quotientenalgebra* von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{J}$) gemacht werden bezüglich der Multiplikation

$$(a + \mathcal{J}) \cdot (b + \mathcal{J}) := ab + \mathcal{J}.$$

Man rechnet leicht nach, dass diese Definition korrekt ist, dass die Abbildung

$$W : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}, \ a \mapsto a + \mathcal{J}$$

ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ ist (der sog. *kanonische Homomorphismus*), und dass $\ker W = \mathcal{J}$. ∎

Ist $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$, so wird in der Faktoralgebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ durch

$$\|a + \mathcal{J}\| := \inf \{\|a + j\| : j \in \mathcal{J}\}$$

eine Norm definiert, welche $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ zu einer Banachalgebra macht. Offensichtlich gilt $\|a + \mathcal{J}\| \le \|a\|$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Also ist der kanonische Homomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ stetig, und seine Norm ist nicht größer als 1. Mit diesen Aussagen erhält man sofort:

Lemma 4.5 *Der Kern eines stetigen Homomorphismus ist abgeschlossenes Ideal, und jedes abgeschlossene Ideal ist der Kern eines stetigen Homomorphismus.*

Für C^*-Algebren $\mathcal{A}$ und abgeschlossene Ideale J von $\mathcal{A}$ entsteht die Frage, ob man $\mathcal{A}/J$ wieder zu einer C^*-Algebra machen kann. Diese werden wir erst später beantworten.

Beispiel 4.6 Für jeden Banachraum X ist die Menge $K(X)$ der linearen kompakten Operatoren auf X ein abgeschlossenes Ideal von $L(X)$. Falls X unendlichdimensional ist, ist dieses Ideal nicht trivial. Im Falle eines separablen unendlichdimensionalen Hilbertraums H (wie etwa $l^2(\mathbb{N})$) kann man sogar zeigen, dass $K(H)$ das einzige nichttriviale abgeschlossene Ideal von $L(H)$ ist (während es sehr viele nichtabgeschlossene Ideale gibt wie z.B. das Ideal der Hilbert-Schmidt-Operatoren oder das der Operatoren mit endlichdimensionalem Bild). Für jeden unendlich-dimensionalen Banachraum X heißt $L(X)/K(X)$ die *Calkinalgebra* von X. ■

Beispiel 4.7 Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Unser Ziel ist es, alle *abgeschlossenen* Ideale von $C(X)$ zu beschreiben. Man überlegt sich sofort, dass für jede abgeschlossene Teilmenge K von X die Menge

$$\{f \in C(X) : f|_K = 0\}$$

ein abgeschlossenes Ideal von $C(X)$ bildet. Bemerkenswerterweise gilt auch die Umkehrung:

Theorem 4.8 *Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal von $C(X)$. Dann gibt es eine abgeschlossene Menge $K \subseteq X$, so dass*

$$\mathcal{J} = \{f \in C(X) : f|_K = 0\}. \tag{4.5}$$

Wir haben also eine Bijektion zwischen den abgeschlossenen Teilmengen von X und den abgeschlossenen Idealen von $C(X)$.

Beweis. Wir zeigen, dass die Menge $K := \bigcap_{f \in \mathcal{J}} f^{(-1)}(0)$ den Bedingungen des Satzes genügt. Als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist K wieder abgeschlossen, und die Inklusion $\mathcal{J} \subseteq \{f \in C(X) : f|_K = 0\}$ ist offensichtlich. Für den Beweis der umgekehrten Inklusion sei $f \in C(X)$ eine Funktion, die auf K verschwindet. Wir müssen zeigen, dass $f \in \mathcal{J}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung U_K von K so, dass $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in U_K$. Weiter wählen wir für jeden Punkt $x \in X \setminus K$ eine Funktion $g_x \in \mathcal{J}$ mit $g_x(x) = 1$. Diese Funktion können wir als reellwertig und nichtnegativ annehmen (andernfalls ersetzen wir sie durch die Funktion $g_x \overline{g_x}$). Sei $U_x := \{y \in X : g_x(y) > 1/2\}$. Die offenen Mengen U_x, $x \in X \setminus K$, überdecken zusammen mit der offenen Menge U_K den Kompakt X. Es gibt folglich eine endliche Überdeckung durch solche Mengen, etwa

$$X = U_K \cup U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}.$$

Sei $1 = f_K + f_1 + \cdots + f_n$ eine Zerlegung der Eins bzgl. dieser Überdeckung, d.h. f_K und alle f_i sind nichtnegative stetige Funktionen mit $\operatorname{supp} f_K \subset U_K$ sowie $\operatorname{supp} f_i \subseteq U_{x_i}$ für alle i. Auf der Abschließung $\overline{U_{x_i}}$ von U_{x_i} ist $g_{x_i} \geq 1/2$. Die Einschränkung von g_{x_i} auf $\overline{U_{x_i}}$ ist also invertierbar, und die inverse Funktion ist wieder stetig auf $\overline{U_{x_i}}$. Nach einem Satz von Uryson kann $(g_{x_i}|_{\overline{U_{x_i}}})^{-1}$ zu einer auf ganz X stetigen Funktion h_i fortgesetzt werden. Mit dieser gilt

$$f_i = f_i g_{x_i} h_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

(punktweise nachrechnen!). Wegen $g_{x_i} \in \mathcal{J}$ folgt $f_i \in \mathcal{J}$ für alle i. Nun ist wegen $f = f \cdot 1 = f f_K + f f_1 + \cdots + f f_n$ klar, dass

$$\|f - f f_1 - \cdots - f f_n\|_\infty = \|f f_K\|_\infty \leq \|f|_{U_K}\|_\infty < \varepsilon.$$

Die Funktion f kann also beliebig genau durch Funktionen aus $\mathcal{J}$ approximiert werden. Da $\mathcal{J}$ abgeschlossen ist, folgt $f \in \mathcal{J}$ und damit die Behauptung. ■

4.2 Invertierbarkeit in Banachalgebren

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Einselement e. Ein Element $a \in \mathcal{A}$ heißt *invertierbar*, wenn es ein Element $b \in \mathcal{A}$ gibt, so dass $ab = ba = e$. Das Element b ist dann eindeutig bestimmt und heißt das *Inverse* zu a und wird mit a^{-1} bezeichnet. Für $a \in \mathcal{A}$ heißt

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \text{ ist nicht invertierbar}\}$$

das *Spektrum* und $\varrho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ die *Resolventenmenge* von a. Bevor wir einige Resultate der Spektraltheorie wiederholen, sehen wir uns einige Beispiele an.

Beispiel 4.9 Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $a \in C(X)$. Ist a in $C(X)$ invertierbar, so gibt es eine Funktion $b \in C(X)$, so dass ab das Einselement ist, d.h.

$$a(x)b(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in X. \tag{4.6}$$

Dann ist insbesondere $a(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so ist $b(x) := a(x)^{-1}$ eine stetige Funktion auf X, für die (4.6) gilt. Damit ist eine Funktion $a \in C(X)$ genau dann in $C(X)$ invertierbar, wenn sie keine Nullstellen in X besitzt. Hieraus folgt sofort, dass

$$\sigma(a) = a(X) := \{a(x) \in \mathbb{C} : x \in X\}.$$

Beispiel 4.10 Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$. Invertierbarkeit von A in $L(X)$ heißt: es gibt einen Operator B, so dass

$$AB = I \quad \text{und} \quad BA = I. \tag{4.7}$$

Die erste Identität in (4.7) zeigt, dass im $A = X$ und die zweite, dass $\ker A = \{0\}$ ist. Also ist A eine Bijektion. Umgekehrt wissen wir aus dem Satz von Banach, dass es für jede Bijektion $A \in L(X)$ einen Operator $B \in L(X)$ gibt, so dass (4.7) gilt. Invertierbarkeit von A in $L(X)$ bedeutet also gerade, dass $\operatorname{im} A = X$ und $\ker A = \{0\}$.

Beispiel 4.11 Sei X ein Banachraum und

$$\pi : L(X) \to L(X)/K(X),\ A \mapsto A + K(X)$$

der kanonische Homomorphismus von $L(X)$ auf die Calkinalgebra. Wir überlegen, was Invertierbarkeit von $\pi(A)$ in $L(X)/K(X)$ für einen Operator A bedeutet.

Theorem 4.12 *Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(a) $\pi(A)$ ist in $L(X)/K(X)$ invertierbar.
(b) A ist ein Fredholmoperator.

Für den Beweis benötigen wir zwei Hilfsaussagen.

Lemma 4.13 *Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$. Weiter sei K kompakt auf X und $C > 0$. Ist*

$$\|x\| \le C(\|Ax\| + \|Kx\|) \quad \textit{für alle } x \in X,$$

so hat A einen endlichdimensionalen Kern und ein abgeschlossenes Bild.

Lemma 4.14 *Sei X ein Banachraum und M ein linearer (nicht notwendig abgeschlossener) Teilraum von X. Ist $\dim M < \infty$ oder $\dim(X/M) < \infty$, so ist M abgeschlossen und besitzt ein direktes Komplement.*

Beweis von Satz 4.12. $(a) \Rightarrow (b)$: Invertierbarkeit von $\pi(A)$ in $L(X)/K(X)$ heißt: Es gibt Operatoren $B \in L(X)$ und $K_1, K_2 \in K(X)$ so dass

$$BA = I + K_1, \quad AB = I + K_2. \tag{4.8}$$

Aus der ersten Bedingung in (4.8) folgt für jedes $x \in X$

$$\|x\| = \|(BA - K_1)x\| \le \|B\| \, \|Ax\| + \|K_1 x\|.$$

Nach Lemma 4.13 besitzt A einen endlichdimensionalen Kern und ein abgeschlossenes Bild. Aus der zweiten Bedingung in (4.8) folgt $B^*A^* = I + K_2^*$. Da K_2^* wieder kompakt ist, folgt wie vorher, dass $\dim \ker A^* < \infty$. Nun ist

$$\operatorname{clos} \operatorname{im} A = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \ker A^*\} \tag{4.9}$$

für jeden Operator $A \in L(X)$. In unserem Fall ist die linke Seite von (4.9) gleich $\operatorname{im} A$, und die rechte Seite ist ein Raum von endlicher Kodimension. Also ist $\dim(X/\operatorname{im} A)$ endlich.

$(b) \Rightarrow (a)$: Ist A ein Fredholmoperator, so gibt es nach Lemma 4.14 abgeschlossene Teilräume X_1, X_2 von X, so dass

$$X = X_1 \dot{+} \ker A \quad \text{und} \quad X = X_2 \dot{+} \operatorname{im} A = X_2 \dot{+} \overline{\operatorname{im} A}.$$

Die Einschränkung von A auf X_1 ist eine Bijektion von X_1 auf $\operatorname{im} A$. Da $\operatorname{im} A$ nach Lemma 4.14 abgeschlossen ist, gibt es einen Operator $B \in L(\operatorname{im} A, X_1)$ mit $BA|_{X_1} = I|_{X_1}$ und $AB = I|_{\operatorname{im} A}$. Wir setzen B durch 0 zu einem Operator C fort, der auf ganz X definiert ist. Mit diesem Operator rechnet man leicht nach:

- $I - CA$ ist der Projektor von X auf $\ker A$ parallel zu X_1, und
- $I - AC$ ist der Projektor von X auf X_2 parallel zu $\operatorname{im} A$.

Da $\ker A$ und X_2 endlich-dimensional sind, sind beide Projektoren von endlichem Rang und insbesondere kompakt. ■

Nach diesen Beispielen kommen wir zurück zur Spektraltheorie in Banachalgebren. Die meisten der folgenden Resultate sind für $\mathcal{A} = L(X)$ aus der Funktionalanalysis bekannt ist und können in unserem allgemeineren Kontext wie früher bewiesen werden.

Theorem 4.15 (Neumann-Reihe) *Sei $\mathcal{A}$ Banachalgebra mit Einselement e und $a \in \mathcal{A}$ ein Element mit $\|a\| < 1$. Dann ist $e - a$ invertierbar, die Inverse wird durch die Neumann-Reihe $(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ dargestellt, und es gilt*

$$\|(e-a)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|a\|} \quad \textit{sowie} \quad \|(e-a)^{-1} - e\| \le \frac{\|a\|}{1 - \|a\|}.$$

Theorem 4.16 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e. Dann ist die Menge $G\mathcal{A}$ der invertierbaren Elemente von $\mathcal{A}$ offen, und $G\mathcal{A}$ ist eine topologische Gruppe, d.h. Multiplikation und Inversion sind stetige Abbildungen.*

Theorem 4.17 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins und $a \in \mathcal{A}$. Dann ist $\sigma(a)$ eine kompakte (d.h. abgeschlossene und beschränkte) und nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

Die kleinste Zahl $r \ge 0$ mit der Eigenschaft, dass $\sigma(a)$ im Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ liegt, heißt *Spektralradius* von a. Wir bezeichnen den Spektralradius mit $r(a)$.

Theorem 4.18 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e und $a \in \mathcal{A}$. Dann ist*

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}. \tag{4.10}$$

(Die Existenz des Grenzwertes ist Teil der Behauptung.)

Die Beziehung (4.10) ist bemerkenswert, da sie rein algebraische Größen (Spektralradien) mit metrischen Größen (Normen der Elemente a^n) verknüpft.

Theorem 4.19 (Gelfand/Mazur) *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, in der jedes von 0 verschiedene Element invertierbar ist. Dann ist $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $a \in \mathcal{A}$. Nach Satz 4.17 ist $\sigma(a) \neq \emptyset$. Sei $\lambda \in \sigma(a)$. Da $a - \lambda e$ nicht invertierbar ist, muss $a - \lambda e = 0$ bzw. $a = \lambda e$ sein. ■

Theorem 4.20 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $W : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein Homomorphismus. Dann ist W stetig und $\|W\| \leq 1$. Hat $\mathcal{A}$ ein Einselement e und ist $W \neq 0$, so ist $W(e) = 1$ und $\|W\| = 1$.*

Beweis. Angenommen, W ist unbeschränkt oder es ist $\|W\| > 1$. Dann gibt es ein $a \in \mathcal{A}$ mit $\|a\| < 1$ und $W(a) = 1$. Die Reihe $b := \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ konvergiert, und für b gilt $a + ab = b$. Wenden wir hierauf den Homomorphismus W an, so folgt

$$W(b) = W(a) + W(a)W(b) = 1 + W(b),$$

ein Widerspruch. Also ist $\|W\| \leq 1$.

Hat $\mathcal{A}$ ein Einselement e und ist $W \neq 0$, so ist $W(e) \neq 0$ (aus $W(e) = 0$ würde nämlich $W(a) = W(ea) = W(e)W(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$, d.h. $W = 0$ folgen). Aus $W(e)^2 = W(e)$ folgt $W(e) = 1$. Wegen $\|e\| = 1$ folgt $\|W\| \geq 1$. ■

4.3 Inverse Abgeschlossenheit

Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e und $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{A}$, welche e enthält. Offenbar gilt dann

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b) \quad \text{für alle } b \in \mathcal{B}. \tag{4.11}$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass diese Spektren in der Regel nicht übereinstimmen.

Beispiel 4.21 Für $n \in \mathbb{Z}$ sei χ_n die durch $\chi_n(t) := t^n$ definierte stetige Funktion auf der Einheitskreislinie $\mathbb{T}$. Offenbar ist die Menge

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n : N \in \mathbb{N},\, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

eine symmetrische Unteralgebra von $C(\mathbb{T})$. Die Abschließung $\mathbb{A}$ von $\mathcal{P}$ in $C(\mathbb{T})$ ist die sog. *Diskalgebra*. (Es ist an dieser Stelle nicht offensichtlich, dass $\mathbb{A} \neq C(\mathbb{T})$. Dies wird aber im Verlaufe dieses Beispiels gezeigt.) Im weiteren benötigen wir

Lemma 4.22 *Ist $\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n \in \mathcal{P}$ und $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 1$, so gilt*

$$\sum_{n=0}^{N} a_n w^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n \right) (e^{it}) \frac{1}{1 - we^{-it}}\, dt. \tag{4.12}$$

Beweis. Das ist ein Spezialfall der Cauchyschen Integralformel. Ein direkter Beweis verläuft so: Die Reihe

$$\frac{1}{1-we^{-it}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(we^{-it}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} w^k e^{-ikt}$$

konvergiert absolut und daher gleichmäßig bzgl. $t \in [0, 2\pi]$. Wir können somit auf der rechten Seite von (4.12) Summation und Integration vertauschen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n\right)(e^{it}) \sum_{k=0}^{\infty} w^k e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{k=0}^{\infty} w^k \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\, dt.$$

Nun ist $\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\, dt = 2\pi$ für $k = n$ und $= 0$ für $k \neq n$. Hieraus folgt sofort die Behauptung. ∎

Für $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 1$ definieren wir

$$F_w : \mathcal{P} \to \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n w^n.$$

Diese Abbildung ist ein Homomorphismus. Aus Lemma 4.22 folgt, dass F_w stetig ist:

$$\begin{aligned} \left| F_w \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n\right)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{N} a_n w^n\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n\right)(e^{it}) \frac{1}{1-we^{-it}}\, \mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left\|\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n\right\|_\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-we^{-it}|}\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

(Man beachte, dass die Stetigkeit von F_w *nicht* aus Satz 4.20 folgt, da $\mathcal{P}$ keine vollständige Algebra ist.) Wegen der Stetigkeit können wir F_w zu einem stetigen Homomorphismus auf ganz $\mathbb{A}$ fortsetzen. Diesen bezeichnen wir wieder mit F_w. Offenbar ist F_w unital.

Wir betrachten die Funktion χ_1, welche sowohl in $C(\mathbb{T})$ als auch in $\mathbb{A}$ liegt. Betrachtet als Element von $C(\mathbb{T})$ ist offenbar

$$\sigma_{C(\mathbb{T})}(\chi_1) = \mathbb{T}. \tag{4.13}$$

Dagegen werden wir uns überlegen, dass

$$\sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1) = \overline{\mathbb{D}} \quad \text{mit } \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}. \tag{4.14}$$

Wegen $\|\chi_1\|_\infty = 1$ ist zunächst klar, dass $\sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Außerdem folgt aus (4.11) und (4.13), dass $\mathbb{T} \subseteq \sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1)$. Ist schließlich $w \in \mathbb{D}$, so ist $F_w(\chi_1) = w$, und aus $\sigma_{\mathbb{C}}(w) = \{w\}$ folgt $w \in \sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1)$. Damit ist auch $\mathbb{D} \subseteq \sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1)$. Dies zeigt, dass das $\mathbb{A}$-Spektrum von χ_1 wesentlich größer als das $C(\mathbb{T})$-Spektrum dieser Funktion ist. Es zeigt aber auch, dass das $\mathbb{A}$-Spektrum "durch Ausfüllen der Löcher im $C(\mathbb{T})$-Spektrum" entsteht. ∎

Die am Ende des vorigen Beispiels gemachte Beobachtung ist kein Zufall, sondern gilt allgemein, wie wir mit Hilfe des folgenden Resultats von Shilov zeigen werden.

Theorem 4.23 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e und $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{A}$ mit $e \in \mathcal{B}$. Für jedes Element $b \in \mathcal{B}$ ist dann*

$$\partial(\sigma_{\mathcal{B}}(b)) \subseteq \partial(\sigma_{\mathcal{A}}(b)),$$

wobei ∂M für den Rand der Menge M in $\mathbb{C}$ steht.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass

$$\partial(\sigma_{\mathcal{B}}(b)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(b) \quad \text{für alle } b \in \mathcal{B}.$$

Wegen $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b)$ ist dann nämlich

$$\partial(\sigma_{\mathcal{B}}(b)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(b) = \operatorname{int} \sigma_{\mathcal{A}}(b) \cup \partial(\sigma_{\mathcal{A}}(b)) \subseteq \operatorname{int} \sigma_{\mathcal{B}}(b) \cup \partial(\sigma_{\mathcal{A}}(b)),$$

und da $\partial(\sigma_{\mathcal{B}}(b)) \cap \operatorname{int} \sigma_{\mathcal{B}}(b) = \emptyset$, muss $\partial(\sigma_{\mathcal{B}}(b)) \subseteq \partial(\sigma_{\mathcal{A}}(b))$ gelten.

Sei also $\lambda^* \in \partial(\sigma_{\mathcal{B}}(b))$. Dann gibt es eine Folge $(\lambda_n) \subseteq \varrho_{\mathcal{B}}(b)$ mit $\lambda_n \to \lambda^*$. Angenommen, für ein $n \in \mathbb{N}$ wäre

$$\|(b - \lambda_n e)^{-1}\| < \frac{1}{|\lambda^* - \lambda_n|}.$$

Dann wäre wegen

$$|\lambda_n - \lambda^*| = \|(b - \lambda^* e) - (b - \lambda_n e)\| < \frac{1}{\|(b - \lambda_n e)^{-1}\|}$$

das Element $b - \lambda^* e$ invertierbar in $\mathcal{B}$ (Neumann-Reihe), was offenbar Unsinn ist. Also ist $\|(b - \lambda_n e)^{-1}\| \geq |\lambda^* - \lambda_n|^{-1}$ für alle n und damit insbesondere

$$\lim_{n \to \infty} \|(b - \lambda_n e)^{-1}\| = \infty. \tag{4.15}$$

Wäre nun $\lambda^* \notin \sigma_{\mathcal{A}}(b)$, so wäre wegen Satz 4.16 $\|(b - \lambda e)^{-1}\|$ beschränkt für alle λ aus einer Umgebung von λ^*, was (4.15) widerspricht. ■

Topologische Überlegungen liefern hieraus

Theorem 4.24 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{A}$ mit $e \in \mathcal{B}$, und sei $b \in \mathcal{B}$. Dann ist $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ die Vereinigung aus $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$ mit einer gewissen Anzahl beschränkter zusammenhängender (offener) Komponenten von $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(b)$.*

Hat beispielsweise $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$ folgende Form:

so kann $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ nur so aussehen:

Folgerung 4.25 *Seien* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, b *wie in Satz* 4.23. *Besitzt* $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ *keine* (*bzgl.* $\mathbb{C}$) *inneren Punkte, so ist*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b).$$

Besitzt nämlich $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ keine inneren Punkte, so ist es nicht durch Vereinigung von $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$ mit offenen Mengen entstanden, fällt also mit $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$ zusammen. ■

Folgerung 4.26 *Seien* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, b *wie in Satz* 4.23. *Falls* $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(b)$ *zusammenhängend ist, so ist* $\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b)$.

Die Voraussetzung in dieser Folgerung ist beispielsweise erfüllt, wenn $\mathcal{A} = L(H)$ und b ein kompakter Operator auf H ist.

Eine Unteralgebra $\mathcal{B}$ einer unitalen Algebra $\mathcal{A}$ heißt *invers abgeschlossen* in $\mathcal{A}$, falls

$$\sigma_{\mathcal{B}}(b) = \sigma_{\mathcal{A}}(b) \quad \text{für alle } b \in \mathcal{B}.$$

So ist die Diskalgebra $\mathbb{A}$ *nicht* invers abgeschlossen in $C(\mathbb{T})$.

Wir kommen noch einmal auf das Problem zurück, wie sich das Spektrum $\sigma_{\mathcal{B}}(a)$ eines Elementes $a \in \mathcal{B}$ in Abhängigkeit von der Unteralgebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ verhält. Klar ist: je "kleiner" $\mathcal{B}$ ist, desto größer wird $\sigma_{\mathcal{B}}(a)$ werden, wobei sich wegen Satz 4.24 $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ und $\sigma_{\mathcal{B}}(a)$ nur um beschränkte zusammenhängende Komponenten von $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ unterscheiden. Was passiert, wenn man $\mathcal{B}$ minimal wählt?

Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e und $a \in \mathcal{A}$. Die kleinste Algebra, die a und e enthält, besteht offenbar aus allen Polynomen $p(a)$, wobei man für $p(t) := \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$ setzt $p(a) := \alpha_0 e + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_n a^n$.

Die kleinste abgeschlossene Unteralgebra $\mathcal{A}(a)$ von $\mathcal{A}$, welche a und e enthält, ist dann

$$\mathcal{A}(a) := \text{clos}\,\{p(a) : p \text{ Polynom}\}.$$

Offenbar ist $\mathcal{A}(a)$ stets kommutativ. Allgemein heißt eine Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit Einselement e *einfach erzeugt* (singly generated), wenn es ein Element a in $\mathcal{A}$ gibt, so dass $\mathcal{A} = \mathcal{A}(a)$. Insbesondere ist also $\mathcal{A}(a)$ einfach erzeugt.

Theorem 4.27 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e und $a \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}(a)}(a)$ zusammenhängend.*

$\sigma_{\mathcal{A}(a)}(a)$ entsteht also aus $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ durch Hinzunahme *aller* beschränkter zusammenhängender Komponenten von $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ (d.h. durch "Ausfüllen aller Löcher in $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$"). Sehen wir uns in diesem Lichte noch einmal die Diskalgebra $\mathbb{A}$ an. Diese ist einfach erzeugt durch die Funktion χ_1. Also ist $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1)$ zusammenhängend. Außerdem wissen wir, dass $\sigma_{C(\mathbb{T})}(\chi_1) = \chi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Nach Satz 4.24 ist daher $\sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1)$ gleich $\mathbb{T}$ oder gleich $\overline{\mathbb{D}}$. Da $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1)$ zusammenhängend sein muss, bleibt nur $\sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1) = \overline{\mathbb{D}}$.

Beweis von Satz 4.27. Angenommen, die offene Menge $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}(a)}(a)$ besitzt eine nichtleere beschränkte zusammenhängende Komponente G. Sei $z_0 \in G$, und sei $\mathcal{A}_0(a)$ die kleinste (nicht notwendig abgeschlossene) Unteralgebra von $\mathcal{A}(a)$, welche e und a enthält. Weiter sei p ein Polynom. Dieses können wir als holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ auffassen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|p(z_0)| &\leq \max\{|p(z)| : z \in \partial G\} && \text{(Maximumprinzip)} \\
&\leq \max\{|p(z)| : z \in \sigma_{\mathcal{A}(a)}(a)\} && \text{(da } \partial G \subseteq \sigma_{\mathcal{A}(a)}(a)\text{)} \\
&= \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}(a)}(p(a))\} && \text{(Aufg: 3(b), 2. Übung)} \\
&= r(p(a)) \leq \|p(a)\|.
\end{aligned}$$

Sei nun $b \in \mathcal{A}_0(a)$. Dann gibt es ein Polynom p so, dass $b = p(a)$. Dieses ist nicht unbedingt eindeutig bestimmt. Gibt es aber zwei Polynome p_1, p_2 mit $b = p_1(a) = p_2(a)$, so ist wegen der Abschätzung $|p(z_0)| \leq \|p(a)\|$ auch $p_1(z_0) = p_2(z_0)$. Wir können daher eine Abbildung

$$W_0 : \mathcal{A}_0(a) \to \mathbb{C}, \quad b \mapsto p(z_0)$$

definieren, wobei p irgendein Polynom mit $p(a) = b$ ist. Offenbar ist W_0 ein Homomorphismus. Wegen $\|W_0(b)\| = |p(z_0)| \leq \|p(a)\| = \|b\|$ ist dieser stetig und kann daher zu einem stetigen Homomorphismus $W : \mathcal{A}(a) \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Für diesen gilt

$$W(a) = W_0(a) = p(z_0) = z_0 \quad \text{mit } p(z) = z.$$

Dann ist aber $z_0 \in \sigma_{\mathcal{A}(a)}(a)$; ein Widerspruch. ■

4.4 Maximale Ideale und Radikal

Ein linkes, rechtes oder zweiseitiges Ideal J einer Algebra $\mathcal{A}$ heißt *echt*, wenn es nicht mit ganz $\mathcal{A}$ übereinstimmt. Ein echtes linkes, rechtes oder zweiseitiges

Ideal $\mathcal{J}$ einer Algebra $\mathcal{A}$ heißt *maximal*, wenn es kein echtes linkes, rechtes bzw. zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$ gibt, welches streng größer ist als $\mathcal{J}$.

Theorem 4.28 (Krull's Lemma) *Jedes echte linke (rechte, zweiseitige) Ideal $\mathcal{J}$ einer Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement ist enthalten in einem maximalen linken (rechten, zweiseitigen) Ideal von $\mathcal{A}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{J}$ ein echtes Linksideal von $\mathcal{A}$. Mit Λ bezeichnen wir die Menge aller echten Linksideale von $\mathcal{A}$, welche $\mathcal{J}$ enthalten. Diese Menge ist bzgl. $\subseteq$ *partiell geordnet*, das heißt:

- $A \subseteq B,\ B \subseteq C \ \Rightarrow\ A \subseteq C$,
- $A \subseteq A$,
- $A \subseteq B,\ B \subseteq A \ \Rightarrow\ A = B$,

und es ist $\Lambda \neq \emptyset$ (da $\mathcal{J} \in \Lambda$). Weiter sei $\Lambda' \subseteq \Lambda$ eine *linear geordnete* Teilmenge, das heißt:

- $A,\ B \in \Lambda' \ \Rightarrow\ A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$.

Dann ist $\mathcal{J}' := \bigcup_{K \in \Lambda'} K$ wieder ein Linksideal von $\mathcal{A}$, welches $\mathcal{J}$ enthält, und $\mathcal{J}'$ ist ein echtes Ideal von $\mathcal{A}$, da e nicht in $\mathcal{J}'$ liegt. Also ist $\mathcal{J}' \in \Lambda$.

Nach dem Zornschen Lemma enthält Λ ein maximales Element $\mathcal{J}_{\max}$ (d.h. $\mathcal{J}_{\max}$ enthält jedes mit $\mathcal{J}_{\max}$ vergleichbare Ideal). $\mathcal{J}_{\max}$ ist offenbar ein maximales Linksideal von $\mathcal{A}$, welches $\mathcal{J}$ enthält. ∎

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Eins. Unter dem *Radikal* von $\mathcal{A}$ (Bezeichnung: $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$) versteht man den Durchschnitt aller maximalen Linksideale von $\mathcal{A}$. Die Algebra $\mathcal{A}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\operatorname{Rad}\mathcal{A} = \{0\}$.

Offenbar ist $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$ wieder ein Linkideal von $\mathcal{A}$. Der folgende Satz liefert äquivalente Beschreibungen von $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$ und zeigt, warum $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$ z.B. im Zusammenhang mit Invertierbarkeitsproblemen von Interesse ist.

Theorem 4.29 *Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Eins e. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent für ein Element $r \in \mathcal{A}$:*
(a) $r \in \operatorname{Rad}\mathcal{A}$;
(b) $e - ar$ ist von links invertierbar für jedes $a \in \mathcal{A}$;
(c) $e - arb$ ist invertierbar für alle $a,\ b \in \mathcal{A}$;
(d) $e - rb$ ist von rechts invertierbar für jedes $b \in \mathcal{A}$;
(e) r liegt im Durchschnitt der maximalen Rechtsideale von $\mathcal{A}$.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Sei $r \in \operatorname{Rad}\mathcal{A}$. Angenommen, es gibt ein $a \in \mathcal{A}$ so, dass $e - ar$ nicht von links invertierbar ist. Dann ist $\mathcal{A}(e - ar)$ ein echtes (da e nicht enthalten ist) Linksideal von $\mathcal{A}$. Nach dem Lemma von Krull ist $\mathcal{A}(e - ar)$ in einem maximalen Linksideal $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}$ enthalten. Wegen $e \in \mathcal{A}$ ist insbesondere $e - ar \in \mathcal{J}$. Außerdem ist $ar \in \mathcal{J}$, da $r \in \operatorname{Rad} \mathcal{A}$. Folglich muss auch $e \in \mathcal{J}$ sein, woraus $\mathcal{J} = \mathcal{A}$ folgt; ein Widerspruch.

(b) $\Rightarrow$ *(a)*: Sei $e - ar$ von links invertierbar für alle $a \in \mathcal{A}$. Angenommen, $r \notin \operatorname{Rad} \mathcal{A}$. Dann gibt es ein maximales Linksideal $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}$, welches r nicht enthält. Die Menge $\mathcal{L} := \{j + ar : j \in \mathcal{J},\ a \in \mathcal{A}\}$ ist dann ein Linksideal von $\mathcal{A}$, welches $\mathcal{J}$ echt enthält (da $r \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{J}$). Da $\mathcal{J}$ maximal ist, muss $\mathcal{L} = \mathcal{A}$ sein. Es gibt also Elemente $j \in \mathcal{J}$, $a \in \mathcal{A}$ so, dass $j + ar = e$. Hieraus folgt, dass $j = e - ar$ von links invertierbar ist. Dies widerspricht der Tatsache, dass j im *echten* Linksideal $\mathcal{J}$ liegt.

(b) $\Rightarrow$ *(c)*: Sei $r \in \operatorname{Rad} \mathcal{A}$ und $a \in \mathcal{A}$. Dann ist $e - ar$ von links invertierbar. Wir zeigen zuerst, dass dieses Element auch von rechts invertierbar ist. Sei $e + b$ eine Linksinverse von $e - ar$:

$$(e + b)(e - ar) = e \quad \text{bzw.} \quad b = ar + bar. \tag{4.16}$$

Da $r \in \operatorname{Rad} \mathcal{A}$ und $\operatorname{Rad} \mathcal{A}$ ein Linksideal ist, ist auch $b \in \operatorname{Rad} \mathcal{A}$. Insbesondere ist $e + b = e - (-e)b$ von links invertierbar, während aus (4.16) die Invertierbarkeit von $e + b$ von rechts folgt. Also ist $e + b$ (zweiseitig) invertierbar. Wieder wegen (4.16) folgt die zweiseitige Invertierbarkeit von $e - ar$. Nunmehr ist klar, dass für beliebige $a, b \in \mathcal{A}$ das Element $e - bar$ invertierbar ist. Aus Aufgabe 2 der 2. Übung folgt die Invertierbarkeit von $e - arb$.

Die Implikation *(c)* $\Rightarrow$ *(b)* ist offensichtlich. Die restlichen Implikationen folgen auf Grund der Links-Rechts-Symmetrie von *(c)* wie zuvor. ∎

Folgerung 4.30 *Das Radikal einer Algebra mit Eins ist ein Ideal dieser Algebra.*

Nach diesen rein algebraischen Resultaten gehen wir über zur Betrachtung maximaler Ideale in Banachalgebren.

Theorem 4.31 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, und sei $\mathcal{J}$ ein echtes linkes (rechtes, zweiseitiges) Ideal von $\mathcal{A}$. Dann ist die Abschließung von $\mathcal{J}$ ebenfalls ein* echtes *linkes (rechtes, zweiseitiges) Ideal von $\mathcal{A}$.*

Beweis. Wir führen den Beweis für Linksideale. Sei also $\mathcal{J}$ ein echtes Linksideal von $\mathcal{A}$. Dann ist offenbar $\operatorname{clos} \mathcal{J}$ ebenfalls ein Linksideal von $\mathcal{A}$, und wir müssen zeigen, dass $\operatorname{clos} \mathcal{J}$ ein echtes Ideal ist. Dazu betrachten wir die Menge $\mathcal{B} := \{e - k : \|k\| < 1\}$. Diese ist offen und enthält nur invertierbare Elemente (Neumann-Reihe). Keines der Elemente von $\mathcal{B}$ kann also in $\mathcal{J}$ liegen, d.h. $\mathcal{B}$ liegt im Komplement von $\mathcal{J}$. Da $\mathcal{B}$ offen ist, liegt $\mathcal{B}$ auch im Komplement von $\operatorname{clos} \mathcal{J}$. Insbesondere ist $\operatorname{clos} \mathcal{J} \neq \mathcal{A}$. ∎

Folgerung 4.32 *Maximale linke (rechte, zweiseitige) Ideale unitaler Banachalgebren sind abgeschlossen.*

Folgerung 4.33 *(a) Das Radikal einer Algebra mit Eins ist ein zweiseitiges Ideal dieser Algebra.*

(b) Das Radikal einer Banachalgebra mit Eins ist ein abgeschlossenes Ideal dieser Algebra.

Folgerung 4.34 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins und $r \in \operatorname{Rad} \mathcal{A}$. Dann ist $\sigma(r) = \{0\}$.*

4.5 Die wunderbare Welt der C^*-Algebren

Die in diesem Abschnitt zitierten Resultate zeigen, dass das Arbeiten mit und in C^*-Algebren wesentlich einfacher als in Banachalgebren ist. Aus Zeitgründen können wir diese Resultate hier nicht beweisen, sonden verweisen auf die reichhaltige Literatur (Pedersen, Murphy, Davidson,...) und auf das Skript zur Vorlesung "Banach- und C^*-Algebren". Einige einfache Resultate sehen wir uns in der Übung an.

Theorem 4.35 *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ C^*-Algebren und $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein (nicht notwendig stetiger) *-Homomorphismus. Dann gilt:*

(a) W ist stetig und sogar kontraktiv: $\|W(a)\| \le \|a\|$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

(b) Ist W injektiv, so ist W eine Isometrie: $\|W(a)\| = \|a\|$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

(c) Jedes abgeschlossene Ideal von $\mathcal{A}$ ist symmetrisch.

(d) Ist $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$, so definiert $(a + \mathcal{J})^* := a^* + \mathcal{J}$ eine Involution auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}$, die $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ zu einer C^*-Algebra macht.

Theorem 4.36 (Isomorphiesätze) *(a) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C^*-Algebren und $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein *-Homomorphismus. Dann ist $\operatorname{im} W$ abgeschlossen und folglich eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{B}$, und es gibt einen natürlichen *-Isomorphismus*

$$\mathcal{A}/\ker W \cong \operatorname{im} W,$$

nämlich $a + \ker W \mapsto W(a)$.

(b) Sei $\mathcal{A}$ C^*-Algebra, $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{K}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{J}$. Dann ist $\mathcal{K}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$, und es gilt

$$(\mathcal{A}/\mathcal{K})/(\mathcal{J}/\mathcal{K}) \cong \mathcal{A}/\mathcal{J}.$$

(c) Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra, $\mathcal{B}$ eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{B} + \mathcal{J}$ abgeschlossen und folglich eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$, und es gilt

$$(\mathcal{B} + \mathcal{J})/\mathcal{J} \cong \mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{J}).$$

Theorem 4.37 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins e.*

(a) $\mathcal{A}$ ist halbeinfach.

(b) Jede C^*-Unteralgebra $\mathcal{B}$ mit $e \in \mathcal{B}$ ist invers abgeschlossen in $\mathcal{A}$.

Dies ist einer der Sätze, die das Arbeiten mit C^*-Algebren so angenehm machen. Will man die Invertierbarkeit eines Elementes $a \in \mathcal{A}$ untersuchen, so genügt es, diese Invertierbarkeit in irgendeiner C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die e und a (und damit auch a^*) enthält, zu untersuchen, z.B. in der kleinsten abgeschlossenen Unteralgebra von $\mathcal{A}$, welche e, a und a^* enthält.

Ein Element a einer unitalen Algebra mit Involution heißt

- *normal*, wenn $aa^* = a^*a$.
- *selbstadjungiert*, wenn $a^* = a$,
- *isometrisch*, wenn $a^*a = e$,
- *unitär*, wenn $a^*a = aa^* = e$.

Theorem 4.38 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins. Dann gilt:*
(*a*) *Ist $a \in \mathcal{A}$ normal, so ist $r(a) = \|a\|$.*
(*b*) *ist $a \in \mathcal{A}$ isometrisch, so ist $r(a) = 1$.*
(*c*) *ist $a \in \mathcal{A}$ unitär, so ist $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$.*
(*d*) *ist $a \in \mathcal{A}$ selbstadjungiert, so ist $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.*

Eine bemerkenswerte Konsequenz von Aussage (a) ist: In C^*-Algebren bestimmt die "Algebra" (Spektralradius) die Norm (zunächst der selbstadjungierten und dann über das C^*-Axiom aller Elemente)! Es kann auf C^*-Algebren insbesondere nur *eine* C^*-Norm geben!

5 Lokale Prinzipien

Ziel dieses Abschnittes ist die Beschreibung des lokalen Prinzips von Allan/Douglas. Es kann betrachtet werden als nichtkommutative Verallgemeinerung der klassischen Gelfandtheorie für kommutative Banachalgebrae. Wir beginnen daher mit dem kommutativen Fall. Insbesondere werden wir zeigen, dass jede kommutative C^*-Algebra mit Eins zu einer Algebra der Gestalt $C(Y)$ mit einem kompakten Hausdorff-Raum X *-isomorph ist.

5.1 Gelfandtheorie für kommutative Banachalgebren

Wir machen uns zunächst klar, dass man sich jeden Banachraum als einen Raum von stetigen Funktionen auf einem Hausdorffschen Kompakt vorstellen kann. Sei X Banachraum und X' sein dualer Raum. Jedem Element $x \in X$ ordnen wir auf natürliche Weise eine Funktion $\widehat{x}$ auf der Einheitskugel $B(X') := \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ zu:

$$\widehat{x} : B(X') \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(x). \tag{5.1}$$

Aus dem Satz von Hahn-Banach folgt für jedes $x \in X$ die Existenz eines Funktionals $f \in B(X')$ mit $f(x) = \|x\|$. Aus dieser Tatsache und aus $|f(x)| \leq \|x\|$ folgt

$$\|\widehat{x}\|_\infty := \sup \{|f(x)| : f \in B(X')\} = \|x\|. \tag{5.2}$$

Wir versehen $B(X')$ mit der schwächsten Topologie, bzgl. derer alle Funktionen (5.1) mit $x \in X$ stetig sind. Dies ist die sogenannte *-schwache Topologie. Nach einem Satz von Banach/Alaoglu ist $B(X')$ bezüglich dieser Topologie ein kompakter Hausdorff-Raum. Wegen (5.2) wird also durch

$$X \to C(B(X')), \quad x \mapsto \widehat{x}$$

eine lineare und isometrische Einbettung des Banachraumes X in den Banachraum $C(B(X'))$ der (bzgl. der *-schwachen Topologie) stetigen komplexwertigen Funktionen auf $B(X')$ gegeben.

Einschub zur *-schwachen Topologie. Eine Topologie beschreiben heißt, die offenen Mengen zu beschreiben. Dies kann durch die Angabe einer Umgebungsbasis für jeden Punkt der Menge geschehen.

Eine Umgebungsbasis für $f \in B(X')$ bzgl. der *-schwachen Topologie wird durch die Mengen

$$U_{x_1,\ldots,x_k,\varepsilon}(f) := \{g \in B(X') : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \text{ für alle } i = 1, \ldots, k\}$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in X$ und $\varepsilon > 0$ geliefert. Diese Topologie ist Hausdorffsch: Sind $f, g \in B(X')$ mit $f \neq g$, so gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$. Für $\varepsilon := \frac{1}{3}|f(x) - g(x)|$ sind dann die Mengen

$$U_{x,\varepsilon}(f) := \{h \in B(X') : |f(x) - h(x)| < \varepsilon\}$$

bzw.

$$U_{x,\varepsilon}(g) := \{h \in B(X') : |g(x) - h(x)| < \varepsilon\}$$

disjunkte offene Umgebungen von f bzw. g.

Eine äquivalente Beschreibung der *-schwachen Topologie durch konvergente Netze lautet wie folgt: *Ein Netz $(f_t)_{t\in T}$ konvergiert genau dann *-schwach gegen $f \in B(X')$, wenn $f_t(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$.* ■

Zurück zum Hauptthema. Ist nun der Banachraum X eine Banachalgebra $\mathcal{A}$, so hätte man gern eine *homomorphe* Einbettung von $\mathcal{A}$ als eine Unteralgebra von $C(B(X'))$. Den Elementen a, b und ab von $\mathcal{A}$ entsprechen die Funktionen

$$\widehat{a} : f \mapsto f(a), \quad \widehat{b} : f \mapsto f(b), \quad \widehat{ab} : f \mapsto f(ab).$$

Um den gewünschten Einbettungshomomorphismus zu bekommen, muss wenigstens

$$\widehat{a}\widehat{b} = \widehat{ab} \quad \text{bzw.} \quad f(ab) = f(a)f(b) \quad \text{für alle } a,\, b \in \mathcal{A}$$

sein. Wir sollten also nicht mehr alle Elemente aus $B(\mathcal{A}')$ betrachten, sondern nur die Algebra-Homomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathbb{C}$. Dies erweist sich in der Regel jedoch als wenig hilfreich. Z.B. gibt es im Fall $N > 1$ für die Algebra $\mathbb{C}^{N\times N}$ der komplexen $N \times N$-Matrizen nur einen Homomorphismus $\mathbb{C}^{N\times N} \to \mathbb{C}$, die Nullabbildung. Für $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ ist also $\widehat{A}$ eine Funktion, die auf einer einelementigen Menge definiert und dort 0 ist. Wir werden aber sehen, dass *kommutative* Banachalgebren (mit Eins) stets (in einem gewissen Sinn) ausreichend viele Homomorphismen in $\mathbb{C}$ besitzen.

Sei $\mathcal{A}$ eine (zunächst noch nicht notwendig kommutative) Banachalgebra. Ein *Charakter* von $\mathcal{A}$ ist ein nichttrivialer Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathbb{C}$. Die Menge aller Charakter von $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $M(\mathcal{A})$, und wir versehen diese Menge mit der *-schwachen Topologie. Man beachte, dass $M(\mathcal{A}) = \emptyset$ sein kann.

Theorem 5.1 (*a*) *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins. Dann ist $M(\mathcal{A})$ kompakt, und die Abbildung $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C(M(\mathcal{A}))$, $x \mapsto \widehat{x}$ mit $\widehat{x}(f) = f(x)$ ist ein kontraktiver Homomorphismus.*

(*b*) *Ist $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra ohne Eins, so ist $M(\mathcal{A})$ lokalkompakt, und $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C_0(M(\mathcal{A}))$, $x \mapsto \widehat{x}$ ist ein kontraktiver Homomorphismus.*

Beweis. Wir überlegen uns nur Aussage (*a*). Aus Satz 4.20 wissen wir, dass

$$M(\mathcal{A}) \subseteq B(\mathcal{A}') = \{f \in \mathcal{A}' : \|f\| \le 1\}.$$

Da $B(\mathcal{A}')$ ein Hausdorff-Raum und nach Banach/Alaoglu kompakt ist, haben wir für die Kompaktheit von $M(\mathcal{A})$ nur die Abgeschlossenheit von $M(\mathcal{A})$ in $B(\mathcal{A}')$ zu zeigen. Seien dazu a, $b \in \mathcal{A}$. Dann ist die Menge

$$M_{a,b} := \{f \in B(\mathcal{A}') : f(ab) = f(a)f(b)\} = \{f \in B(\mathcal{A}') : \widehat{ab}(f) = \widehat{a}(f)\widehat{b}(f)\}$$

abgeschlossen in $B(\mathcal{A}')$, da $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ und $\widehat{ab}$ stetige Funktionen auf $B(\mathcal{A}')$ sind. Aus dem gleichen Grund ist auch

$$M_e := \{f \in B(\mathcal{A}') : f(e) = \widehat{e}(f) = 1\}$$

abgeschlossen. Damit ist aber auch

$$M(\mathcal{A}) := \bigcap_{(a,b)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A}} M_{a,b} \cap M_e$$

abgeschlossen und mithin kompakt. Der Rest der Behauptung folgt aus

$$\|\widehat{a}\|_\infty = \sup\{|\widehat{a}(f)| : f \in M(\mathcal{A})\} \le \sup\{|\widehat{a}(f)| : f \in B(\mathcal{A}')\} = \|a\|$$

für alle $a \in \mathcal{A}$ (vgl. (5.2)). ∎

Die nächsten Schritte bereiten wir vor, indem wir einen Zusammenhang herstellen zwischen maximalen Idealen und den Kernen von Charakteren.

Lemma 5.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Dann ist der Kern jedes Charakters von $\mathcal{A}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{A}$. Ist umgekehrt $\mathcal{J}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{A}$, so ist $\mathcal{A}/\mathcal{J} \cong \mathbb{C}$, d.h. $\mathcal{J}$ ist Kern eines Charakters von $\mathcal{A}$. Dieser Charakter ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $f \in M(\mathcal{A})$. Dann ist wegen $\mathcal{A}/\ker f \cong \operatorname{im} f = \mathbb{C}$ die Kodimension des Unterraumes $\ker f$ von $\mathcal{A}$ gleich 1. Es kann also kein Ideal geben, welches echt zwischen $\ker f$ und $\mathcal{A}$ liegt.

Sei umgekehrt $\mathcal{J}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Wir zeigen, dass $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ sogar ein Körper ist. Sei $a \notin \mathcal{J}$. Dann ist die Menge $\mathcal{A}\cdot a + \mathcal{J}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$, welches $\mathcal{J}$ umfaßt, aber echt größer ist als $\mathcal{J}$. Da $\mathcal{J}$ maximal ist, folgt $\mathcal{A}\cdot a + \mathcal{J} = \mathcal{A}$. Dann gibt es aber Elemente $b \in \mathcal{A}$ und $j \in \mathcal{J}$ so, dass $ab + j = e$. Folglich ist $a + \mathcal{J}$ in $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ invertierbar, d.h. $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ ist ein Körper. Nach dem Satz von Gelfand-Mazur (Satz 4.19) ist $\mathcal{A}/\mathcal{J} \cong \mathbb{C}$. Ist π der kanonische Homomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ und ξ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ auf $\mathbb{C}$, so ist $\xi \circ \pi$ ein Charakter von $\mathcal{A}$, dessen Kern gerade $\mathcal{J}$ ist.

Zur Eindeutigkeit: Sei $\mathcal{J}$ ein maximales Ideal und $\mathcal{J} = \ker f = \ker g$ mit Charakteren f und g. Für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist dann

$$a - f(a)e \in \ker f = \mathcal{J} \quad \text{und} \quad a - g(a)e \in \ker f = \mathcal{J},$$

woraus $(f(a) - g(a))e \in \mathcal{J}$ folgt. Dann muss aber $f(a) = g(a)$ sein. Da dies für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt, ist $f = g$. ∎

Man nennt $M(\mathcal{A})$ daher auch den *Raum der maximalen Ideale* der kommutativen Banachalgebra $\mathcal{A}$. Weiter nennen wir für $x \in \mathcal{A}$ die Funktion $\widehat{x} \in C(M(\mathcal{A}))$ die *Gelfandtransformierte* von x, und die Abbildung

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C(M(\mathcal{A})), \quad x \mapsto \widehat{x}$$

heißt die *Gelfandtransformation* auf $\mathcal{A}$. Wir formulieren nun eine der zentralen Aussagen der Gelfandtheorie.

Theorem 5.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins $e \neq 0$. Dann ist der Raum der maximalen Ideale $M(\mathcal{A})$ nicht leer. Für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist*

$$\widehat{a}(M(\mathcal{A})) = \sigma(a) \quad \textit{und} \quad \|\widehat{a}\|_\infty = r(a),$$

und die Gelfandtransformation $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C(M(\mathcal{A}))$ ist ein unitaler kontraktiver Homomorphismus. Der Kern von $\mathcal{G}$ ist das Radikal von $\mathcal{A}$. Insbesondere ist $\mathcal{G}$ genau dann injektiv, wenn $\mathcal{A}$ halbeinfach ist.

Beweis. Zunächst ist $M(\mathcal{A})$ nicht leer. Die Algebra $\mathcal{A}$ besitzt nämlich wenigstens ein echtes Ideal (z.B. $\{0\}$). Dieses ist nach dem Krull'schen Lemma (Satz 4.28) in einem maximalen Ideal enthalten. Dieses maximale Ideal ist wegen Lemma 5.2 der Kern eines Charakters von $\mathcal{A}$.

Wir zeigen als nächstes, dass $\widehat{a}(M(\mathcal{A})) = \sigma(a)$. Sei zunächst $\lambda \in \sigma(a)$. Dann ist $a - \lambda e$ nicht invertierbar, und $\mathcal{A}(a - \lambda e)$ ist ein echtes Ideal von $\mathcal{A}$, da es die Eins nicht enthält. Aus dem Krull'schen Lemma wissen wir, dass $\mathcal{A}(a - \lambda e)$ in einem maximalen Ideal von $\mathcal{A}$ enthalten ist, welches Kern eines Charakters f von $\mathcal{A}$ ist. Da $\mathcal{A}$ eine Eins besitzt, liegt $a - \lambda e$ im Ideal $\mathcal{A}(a - \lambda e)$ und folglich im Kern von f. Es ist also $0 = f(a - \lambda e) = f(a) - \lambda$ und daher $\lambda = f(a) = \widehat{a}(f) \in \widehat{a}(M(\mathcal{A}))$.

Sei umgekehrt $\lambda \in \widehat{a}(M(\mathcal{A}))$, d.h. $\lambda = f(a)$ für ein $f \in M(\mathcal{A})$. Dann kann $a - \lambda e$ nicht in $\mathcal{A}$ invertierbar sein: gäbe es ein Inverses b zu $a - \lambda e$, so würde die Anwendung von f auf die Gleichung $(a - \lambda e)b = e$ gerade $f(a - \lambda e) \neq 0$ bzw. $f(a) \neq \lambda$ liefern, ein Widerspruch. Also ist $\lambda \in \sigma(a)$. Hieraus folgt $\widehat{a}(M(\mathcal{A})) = \sigma(a)$, und die Beziehung $\|\widehat{a}\|_\infty = r(a)$ ist eine offensichtliche Konsequenz hieraus. Insbesondere ist $\|\widehat{a}\|_\infty \leq \|a\|$, d.h. die Gelfandtransformation ist eine Kontraktion. Schließlich sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $a \in \ker \mathcal{G}$;
- $f(a) = 0$ für alle $f \in M(\mathcal{A})$;
- a liegt in jedem maximalen Ideal von $\mathcal{A}$;
- $a \in \operatorname{Rad} \mathcal{A}$. ∎

Beispiel 5.4 Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $\mathcal{A} = C(X)$. Wir kennen bereits die echten abgeschlossenen Ideale von $C(X)$ aus Satz 4.8: Sie sind von der Gestalt $\{f \in C(X) : f|_K = 0\}$ mit einer nichtleeren kompakten Teilmenge K von X. Da sich diese Ideale vergrößern, wenn K kleiner wird, sind die maximalen Ideale von $C(X)$ gerade durch die einelementigen Mengen $\{x\}$ mit $x \in X$ gegeben. Für jedes $x \in X$ ist also $\{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ ein maximales Ideal, und jedes maximale Ideal ist von dieser Gestalt. Mit Lemma 5.2 folgt hieraus: Für jedes

$x \in X$ ist die Punktauswertung $\delta_x(f) := f(x)$ ein Charakter von $C(X)$, und jeder Charakter ist von dieser Gestalt. Wir haben also eine Bijektion

$$X \to M(C(X)), \quad x \mapsto \delta_x \tag{5.3}$$

zwischen den Mengen X und $M(C(X))$. Wir überlegen uns noch, dass (5.3) sogar ein Homöomorphismus zwischen den topologischen Räumen X und $M(C(X))$ ist. Aus der Definition der Topologie auf $M(C(X))$ folgt, dass die Abbildung (5.3) stetig ist, denn alle Abbildungen $x \mapsto \widehat{f(\delta_x)} = f(x)$ sind auf X (per Definition) stetig. Außerdem ist - wie bereits bemerkt - (5.3) eine Bijektion und X kompakt und somit (5.3) ein Homöomorphismus. Halten wir fest:

Theorem 5.5 *Sei X ein Hausdorffscher Kompakt und $\mathcal{A} = C(X)$. Dann ist $M(C(X))$ homöomorph zu X, und ein Homöomorphismus von X auf $M(C(X))$ ist durch $x \mapsto \delta_x$ gegeben.*

Wenn wir also $M(C(X))$ und X identifizieren, so ist die Gelfandtransformation $\mathcal{G} : C(X) \to C(X)$ gerade die identische Abbildung. ■

Beispiel 5.6 Hier bestimmen wir den Raum der maximalen Ideale der Disk-Algebra $\mathbb{A}$ aus Abschnitt 1.5. Wir wissen bereits, dass $\mathbb{A} \subseteq C(\mathbb{T})$. Für jedes $z \in \mathbb{T}$ wird durch $\delta_z : \mathbb{A} \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(z)$ ein Charakter von $\mathbb{A}$ definiert. Außerdem wissen wir aus Lemma 4.22, dass sich für jedes $w \in \mathbb{D}$ das durch $\delta_w : \mathcal{P} \to \mathbb{C},\ p \mapsto p(w)$ definierte Funktional stetig zu einem Charakter von $\mathbb{A}$ fortsetzen lässt, den wir wieder mit δ_w bezeichnen. Wir zeigen

Theorem 5.7 *Die Abbildung*

$$\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to M(\mathbb{A}),\ z \mapsto \delta_z \tag{5.4}$$

ist ein Homöomorphismus von $\overline{\mathbb{D}}$ auf $M(\mathbb{A})$.

Beweis. Nach obigen Bemerkungen ist φ korrekt definiert und φ bildet die Kreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$ in $M(\mathbb{A})$ ab. Sind $z_1,\ z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ Punkte mit $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, so ist

$$z_1 = \delta_{z_1}(\chi_1) = \delta_{z_2}(\chi_1) = z_2,$$

d.h. φ ist injektiv. Wir zeigen, dass φ auch surjektiv ist. Sei $f \in M(\mathbb{A})$ und $z := f(\chi_1)$. Wegen $\|f\| = 1$ und $\|\chi_1\| = 1$ ist $|z| \leq 1$, d.h. $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Die Identität

$$f\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n f(\chi_1)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = \delta_z\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n\right)$$

zeigt dann, dass f und δ_z auf der dichten Teilmenge $\mathcal{P}$ von $\mathbb{A}$ übereinstimmen. Da f und δ_z auf $\mathbb{A}$ stetig sind, stimmen sie auf ganz $\mathbb{A}$ überein, d.h. φ ist surjektiv.

Da $\overline{\mathbb{D}}$ kompakt ist und φ eine Bijektion, genügt es für die Homöomorphie von φ zu zeigen, dass φ stetig ist. Da $\overline{\mathbb{D}}$ ein metrischer Raum ist, reicht es außerdem, Folgen zu betrachten. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{D}}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \overline{\mathbb{D}}$. Für jedes analytische trigonometrische Polynom gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{z_n}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k\chi_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N} a_k z_n^k = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k = \delta_z\left(\sum_{k=0}^{N} a_k\chi_k\right).$$

Da $\mathcal{P}$ in $\mathbb{A}$ dicht liegt und $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\delta_{z_n}\| = 1$ ist, folgt (über einen $\varepsilon/3$-Trick)

$$\lim_{n\to\infty}\delta_{z_n}(f) = \delta_z(f) \quad \text{für alle } f\in\mathbb{A},$$

d.h. die Folge $(\delta_{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $*$-schwach gegen δ_z. Das ist aber die Stetigkeit von φ. ■

Im Weiteren werden wir $M(\mathbb{A})$ mit $\overline{\mathbb{D}}$ vermöge der Abbildung (5.4) identifizieren. Für jedes Polynom $p\in\mathcal{P}$ ist dann die Gelfand-Transformierte $\widehat{p}$ analytisch auf $\mathbb{D}$ und stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Nach dem Maximumprinzip gilt also

$$\sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}}|\widehat{p}(z)| = \sup_{z\in\partial(\overline{\mathbb{D}})}|\widehat{p}(z)| = \sup_{z\in\mathbb{T}}|p(z)|,$$

d.h. $\|\widehat{a}\|_\infty = \|a\|$ für alle $a\in\mathcal{P}$ und folglich für alle $a\in\mathbb{A}$. In diesem Fall ist die Gelfandtransformation $\mathcal{G}:\mathbb{A}\to C(M(\mathbb{A})) = C(\overline{\mathbb{D}})$ also eine Isometrie, jedoch nicht surjektiv. ■

Als nächstes überlegen wir uns, wie man den Raum der maximalen Ideale einer einfach erzeugten Banachalgebra beschreiben kann.

Theorem 5.8 *Sei $\mathcal{A}$ eine einfach erzeugte Banachalgebra mit Eins, und a sei ein Erzeuger von $\mathcal{A}$. Dann ist die Abbildung*

$$T: M(\mathcal{A})\to\sigma(a),\quad f\mapsto f(a)$$

ein Homöomorphismus von $M(\mathcal{A})$ auf $\sigma(a)$.

Beweis. Aus Satz 5.3 wissen wir, dass die Abbildung T korrekt definiert sowie surjektiv ist. Nach der Definition der *-schwachen Topologie auf $M(\mathcal{A})$ ist auch die Stetigkeit von T sofort klar: Ist $(f_t)\subseteq M(\mathcal{A})$ ein Netz, welches gegen $f\in M(\mathcal{A})$ *-schwach konvergiert, so konvergiert offenbar $(Tf_t) = (f_t(a))$ gegen $f(a) = T(f)$.

Für den Beweis der Injektivität von T seien $f_1,\ f_2\in M(\mathcal{A})$ mit $T(f_1) = T(f_2)$. Dann ist $f_1(a) = f_2(a)$, und da f_1 und f_2 Charaktere sind, folgt

$$f_1(p(a)) = f_2(p(a)) \quad \text{für jedes Polynom } p.$$

Da die Polynome $p(a)$ dicht in $\mathcal{A}$ liegen und f_1 und f_2 stetig sind, stimmen f_1 und f_2 auf ganz $\mathcal{A}$ überein, d.h. es ist $f_1 = f_2$. Die Behauptung folgt nun wie in den vorangegangenen Sätzen. ∎

Identifiziert man $M(\mathcal{A})$ mit $\sigma(a)$ vermöge der Abbildung T, so überführt die Gelfandtransformation das Element a gerade in die identische Abbildung auf $\sigma(a)$.

Satz 5.8 liefert auch einen alternativen Zugang zu den Resultaten aus Beispiel 5.6 (beachte, dass $\mathbb{A}$ einfach erzeugt und χ_1 ein Erzeuger ist).

Abschließend zeigen wir ein weiteres Resultat über "automatische Stetigkeit".

Theorem 5.9 *$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ seien kommutative Banachalgebren mit Eins, $\mathcal{B}$ sei außerdem halbeinfach, und $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sei ein unitaler Homomorphismus. Dann ist W stetig.*

Im Spezialfall $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ ist das gerade die Aussage von Satz 4.20. Wir werden im Beweis davon Gebrauch machen.

Beweis. Sei $a_n \to a$ in $\mathcal{A}$ und $W(a_n) \to b$ in $\mathcal{B}$. Wir zeigen, dass $b = W(a)$. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Sei $f \in M(\mathcal{B})$ beliebig gewählt. Dann ist $g := f \circ W$ ein Charakter von $\mathcal{A}$. Nach Satz 4.20 sind f und g stetig. Daher ist

$$f(b) = \lim f(W(a_n)) = \lim g(a_n) = g(a) = f(W(a)).$$

Da diese Beziehung für jedes $f \in M(\mathcal{B})$ gilt, muss $b - W(a)$ im Radikal von $\mathcal{B}$ liegen, welches nach Voraussetzung nur aus der 0 besteht. Also ist in der Tat $b = W(a)$. ∎

Folgerung 5.10 *Isomorphismen zwischen halbeinfachen kommutativen Banachalgebren mit Eins sind Homöomorphismen.*

5.2 Gelfandtheorie für kommutative C^*-Algebren

Für kommutative C^*-Algebren kann die Aussage von Satz 5.3 wesentlich ergänzt werden.

Theorem 5.11 (Gelfand) *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative C^*-Algebra mit Eins. Dann ist die Gelfandtransformation ein isometrischer *-Isomorphismus von $\mathcal{A}$* auf *die Algebra $C(M(\mathcal{A}))$; insbesondere gilt also*

$$\|\mathcal{G}a\|_\infty = \|a\| \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}a} \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}.$$

Hat $\mathcal{A}$ kein Einselement, so ist $\mathcal{G}$ ein isometrischer *-Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $C_0(M(\mathcal{A}))$.

Für den Beweis der Surjektivität benötigen wir eine Verallgemeinerung des klassischen Weierstraßschen Resultates, dass sich jede stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall gleichmäßig durch Polynome approximieren lässt. Dazu nennen wir eine Teilmenge $\mathcal{A}$ von $C(X)$ *symmetrisch*, wenn für jedes $f \in \mathcal{A}$ auch die konjugiert komplexe Funktion $\overline{f}$ in $\mathcal{A}$ liegt, und wir sagen, dass $\mathcal{A}$ *die Punkte von X trennt*, wenn es für beliebige Punkte x, $y \in X$ ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt.

Theorem 5.12 (Stone/Weierstraß) *Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene und symmetrische Unteralgebra von $C(X)$, welche die Punkte von X trennt und die konstante Funktion $x \mapsto 1$ enthält. Dann ist $\mathcal{A} = C(X)$.*

Wir bereiten den Beweis dieses Satzes mit einem Satz und einem Lemma vor.

Theorem 5.13 (Dini) *Sei X ein kompakter Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge von Funktionen aus $C(X, \mathbb{R})$. Wenn (f_n) punktweise gegen ein $f \in C(X, \mathbb{R})$ konvergiert, dann sogar gleichmäßig.*

Beweis. O.E.d.A. sei die Folge (f_n) monoton fallend (andernfalls ersetzen wir f_n durch $-f_n$) und $f \equiv 0$ (andernfalls ersetzen wir f_n durch $f_n - f$).

Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in X$ gibt es wegen $f_n(x) \to 0$ ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq f_{n_x}(x) < \varepsilon/2$. Da f_{n_x} stetig ist, gibt es eine Umgebung U_x von x mit

$$|f_{n_x}(x) - f_{n_x}(y)| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } y \in U_x.$$

Wegen $0 \leq f_{n_x}(y) \leq |f_{n_x}(y) - f_{n_x}(x)| + f_{n_x}(x)$ ist dann

$$0 \leq f_{n_x}(y) < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in U_x.$$

Aus der offenen Überdeckung $X = \bigcup_{x\in X} U_x$ wählen wir eine endliche Überdeckung $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$ und setzen $n_0 := \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_k}\}$.

Sei nun $y \in X$. Dann gibt es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $y \in U_{x_j}$. Wegen der Monotonie der Folge (f_n) ist

$$0 \leq f_{n_0}(y) \leq f_{n_{x_j}}(y) < \varepsilon.$$

Fazit: Für alle $y \in X$ und $n \geq n_0$ ist $0 \leq f_n(y) < \varepsilon$. Somit konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen die Nullfunktion. ■

Lemma 5.14 *Es gibt eine Folge reeller Polynome, die auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ konvergiert.*

Beweis. Wir starten mit dem Polynom $p_1 \equiv 0$ und definieren p_{n+1} für $n \geq 1$ rekursiv durch

$$p_{n+1}(x) := p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2). \tag{5.5}$$

Mit vollständiger Induktion zeigen wir zunächst, dass

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1] : \quad 0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x} \leq 1.$$

Das ist klar für $n = 1$. Sei die Aussage für ein $n \geq 1$ richtig. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} - p_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - p_n(x) - \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2) \\
&= (\sqrt{x} - p_n(x))\Big(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))\Big). \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Die Induktionsannahme $0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x}$ liefert für alle $x \in [0,\, 1]$

$$0 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x)) \leq \sqrt{x} \leq 1,$$

woraus mit (5.6) folgt

$$0 \leq \sqrt{x} - p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} - p_n(x).$$

Es ist also $p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ und $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$ für $x \in [0,\, 1]$. Die Folge (p_n) ist somit monoton wachsend und beschränkt. Sie konvergiert daher punktweise gegen eine Funktion $f : [0,\, 1] \to [0,\, 1]$. Vollziehen wir den Grenzübergang $n \to \infty$ in (5.5), folgt $f(x)^2 = x$ bzw. $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0,\, 1]$. Da diese Funktion stetig ist, folgt die gleichmäßige Konvergenz von (p_n) gegen f aus dem Satz von Dini (Satz 5.13). ■

Beweis des Satzes von Stone/Weierstraß. Wir bezeichnen die Menge der reellwertigen Funktionen aus $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_r$ und definieren $C_r(X)$ analog. Man macht sich leicht klar, dass $\mathcal{A}_r$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C_r(X)$ ist, welche ebenfalls die Punkte von X trennt und die Einsfunktion enthält. Wir zeigen $\mathcal{A}_r = C_r(X)$, woraus die Behauptung folgt. Ist nämlich $f \in C(X)$, so sind $\operatorname{Re} f := (f + \overline{f})/2$ und $\operatorname{Im} f := (f - \overline{f})/(2i)$ reellwertige Funktionen aus $C(X)$, also in $C_r(X)$. Aus $\mathcal{A}_r = C_r(X)$ folgt dann, dass $\operatorname{Re} f,\, \operatorname{Im} f \in \mathcal{A}_r$, und hieraus schließlich $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \in \mathcal{A}$.

Schritt 1. Wir zeigen, dass aus $f \in \mathcal{A}_r$ auch $|f| \in \mathcal{A}_r$ folgt. Das ist klar, falls $f \equiv 0$. Sei also f nicht die Nullfunktion, und sei (p_n) eine Folge von Polynomen wie in Lemma 5.14. Da $\mathcal{A}_r$ die Funktion f und die Einsfunktion enthält und da $\mathcal{A}_r$ eine Algebra ist, liegt auch jede Funktion $p_n(f^2/\|f\|_\infty^2)$ in $\mathcal{A}_r$. Nach Lemma 5.14 konvergieren diese Funktionen gleichmäßig gegen $\sqrt{f^2/\|f\|_\infty^2} = |f|/\|f\|_\infty$. Da $\mathcal{A}_r$ abgeschlossen ist, liegt $|f|/\|f\|_\infty$ und folglich $|f|$ in $\mathcal{A}_r$.

Schritt 2. Wir zeigen, dass mit zwei Funktionen f und g aus $\mathcal{A}_r$ auch die Funktionen $\max\{f,\, g\}$ und $\min\{f,\, g\}$ in $\mathcal{A}_r$ liegen. Dies folgt sofort aus dem soeben Bewiesenen und aus den Identitäten

$$\max\{f,\, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad \min\{f,\, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|),$$

die man leicht punktweise nachrechnet.

Schritt 3. Wir zeigen, dass es für beliebige verschiedene Punkte $x, y \in X$ und Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ stets eine Funktion $g \in \mathcal{A}_r$ mit $g(x) = a$ und $g(y) = b$ gibt. Auch das ist einfach: Da $\mathcal{A}_r$ die Punkte trennt, gibt es ein $f \in \mathcal{A}_r$ mit $f(x) \neq f(y)$. Dann leistet die Funktion

$$g(z) := a + (b-a)\frac{f(z) - f(x)}{f(y) - f(x)}$$

das Gewünschte.

Nach diesen Vorüberlegungen nun zum eigentlichen Beweis. Sei $f \in C_r(X)$ und $\varepsilon > 0$. Wir fixieren ein $x_0 \in X$. Für jedes $x \in X$ finden wir ein $g_x \in \mathcal{A}_r$ so, dass $g_x(x_0) = f(x_0)$ und $g_x(x) = f(x)$ (ist $x = x_0$, so wählen wir g_x einfach als Konstante). Da f und g_x stetig sind, finden wir eine offene Umgebung U_x von x so, dass

$$g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon \quad \text{für alle } y \in U_x.$$

Die offenen Mengen $\{U_x\}_{x \in X}$ überdecken X. Da X kompakt ist, lässt sich aus ihnen eine endliche Überdeckung von X auswählen, etwa $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Sei

$$h_{x_0} := \min\{g_{x_1}, g_{x_2}, \ldots, g_{x_n}\}.$$

Dann liegt h_{x_0} in $\mathcal{A}_r$, und es ist $h_{x_0}(y) \leq f(y) + \varepsilon$ für alle $y \in X$. Auf diese Weise finden wir für jeden Punkt $x_0 \in X$ eine Funktion h_{x_0} in $\mathcal{A}_r$ mit $h_{x_0}(x_0) = f(x_0)$ und $h_{x_0}(y) \leq f(y) + \varepsilon$ für alle $y \in X$.

Weiter: da h_{x_0} und f stetig sind, gibt es eine offene Umgebung V_{x_0} von x_0, so dass

$$h_{x_0}(y) \geq f(y) - \varepsilon \quad \text{für alle } y \in V_{x_0}.$$

Da $\{V_{x_0}\}_{x_0 \in X}$ eine offene Überdeckung von X ist, lässt sich daraus wieder eine endliche Überdeckung von X, etwa $X = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$ (mit möglicherweise anderen Punkten x_i als oben) auswählen. Es sei

$$k := \max\{h_{x_1}, h_{x_2}, \ldots, h_{x_n}\}.$$

Dann liegt k in $\mathcal{A}_r$, und es ist

$$f(y) - \varepsilon \leq k(y) \leq f(y) + \varepsilon \quad \text{für alle } y \in X.$$

Das heißt aber, dass $\|f - k\|_\infty < \varepsilon$. Für jedes $\varepsilon > 0$ findet man also ein $k \in \mathcal{A}_r$ mit $\|f - k\|_\infty < \varepsilon$. Die Behauptung folgt nun aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}_r$. ■

Beweis des Satzes von Gelfand. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{G}$ ein *-Homomorphismus ist. Sei $a \in \mathcal{A}$. Dann sind $m := \frac{1}{2}(a + a^*)$ und $n := \frac{1}{2i}(a - a^*)$ selbstadjungierte Elemente aus $\mathcal{A}$, und es gilt $a = m + in$ und $a^* = m - in$.

Aus der Selbstadjungiertheit von m und n folgt, dass die Spektren $\sigma(m)$ und $\sigma(n)$ in $\mathbb{R}$ enthalten sind (Satz 4.38). Nach Satz 5.3 müssen daher $\mathcal{G}m$ und $\mathcal{G}n$ reellwertige Funktionen sein (beachte, dass $(\mathcal{G}m)(M(\mathcal{A})) = \sigma(m)$). Folglich ist

$$\overline{\mathcal{G}a} = \overline{\mathcal{G}m + i\mathcal{G}n} = \mathcal{G}m - i\mathcal{G}n = \mathcal{G}(m - in) = \mathcal{G}(a^*).$$

Wir zeigen die Isometrie von $\mathcal{G}$. Da für $a \in \mathcal{A}$ das Element a^*a selbstadjungiert ist, folgt

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\mathcal{G}(a^*a)\|_\infty = \|(\mathcal{G}a)^*\mathcal{G}a\|_\infty = \|\mathcal{G}a\|_\infty^2, \tag{5.7}$$

wobei die mittlere Gleichheit wieder aus Satz 5.3 folgt.

Abschließend zeigen wir die Surjektivität von $\mathcal{G}$. Da $\mathcal{G}$ isometrisch ist, ist $\mathcal{G}\mathcal{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(M(\mathcal{A}))$, und aus der Tatsache, dass $\mathcal{G}$ ein *-Homomorphismus ist, folgt die Symmetrie von $\mathcal{G}\mathcal{A}$. Das Einselement von $\mathcal{A}$ wird durch $\mathcal{G}$ auf die Funktion $x \mapsto 1$ abgebildet (Satz 4.20); es ist also $1 \in \mathcal{G}\mathcal{A}$. Schließlich trennt $\mathcal{G}\mathcal{A}$ die Punkte von $M(\mathcal{A})$. Sind nämlich f, g zwei verschiedene Charaktere von $\mathcal{A}$, so müssen diese sich wenigstens in einem Punkt $a \in \mathcal{A}$ unterscheiden, d.h. es ist $f(a) \neq g(a)$ bzw. $(\mathcal{G}a)(f) \neq (\mathcal{G}a)(g)$. Der Satz von Stone-Weierstraß liefert nun $\mathcal{G}\mathcal{A} = C(M(\mathcal{A}))$. ∎

Anmerkung 5.15 Wir können jedem kompakten Hausdorff-Raum X die C^*-Algebra $C(X)$ zuordnen und jeder kommutativen C^*-Algebra $\mathcal{A}$ mit Eins den kompakten Hausdorff-Raum $M(\mathcal{A})$. Man kann C also betrachten als Funktor von der Kategorie der kompakten Hausdorffräume (mit Homöomorphismen als Abbildungen) in die Kategorie der kommutativen C^*-Algebren mit Eins (mit *-Isomorphismen als zugehörige Abbildungen), und man kann M auffassen als Funktor, der zwischen diesen Kategorien in umgekehrter Richtung wirkt. Die Sätze 5.11 sowie 5.5 lassen sich so zusammenfassen:

$$C(M(\mathcal{A})) \cong \mathcal{A} \quad \text{und} \quad M(C(X)) \cong X;$$

hier steht das linke $\cong$ für *-Isomorphie; das rechte für Homöomorphie. M und C sind also "invers" zueinander.

Ein kompakter Hausdorff-Raum wird also vollständig durch die zugehörige C^*-Algebra bestimmt und umgekehrt. Fassen wir das ganze noch etwas weiter, lässt sich folgendes "Wörterbuch" aufmachen:

Topologie	*C^*-Algebren*
lokalkompakter Hausdorff-Raum	kommutative C^*-Algebra
Kompaktheit	Einselement
Homöomorphismus	*-Isomorphismus
stetige Abbildung	*-Homomorphismus
abgeschlossene Teilmenge	abgeschlossenes Ideal
nicht zusammenhängend	$\exists$ Projektoren
$\vdots$	$\vdots$

Diese und weitere Entsprechungen bilden den Ausgangspunkt für zahlreiche fruchtbare Verallgemeinerungen vom "kommutativen" auf den "nichtkommutativen" Fall. vgl. hierzu A. Connes, Non-commutative Geometry. ∎

In Gleichung (5.7) haben wir nur von folgenden Eigenschaft von $\mathcal{G}$ Gebrauch gemacht: $\mathcal{G}$ ist ein *-Homomorphismus, der Spektren erhält. Es gilt daher allgemein:

Lemma 5.16 *Sei $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein unitaler *-Homomorphismus zwischen unitalen C^*-Algebren. Ist W spektrumserhaltend (d.h. ist $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(W(a))$ für alle $a \in \mathcal{A}$), so ist W eine Isometrie.*

Wir überlegen uns abschließend, wie sich die Aussage von Satz 5.11 präzisieren lässt, wenn $\mathcal{A}$ von einem einzigen Element erzeugt wird.

Theorem 5.17 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins e, $a \in \mathcal{A}$ sei normal, und $C^*(a)$ sei die kleinste abgeschlossene und symmetrische Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die e und a enthält. Dann ist $C^*(a)$ eine kommutative C^*-Algebra, und*

$$C^*(a) \cong C(\sigma(a)).$$

Wir können uns hier nicht unmittelbar auf die Resultate für einfach erzeugte Banachalgebren berufen. Als Banachalgebra wird $C^*(a)$ natürlich durch e und die *beiden* Elemente a und a^* erzeugt.

Beweis. Aus $aa^* = a^*a$ folgt, dass $C^*(a)$ eine kommutative C^*-Algebra ist. Wegen Satz 5.11 ist also

$$C^*(a) \cong C(X) \quad \text{mit } X := M(C^*(a)).$$

Da a die Algebra $C^*(a)$ erzeugt, erzeugt die Gelfandtransformierte $\hat{a}$ von a die Algebra $C(X)$ (im Sinne von C^*-Algebren). Wir zeigen, dass

$$\hat{a} : X \to \hat{a}(X) = \sigma_{C^*(a)}(a) \tag{5.8}$$

ein Homöomorphismus ist. Die Stetigkeit und Surjektivität von $\hat{a}$ in (5.8) sind klar. Die Injektivität erhalten wir wie folgt: Da $C(X)$ die Punkte von X trennt und $\hat{a}$ diese Algebra erzeugt, muss bereits $\hat{a}$ die Punkte von X trennen. Somit ist die Abbildung $\hat{a}$ eine stetige Bijektion. Da X kompakt ist, folgt die Behauptung.

Schließlich verwenden wir noch, dass $\sigma_{C^*(a)}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ ist (inverse Abgeschlossenheit von C^*-Algebren). ∎

Identifiziert man $M(C^*(a))$ mit $\sigma(a)$, so ist die Gelfandtransformierte des erzeugenden Elementes a gerade die identische Abbildung auf $\sigma(a)$.

Als eine Anwendung des Satzes von Gelfand sehen wir uns den stetigen Funktionalkalkül für normale Elemente an. In der Übung haben wir bereits eine rudimentäre Fassung des Funktionalkalküls kennengelernt: Ist $p(t) = a_0t^0 + a_1t^1 +$

$\ldots + a_n t^n$ ein Polynom und $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, so wird für jedes $a \in \mathcal{A}$ durch $p(a) = a_0 e + a_1 a + \ldots + a_n a^n$ ein Element aus $\mathcal{A}$ definiert. Dabei gilt

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\},$$

und die Abbildung $p \mapsto p(a)$ ist ein Homomorphismus von der Algebra der Polynome in $\mathcal{A}$.

Man ist bestrebt, $f(a)$ auch für größere Klassen von Funktionen zu erklären. Ist a ein normales Element einer unitalen C^*-Algebra, so ist dies für jede auf dem Spektrum von a stetige Funktion möglich. Ein einfaches Umschreiben von Satz 5.17 liefert nämlich sofort

Theorem 5.18 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins, und $a \in \mathcal{A}$ sei normal. Dann existiert ein isometrischer *-Isomorphismus*

$$\Phi : C(\sigma(a)) \xrightarrow{auf} C^*(a) \subseteq \mathcal{A}.$$

Die Abbildung Φ ist gerade die Inverse zur Gelfandtransformation $\mathcal{G} : C^*(a) \to C(\sigma(a))$. Man kann dieses Resultat so interpretieren, dass man für jede stetige Funktion f auf $\sigma(a)$ ein Element $f(a) := \Phi(f) \in C^*(a)$ so definieren kann, dass die Zuordnung $f \mapsto f(a)$ ein *-Isomorphismus wird. Insbesondere gilt also

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a), \quad (fg)(a) = f(a)g(a), \quad \overline{f}(a) = f(a)^*. \tag{5.9}$$

Weiter erhält man sofort den *Spektralsatz*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\} \quad \text{für alle } f \in C(\sigma(a)). \tag{5.10}$$

Beispiel 5.19 (a) Auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ gibt es eine stetige Quadratwurzel. Man kann daher $\sqrt{a}$ für alle normalen Elemente a einer unitalen C^*-Algebra erklären, deren Spektrum in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ liegt.
(b) Auf $\mathbb{R}$ sind die Funktionen

$$f_1(x) := \max\{0,\, x\}, \quad f_2(x) := -\min\{0,\, x\}, \quad f_3(x) := |x|$$

erklärt und stetig. Man kann daher für jedes selbstadjungierte Element a einer C^*-Algebra (für das bekanntlich $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ gilt) die Elemente

$$a_+ := f_1(a), \quad a_- := f_2(a), \quad |a| := f_3(a).$$

erklären. Dann ist $a = a_+ - a_-$, $|a| = a_+ + a_-$ und $a_+ a_- = 0$. Diese Elemente heißen *positiver* und *negativer Teil* bzw. *Betrag* von a. ∎

5.3 Das lokale Prinzip von Allan/Douglas

Die Gelfandtransformation ordnet jedem Element einer kommutativen Banachalgebra mit Eins eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge X zu, und zwar so, dass das Element genau dann invertierbar ist, wenn die zugehörige Funktion invertierbar ist. Die Invertierbarkeit einer Funktion $f \in C(X)$ ist aber eine *lokale* Eigenschaft: Für jeden einzelnen Punkt $x \in X$ hat man zu prüfen, ob $f(x) \neq 0$, d.h. ob $f(x)$ invertierbar in $\mathbb{C}$ ist. Ein Invertierbarkeitsproblem in einer kommutativen Banachalgebra wird also zurückgeführt auf eine ganze Schar "lokaler" Invertierbarkeitsprobleme (eines für jeden Punkt von X).

Es gibt verschiedene Verallgemeinerungen dieses "lokalen Prinzips" auf nichtkommutative Banachalgebren. Die uns hier interessierende Verallgemeinerung geht zurück auf Douglas (C^*-Algebren) und Allan (Banachalgebren). Sie ist auch als "zentrale Lokalisierung" bekannt.

Unter dem *Zentrum* einer Algebra versteht man die Menge aller Elemente der Algebra, die mit jedem Element der Algebra vertauschen. Man sieht sofort, dass das Zentrum einer Algebra wieder eine Algebra ist und dass das Zentrum einer Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit Eins e eine kommutative abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{A}$ ist, die e enthält. Die kommutativen Algebren sind offenbar gerade diejenigen, die mit ihrem Zentrum zusammenfallen.

Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Einselement e, und es sei $\mathcal{C}$ eine abgeschlossene Unteralgebra im Zentrum von $\mathcal{A}$ mit $e \in \mathcal{C}$. Dann ist $\mathcal{C}$ eine kommutative Banachalgebra. Wir bezeichnen wir früher mit $M(\mathcal{C})$ die Menge ihrer maximalen Ideale. Für jedes maximale Ideal x von $\mathcal{C}$ sei I_x das kleinste abgeschlossene Ideal von $\mathcal{A}$, welches x umfasst. Weiter bezeichnen wir mit Φ_x den kanonischen Homomorphismus

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}/I_x, \quad a \mapsto a + I_x.$$

Man beachte, dass die Algebren $\mathcal{A}/I_x$ vom Punkt x abhängen können. Insbesondere kann $I_x = \mathcal{A}$ für einige der $x \in M(\mathcal{C})$ sein. In diesem Fall definieren wir: $\Phi_x(a)$ ist invertierbar in $\mathcal{A}/I_x$, und $\|\Phi_x(a)\| = 0$. Die I_x heißen auch *lokale Ideale* und die $\mathcal{A}/I_x$ *lokale Algebren*.

Theorem 5.20 (Allan/Douglas) *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$, x und Φ_x wie oben. Dann gilt:*

(a) *Ein Element $a \in \mathcal{A}$ ist genau dann invertierbar in $\mathcal{A}$, wenn für jedes $x \in M(\mathcal{C})$ das Element $\Phi_x(a)$ invertierbar in $\mathcal{A}/I_x$ ist.*

(b) *Für jedes $a \in \mathcal{A}$ die Abbildung $M(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \|\Phi_x(a)\|$ oberhalbstetig.*

Zr Erinnerung: eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ eines topologischen Raumes X nach $\mathbb{R}$ heißt *oberhalbstetig in* $x_0 \in X$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$ für alle $x \in U$ ist. Die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *oberhalbstetig auf* X, wenn sie in jedem Punkt von X oberhalbstetig ist.

Bevor wir diesen Satz beweisen, sehen wir in zwei einfachen Beispielen an, wie er wirkt.

Beispiel 5.21 Das kleinstmögliche $\mathcal{C}$, welches wir wählen können, ist $\mathcal{C} = \mathbb{C}e$. Dann ist offenbar $\{0\}$ das einzige echte Ideal von $\mathcal{C}$. $M(\mathcal{C})$ besteht also nur aus einem Element (dem Nullideal), und das durch $\{0\}$ erzeugte Ideal von $\mathcal{A}$ ist natürlich ebenfalls $\{0\}$. Die Aussage von Satz 5.20 reduziert sich also auf die Trivialität

$$a \text{ ist invertierbar in } \mathcal{A} \Longleftrightarrow a + \{0\} \text{ ist invertierbar in } \mathcal{A}/\{0\}.$$

Beispiel 5.22 Ist $\mathcal{A}$ kommutativ, so können wir $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ wählen. Für $x \in M(\mathcal{C})$ ist dann offenbar $I_x = x$. Nach Lemma 5.2 ist $\mathcal{A}/I_x \cong \mathbb{C}$ für jedes $x \in M(\mathcal{C})$, und $\Phi_x(a)$ ist gerade der Wert der Gelfandtransformierten $\hat{a}$ von a an der Stelle x. Die Aussage von Satz 5.20 reduziert sich also auf

$$a \text{ ist invertierbar in } \mathcal{A} \Longleftrightarrow \hat{a}(x) \text{ ist invertierbar für alle } x \in M(\mathcal{C}),$$

was im wesentlichen die Aussage von Satz 5.3 ist. ■

Wir bereiten den Beweis von Satz 5.20 mit folgendem Lemma vor.

Lemma 5.23 *Die Voraussetzungen seien wie in Satz 5.20. Ist L ein maximales Links-, Rechts- oder zweiseitiges Ideal von $\mathcal{A}$, so ist $\mathcal{C} \cap L$ ein maximales Ideal von $\mathcal{C}$.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage für den Fall eines maximalen Linksideals L. Es ist klar, dass $L \cap \mathcal{C}$ ein echtes (da $e \notin L$) abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{C}$ ist. Wir zeigen noch dessen Maximalität.

Sei $z \in \mathcal{C} \setminus L$. Dann ist $J_z := \{l + az : l \in L, a \in \mathcal{A}\}$ ein Linksideal von $\mathcal{A}$, welches L echt (da $z \in J_z \setminus L$) enthält. Wegen der Maximalität von L ist also $J_z = \mathcal{A}$. Insbesondere liegt e in J_z, und das Element z besitzt ein Inverses modulo L in $\mathcal{A}$ (beachte: Aus $l + az = e$ folgt $l + za = e$, da z im Zentrum von $\mathcal{A}$ liegt).

Weiter: $K_z := \{a \in \mathcal{A} : az \in L\}$ ist echtes (da $e \notin K_z$) Linksideal von $\mathcal{A}$, welches L enthält. Da L maximal ist, folgt $K_z = L$. Sind insbesondere y_1, y_2 Inverse modulo L von z, so ist $y_1 - y_2 \in L$. Die Inversen modulo L von z sind also eindeutig bestimmt.

Angenommen, es wäre $z - \lambda e \notin L$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Es bezeichne $y^\pi(\lambda)$ das (wie wir soeben gesehen haben) eindeutig bestimmte Element von $\mathcal{A}/L$, welches die Inversen modulo L von $z - \lambda e$ enthält. Wir zeigen, dass $y^\pi : \mathbb{C} \to \mathcal{A}/L$ eine analytische Funktion ist.

Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ und $y_0 \in y^\pi(\lambda_0)$ eine Inverse modulo L von $z - \lambda_0 e$. Für $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|y_0\|$ ist $e - (\lambda - \lambda_0)y_0$ invertierbar in $\mathcal{A}$ (Neumann-Reihe), und man überzeugt sich leicht davon, dass $y_0[e - (\lambda - \lambda_0)y_0]^{-1}$ eine Inverse modulo L von $z - \lambda e$ ist. Für $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|y_0\|$ ist also

$$y^\pi(\lambda) = y_0[e - (\lambda - \lambda_0)y_0]^{-1} + L.$$

Dies zeigt die Analytizität von y^π. Außerdem ist diese Funktion beschränkt. Für $|\lambda| > \|z\|$ ist nämlich $z - \lambda e$ invertierbar (Neumann-Reihe) und

$$\|y^\pi(\lambda)\| \leq \|(z - \lambda e)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} z^n \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \|z/\lambda\|}.$$

Die rechte Seite dieser Abschätzung geht für $\lambda \to \infty$ gegen 0. Nach dem Satz von Liouville ist y^π also eine konstante Funktion, die wegen $\lim_{\lambda\to\infty} y^\pi(\lambda) = 0$ sogar konstant 0 sein muss.

Aus $y^\pi(0) = 0$ folgt aber: Es gibt ein $y_0 \in L$ mit $y_0 z - e \in L$. Dann ist $e \in L - zy_0 = L$, und dies ist unmöglich, da L eine echtes Ideal von $\mathcal{A}$ ist. Der erhaltene Widerspruch zeigt, dass es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ so gibt, dass $z - \lambda e \in L$. Da $z \in \mathcal{C} \setminus L$ beliebig war, folgt $\mathcal{C} = (L \cap \mathcal{C}) + \mathbb{C}e$. Damit ist $L \cap \mathcal{C}$ maximal. ∎

Beweis von Satz 5.20. Wir beschränken uns auf den Beweis von Aussage (a). Die Aussage (b) und einige ihrer Konsequenzen werden wir uns in der Übung ansehen. Außerdem beschränken wir uns auf den Beweis der Aussage, dass ein Element $a \in \mathcal{A}$ genau dann von links invertierbar ist, wenn die Nebenklasse $\Phi_x(a)$ für jedes $x \in M(\mathcal{C})$ von links invertierbar sind. Die Invertierbarkeit von rechts untersucht man analog.

Sicher ist $\Phi_x(a)$ von links invertierbar, wenn a von links invertierbar ist. Wir müssen umgekehrt zeigen, dass die linksseitige Invertierbarkeit aller Nebenklassen $\Phi_x(a)$ die Invertierbarkeit von a von links impliziert. Angenommen, dies sei falsch. Sei also $a \in \mathcal{A}$ ein Element, welches nicht von links invertierbar ist, für das aber alle $\Phi_x(a)$ von links invertierbar sind.

Sei L das maximale Linksideal von $\mathcal{A}$, welches die Menge $\{ba : b \in \mathcal{A}\}$ enthält (wegen $e \notin \{ba : b \in \mathcal{A}\}$ ist $\{ba : b \in \mathcal{A}\}$ ein echtes Linksideal von $\mathcal{A}$, welches nach dem Lemma von Krull in einem maximalen Linksideal L von $\mathcal{A}$ liegt). Nach Lemma 5.23 ist dann $x := L \cap \mathcal{C}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{C}$. Wir zeigen nun, dass $I_x \subseteq L$. Dies folgt so: Die Elemente der Gestalt $\sum_k a_k x_k b_k$ mit $x_k \in x$ und a_k, $b_k \in \mathcal{A}$ liegen dicht in I_x. Da $x_k \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{C}$ im Zentrum von $\mathcal{A}$ liegt, ist aber $\sum_k a_k x_k b_k = \sum_k a_k b_k x_k \in L$ und folglich $I_x \subseteq L$.

Auf Grund unserer Annahme ist $\Phi_x(a)$ von links invertierbar in $\mathcal{A}/I_x$. Es gibt somit ein $b \in \mathcal{A}$ so, dass $ba - e \in I_x$. Aus $I_x \subseteq L$ folgt $ba - e \in L$. Andererseits ist $ba \in \{ba : b \in \mathcal{A}\} \subseteq L$, woraus $e \in L$ folgt. Die widerspricht der Maximalität von L und widerlegt unsere Annahme. ∎

Für C^*-Algebren kann man Satz 5.20 wie folgt ergänzen.

Theorem 5.24 *Die Voraussetzungen seien wie in Satz 5.20. Zusätzlich sei $\mathcal{A}$ nun eine C^*-Algebra und $\mathcal{C}$ eine symmetrische Unteralgebra im Zentrum von $\mathcal{A}$ (damit ist $\mathcal{C}$ eine kommutative C^*-Algebra). Dann lassen sich die Aussagen von Satz 5.20 wie folgt ergänzen:*

(a) *Es ist $I_x \neq \mathcal{A}$ für alle $x \in M(\mathcal{C})$.*

(*b*) *Es ist* $\cap_{x \in M(\mathcal{C})} I_x = \{0\}$.
(*c*) *Für alle* $a \in \mathcal{A}$ *ist* $\|a\| = \max_{x \in M(\mathcal{C})} \|\Phi_x(a)\|$.

Zum Beweis. Wir überlegen uns nur Aussage (c). Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}$ die Menge aller beschränkten Funktionen $f : M(\mathcal{C}) \to \cup_{x \in M(\mathcal{C})} \mathcal{A}/I_x$, die im Punkt $x \in M(\mathcal{C})$ einen Wert in $\mathcal{A}/I_x$ annehmen. Mit den Operationen

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (fg)(x) := f(x)g(x), \quad f^*(x) := f(x)^*$$

und der Norm

$$\|f\|_{\mathcal{F}} := \sup_{x \in M(\mathcal{C})} \|f(x)\|_{\mathcal{A}/I_x}$$

wird die Menge $\mathcal{F}$ zu einer C^*-Algebra, und die Abbildung

$$W : \mathcal{A} \to \mathcal{F}, \quad a \mapsto (x \mapsto \Phi_x(a))$$

ist ein *-Homomorphismus. Die Aussage von Satz 5.20 kann man auch so formulieren: Es ist $a \in \mathcal{A}$ genau dann invertierbar, wenn $W(a) \in \mathcal{F}$ invertierbar ist. Die Abbildung $W : \mathcal{A} \to \mathcal{F}$ ist also spektrumserhaltend im Sinne von Lemma 5.16. Somit ist W nach diesem Lemma eine Isometrie. Schließlich ist das Supremum ein Maximum, da jede oberhalbstetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Maximum annimmt. ■

6 Das Reduktionsverfahren für Toeplitzoperatoren (Fortsetzung)

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Fredholmeigenschaften und die Stabilität des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren mit stückweise stetigen Erzeugerfunktionen. Dabei wenden wir lokale Prinzipien an. Dies erfordert, das Stabilitätsproblem als ein Invertierbarkeitsproblem in einer geeignet zu konstruierenden Banachalgebra zu betrachten.

Eine Funktion $a : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn sie in jedem Punkt $t_0 = e^{ix_0}$ des Einheitskreises die einseitigen Grenzwerte

$$a(t_0 + 0) := \lim_{x \searrow x_0} a(e^{ix}) \quad \text{und} \quad a(t_0 - 0) := \lim_{x \nearrow x_0} a(e^{ix})$$

besitzt und wenn diese endlich sind. Da wir a als Element von $L^\infty(\mathbb{T})$ betrachten werden, sind die Funktionswerte von a an den Sprungstellen unerheblich. Möchte man jedoch eine vernünftige Algebra von *Funktionen* haben, verlangt man z. B. dass $a(t + 0) = a(t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Die Menge PC der stückweise stetigen Funktionen bildet eine (offenbar kommutative) C^*-Algebra bezüglich punktweise definierter Operationen und der Supremumsnorm.

6.1 Fredholmtheorie für Toeplitzoperatoren mit PC-Erzeugern

Mit $\mathcal{T}(C)$ bzw. $\mathcal{T}(PC)$ bezeichnen wir die kleinsten abgeschlossenen Unteralgebren von $L(l^2(\mathbb{Z}^+))$, die alle Toeplitzoperatoren $T(a)$ mit $a \in C(\mathbb{T})$ bzw. mit $a \in PC$ enthalten. Wegen $T(a)^* = T(\overline{a})$ sind $\mathcal{T}(C)$ und $\mathcal{T}(PC)$ C^*-Algebren. Die Algebra $\mathcal{T}(C)$ kann man komplett beschreiben.

Satz 6.1

$$\mathcal{T}(C) = \big\{T(a) + K : \ a \in C(\mathbb{T}), \ K \in K\big(l^2(\mathbb{Z})\big)\big\}. \tag{6.1}$$

Beweis Es bezeichne $\mathcal{A}$ die rechte Seite von (6.1). Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}(C)$. Da offenbar $T(a) \in \mathcal{T}(C)$ für alle $a \in C(\mathbb{T})$, verbleibt zu zeigen, dass jeder kompakte Operator zu $\mathcal{T}(C)$ gehört. Dazu seien

$$\begin{aligned}
P_n : l^2(\mathbb{Z}^+) \to l^2(\mathbb{Z}^+), &\qquad (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots),\\
V : l^2(\mathbb{Z}^+) \to l^2(\mathbb{Z}^+), &\qquad (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots),\\
V_{-1} : l^2(\mathbb{Z}^+) \to l^2(\mathbb{Z}^+), &\qquad (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots)
\end{aligned}$$

sowie $V_0 := I$ und $V_n := V^n$ und $V_{-n} = (V_{-1})^n$ für $n \geq 1$. Wegen $P_n = P_n^* \to I$ ist $\|P_nKP_n - K\| \to 0$ für jeden kompakten Operator K auf $l^2(\mathbb{Z}^+)$. Es genügt daher zu zeigen, dass $P_nKP_n \in \mathcal{T}(C)$ für jedes $K \in K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ und für jedes $n \in \mathbb{Z}^+$

(beachte, dass $\mathcal{T}(C)$ abgeschlossen ist). Ist $(k_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$ die Matrixdarstellung von $P_nKP_n|_{\operatorname{im} P_n}$ bezüglich der Standardbasis von $l^2(\mathbb{Z}^+)$, so ist

$$P_nKP_n = \sum_{i,j=0}^{n-1} k_{ij} V_i P_1 V_{-j}. \qquad \text{(Nachrechnen!)}$$

Nun ist $P_1 = I - V_1V_{-1}$, und die Operatoren V_i und V_{-j} sind Toeplitzoperatoren mit den erzeugenden Funktionen $\chi_i(t) = t^i$ und $\chi_{-j}(t) = t^{-j}$. Also ist $V_iP_1V_{-j} \in \mathcal{T}(C)$ für alle $i, j \geq 0$. Hieraus folgt die Inklusion $K(l^2(\mathbb{Z})) \subseteq \mathcal{T}(C)$ und damit auch $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}(C)$.

Für die umgekehrte Inklusion zeigen wir, dass $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $L(l^2(\mathbb{Z}^+))$ ist. Da $\mathcal{A}$ alle Toeplitzoperatoren $T(a)$ mit $a \in C(\mathbb{T})$ enthält und da $\mathcal{T}(C)$ nach Definition die *kleinste* abgeschlossene Algebra ist, die diese Operatoren enthält, folgt dann $\mathcal{T}(C) \subseteq \mathcal{A}$.

Seien $a, b \in C(\mathbb{T})$ und $K,\ L \in K(l^2(\mathbb{Z}^+))$. Dann ist

$$(T(a) + K) + (T(b) + L) = T(a + b) + (K + L) \in \mathcal{A}$$

und

$$\begin{aligned} (T(a) + K)(T(b) + L) &= T(a)T(b) + KT(b) + T(a)L + KL \\ &= T(ab) \underbrace{-H(a)H(\tilde{b}) + KT(b) + T(a)L + KL} \in \mathcal{A}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

da der unterstrichene Teil nach Satz 3.15 (b) kompakt ist. Also ist $\mathcal{A}$ eine Algebra.

Sei nun $(T(a_n) + K_n)_{n\geq1}$ eine normkonvergente Folge in $\mathcal{A}$. Aus Satz 3.15 (a) bekommen wir, dass dann $(T(a_n))_{n\geq1}$ eine Cauchyfolge in $L(l^2(\mathbb{Z}^+))$ ist, und aus Satz 3.10 (a) folgt, dass $(a_n)_{n\geq1}$ eine Cauchyfolge in $C(\mathbb{T})$ ist. Da $C(\mathbb{T})$ vollständig ist, gibt es eine Funktion $a \in C(\mathbb{T})$ mit $\|a_n - a\|_\infty \to 0$. Aus $\|T(a_n - a)\| = \|a_n - a\|_\infty$ folgt dann $\|T(a_n) - T(a)\| \to 0$, was wiederum impliziert, dass wegen

$$\|K_n - K_m\| \leq \|T(a_n) + K_n - T(a_m) - K_m\| + \|T(a_n) - T(a_m)\|$$

(K_n) eine Cauchyfolge in $K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ ist. Diese Folge konvergiert in $L(l^2(\mathbb{Z}^+))$, und ihr Grenzwert K liegt in $K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ (Abgeschlossenheit von $K(l^2(\mathbb{Z}^+))$). Nunmehr ist klar, dass

$$\|(T(a_n) + K_n) - (T(a) + K)\| \to 0,$$

d. h. $\lim(T(a_n) + K_n) \in \mathcal{A}$, und $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen. ∎

Will man die Fredholmeigenschaften eines Operators $A \in \mathcal{T}(C)$ untersuchen, hat man nach Satz 4.15 die Invertierbarkeit seiner Nebenklasse $A + K(l^2)$ in der Calkinalgebra $L(l^2)/K(l^2)$ zu studieren. Nach Satz 6.1 ist $K(l^2) \subseteq \mathcal{T}(C)$, und man kann die Faktoralgebra $\mathcal{T}(C)/K(l^2)$ bilden. Diese ist eine C^*-Unteralgebra von $L(l^2)/K(l^2)$. Wegen der inversen Abgeschlossenheit von C^*-Algebren ist die

Fredholmeigenschaft von $A \in \mathcal{T}(C)$ somit äquivalent zur Invertierbarkeit von $A + K(l^2)$ in $\mathcal{T}(C)/K(l^2)$. Diese C^*-Algebra ist aber kommutativ! Nach (6.2) ist nämlich

$$\begin{aligned}(T(a) + K(l^2))(T(b) + K(l^2)) &= T(ab) + K(l^2),\\ (T(b) + K(l^2))(T(a) + K(l^2)) &= T(ba) + K(l^2),\end{aligned}$$

und wegen $ab = ba$ stimmen die rechten Seiten überein. Wir können daher die Algebra $\mathcal{T}(C)/K(l^2)$ komplett beschreiben, wenn wir ihren Raum der maximalen Ideale und die Wirkung der Gelfandtransformation identifizieren. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\pi : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}(C)/K(l^2), \quad f \mapsto T(f) + K(l^2).$$

Man rechnet sofort nach, dass π ein *-Homomorphismus ist (dies ist im wesentlichen wieder (6.2)). Aus Satz 6.1 folgt die Surjektivität von π, und die Injektivität bekommen wir mit Satz 3.15 (a). Dieser zeigt nämlich, dass

$$\|T(a)\| = \|T(a) + K(l^2)\| \quad (\text{sogar für } a \in L^\infty(\mathbb{T})).$$

Ist also $\pi(f) = T(f) + K(l^2) = 0$, so ist $T(f) = 0$ und mithin auch $f = 0$. Die Abbildung π ist also ein *-Isomorphismus und damit eine Isometrie. Die Algebren $C(\mathbb{T})$ und $\mathcal{T}(C)/K(l^2)$ sind also isometrisch *-isomorph zueinander. Damit ist klar, dass folgendes gilt:

Satz 6.2 (a) *$M(\mathcal{T}(C)/K(l^2))$ ist homöomorph zu $M(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{T}$. Identifiziert man $M(\mathcal{T}(C)/K(l^2))$ mit $\mathbb{T}$, so ist die Gelfandtransformierte von $T(a) + K(l^2)$ gerade die Funktion $a \in C(\mathbb{T})$.*

(b) *Ein Operator $T(a) + K \in \mathcal{T}(C)$ ist genau dann Fredholmsch, wenn die Gelfandtransformierte von $T(a) + K(l^2)$ nicht verschwindet, d. h. wenn $a(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$.*

Wir wenden uns nun den Fredholmeigenschaften von Operatoren in $\mathcal{T}(PC)$ zu. Wie oben gilt: der Operator $A \in \mathcal{T}(PC)$ ist Fredholmsch, wenn die Nebenklasse $A + K(l^2)$ in $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$ invertierbar ist. Leider kann man nicht mehr so einfach wie oben schließen, dass $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$ kommutativ ist (Hankeloperatoren mit Erzeugern aus PC sind i. Allg. nicht kompakt), und auch zu Satz 6.1 gibt es kein einfaches Analogon. Immerhin beobachtet man aber, dass für beliebige Funktionen $a \in PC$ und $f \in C$ der Kommutator

$$\begin{aligned}T(a)T(f) - T(f)T(a) &= T(af) - H(a)H(\tilde{f}) - (T(fa) - H(f)H(\tilde{a}))\\ &= H(f)H(\tilde{a}) - H(a)H(\tilde{f})\end{aligned}$$

kompakt ist (beachte: mit f ist $\tilde{f}$ stetig, und Hankeloperatoren mit stetigen Erzeugerfunktionen sind kompakt). Für jede stetige Funktion f liegt also die

Nebenklasse $T(f) + K(l^2)$ im Zentrum von $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$, und damit liegt die komplette Algebra $\mathcal{T}(C)/K(l^2)$ im Zentrum von $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$. Den Raum der maximalen Ideale dieser Algebra haben wir in Satz 6.2 (a) bestimmt. Er ist homeomorph zu $\mathbb{T}$, und das dem Punkt $x \in \mathbb{T}$ entsprechende maximale Ideal von $\mathcal{T}(C)/K(l^2)$ ist

$$\{T(f) + K(l^2) : f \in C(\mathbb{T}),\, f(x) = 0\}. \tag{6.3}$$

Dem lokalen Prinzip von Allan/Douglas entsprechend sei I_x das kleinste abgeschlossene Ideal von $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$, welches die Menge (6.3) enthält, und π_x bezeichne den *-Homomorphismus

$$\pi_x : \mathcal{T}(PC) \to (\mathcal{T}(PC)/K(l^2))/I_x, \quad A \mapsto (A + K(l^2)) + I_x.$$

Das lokale Prinzip sagt dann:

> *Ein Operator $A \in \mathcal{T}(PC)$ ist genau dann Fredholmsch, wenn für jedes $x \in \mathbb{T}$ die Nebenklasse $\pi_x(A)$ in $\mathcal{T}_x(PC) := (\mathcal{T}(PC)/K(l^2))/I_x$ invertierbar ist.*

Um dieses Resultat ausnutzen zu können, benötigen wir genauere Kenntnisse über die „lokalen Algebren“ $\mathcal{T}_x(PC)$. Da die Algebra $\mathcal{T}(PC)$ von den Toeplitzoperatoren $T(a)$ mit $a \in PC$ erzeugt wird, wird die Algebra $\mathcal{T}_x(PC)$ von den Nebenklassen $\pi_x(T(a))$ mit $a \in PC$ erzeugt. Für jedes $x \in \mathbb{T}$ bezeichne χ_x die stückweise konstante Funktion, die auf dem Kreisbogen von x nach $-x$ (bzgl. der üblichen Orientierung) den Wert $+1$ und auf dem Bogen von $-x$ nach x den Wert 0 annimmt.

Satz 6.3 *Jede der lokalen Algebren $\mathcal{T}_x(PC)$ ist einfach erzeugt, und die Nebenklasse $\pi_x(T(\chi_x))$ ist ein erzeugendes Element.*

Beweis. Wir zeigen, dass für jede stückweise stetige Funktion a die Nebenklasse $\pi_x(T(a))$ eine Linearkombination der Nebenklassen $\pi_x(I)$ und $\pi_x(T(\chi_x))$ ist. Seien $a(x \pm 0)$ die einseitigen Grenzwerte von a an der Stelle x, und sei

$$a_x := a(x + 0)\chi_x + a(x - 0)(1 - \chi_x).$$

Die Funktion $b := a - a_x$ ist stetig im Punkt x und nimmt dort den Wert 0 an:

Sei $f \in C(\mathbb{T})$ eine Funktion mit $f(x) = 1$. Dann ist $(1 - f)(x) = 0$. Die Nebenklasse $\pi(T(1-f))$ liegt also im maximalen Ideal x und erst recht im Ideal I_x. Es ist also $\pi_x(T(1-f)) = 0$ bzw. $\pi_x(T(f)) = \pi_x(T(1)) = \pi_x(I)$. Wir haben daher

$$\pi_x(T(b)) = \pi_x(I)\pi_x(T(b)) = \pi_x(T(f))\pi_x(T(b)) = \pi_x(T(f)T(b)).$$

Da der Operator $T(f)T(b) - T(fb) = -H(f)H(\tilde{b})$ kompakt ist, folgt weiter

$$\pi_x(T(b)) = \pi_x(T(fb))$$

für jede Funktion $f \in C(\mathbb{T})$ mit $f(x) = 1$. Nun ist aber

$$\|\pi_x(T(fb))\| \leq \|T(fb)\| = \|fb\|_\infty \tag{6.4}$$

nach Satz 3.10 (a) (und wegen der Definition der Norm in Faktoralgebren). Durch Verkleinern des Trägers von f kann man erreichen, dass die rechte Seite von (6.4) kleiner als jede vorgegebene positive Zahl wird. Folglich ist $\pi_x(T(b)) = 0$ bzw. $\pi_x(T(a)) = \pi_x(T(a_x))$, d. h.

$$\pi_x(T(a)) = a(x+0)\pi_x(T(\chi_x)) + a(x-0)(\pi_x(I) - \pi_x(T(\chi_x))). \tag{6.5}$$

Die Nebenklasse $\pi_x(T(a))$ liegt also in der durch $\pi_x(I)$ und $\pi_x(T(\chi_x))$ erzeugten Algebra. Damit liegt $\mathcal{T}_x(PC)$ in dieser Algebra, und beide Algebren stimmen überein. ∎

Die Identität (6.5) zeigt, dass modulo I_x die Funktion a durch die Funktion a_x ersetzt werden kann, die sich lokal (im Punkt x) genauso verhält wie die Funktion a. Dies erklärt Bezeichnungen wie „lokales Prinzip“ oder „lokales Ideal“. Die Funktion a_x heißt auch ein „lokaler Vertreter“ von a (man beachte, dass es viele lokale Vertreter einer Funktion gibt).

Da $\mathcal{T}_x(PC)$ einfach erzeugt ist, weiß man alles über diese Algebra, wenn man das Spektrum des Erzeugers $\pi_x(T(\chi_x))$ kennt (Satz 5.17). Wir bestimmen dieses Spektrum unter Zuhilfenahme eines allgemeinen Resultates von Hartmann/Wintner.

Satz 6.4 (Hartmann/Wintner) *Sei $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ reellwertig. Dann sind sowohl das Spektrum von $T(a)$ als auch das von $T(a) + K(l^2)$ gleich dem Intervall* $[\text{ess inf}\, a(t), \text{ess sup}\, a(t)]$.

Einen Beweis finden Sie in [Böttcher, Silbermann], Analysis of Toeplitz Operators, Abschnitt 2.36. ■

Satz 6.5 *Für jedes $x \in \mathbb{T}$ ist das Spektrum von $\pi_x(T(\chi_x))$ gleich* $[0,\, 1]$.

Beweis. O.E.d.A. sei $x = 1$. Wir schreiben χ für χ_1. Nach Satz 6.4 ist das Spektrum der Nebenklasse $T(\chi) + K(l^2)$ gleich $[0,\, 1]$. Aus dem lokalen Prinzip folgt

$$[0,\, 1] = \sigma_{\mathcal{T}(PC)/K(l^2)}(T(\chi) + K(l^2)) = \bigcup_{y \in \mathbb{T}} \sigma_{\mathcal{T}_y(PC)}(\pi_y(T(\chi))). \tag{6.6}$$

Falls $y \in \mathbb{T} \setminus \{-1, 1\}$, so ist $\pi_y(T(\chi))$ entweder gleich $\pi_y(0)$ oder gleich $\pi_y(I)$, wie aus (6.5) folgt. In diesem Fall ist also entweder $\sigma_{\mathcal{T}_y(PC)}(\pi_y(T(\chi)))$ gleich $\{0\}$ oder gleich $\{1\}$. Aus (6.6) folgt sofort

$$(0,\, 1) \subseteq \sigma(\pi_1(T(\chi))) \cup \sigma(\pi_{-1}(T(\chi))) \subseteq [0,\, 1].$$

Da Spektren abgeschlossen sind, folgt schließlich

$$\sigma(\pi_1(T(\chi))) \cup \sigma(\pi_{-1}(T(\chi))) = [0,\, 1]. \tag{6.7}$$

Wir zeigen, dass $\sigma(\pi_1(T(\chi))) = \sigma(\pi_{-1}(T(\chi)))$, woraus sich mit (6.7) die Behauptung ergibt. Dazu definieren wir Operatoren $J,\, C : l^2(\mathbb{Z}^+) \to l^2(\mathbb{Z}^+)$ durch

$$J : (x_n)_{n=0}^\infty \mapsto ((-1)^n x_n)_{n=0}^\infty, \quad C : (x_n)_{n=0}^\infty \mapsto (\overline{x_n})_{n=0}^\infty.$$

Beide Operatoren sind Isometrien, J ist linear und C ist antilinear, und es ist $J^2 = C^2 = I$. Daher definieren die Abbildungen $V,\, W : L(l^2(\mathbb{Z}^+)) \to L(l^2(\mathbb{Z}^+))$,

$$V : A \mapsto JAJ, \quad W : A \mapsto CA^*C$$

einen (linearen) Isomorphismus bzw. eine (linearen) „Antiisomorphismus" von $L(l^2(\mathbb{Z}^+))$ auf sich (letzteres soll heißen, dass $W(AB) = W(B)W(A)$ für alle $A,\, B \in L(l^2(\mathbb{Z}^+))$). Man beachte, dass W tatsächlich linear ist: Für alle $A \in L(l^2(\mathbb{Z}^+))$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ ist nämlich

$$W(\alpha A) = C(\alpha A)^*C = C\overline{\alpha}A^*C = \alpha CA^*C = \alpha W(A).$$

Man rechnet nun leicht nach, dass für jede Funktion $a \in L^\infty(\mathbb{T})$

$$V(T(a)) = T(\hat{a}) \quad \text{und} \quad W(T(a)) = T(\tilde{a}) \tag{6.8}$$

mit $\hat{a}(t) = a(-t)$ und $\tilde{a}(t) = a(1/t)$. Für $a \in PC$ liegen $\hat{a}$ und $\tilde{a}$ wieder in PC. Aus (6.8) folgt daher, dass sowohl V als auch W die Algebra $\mathcal{T}(PC)$ auf sich abbilden. Außerdem ist klar, dass V und W das Ideal $K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ auf sich abbilden. Die beiden Abbildungen

$$A + K(l^2) \mapsto V(A) + K(l^2), \quad A + K(l^2) \mapsto W(A) + K(l^2)$$

sind daher ein Isomorphismus bzw. Antiisomorphismus von $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$ auf sich. Wir bezeichnen diese Abbildungen wieder mit V bzw. W. Weiter: seien $f,\, g \in C(\mathbb{T})$ mit $f(1) = 0$ und $g(-1) = 0$. Aus (6.8) folgt

$$V(T(f) + K(l^2)) = T(\hat{f}) + K(l^2), \quad W(T(g) + K(l^2)) = T(\tilde{g}) + K(l^2),$$

wobei nun $\hat{f}(-1) = 0$ und $\tilde{g}(-1) = 0$. Hieraus folgt schließlich, dass die Abbildungen

$$\pi_1(A) \mapsto \pi_{-1}(V(A)) \quad \text{bzw.} \quad \pi_{-1}(A) \mapsto \pi_{-1}(W(A))$$

einen korrekt definierten Isomorphismus von $\mathcal{T}_1(PC)$ auf $\mathcal{T}_{-1}(PC)$ bzw. einen korrekt definierten Antiisomorphismus von $\mathcal{T}_{-1}(PC)$ auf sich darstellen. Diese Abbildungen überführen $\pi_1(T(\chi))$ in

$$\pi_{-1}(V(T(\chi))) = \pi_{-1}(T(\hat{\chi})) = \pi_{-1}(T(1-\chi))$$

bzw. $\pi_{-1}(T(1-\chi))$ in

$$\pi_{-1}(W(T(1-\chi))) = \pi_{-1}(T(\tilde{1} - \tilde{\chi})) = \pi_{-1}(T(\chi)).$$

Da sowohl Isomorphismen als auch Antiisomorphismen Spektren erhalten, folgt

$$\sigma_{\mathcal{T}_1(PC)}(\pi_1(T(\chi))) = \sigma_{\mathcal{T}_{-1}(PC)}(\pi_{-1}(T(1-\chi))) = \sigma_{\mathcal{T}_{-1}(PC)}(\pi_{-1}(T(\chi))). \quad \blacksquare$$

Jede Algebra $\mathcal{T}_x(PC)$ ist also kommutativ, und wir können ihren Raum der maximalen Ideale mit $[0,\, 1]$ identifizieren. Aus (6.5) folgt dann, dass die Gelfandtransformierte von $\pi_x(T(a))$ mit $a \in PC$ die Funktion

$$[0,\, 1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto a(x+0)t + a(x-0)(1-t) \tag{6.9}$$

ist. Kombiniert man dies mit dem lokalen Prinzip, so folgt, dass ein Toeplitzoperator $T(a)$ mit $a \in PC$ genau dann Fredholmsch ist, wenn für kein $x \in \mathbb{T}$ die Funktion (6.9) eine Nullstelle hat. Allgemeiner: der Operator $\sum_i \prod_j T(a_{ij})$ mit $a_{ij} \in PC$ ist genau dann Fredholmsch, wenn für kein $x \in \mathbb{T}$ die Funktion

$$[0,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \sum_i \prod_j (a_{ij}(x+0)t + a_{ij}(x-0)(1-t)) \tag{6.10}$$

eine Nullstelle hat. Zumindest (6.9) lässt sich leicht geometrisch deuten. Bildet etwa a den Einheitskreis $\mathbb{T}$ ab auf so besagt (6.9), dass 0 auf keiner der Strecken $[a(x_i - 0), a(x_i + 0)]$ und nicht auf $a(\mathbb{T})$ liegen darf. $T(a)$ ist also genau dann Fredholmsch, wenn 0 nicht auf der durch die Strecken $[a(x - 0), a(x + 0)]$ vervollständigten „Kurve" $a(\mathbb{T})$ liegt.

Außerdem bemerkt man sofort, dass den Operatoren $T(a)T(b)$ und $T(b)T(a)$ mit $a, b \in PC$ durch (6.10) die gleiche Funktion zugeordnet wird. Es ist also

$$\pi_x(T(a)T(b)) = \pi_x(T(b)T(a)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{T}.$$

Mit Satz 5.24 (c) erhalten wir hieraus

$$\|(T(a)T(b) - T(b)T(a)) + K(l^2)\| = \max_{x\in\mathbb{T}} \|\pi_x(T(a)T(b) - T(b)T(a))\| = 0.$$

Fazit: der Kommutator $T(a)T(b) - T(b)T(a)$ ist kompakt! Wir fassen zusammen:

Satz 6.6 *Die Algebra $\mathcal{T}(PC)/K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ ist kommutativ. Ihr Raum der maximalen Ideale kann (als Menge) mit dem Zylinder $\mathbb{T} \times [0, 1]$ identifiziert werden. Die Gelfandtransformierte von $T(a) + K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ mit $a \in PC$ ist die Funktion*

$$\mathbb{T} \times [0, 1] \to \mathbb{C}, \quad (x, t) \mapsto a(x + 0)t + a(x - 0)(1 - t).$$

Ein Operator $A \in \mathcal{T}(PC)$ ist genau dann Fredholmsch, wenn die Gelfandtransformierte von $A + K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ keine Nullstellen hat.

Anmerkung 6.7 Natürlich hätten wir auch damit beginnen können, die Kommutativität der Algebra $\mathcal{T}(PC)/K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ nachzurechnen und danach hätten wir versuchen müssen, den Raum der maximalen Ideale dieser Algebra zu bestimmen. Ein „Frontalangriff" auf diesen Raum scheint mir aber keineswegs einfach. Der Nutzen des lokalen Prinzips in diesem Beispiel liegt gerade darin, dass es die getrennte Bestimmung der beiden „Faktoren" $\mathbb{T}$ und $[0, 1]$ des Raumes der maximalen Ideale $\mathbb{T} \times [0, 1]$ ermöglicht.

Anmerkung 6.8 Wir haben $M(\mathcal{T}(PC)/K(l^2))$ als *Menge* mit dem Zylinder $\mathbb{T} \times [0, 1]$ identifiziert. Die Gelfandtopologie auf diesem Zylinder fällt jedoch *nicht* mit der üblichen Euklidischen Topologie zusammen. Vielmehr wird eine Umgebungsbasis eines Punktes $(x, t) \in \mathbb{T} \times (0, 1)$ durch die Mengen

$$\{x\} \times (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \quad \text{mit } 0 < \varepsilon < \min\{t, 1 - t\}$$

gegeben.

Eine Umgebungsbasis von $(x, 1)$ mit $x \in \mathbb{T}$ wird durch

$$([x,\, xe^{i\varepsilon}) \times (1-\varepsilon,\, 1]) \cup ((x,\, xe^{i\varepsilon}) \times [0,\, 1-\varepsilon]) \quad \text{mit } 0 < \varepsilon < 1$$

gegeben, und eine Umgebungsbasis von $(x, 0)$ durch die Mengen

$$((xe^{-i\varepsilon},\, x] \times [0,\, \varepsilon)) \cup ((xe^{-i\varepsilon},\, x) \times [\varepsilon,\, 1]) \quad \text{mit } 0 < \varepsilon < 1.$$

Anmerkung 6.9 Lokale Techniken können Aussagen über Fredholmeigenschaften liefern, nicht aber über den Fredholmindex. Jener ist eine *globale* Größe (Windungszahl). Im Fall von Toeplitzoperatoren $T(a)$ mit $a \in PC$ hat man eine hinreichend einfache Indexformel: Durch das Einfügen der Strecken $[a(x-0),\, a(x+0)]$ wird $a(\mathbb{T})$ zu einer *geschlossenen* Kurve, der man eine Windungszahl bzgl. des Nullpunktes zuordnen kann. Wie im Fall stetiger Erzeuger ist der Index von $T(a)$ gleich der negativen Windungszahl dieser Kurve. ■

Anmerkung 6.10 Man betrachtet Toeplitzoperatoren auch auf $l^p(\mathbb{Z}^+)$ mit $1 < p < \infty$. Dabei ist zunächst zu beachten, dass nicht mehr jede beschränkte Funktion a auf $\mathbb{T}$ einen *beschränkten* Toeplitzoperator erzeugt. Vielmehr muss a ein sogenannter *Multiplikator* sein. Das ist beispielsweise garantiert, wenn a eine beschränkte Totalvariation hat. Die kleinste abgeschlossene Unteralgebra von $L(l^p(\mathbb{Z}^+))$, die alle Toeplitzoperatoren $T(a)$ mit $a \in PC$ von beschränkter Totalvariation enthält, lässt sich wie oben mittels des lokalen Prinzips von Allan/Douglas studieren. Das Spektrum des erzeugenden Elements $\pi_x(T(\chi_x))$ der lokalen Algebren ist i. Allg. nicht mehr das Intervall $[0,\, 1]$, sondern ein Kreisbogen von 0 nach 1, der von p abhängt. Man macht also $a(\mathbb{T})$ mit (gewissen) Kreisbögen statt mit Strecken zu einer geschlossenen Kurve, und $T(a)$ ist Fredholmsch, wenn 0 nicht auf dieser Kurve liegt. ■

6.2 Algebraisierung der Stabilität

Um das Stabilitätsproblem einer Untersuchung mittels lokaler Prinzipien zugänglich zu machen, überführen wir es in ein Invertierbarkeitsproblem in einer geeignet konstruierten Banachalgebra.

Sei X ein Banachraum und $(Q_n) \subseteq L(X)$ eine Folge von Projektoren, die stark gegen den identischen Operator I auf X konvergiert. Ein Näherungsverfahren ist eine Folge (A_n) von Operatoren $A_n \in \operatorname{im} Q_n$, für die $A_n Q_n$ stark gegen einen

Operator $A \in L(X)$ konvergiert. Nach Banach-Steinhaus ist $\sup \|A_n\| < \infty$. Das legt folgende Definition nahe: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller beschränkten Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Operatoren $A_n \in L(\operatorname{im} Q_n)$, d. h. es ist $\sup_n \|A_n\| < \infty$. In $\mathcal{F}$ erklären wir Operationen durch

$$(A_n) + (B_n) := (A_n + B_n), \quad (A_n)(B_n) := (A_n B_n) \quad \text{und} \quad \alpha(A_n) := (\alpha A_n)$$

(wobei (A_n), $(B_n) \in \mathcal{F}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$) sowie eine Norm durch

$$\|(A_n)\|_{\mathcal{F}} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|.$$

Ist $X = H$ ein Hilbertraum und sind die Q_n Orthoprojektoren, so definieren wir auf $\mathcal{F}$ eine Involution durch $(A_n)^* := (A_n^*)$.

Satz 6.11 *$\mathcal{F}$ ist eine Banachalgebra mit Einselement. Ist $X = H$ ein Hilbertraum, so ist $\mathcal{F}$ eine C^*-Algebra.*

Beweis. Es ist klar, dass $\mathcal{F}$ eine normierte Algebra ist. Ihr Einselement ist die Folge (I_n), wobei I_n für den identischen Operator auf $\operatorname{im} Q_n$ steht. Wir zeigen die Vollständigkeit von $\mathcal{F}$.

Sei $((A_n^{(m)})_{n\geq 1})_{m\geq 1}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{F}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|(A_n^{(m)})_{n\geq 1} - (A_n^{(k)})_{n\geq 1}\|_{\mathcal{F}} = \sup_{n\geq 1} \|A_n^{(m)} - A_n^{(k)}\| < \varepsilon \tag{6.11}$$

für alle $m, k \geq N$. Insbesondere ist für jedes n die Folge $(A_n^{(m)})_{m\geq 1}$ eine Cauchyfolge in $L(\operatorname{im} Q_n)$ und mithin konvergent. (Man beachte, dass $\operatorname{im} Q_n$ ein abgeschlossener Teilraum des Banachraumes X ist.) Sei $A_n^\infty := \lim_{m\to\infty} A_n^{(m)}$. Vollzieht man in (6.11) den Grenzübergang $k \to \infty$, folgt

$$\sup_{n\geq 1} \|A_n^{(m)} - A_n^\infty\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq N.$$

Hieraus folgt, dass die Folge $(A_n^\infty) = (A_n^{(m)}) + (A_n^\infty - A_n^{(m)})$ wieder zu $\mathcal{F}$ gehört und dass $\|(A_n^{(m)}) - (A_n^\infty)\|_{\mathcal{F}} \to 0$ für $m \to \infty$. Also ist $\mathcal{F}$ vollständig.

Im Hilbertraumfall gilt für jede Folge $(A_n) \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}\|(A_n)^*(A_n)\|_{\mathcal{F}} &= \|(A_n^* A_n)\|_{\mathcal{F}} = \sup_{n\geq 1} \|A_n^* A_n\| = \sup_{n\geq 1} \|A_n\|^2 \\ &= \left(\sup_{n\geq 1} \|A_n\|\right)^2 = \|(A_n)\|_{\mathcal{F}}^2,\end{aligned}$$

d. h. $\mathcal{F}$ wird zu einer C^*-Algebra. ∎

Nach Konstruktion enthält $\mathcal{F}$ alle Näherungsverfahren, die Näherungslösungen in im Q_n suchen. Die Rolle der Algebra $\mathcal{F}$ in der Numerischen Analysis kann daher verglichen werden mit der Rolle der Algebra $L(X)$ in der Operatortheorie.

Offenbar ist eine Folge $(A_n) \in \mathcal{F}$ genau dann in $\mathcal{F}$ invertierbar, wenn es eine Folge $(B_n) \in \mathcal{F}$ gibt mit $(B_n)(A_n) = (A_n)(B_n) = (I_n)$ bzw.

$$A_n B_n = B_n A_n = I_n \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Es müssen also *alle* Operatoren A_n invertierbar sein, und ihre Inversen $B_n = A_n^{-1}$ müssen (damit die Folge (A_n^{-1}) wieder in $\mathcal{F}$ liegt) gleichmäßig beschränkt sein:

$$\|(B_n)\|_{\mathcal{F}} = \|(A_n^{-1})\|_{\mathcal{F}} = \sup_{n\geq 1} \|A_n^{-1}\| < \infty.$$

Die Invertierbarkeit einer Folge in $\mathcal{F}$ ist also eine stärkere Eigenschaft als die Stabilität dieser Folge. Für eine äquivalente Beschreibung der Stabilität müssen wir also die Invertierbarkeit in $\mathcal{F}$ durch einen schwächeren Begriff ersetzen. Dazu folgende Überlegung. Uns interessieren asymptotische Eigenschaften der Folge (A_n), also solche, die erst für hinreichend große n spürbar werden. Bezüglich ihrer asymptotischen Eigenschaften können wir also zwischen zwei Folgen (A_n) und (B_n), die nur in endlich vielen Einträgen verschieden sind, gar nicht unterscheiden. Insbesondere können wir im Hinblick auf asymptotische Eigenschaften zwischen den Folgen

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n, 0, 0, 0, \ldots) \quad \text{und} \quad (0, 0, 0, \ldots)$$

nicht unterscheiden. Wir möchten daher beide Folgen als „im Wesentlichen gleich" betrachten. Algebraisch geschieht das dadurch, dass alle Folgen, die man mit der Nullfolge identifizieren möchte, in ein Ideal gesteckt werden und dass man nach diesem Ideal faktorisiert. Sei also $\mathcal{G}_0$ die Menge aller Folgen $(A_n) \in \mathcal{F}$ mit nur endlich vielen Einträgen ungleich 0. Diese Menge ist tatsächlich ein Ideal von $\mathcal{F}$. Allerdings ist das Ideal $\mathcal{G}_0$ nicht abgeschlossen, und $\mathcal{F}/\mathcal{G}_0$ ist keine Banachalgebra. Wir betrachten daher statt $\mathcal{G}_0$ die Abschließung $\mathcal{G}$ von $\mathcal{G}_0$ in $\mathcal{F}$. Man kann leicht zeigen, dass

$$\mathcal{G} = \{(G_n) \in \mathcal{F} : \lim \|G_n\| = 0\}. \tag{6.12}$$

Wir betrachten (6.12) als Definition von $\mathcal{G}$ und zeigen:

Satz 6.12 *$\mathcal{G}$ ist ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{F}$.*

Beweis. Die Idealeigenschaft ist leicht zu sehen (das Produkt einer beschränkten Folge und einer Nullfolge ist eine Nullfolge). Wir zeigen die Abgeschlossenheit. Sei $((G_n^{(m)})_{n\geq 1})_{m\geq 1}$ eine Folge in $\mathcal{G}$, die in $\mathcal{F}$ gegen eine Folge $(G_n^{\infty})_{n\geq 1}$ konvergiert. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein M mit

$$\sup_{n\geq 1} \|G_n^{(m)} - G_n^{\infty}\| < \varepsilon/2 \quad \text{für } m \geq M.$$

Wir fixieren ein $m_0 \geq M$ und bestimmen N so, dass

$$\|G_n^{(m_0)}\| < \varepsilon/2 \quad \text{für } n \geq N.$$

Für alle $n \geq N$ ist dann

$$\|G_n^\infty\| \leq \|G_n^\infty - G_n^{(m_0)}\| + \|G_n^{(m_0)}\| < \varepsilon.$$

Es ist also $(G_n^\infty)_{n\geq 1} \in \mathcal{G}$. ■

Wir können also die Faktoralgebra $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ bilden. Diese ist wieder eine Banachalgebra und im Hilbertraumfall eine C^*-Algebra. Mit Hilfe dieser Algebra gelingt die angestrebte Übersetzung des Stabilitäts- in ein Invertierbarkeitsproblem.

Satz 6.13 (Kozak) *Eine Folge $(A_n) \in \mathcal{F}$ ist genau dann stabil, wenn ihre Nebenklasse $(A_n) + \mathcal{G}$ in $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ invertierbar ist.*

Beweis. Sei zunächst (A_n) stabil. Dann sind die A_n invertierbar für $n \geq n_0$ (mit einem geeigneten n_0), und die Folge (B_n) mit

$$B_n := \begin{cases} A_n^{-1} & \text{für } n \geq n_0 \\ I_n & \text{für } n < n_0 \end{cases}$$

ist beschränkt. Diese Folge gehört also zu $\mathcal{F}$, und es ist

$$(A_n)(B_n) - (I_n) = (B_n)(A_n) - (I_n) =: (G_n)$$

eine Folge mit $G_n = 0$ für $n \geq n_0$. Also ist $(G_n) \in \mathcal{G}$, und $(B_n) + \mathcal{G}$ ist die zu $(A_n) + \mathcal{G}$ inverse Nebenklasse.

Sei umgekehrt $(A_n) + \mathcal{G}$ in $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ invertierbar. Dann gibt es ein $(B_n) \in \mathcal{F}$ mit

$$((A_n) + \mathcal{G})((B_n) + \mathcal{G}) = ((B_n) + \mathcal{G})((A_n) + \mathcal{G}) = (I_n) + \mathcal{G}.$$

Es gibt also Folgen (G_n), $(H_n) \in \mathcal{G}$ mit

$$A_nB_n = I_n - G_n \quad \text{und} \quad B_nA_n = I_n - H_n \quad \text{für alle } n.$$

Von einer Stelle n_0 an ist $\|G_n\| < 1/2$ und $\|H_n\| < 1/2$. Dann sind $I_n - G_n$ sowie $I_n - H_n$ invertierbar, und für ihre Inversen gilt (Neumann-Reihe)

$$\|(I_n - G_n)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} G_n^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2.$$

Für $n \geq n_0$ ist also $A_nB_n(I_n - G_n)^{-1} = I_n$ und analog $(I_n - H_n)^{-1}B_nA_n = I_n$. Das zeigt die Invertierbarkeit von A_n für $n \geq n_0$, und aus

$$\|A_n^{-1}\| = \|B_n(I_n - G_n)^{-1}\| \leq \|B_n\|\|(I_n - G_n)^{-1}\| \leq 2\|B_n\|$$

und $(B_n) \in \mathcal{F}$ folgt die gleichmäßige Beschränktheit der Normen $\|A_n^{-1}\|$ für $n \geq n_0$. ■

Stabilität von (A_n) heißt also Invertierbarkeit von $(A_n) + \mathcal{G}$ in $\mathcal{F}/\mathcal{G}$. Wir werden später sehen, dass sich auch viele andere asymptotische Eigenschaften der Folge (A_n) (Häufungspunkte von Eigenwerten, Singulärwerten, ...) durch Eigenschaften ihrer Nebenklasse beschreiben lassen. Beispielsweise gilt

Satz 6.14 *Für jede Folge* $(A_n) \in \mathcal{F}$ *ist*

$$\limsup_{n\to\infty} \|A_n\| = \|(A_n) + \mathcal{G}\|.$$

Der Beweis wird in der Übung geführt.

6.3 Die Algebra des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren: stetige Erzeuger

Sei nun $X = l^2(\mathbb{Z}^+)$, die Q_n seien die bekannten Orthoprojektoren P_n, und $\mathcal{F}$ sei die zugehörige C^*-Algebra von Folgen (A_n), $A_n \in L(\operatorname{im} P_n)$. Wir gehen vor wie bei der Fredholmtheorie für Toeplitzoperatoren und stecken alle uns interessierenden Folgen in eine Algebra. Im Fall des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren $T(a)$ mit $a \in C(\mathbb{T})$ heißt das: Wir betrachten die kleinste abgeschlossene Unteralgebra $\mathcal{S}(C)$ von $\mathcal{F}$, die alle Folgen $(P_nT(a)P_n)$ mit $a \in C(\mathbb{T})$ enthält. Diese Algebra kann man komplett beschreiben.

Satz 6.15 $\mathcal{S}(C) = \{(A_n) \in \mathcal{F} : A_n = P_nT(a)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n + G_n$ *mit* $a \in C(\mathbb{T})$, $K, L \in K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ *und* $(G_n) \in \mathcal{G}\}$.

Für den Beweis bezeichnen wir die rechte Seite dieser Identität mit $\mathcal{A}$. Wir schicken dem Beweis zwei Hilfssätze voraus.

Lemma 6.16 (Widom) *Für* a, $b \in L^\infty(\mathbb{T})$ *ist*

$$P_nT(ab)P_n = P_nT(a)P_nT(b)P_n + P_nH(a)H(\tilde{b})P_n + R_nH(\tilde{a})H(b)R_n.$$

Beweis. Aus Lemma 3.8 wissen wir, dass

$$\begin{aligned} P_nT(ab)P_n &= P_nT(a)T(b)P_n + P_nH(a)H(\tilde{b})P_n \\ &= P_nT(a)P_nT(b)P_n + P_nH(a)H(\tilde{b})P_n + P_nT(a)Q_nT(b)P_n \end{aligned}$$

mit $Q_n := I - P_n$. Seien $V, V_{-1} \in L(l^2(\mathbb{Z}^+))$ die üblichen Verschiebungsoperatoren und $V_n := V^n$ sowie $V_{-n} := (V_{-1})^n$ für $n \geq 1$. Man rechnet leicht nach (Matrixdarstellung), dass $R_nT(a)V_n = P_nH(\tilde{a})$ und $V_{-n}T(b)R_n = H(b)P_n$. Folglich ist

$$P_nT(a)Q_nT(b)P_n = R_n(R_nT(a)V_n)(V_{-n}T(b)R_n)R_n = R_nH(\tilde{a})H(b)R_n,$$

und die Widomsche Formel ist bewiesen. ■

Lemma 6.17 *Für jede Folge* $(A_n) \in \mathcal{A}$ *existieren die starken Grenzwerte*

$$W(A_n) := \text{s-lim}\, A_nP_n \quad \text{und} \quad \widetilde{W}(A_n) := \text{s-lim}\, R_nA_nR_n.$$

Insbesondere ist für $A_n = P_nT(a)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n + G_n$ *mit* a, K, L *und* (G_n) *wie in Satz* 6.15

$$W(A_n) = T(a) + K \quad \text{und} \quad \widetilde{W}(A_n) = T(\tilde{a}) + L.$$

Um Missverständnissen vorzubeugen: $W(A_n)$ bedeutet Anwendung von W auf die Folge (A_n), nicht auf den Operator A_n! Die korrektere Schreibweise $W((A_n))$ is etwas unhandlich.

Beweis. Aus Lemma 3.22 wissen wir, dass für (A_n) von der angegebenen Gestalt $W(A_n)$ existiert und gleich $T(a) + K$ ist. Aus Lemma 3.21 folgt

$$R_n A_n R_n = P_n T(\tilde{a}) P_n + P_n L P_n + R_n K R_n + R_n G_n R_n.$$

Aus Lemma 3.22 folgt die Existenz von $\widetilde{W}(A_n) = W(R_n A_n R_n)$ und die Gleichheit $\widetilde{W}(A_n) = T(\tilde{a}) + L$. ■

Beweis von Satz 6.15. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist. Da $\mathcal{A}$ offenbar ein linearer Raum ist, müssen wir noch zeigen, dass alle möglichen Produkte von Folgen der Gestalt $(P_n T(a) P_n)$, $(P_n K P_n)$ und $(R_n L R_n)$ wieder in $\mathcal{A}$ liegen (für Produkte mit einer Nullfolge (G_n) ist dies selbstverständlich).

Nach Lemma 6.16 ist

$$P_n T(a) P_n T(b) P_n = P_n T(ab) P_n - P_n H(a) H(\tilde{b}) P_n - R_n H(\tilde{a}) H(b) R_n.$$

Da die Operatoren $H(a)H(\tilde{b})$ und $H(\tilde{a})H(b)$ kompakt sind (Satz 3.15 (b)), liegt die Folge $(P_n T(a) P_n)(P_n T(b) P_n)$ in $\mathcal{A}$. Weiter ist

$$P_n T(a) P_n \cdot R_n L R_n = R_n T(\tilde{a}) R_n R_n L R_n = R_n T(\tilde{a}) L R_n - R_n T(\tilde{a}) Q_n L R_n.$$

Da $Q_n \to 0$ stark und da L kompakt ist, liegt die Folge $(R_n T(\tilde{a}) Q_n L R_n)$ in $\mathcal{G}$. Also liegt $(P_n T(a) P_n)(R_n L R_n)$ in $\mathcal{A}$. Schließlich betrachten wir

$$P_n K P_n \cdot R_n L R_n = P_n K R_n L R_n.$$

Nach Lemma 3.22 konvergiert $(R_n L R_n)^* = R_n L^* R_n$ stark gegen 0. Also konvergiert die Folge $(P_n K P_n)(R_n L R_n)$ in der Norm gegen 0, liegt also in $\mathcal{G}$. Die übrigen Produkte behandelt man ähnlich.

Wir zeigen die Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{F}$. Sei $((A_n^{(m)})_{n\geq 1})_{m\geq 1}$ mit

$$A_n^{(m)} = P_n T(a_m) P_n + P_n K_m P_n + R_n L_m R_n + G_n^{(m)}$$

eine in $\mathcal{F}$ konvergente Folge aus $\mathcal{A}$. Dann konvergiert auch jede der Folgen

$$(W(A_n^{(m)}))_{m\geq 1} = (T(a_m) + K_m)_{m\geq 1}, \quad (\widetilde{W}(A_n^{(m)}))_{m\geq 1} = (T(\tilde{a}_m) + L_m)_{m\geq 1}$$

in $L(l^2)$. Aus Satz 6.1 und seinem Beweis wissen wir, dass es eine stetige Funktion a und kompakte Operatoren K und L gibt mit

$$\|T(a_m) - T(a)\| \to 0, \quad \|K_m - K\| \to 0 \quad \text{und} \quad \|L_m - L\| \to 0.$$

Dann konvergiert $((P_n T(a_m) P_n + P_n K_m P_n + R_n L_m R_n)_{n\geq 1})_{m\geq 1}$ gegen die Folge $(P_n T(a) P_n + P_n K P_n + R_n L P_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{F}$. Hieraus folgt schließlich, dass auch die

Folge $((G_n^{(m)})_{n\geq 1})_{m\geq 1}$ in $\mathcal{F}$ konvergiert. Da $\mathcal{G}$ abgeschlossen ist, liegt ihr Grenzwert wieder in $\mathcal{G}$.

Wir haben damit erhalten, dass $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{F}$ ist, die alle Folgen $(P_nT(a)P_n)$ mit $a \in C(\mathbb{T})$ enthält. Da $\mathcal{S}(C)$ die *kleinste* abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{F}$ ist, die alle diese Folgen enthält, folgt $\mathcal{S}(C) \subseteq \mathcal{A}$.

Zur umgekehrten Inklusion: Offenbar liegt jede der Folgen $(P_nT(a)P_n)$ mit $a \in C(\mathbb{T})$ in $\mathcal{S}(C)$. Wir zeigen, dass auch alle Folgen (P_nKP_n), (R_nLR_n) und (G_n) in $\mathcal{S}(C)$ liegen. Dabei verwenden wir die Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 6.1. Für den Beweis, dass jede Folge (P_nKP_n) mit K kompakt in $\mathcal{S}(C)$ liegt, genügt es wegen der Banachraumeigenschaft von $\mathcal{S}(C)$ zu zeigen, dass jede Folge $(P_nV_iP_1V_{-j}P_n)$ mit $i, j \geq 0$ in $\mathcal{S}(C)$ liegt. Dies folgt aus

$$(P_nV_iP_1V_{-j}P_n) = (P_nV_iP_n)(P_nP_1P_n)(P_nV_{-j}P_n)$$

und

$$(P_nP_1P_n) = (P_n) - (P_nV_1P_n)(P_nV_{-1}P_n),$$

da jede der Folgen $(P_nV_iP_n) = (P_nT(t^i)P_n)$ und $(P_nV_{-j}P_n) = (P_nT(t^{-j})P_n)$ in $\mathcal{S}(C)$ liegt. Ähnlich zeigt man, dass $(R_nLR_n) \in \mathcal{S}(C)$ für jeden kompakten Operator L.

Für die Inklusion $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}(C)$ genügt es schließlich zu zeigen, dass für jedes $n_0 \geq 1$ und beliebige $i, j \geq 0$ die Folge

$$(G_n) := (0, 0, \ldots, 0, P_{n_0}V_iP_1V_{-j}P_{n_0}, 0, 0, \ldots)$$

(mit dem nicht verschwindenden Eintrag an n_0. Stelle) zu $\mathcal{S}(C)$ gehört. Dies folgt aus

$$(G_n) = (P_nV_iP_1V_{-j}P_n)(R_nV_{n_0-j}P_1V_{-n_0+j}R_n)$$

und aus dem bereits Bewiesenen. ∎

Da Nullfolgen das Stabilitätsverhalten offenbar nicht beeinflussen, stellen wir fest, dass wir in Satz 3.20 bereits das Stabilitätsverhalten *einer beliebigen Folge* aus $\mathcal{S}(C)$ beschrieben haben. Genauer:

Satz 6.18 *Für jede Folge $(A_n) \in \mathcal{S}(C)$ gilt:*

$$(A_n) \textit{ ist stabil} \quad \Leftrightarrow \quad W(A_n) \textit{ und } \widetilde{W}(A_n) \textit{ sind invertierbar.}$$

Wir formulieren diese Aussage um. Dazu fassen wir $W(A_n)$ und $\widetilde{W}(A_n)$ zu einem Paar $(W(A_n), \widetilde{W}(A_n)) \in L(l^2) \times L(l^2)$ zusammen. Man überzeugt sich leicht davon, dass das Produkt $L(l^2) \times L(l^2)$, versehen mit komponentenweisen Operationen und der Norm $\|(A, B)\| := \max\{\|A\|, \|B\|\}$, eine C^*-Algebra bildet. Außerdem ist klar, dass $W(A_n) = W(A_n + G_n)$ für beliebige Folgen $(A_n) \in \mathcal{S}(C)$

und $(G_n) \in \mathcal{G}$. Der Operator $W(A_n)$ (und ebenso der Operator $\widetilde{W}(A_n)$) hängt also nur von der Nebenklasse $(A_n) + \mathcal{G}$ ab. Daher ist die Abbildung

$$\text{sym} := \mathcal{S}(C)/\mathcal{G} \to L(l^2) \times L(l^2), \quad (A_n) + \mathcal{G} \mapsto (W(A_n), \widetilde{W}(A_n)) \tag{6.13}$$

korrekt definiert. Die Abbildung sym (für „Symbol“) ist ein *-Homomorphismus von der C^*-Algebra $\mathcal{S}(C)/\mathcal{G}$ in die C^*-Algebra $L(l^2) \times L(l^2)$. Satz 6.18 kann mit dieser Abbildung wie folgt formuliert werden:

> *Für eine Folge $(A_n) \in \mathcal{S}(C)$ ist $(A_n) + \mathcal{G}$ genau dann invertierbar (in $\mathcal{S}(C)/\mathcal{G}$ oder $\mathcal{F}/\mathcal{G}$), wenn* $\text{sym}\,((A_n) + \mathcal{G}) = (W(A_n), \widetilde{W}(A_n))$ *invertierbar ist (in $L(l^2) \times L(l^2)$).*

Formuliert man diese Aussage für Spektren statt für Invertierbarkeit, so bekommt man:

> *Für jede Folge $(A_n) \in \mathcal{S}(C)$ ist*
>
> $$\sigma_{\mathcal{S}(C)/\mathcal{G}}((A_n) + \mathcal{G}) = \sigma_{L(l^2)\times L(l^2)}(\text{sym}\,((A_n) + \mathcal{G})).$$

Und noch einmal anders: *Die Abbildung* sym *aus* (6.13) *erhält Spektren.*

Bis hierher hätten wir auch alles tun können, wenn wir von $\mathcal{S}(C)$ nur wissen, dass $\mathcal{S}(C)$ eine Banachalgebra ist (wenn wir z. B. die Algebra des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren mit stetigen Erzeugern auf l^p mit $p \neq 2$ betrachtet hätten). Im vorliegenden C^*-Fall kann man Dank Lemma 5.16 weit mehr sagen:

Satz 6.19 *Die Abbildung*

$$\text{sym} : \mathcal{S}(C)/\mathcal{G} \to L(l^2) \times L(l^2), \quad (A_n) + \mathcal{G} \mapsto (W(A_n), \widetilde{W}(A_n))$$

ist ein isometrischer *-Homomorphismus.

Die Algebra $\mathcal{S}(C)/\mathcal{G}$ ist also isometrisch *-isomorph zur C^*-Algebra aller Paare $(W(A_n), \widetilde{W}(A_n))$ mit $(A_n) \in \mathcal{S}(C)$. Wenn wir etwas über die Nebenklasse $(A_n) + \mathcal{G}$ einer Folge $(A_n) \in \mathcal{S}(C)$ erfahren möchten, müssen wir also nicht mit Nebenklassen unendlicher Folgen umgehen, sondern können alles auf das Rechnen mit den beiden Operatoren $W(A_n)$ und $\widetilde{W}(A_n)$ zurückführen. Beispielsweise gilt:

Satz 6.20 *Für jede Folge $(A_n) \in \mathcal{S}(C)$ konvergiert die Folge $(\|A_n\|)$ der Normen, und ihr Grenzwert ist gleich* $\max\{\|W(A_n)\|, \|\widetilde{W}(A_n)\|\}$.

Beweis. Für jede Folge $(A_n) \in \mathcal{F}$ ist nach Satz 6.14

$$\limsup \|A_n\| = \|(A_n) + \mathcal{G}\|. \tag{6.14}$$

Aus Satz 6.19 wissen wir, dass die rechte Seite von (6.14) gleich

$$\max\left\{\|W(A_n)\|, \|\widetilde{W}(A_n)\|\right\}$$

ist. Außerdem gilt nach Banach-Steinhaus

$$\begin{aligned}
\|W(A_n)\| &= \|\text{s-lim}\, A_n P_n\| \leq \liminf \|A_n\|, \\
\|\widetilde{W}(A_n)\| &= \|\text{s-lim}\, R_n A_n R_n\| \leq \liminf \|R_n A_n R_n\| = \liminf \|A_n\|.
\end{aligned}$$

Aus

$$\limsup \|A_n\| = \max\left\{\|W(A_n)\|, \|\widetilde{W}(A_n)\|\right\} \leq \liminf \|A_n\|$$

folgt die Behauptung. ■

Ganz ähnlich zeigt man:

Satz 6.21 *Für jede stabile Folge $(A_n) \in \mathcal{S}(C)$ konvergiert die Folge der Konditionszahlen* $\operatorname{cond} A_n := \|A_n\|\,\|A_n^{-1}\|$, *und ihr Grenzwert ist*

$$\max\left\{\|W(A_n)\|, \|\widetilde{W}(A_n)\|\right\} \cdot \max\left\{\|W(A_n)^{-1}\|, \|\widetilde{W}(A_n)^{-1}\|\right\}.$$

Man beachte: Stabilität der Folge (A_n) bedeutet zunächst nur *gleichmäßige Beschränktheit* der Folge der Konditionszahlen. Für Folgen in $\mathcal{S}(C)$ impliziert sie sogar deren *Konvergenz*!

6.4 Die Algebra des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren: stückweise stetige Erzeuger

Mit $\mathcal{S}(PC)$ bezeichnen wir die kleinste abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{F}$, die alle Folgen $(P_nT(a)P_n)$ mit einer *stückweise* stetigen Funktion a enthält. Wegen $(P_nT(a)P_n)^* = (P_nT(\tilde{a})P_n)$ ist $\mathcal{S}(PC)$ eine C^*-Unteralgebra. Unser Ziel ist es, für Folgen in dieser Algebra ein Stabilitätsresultat wie in Satz 6.18 aufzustellen. Wie im Fall der Fredholmtheorie gelingt die Ableitung dieses Resultates nicht mehr mit einfachen „Tricks“ wie dem Störungssatz, und auch die Beschreibung der Folgen in $\mathcal{S}(PC)$ ist nicht so einfach wie in Satz 6.15. Da die Stabilität einer Folge in $\mathcal{S}(PC)$ natürlich wieder zur Invertierbarkeit ihrer Nebenklasse modulo $\mathcal{G}$ in $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ oder in $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{G}$ äquivalent ist, liegt der Einsatz lokaler Prinzipien nahe.

Dies erfordert, in $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{G}$ eine nichttriviale Unteralgebra des Zentrums aufzuspüren. Man kann aber leicht zeigen, dass das Zentrum von $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{G}$ genau aus den Nebenklassen $\alpha(I_n) + \mathcal{G}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ besteht. Ein Lokalisieren bzgl. dieses trivialen Zentrums ist nutzlos. Ein Ausweg aus diesem Dilemma wurde 1981 von Silbermann gefunden. Wir beschreiben nun diesen Ausweg.

Ausgangspunkt ist Widoms Formel in Lemma 6.16. Aus ihr folgt für beliebige Funktionen $a, b \in L^\infty(\mathbb{T})$, dass

$$\begin{aligned} &P_nT(a)P_n \cdot P_nT(b)P_n - P_nT(b)P_n \cdot P_nT(a)P_n = \\ &\quad = P_n(H(b)H(\tilde{a}) - H(a)H(\tilde{b}))P_n + R_n(H(\tilde{b})H(a) - H(\tilde{a})H(b))R_n. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Ist nun eine der Funktionen a, b stetig, so sind die Operatoren $H(b)H(\tilde{a}) - H(a)H(\tilde{b})$ und $H(\tilde{b})H(a) - H(\tilde{a})H(b)$ kompakt, d. h. die rechte Seite von (6.15) ist von der Gestalt

$$(P_nKP_n + R_nLR_n) \quad \text{mit } K, L \text{ kompakt.}$$

Dies legt es nahe, eine Menge $\mathcal{J}$ zu erklären durch

$$\mathcal{J} := \{(P_nKP_n + R_nLR_n + G_n) : K,\ L \text{ kompakt},\ (G_n) \in \mathcal{G}\}$$

und nach einer C^*-Algebra $\mathcal{F}^\mathcal{J}$ zu suchen mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{J}$ ist ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{F}^\mathcal{J}$,
- $\mathcal{S}(PC) \subseteq \mathcal{F}^\mathcal{J}$, und
- Invertierbarkeit in $\mathcal{F}^\mathcal{J}/\mathcal{J}$ hat etwas zu tun mit der Invertierbarkeit in $\mathcal{F}/\mathcal{G}$, d. h. mit Stabilität. (Da $\mathcal{J}$ echt größer ist als $\mathcal{G}$, kann Invertierbarkeit in $\mathcal{F}^\mathcal{J}/\mathcal{J}$ nicht mehr äquivalent zur Stabilität sein.)

Hier ist eine solche Algebra: Sei $\mathcal{F}^\mathcal{J}$ die Menge aller Folgen $(A_n) \in \mathcal{F}$, für die die starken Grenzwerte

$$\text{s-lim}\, A_nP_n, \quad \text{s-lim}\, A_n^*P_n, \quad \text{s-lim}\, R_nA_nR_n, \quad \text{s-lim}\, R_nA_n^*R_n$$

existieren. Wir bezeichnen wie vorher

$$W(A_n) := \text{s-lim}\, A_nP_n, \quad \widetilde{W}(A_n) := \text{s-lim}\, R_nA_nR_n.$$

Satz 6.22 *$\mathcal{F}^\mathcal{J}$ ist eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{F}$, und $\mathcal{J}$ ist ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{F}^\mathcal{J}$. W und $\widetilde{W}$ sind *-Homomorphismen von $\mathcal{F}^\mathcal{J}$ in $L(l^2(\mathbb{Z}^+))$.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{F}^\mathcal{J}$ eine symmetrische Unteralgebra von $\mathcal{F}$ ist und dass W und $\widetilde{W}$ *-Homomorphismen sind. Da $P_n \to I$ und $R_nLR_n \to 0$ für jeden kompakten Operator L (Lemma 3.22), ist auch klar, dass $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{F}^\mathcal{J}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{J}$ ein Linksideal von $\mathcal{F}^\mathcal{J}$ ist.

Seien $(A_n) \in \mathcal{F}^\mathcal{J}$, K, L kompakt und $(G_n) \in \mathcal{G}$. Dann ist

$$\begin{aligned} &A_n(P_nKP_n + R_nLR_n + G_n) = \\ &\quad = A_nP_nKP_n + R_n \cdot R_nA_nR_nLR_n + A_nG_n \\ &\quad = P_n\big(A_nP_n - W(A_n)\big)KP_n + R_n\big(R_nA_nR_n - \widetilde{W}(A_n)\big)LR_n + A_nG_n \\ &\qquad + P_nW(A_n)KP_n + R_n\widetilde{W}(A_n)LR_n. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Wegen $A_nP_n - W(A_n) \to 0$, $R_nA_nR_n - \widetilde{W}(A_n) \to 0$ und der Kompaktheit von K und L liegt die erste Zeile von (6.16) in $\mathcal{G}$. Aus der Kompaktheit von $W(A_n)K$ und $\widetilde{W}(A_n)L$ folgt, dass $(A_n)(P_nKP_n + R_nLR_n + G_n) \in \mathcal{J}$. Also ist $\mathcal{J}$ ein Linksideal. Die Rechtsidealeigenschaft folgt analog.

Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit von $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ in $\mathcal{F}$. Vorab bemerken wir, dass W und $\widetilde{W}$ stetig und sogar kontraktiv sind. Dies folgt durch explizites Nachrechnen und mit dem Satz von Banach/Steinhaus. Sei nun $((A_n^{(m)})_{n\geq 1})_{m\geq 1}$ eine Folge in $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$, die gegen eine Folge $(A_n) \in \mathcal{F}$ konvergiert. Dann ist $((A_n^{(m)})_{n\geq 1})_{m\geq 1}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$, und aus der Stetigkeit von W folgt, dass $(W(A_n^{(m)}))_{m\geq 1}$ eine Cauchyfolge in $L(l^2)$ ist. Sei A ihr Grenzwert. Für alle $x \in l^2$ und $m, n \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} \|Ax - A_nP_nx\| &\leq \|Ax - W(A_n^{(m)})x\| + \|W(A_n^{(m)})x - A_n^{(m)}P_nx\| + \\ &\quad + \|A_n^{(m)}P_nx - A_nP_nx\| \\ &\leq \|A - W(A_n^{(m)})\|\,\|x\| + \|W(A_n^{(m)})x - A_n^{(m)}P_nx\| + \\ &\quad + \|A_n^{(m)} - A_n\|\,\|x\|. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir M_1 so, dass

$$\|A - W(A_n^{(m)})\| < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq M_1$$

und M_2 so, dass

$$\|(A_n^{(m)}) - (A_n)\|_{\mathcal{F}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n^{(m)} - A_n\| < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq M_2.$$

Wir fixieren ein $m_0 \geq \max\{M_1, M_2\}$ und wählen N so, dass

$$\|W(A_n^{(m_0)})x - A_n^{(m_0)}P_nx\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Aus (6.17) folgt dann für alle $n \geq N$

$$\|Ax - A_nP_nx\| \leq 2\varepsilon\|x\| + \varepsilon,$$

d. h., A_nP_n konvergiert stark gegen A. Analog überprüft man die Existenz der übrigen drei starken Grenzwerte. Dies zeigt die Abgeschlossenheit von $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$, und die von $\mathcal{J}$ überprüft man ähnlich wie im Beweis von Satz 6.15 (Abgeschlossenheit der Menge $\mathcal{A}$). ■

Das löst das erste unserer Probleme, und das zweite folgt leicht:

Satz 6.23 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{S}(PC) \subseteq \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$.

Beweis. Die erste Inklusion folgt aus Satz 6.15: es ist sogar $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{S}(C)$. Da $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ eine abgeschlossene Algebra ist, müssen wir für die zweite Inklusion nur zeigen, dass $(P_nT(a)P_n) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ für alle $a \in PC$. Dies folgt sofort aus

$$P_nT(a)P_n \to T(a) \quad \text{und} \quad R_nT(a)R_n = P_nT(\tilde{a})P_n \to T(\tilde{a}) \quad \text{stark}$$

(was sogar für alle $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt). ∎

Das dritte Problem wird gelöst durch den folgenden „Liftungssatz“. Er „misst“ den Unterschied zwischen der Invertierbarkeit in $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ (Stabilität) und in $\mathcal{F}^\mathcal{J}/\mathcal{J}$.

Satz 6.24 (Liftungssatz) *Eine Folge $(A_n) \in \mathcal{F}^\mathcal{J}$ ist genau dann stabil, wenn die Operatoren $W(A_n)$ und $\widetilde{W}(A_n)$ invertierbar sind und wenn die Nebenklasse $(A_n) + \mathcal{J}$ in der Faktoralgebra $\mathcal{F}^\mathcal{J}/\mathcal{J}$ invertierbar ist.*

Beweis. Sei zunächst (A_n) stabil. Dann ist $(A_n)+\mathcal{G}$ in $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ invertierbar (Kozak) und bereits in $\mathcal{F}^\mathcal{J}/\mathcal{G}$ invertierbar (inverse Abgeschlossenheit von C^*-Algebren). Dann ist (A_n) erst recht modulo des größeren Ideales $\mathcal{J}(\supseteq \mathcal{G})$ invertierbar. Weiter: Invertierbarkeit von $(A_n)+\mathcal{G}$ in $\mathcal{F}^\mathcal{J}/\mathcal{G}$ heißt: es gibt eine Folge $(B_n) \in \mathcal{F}^\mathcal{J}$ sowie Folgen $(G_n), (H_n) \in \mathcal{G}$ mit

$$(A_n)(B_n) = (P_n) + (G_n), \quad (B_n)(A_n) = (P_n) + (H_n).$$

Wendet man den Homomorphismus W auf beide Seiten dieser Gleichungen an, folgt $W(A_n)W(B_n) = I = W(B_n)W(A_n)$. Also ist $W(A_n)$ invertierbar, und die Invertierbarkeit von $\widetilde{W}(A_n)$ folgt analog.

Sei umgekehrt $(B_n) + \mathcal{J}$ eine Inverse von $(A_n) + \mathcal{J}$ in $\mathcal{F}^\mathcal{J}/\mathcal{J}$, und seien $W(A_n)$ sowie $\widetilde{W}(A_n)$ invertierbar. Dann gibt es eindeutig bestimmte kompakte Operatoren K, L und eine Folge $(G_n) \in \mathcal{G}$ mit

$$(A_n)(B_n) = (P_n) + (P_nKP_n) + (R_nLR_n) + (G_n).$$

Wir zeigen, dass

$$(B_n - P_nW(A_n)^{-1}KP_n - R_n\widetilde{W}(A_n)^{-1}LR_n) + \mathcal{G}$$

die Inverse von $(A_n) + \mathcal{G}$ ist (man beachte, dass $W(A_n)^{-1}K$ und $\widetilde{W}(A_n)^{-1}L$ kompakte Operatoren sind). Eine einfache Rechnung liefert

$$\begin{aligned}(A_n)&(B_n - P_nW(A_n)^{-1}KP_n - R_n\widetilde{W}(A_n)^{-1}LR_n) + \mathcal{G}\\ &= (P_n) + (P_nKP_n) + (R_nLR_n)\\ &\quad - (A_nP_nW(A_n)^{-1}KP_n) - (A_nR_n\widetilde{W}(A_n)^{-1}LR_n) + \mathcal{G}.\end{aligned} \tag{6.18}$$

Für den ersten Summanden der letzten Zeile erhalten wir

$$\begin{aligned}(A_nP_nW(A_n)^{-1}KP_n) + \mathcal{G}&\\ &= (P_n(A_nP_n - W(A_n))W(A_n)^{-1}KP_n) + (P_nKP_n) + \mathcal{G}\\ &= (P_nKP_n) + \mathcal{G},\end{aligned}$$

da die Operatoren $A_nP_n - W(A_n)$ stark gegen Null konvergieren und $W(A_n)^{-1}K$ kompakt ist. Analog erhält man

$$(A_nR_n\widetilde{W}(A_n)^{-1}LR_n) + \mathcal{G} = (R_nLR_n) + \mathcal{G}.$$

Zusammen mit (6.18) zeigen diese beiden Beziehungen, dass

$$(A_n)(B_n - P_n W(A_n)^{-1} K P_n - R_n \widetilde{W}(A_n)^{-1} L R_n) + \mathcal{G} = (P_n) + \mathcal{G}.$$

Die Nebenklasse $(A_n) + \mathcal{G}$ ist also in $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ von rechts invertierbar. Analog zeigt man ihre Invertierbarkeit von links. Nach Kozak ist die Folge (A_n) stabil. ■

Anmerkung 6.25 Man kann den Liftungssatz als eine Verallgemeinerung des Strömungssatzes 2.6 betrachten. Dort haben wir die starke Konvergenz von $A_n P_n$ und $A_n^* P_n$ benötigt, um mit Störungen der Form $(P_n K P_n)$ fertig zu werden; hier benötigen wir die Existenz zweier weiterer starker Grenzwerte ($R_n A_n R_n$ und $R_n A_n^* R_n$), um mit Störungen der Form $(P_n K P_n + R_n L R_n)$ zurechtzukommen. Der Liftungssatz 6.24 ist nur das erste Glied einer ganzen Hierarchie von Störungs- oder Liftungssätzen. Möchte man beispielsweise das Reduktionsverfahren $(P_n A P_n)$ für beliebige Operatoren $A \in \mathcal{T}(PC)$ studieren (diese Algebra enthält weit mehr Operatoren als nur Toeplitzoperatoren und kompakte Operatoren), so benötigt man eine Version des Liftungssatzes mit unendlich vielen (genauer: für jeden Punkt $x \in \mathbb{T}$ einen) Summanden und mit entsprechend vielen Homomorphismen W. ■

Anmerkung 6.26 Der Liftungssatz 6.24 eröffnet einen einfachen Zugang zum Reduktionsverfahren für Toeplitzoperatoren mit *stetiger* Erzeugerfunktion a. Ist nämlich $T(a)$ invertierbar, so ist a invertierbar in $C(\mathbb{T})$. Aus

$$P_n T(a) P_n T(a^{-1}) P_n = P_n - P_n H(a) H(\tilde{a}^{-1}) P_n - R_n H(\tilde{a}) H(a^{-1}) R_n$$

(Widoms Formel) folgt sofort, dass $(P_n T(a^{-1}) P_n) + \mathcal{J}$ die Inverse zu $(P_n T(a) P_n) + \mathcal{J}$ ist. Der Liftungssatz reduziert sich also auf

$$(P_n T(a) P_n) \text{ stabil} \quad \Leftrightarrow \quad T(a) \text{ und } T(\tilde{a}) \text{ invertierbar.}$$

Schließlich haben wir bereits bemerkt, dass $T(a)$ und $T(\tilde{a})$ gleichzeitig invertierbar sind oder nicht. ■

Zurück zur Algebra $\mathcal{S}(PC)$. Der Liftungssatz reduziert unsere Arbeit darauf, Invertierbarkeit in der Algebra $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{J}$ zu studieren (wegen der inversen Abgeschlossenheit von C^*-Algebren ist ja eine Nebenklasse $(A_n) + \mathcal{J}$ genau dann in $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}/\mathcal{J}$ invertierbar, wenn sie bereits in $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{J}$ invertierbar ist). Der folgende Satz zeigt, dass diese Algebra ein hinreichend großes Zentrum besitzt, welches uns ermöglichen wird, die Invertierbarkeit in dieser Algebra mit dem lokalen Prinzip zu studieren.

Satz 6.27 *$\mathcal{S}(C)/\mathcal{J}$ ist eine C^*-Unteralgebra des Zentrums von $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{J}$. Ihr Raum der maximalen Ideale ist homöomorph zu $\mathbb{T}$. Identifiziert man $M(\mathcal{S}(C)/\mathcal{J})$ mit $\mathbb{T}$, so ist das dem Punkt $x \in \mathbb{T}$ entsprechende maximale Ideal gleich*

$$\{(P_n T(f) P_n) + \mathcal{J} : f \in C(\mathbb{T}) \text{ und } f(x) = 0\}, \tag{6.19}$$

und die Gelfandtransformierte der Nebenklasse $(P_nT(f)P_n)+\mathcal{J}$ ist die Funktion $f \in C(\mathbb{T})$.

Beweis. Aus (6.15) folgt, dass für jede stetige Funktion $f \in C(\mathbb{T})$ die Nebenklasse $(P_nT(f)P_n)+\mathcal{J}$ im Zentrum von $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{J}$ liegt. Also ist $\mathcal{S}(C)/\mathcal{J}$ eine C^*-Unteralgebra des Zentrums von $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{J}$. Wir beschreiben ihren Raum der maximalen Ideale. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\Phi : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{S}(C)/\mathcal{J}, \quad f \mapsto (P_nT(f)P_n)+\mathcal{J}.$$

Man rechnet leicht nach, dass Φ ein *-Homomorphismus ist. Aus Satz 6.15 folgt die Surjektivität von Φ: Jede Folge in $\mathcal{S}(C)$ ist ja von der Gestalt

$$(A_n) = (P_nT(f)P_n) + (P_nKP_n + R_nLR_n + G_n).$$

Folglich ist $(A_n)+\mathcal{J} = (P_nT(f)P_n)+\mathcal{J} = \Phi(f)$. Wir zeigen, dass Φ auch injektiv ist. Sei $f \in C(\mathbb{T})$ mit $\Phi(f) = 0$. Nach Definition der Norm in $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}/\mathcal{J}$ findet man für jedes $\varepsilon > 0$ kompakte Operatoren K und L sowie eine Folge $(G_n) \in \mathcal{G}$ mit

$$\|(P_nT(f)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n + G_n)\| < \varepsilon.$$

Anwendung des Homomorphismus W auf die Folge auf der linken Seite liefert

$$\|T(f)+K\| = \|W(P_nT(f)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n + G_n)\| < \varepsilon.$$

Mit Satz 3.15 (a) und Satz 3.10 (a) folgt hieraus $\|f\| = \|T(f)\| \le \|T(f)+K\| < \varepsilon$. Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $f = 0$.

Somit ist Φ ein isometrischer Isomorphismus von $C(\mathbb{T})$ auf $\mathcal{S}(C)/\mathcal{J}$. Die übrigen Behauptungen folgen nun aus der Charakterisierung des Raumes der maximalen Ideale von $C(\mathbb{T})$ in Beispiel 5.4. ∎

Dem lokalen Prinzip von Allan/Douglas entsprechend bezeichnen wir für $x \in \mathbb{T}$ mit I_x das kleinste abgeschlossene Ideal von $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{J}$, welches das x entsprechende maximale Ideal 6.19 von $\mathcal{S}(C)/\mathcal{J}$ enthält, mit $\mathcal{S}_x(PC)$ die Faktoralgebra $(\mathcal{S}(PC)/\mathcal{J})/I_x$ und mit Φ_x den kanonischen Homomorphismus

$$\Phi_x : \mathcal{S}(PC) \to (\mathcal{S}(PC)/\mathcal{J})/I_x, \quad (A_n) \mapsto ((A_n)+\mathcal{J})+I_x.$$

Das lokale Prinzip sagt dann für $(A_n) \in \mathcal{S}(PC)$:

> *Die Folge (A_n) ist genau dann invertierbar modulo $\mathcal{J}$, wenn für jedes $x \in \mathbb{T}$ die Nebenklasse $\Phi_x(A_n)$ in $\mathcal{S}_x(PC)$ invertierbar ist.*

Wir beschreiben die lokalen Algebren $\mathcal{S}_x(PC)$ vollständig. Dazu bezeichne χ_x wieder die vor Satz 6.3 eingeführte Funktion.

Satz 6.28 *Sei $x \in \mathbb{T}$. Die lokale Algebra $\mathcal{S}_x(PC)$ ist einfach erzeugt, die Nebenklasse $\Phi_x(P_nT(\chi_x)P_n)$ ist ein Erzeuger, und das Spektrum dieses Erzeugers ist das Intervall $[0,1]$.*

Beweis. Genau wie im Beweis von Satz 6.3 macht man sich klar, dass

$$\Phi_x(P_nT(a)P_n) = a(x+0)\Phi_x(P_nT(\chi_x)P_n) + a(x-0)(\Phi_x(P_n) - \Phi_x(P_nT(\chi_x)P_n))$$

für jede stückweise stetige Funktion a. Die Algebra $\mathcal{S}_x(PC)$ wird also durch das Einselement $\Phi_x(P_n)$ und die Nebenklasse $\phi_x(P_nT(\chi_x)P_n)$ erzeugt. Wir berechnen das Spektrum des erzeugenden Elements und zeigen zunächst, dass für den numerischen Wertebereich $W_{\text{num}}(A) := \{\langle Ax,\, x\rangle : \|x\| = 1\}$ (den wir früher nur mit $W(A)$ bezeichnet haben) gilt

$$W_{\text{num}}(T(\chi_x)) \subseteq [0,1]. \tag{6.20}$$

Aus der Selbstadjungiertheit von $T(\chi_x)$ folgt $W_{\text{num}}(T(\chi_x)) \subseteq \mathbb{R}$; aus $\|T(\chi_x)\| = 1$ folgt weiter $W_{\text{num}}(T(\chi_x)) \subseteq [-1,1]$, und aus

$$\langle T(\chi_x)y,\, y\rangle = \langle P_\mathbb{T}\chi_x P_\mathbb{T} y,\, y\rangle = \langle \chi_x P_\mathbb{T} y,\, \chi_x P_\mathbb{T} y\rangle \geq 0$$

für alle $y \in l^2(\mathbb{Z}^+) \cong P_\mathbb{T} L^2(\mathbb{T}))$ folgt schließlich (6.20).

Ist nun $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$, so ist $0 \notin \operatorname{clos} W_{\text{num}}(T(\chi_x - \lambda)) \subseteq [-\lambda, 1-\lambda]$. Nach Lemma 2.12 ist $T(\chi_x - \lambda)$ dann von der Gestalt $\alpha(I+S)$ mit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\|S\| < 1$, und nach Satz 2.9 konvergiert für $T(\chi_x - \lambda)$ das Reduktionsverfahren. Umgekehrt: wenn für $T(\chi_x - \lambda)$ das Reduktionsverfahren konvergiert, so ist nach dem Satz von Polski der Operator $T(\chi_x - \lambda)$ invertierbar, und nach Hartmann-Wintner ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$. Damit haben wir gefunden, dass

$$\sigma_{\mathcal{S}(PC)/\mathcal{G}}((P_nT(\chi_x)P_n) + \mathcal{G}) = [0,1].$$

Damit ist erst recht

$$\sigma_{\mathcal{S}_x(PC)}(\Phi_x(P_nT(\chi_x)P_n)) \subseteq [0,1]$$

für alle $x \in \mathbb{T}$. Für den Beweis der umgekehrten Inklusion nehmen wir an, es gäbe ein $\lambda \in [0,1]$, welches nicht zum Spektrum von $\Phi_x(P_nT(\chi_x)P_n)$ gehört. Dann gibt es Folgen $(B_n), (J_n), (K_n) \in \mathcal{S}(PC)$ mit $\Phi_x(J_n) = \Phi_x(K_n) = 0$ so, dass

$$(P_n(T(\chi_x) - \lambda I)P_n)(B_n) = (P_n) + (J_n),\ (B_n)(P_n(T(\chi_x) - \lambda I)P_n) = (P_n) + (K_n).$$

Wir wenden auf beide Seiten beider Gleichungen den Homomorphismus W an und erhalten

$$(T(\chi_x) - \lambda I)W(B_n) = I + W(J_n), \quad W(B_n)(T(\chi_x) - \lambda I) = I + W(K_n). \tag{6.21}$$

Offenbar gehören $W(B_n)$, $W(J_n)$ und $W(K_n)$ zur Algebra $\mathcal{T}(PC)$. Wir sehen uns beispielsweise $W(J_n)$ genauer an. Nach Definition der Ideale $\mathcal{J}$ und I_x kann die Folge (J_n) beliebig genau durch Folgen der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{r} (A_n^{(j)})(P_nT(f_j)P_n) + (P_nKP_n + R_nLR_n + G_n) \tag{6.22}$$

mit $(A_n^{(j)}) \in \mathcal{S}(PC)$, $f_j \in C(\mathbb{T})$ mit $f_j(x) = 0$, K und L kompakt und $(G_n) \in \mathcal{G}$ approximiert werden. Berechnet man den starken Grenzwert der Folge (6.22), erhält man

$$\sum_{j=1}^{r} W(A_n^{(j)})T(f_j) + K$$

mit gewissen Operatoren $W(A_n^{(j)}) \in \mathcal{T}(PC)$. Wegen $f_j(x) = 0$ ist klar, dass

$$\pi_x \left(\sum_{j=1}^{r} W(A_n^{(j)})T(f_j) + K \right) = 0,$$

wobei π_x der kanonische *-Homomorphismus

$$\mathcal{T}(PC) \to (\mathcal{T}(PC)/K(l^2))/I_x, \quad A \mapsto (A + K(l^2)) + I_x$$

aus Abschnitt 6.1 ist. Da jede Folge (J_n) mit $\Phi(J_n) \in I_x$ beliebig genau durch Folgen der Gestalt (6.22) approximiert werden kann und da W und π_x stetig sind, folgt auf diese Weise

$$\pi_x(W(J_n)) = 0 \quad \text{für alle } (J_n) \in \mathcal{S}(PC) \text{ mit } \Phi_x(J_n) = 0. \tag{6.23}$$

Anwendung von π_x auf beide Seiten der Gleichungen (6.21) liefert daher

$$\pi_x(T(\chi_x) - \lambda I)\pi_x(W(B_n)) = \pi_x(W(B_n))\pi_x(T(\chi_x) - \lambda I) = \pi_x(I).$$

Die Nebenklasse $\pi_x(T(\chi_x) - \lambda I)$ ist also invertierbar. Nach Satz 6.5 ist dies für $\lambda \in [0, 1]$ unmöglich. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\sigma(\Phi_x(P_n T(\chi_x) P_n)) = [0, 1]$. ■

Wie in Abschnitt 6.1 (Satz 6.6) schließt man hieraus:

Satz 6.29 *Die Algebra $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{J}$ ist kommutativ, und ihr Raum der maximalen Ideale kann mit dem Zylinder $\mathbb{T} \times [0, 1]$ identifiziert werden. Die Gelfandtransformierte von $(P_n T(a) P_n) + \mathcal{J}$ mit $a \in PC$ ist die Funktion*

$$\mathbb{T} \times [0, 1] \to \mathbb{C}, \quad (x, t) \mapsto a(x + 0)t + a(x - 0)(1 - t).$$

Die Topologie auf dem Zylinder $\mathbb{T} \times [0, 1]$ ist wieder die in Anmerkung 6.8 beschriebene Topologie. ■

Aus den Sätzen 6.6 und 6.29 folgt natürlich, dass die Algebren $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{J}$ und $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$ isometrisch *-isomorph zueinander sind. Der folgende Satz beschreibt einen Isomorphismus zwischen diesen Algebren explizit.

Satz 6.30 *Die Abbildung*

$$S : \mathcal{S}(PC)/\mathcal{J} \to \mathcal{T}(PC)/K(l^2), \quad (A_n) + \mathcal{J} \mapsto W(A_n) + K(l^2)$$

ist korrekt definiert. Diese Abbildung ist ein isometrischer *-Isomorphismus von $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{J}$ auf $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$. Ihre Umkehrabbildung überführt $T(a) + K(l^2)$ in $(P_n T(a) P_n) + \mathcal{J}$.

Beweis. Wir überlegen uns die Korrektheit. Seien $(A_n), (B_n) \in \mathcal{S}(PC)$ Repräsentanten der Nebenklasse $(A_n) + \mathcal{J}$. Dann gibt es kompakte Operatoren K, L und eine Folge $(G_n) \in \mathcal{G}$ mit

$$A_n = B_n + P_nKP_n + R_nLR_n + G_n.$$

Übergang zum starken Grenzwert ergibt $W(A_n) = W(B_n) + K$, und Übergang zur Faktoralgebra modulo kompakter Operatoren liefert

$$W(A_n) + K(l^2) = W(B_n) + K(l^2).$$

Somit hängt $W(A_n)+K(l^2)$ tatsächlich nur von der Nebenklasse von (A_n) modulo $\mathcal{J}$ ab, und S ist korrekt definiert.

Wir betrachten die Menge $\mathcal{S}_0(PC)$ aller Folgen der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{l} (P_nT(a_{ij})P_n)$$

mit $k, l \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in PC$. Diese bilden eine in $\mathcal{S}(PC)$ symmetrische und dichte Unteralgebra. Die Sätze 6.6 und 6.29 zeigen, dass für $(A_n) \in \mathcal{S}_0(PC)$ die Gelfandtransformierten von $(A_n) + \mathcal{J}$ und von $S((A_n) + \mathcal{J}) = W(A_n) + K(l^2)$ übereinstimmen. Für Folgen aus $\mathcal{S}_0(PC)$ erhält die Abbildung S also die Spektren und damit die Normen. Auf $\mathcal{S}_0(PC)/J$ wirkt S somit als Isometrie. Dann wirkt S als Isometrie auf ganz $\mathcal{S}(PC)/\mathcal{J}$. ∎

Hier ist das Hauptresultat dieses Abschnittes:

Satz 6.31 *Eine Folge $(A_n) \in \mathcal{S}(PC)$ ist genau dann stabil, wenn die beiden Operatoren $W(A_n)$ und $\widetilde{W}(A_n)$ invertierbar sind.*

Der Beweis ist nun einfach: Ist (A_n) stabil, so sind $W(A_n)$ und $\widetilde{W}(A_n)$ nach dem Liftungssatz invertierbar. Sind umgekehrt $W(A_n)$ und $\widetilde{W}(A_n)$ invertierbar, so ist $W(A_n)$ ein Fredholmoperator. Nach Satz 6.30 ist dann die Nebenklasse $(A_n)+\mathcal{J}$ invertierbar. Aus der Invertierbarkeit von $(A_n)+\mathcal{J}$, $W(A_n)$ und $\widetilde{W}(A_n)$ folgt mit dem Liftungssatz die Stabilität von (A_n). ∎

Folgerung 6.32 *Sei $a \in PC$. Dann ist $T(a) \in \prod(P_n)$ genau dann, wenn $T(a)$ invertierbar ist.*

In der Tat, in diesem Fall folgt aus der Invertierbarkeit von $W(P_nT(a)P_n) = T(a)$ bereits die von $\widetilde{W}(P_nT(a)P_n) = T(\tilde{a})$: Es ist ja $CT(a)^*C = T(\tilde{a})$ (siehe Übung).

In Analogie zu Satz 6.19 gilt außerdem

Satz 6.33 *Die Abbildung*

$$\mathrm{sym}: \quad \mathcal{S}(PC)/\mathcal{G} \to L(l^2) \times L(l^2), \quad (A_n) + \mathcal{G} \mapsto (W(A_n), \widetilde{W}(A_n))$$

ist ein isometrischer *-Homomorphismus.

Beispiel 6.34 Wir kommen zurück zu dem früher in Abschnitt 3.1.2 betrachteten Spline-Galerkin-Verfahren $(L_n(aI + bS_{[0,1]})L_n)$ für den singulären Integraloperator $aI + bS_{[0,1]}$ auf $L^2[0,1]$ mit konstanten Koeffizienten. In Abschnitt 3.5 haben wir gesehen, dass dieses Verfahren genau dann stabil ist, wenn das Reduktionsverfahren (bzgl. der üblichen Basis) für den Toeplitzoperator $T(a + bc)$ stabil ist. Hier ist c eine Funktion, die $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ stetig und injektiv auf $(-1, 1)$ abbildet und die an der Stelle 1 einen Sprung von 1 nach -1 aufweist. Es ist also $a + bc \in PC$. Nach Folgerung 6.32 ist das betrachtete Galerkinverfahren genau dann stabil, wenn der Toeplitzoperator $T(a+bc)$ invertierbar ist. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn $0 \notin [a - b, a + b]$. ■

6.5 Ein Kollokationsverfahren für singuläre Integraloperatoren

In diesem Abschnitt analysieren wir ein weiteres Näherungsverfahren – ein Kollokationsverfahren für singuläre Integraloperatoren $aI+bS_{\mathbb{T}}$ mit stückweise stetigen Koeffizienten a, b. Wir geben hier nur einen Überblick über die auftretenden Probleme, die benötigten Techniken und die gewonnenen Resultate. Details finden Sie z. B. in Abschnitt 4.4 aus Hagen/R./Silbermann und in den dort zitierten Originalarbeiten von Junghanns/Silbermann.

6.5.1 Lokale Fredholmtheorie für singuläre Integraloperatoren

Es bezeichne $\mathcal{O}(PC)$ die kleinste abgeschlossene Unteralgebra von $L(L^2(\mathbb{T}))$, die alle singulären Integraloperatoren $aI + bS_{\mathbb{T}}$ mit $a, b \in PC$ enthält. Den Operator $aI + bS_{\mathbb{T}}$ schreiben wir oft als $cP + dQ$ mit $c := a + b$ und $d := a - b$. Mit Hilfe der bereits in den Abschnitten 3.1.1 und 3.2 behandelten Beziehungen zwischen Toeplitzoperatoren und dem Operator der singulären Integration zeigt man den folgenden Satz durch Zurückführen auf die entsprechenden Resultate für Toeplitzoperatoren.

Satz 6.35 (*a*) *Die C^*-Algebra $\mathcal{O}(PC)$ enthält das Ideal $K(L^2(\mathbb{T}))$.*
(*b*) *Es ist $fS_{\mathbb{T}} - S_{\mathbb{T}}fI$ kompakt für jede stetige Funktion $f \in C(\mathbb{T})$.*

Nach (a) können wir die Faktoralgebra $\mathcal{O}(PC)/K(L^2)$ bilden, und ein Operator A aus $\mathcal{O}(PC)$ ist genau dann Fredholmsch, wenn seine Nebenklasse $A+K(L^2)$ in der Faktoralgebra $\mathcal{O}(PC)/K(L^2)$ invertierbar ist. Aus Aussage (b) von Satz 6.35 folgt sofort, dass für jede stetige Funktion f und jeden Operator $A \in \mathcal{O}(PC)$ der Kommutator $fA - AfI$ kompakt ist. Die Menge aller Nebenklassen $fI + K(L^2)$ liegt also im Zentrum von $\mathcal{O}(PC)/K(L^2)$. Dies lässt uns an den Einsatz lokaler Prinzipien zum Studium der Fredholmeigenschaft denken. Hierfür benötigen wir das folgende Analogon von Satz 6.2.

Satz 6.36 *Die Menge* $\mathcal{B} := \{fI+K(L^2) : f \in C(\mathbb{T})\}$ *ist eine* C^**-Unteralgebra im Zentrum von* $\mathcal{O}(PC)/K(L^2)$*. Ihr Raum der maximalen Ideale ist homöomorph zu* $\mathbb{T}$*. Das dem Punkt* $x \in \mathbb{T}$ *entsprechende maximale Ideal von* $\mathcal{B}$ *ist* $\{fI + K(L^2) : f \in C(\mathbb{T}),\ f(x) = 0\}$*. Identifiziert man* $M(\mathcal{B})$ *mit* $\mathbb{T}$*, so ist die Gelfandtransformierte von* $fI + K(L^2)$ *die Funktion* $f \in C(\mathbb{T})$*.*

Für $x \in \mathbb{T}$ bezeichnen wir mit I_x das kleinste abgeschlossene Ideal der Algebra $\mathcal{O}(PC)/K(L^2)$, das das maximale Ideal $\{fI + K(L^2) : f \in C(\mathbb{T}),\ f(x) = 0\}$ von $\mathcal{B}$ enthält, schreiben $\mathcal{O}_x(PC)$ für die lokale Algebra $(\mathcal{O}(PC)/K(L^2))/I_x$ und π_x für den kanonischen Homomorphismus

$$\pi_x : \mathcal{O}(PC) \to \mathcal{O}_x(PC), \quad A \mapsto (A + K(L^2)) + I_x.$$

Nach Allan-Douglas gilt dann:

> *Ein Operator* $A \in \mathcal{T}(PC)$ *ist genau dann Fredholmsch, wenn für jedes* $x \in \mathbb{T}$ *die Nebenklasse* $\pi_x(A)$ *in* $\mathcal{O}_x(PC)$ *invertierbar ist.*

Nach Definition von $\mathcal{O}(PC)$ wird die lokale Algebra $\mathcal{O}_x(PC)$ offenbar durch die Nebenklassen $\pi_x(I)$, $\pi_x(P)$ und $\pi_x(aI)$ mit $a \in PC$ erzeugt. Da wir $\pi_x(aI)$ schreiben können als

$$\pi_x(aI) = a(x+0)\pi_x(\chi_x I) + a(x-0)(\pi_x(I) - \pi_x(\chi_x I))$$

mit der vor Satz 6.3 eingeführten Funktion χ_x, wird die lokale Algebra $\mathcal{O}_x(PC)$ erzeugt durch das Einselement $\pi_x(I)$ und die beiden Nebenklassen $\pi_x(\chi_x I)$ und $\pi_x(P)$. Die Algebra $\mathcal{O}_x(PC)$ ist also nicht mehr einfach erzeugt. Sie wird vielmehr erzeugt durch das Einselement und durch zwei *Projektoren*, eben $\pi_x(\chi_x I)$ und $\pi_x(P)$. Solche Algebren können komplett beschrieben werden.

6.5.2 Durch zwei Projektoren erzeugte C^*-Algebren

Das lokale Prinzip von Allan/Douglas ist eine Verallgemeinerung der Gelfandtheorie auf Algebren, die in dem Sinn „nahe" zu den kommutativen Algebren sind, dass ihr Zentrum nichttrivial ist. Wir lernen hier eine weitere Verallgemeinerung der Gelfandtheorie kennen, die auf Krupnik zurückgeht.

Kommutative Algebren sind durch die Beziehung

$$ab - ba = 0 \quad \text{für alle Elemente } a, b$$

gekennzeichnet. Schreiben wir P für das Polynom $P(x,y) := xy - yx$ in den nichtkommutierenden Variablen x, y, so bedeutet Kommutativität offenbar

$$P(a,b) = 0 \quad \text{für alle Elemente } a, b.$$

Man verallgemeinert dies wie folgt: Sei P ein Polynom in n nichtkommutierenden Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Eine Algebra $\mathcal{A}$ *erfüllt die polynomiale Identität* P, wenn

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \quad \text{für alle } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}.$$

Algebren, die eine nichttriviale *p*olynomiale *I*dentität erfüllen, heißen *PI-Algebren*. Von besonderem Interesse sind die sogenannten standarden Polynome F_m in m nichtkommutierenden Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$F_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) := \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn} \sigma \, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(m)},$$

wobei S_m für die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, m\}$ und $\operatorname{sgn} \sigma$ für das Vorzeichen der Permutation $\sigma \in S_m$ steht. Erfüllt eine Algebra die Identität F_m, heißt sie eine F_m-*Algebra*. Die F_2-Algebren sind offenbar gerade die kommutativen Algebren. Weitere Beispiele bringen die folgenden Sätze.

Satz 6.37 (Amitsur/Levitzki) *Die Algebra $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist eine F_{2n}-Algebra (jedoch keine F_m-Algebra mit einem $m < 2n$).*

Ein Beweis ist in Krupnik, Banach Algebras with Symbol and Singular Integral Operators, Birkhäuser.

Satz 6.38 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, die vom Einselement e und von 2 Idempotenten p und q erzeugt wird (es ist also $p^2 = p$ und $q^2 = q$). Dann ist $\mathcal{A}$ eine F_4-Algebra.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}_0$ die kleinste (nicht notwendig abgeschlossene) Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die e, p und q enthält. Da F_4 stetig ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{A}_0$ eine F_4-Algebra ist.

1. Schritt Das Element $x := (p - q)^2 = p + q - pq - qp$ liegt im Zentrum von $\mathcal{A}_0$:

$$px = p - pqp = xp, \quad qx = q - qpq = xq.$$

2. Schritt Jedes Element aus $\mathcal{A}_0$ lässt sich schreiben als

$$h_1(x)e + h_2(x)p + h_3(x)q + h_4(x)pq \tag{6.24}$$

mit geeigneten Polynomen h_1, h_2, h_3, h_4. Hierfür bemerken wir, dass die erzeugenden Elemente e, p und q offenbar von der Form (6.24) sind und dass die Menge aller Elemente der Form (6.24) eine Algebra bildet. Für letzteres hat man lediglich zu prüfen, ob das Produkt je zweier „Basiselemente“ e, p, q, pq wieder in der Form (6.24) geschrieben werden kann. Die folgende Tabelle zeigt, dass dies möglich ist.

	p	q	pq
p	p	pq	pq
q	$p+q-pq-x$	q	$(e-x)q$
pq	$(e-x)p$	pq	$(e-x)^2p$

3. Schritt Da F_4 linear in jeder der Variablen $x_1, \ldots, x_4$ ist und da alle $h_i(x)$ im Zentrum von $\mathcal{A}_0$ liegen, genügt es zu zeigen, dass

$$F_4(r_1, r_2, r_3, r_4) = 0 \quad \text{für} \quad r_1, \ldots, r_4 \in \{e, p, q, pq\}.$$

Man überprüft leicht: Stimmen zwei der r_i überein, so ist $F_4(r_1, r_2, r_3, r_4) = 0$. Sind dagegen die r_i paarweise verschieden, so ist eines dieser Elemente (z. B. r_1) gleich e. Es ist aber $F_4(e, r_1, r_2, r_3) = 0$ für beliebige r_i (HA). ■

Für Banachsche F_{2n}-Algebren hat man die folgende Verallgemeinerung der Gelfandtheorie.

Satz 6.39 (Krupnik) *Sei $\mathcal{A}$ eine F_{2n}-Banachalgebra mit Eins, und $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ sei die Menge aller maximalen Ideale von $\mathcal{A}$. Dann gilt*

(a) *Für jedes $M \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ gibt es eine natürliche Zahl $l \leq n$ so, dass $\mathcal{A}/M$ zu $\mathbb{C}^{l \times l}$ isomorph ist.*

(b) *Für jedes $M \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ sei π_M der kanonische Homomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}/M$, und η_M sei ein Isomorphismus von $\mathcal{A}/M$ auf $\mathbb{C}^{l \times l}$. Weiter sei $\varphi_M := \eta_M \circ \pi_M$. Für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist dann a genau dann in $\mathcal{A}$ invertierbar, wenn für jedes $M \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ die Matrix $\varphi_M(a)$ invertierbar ist.*

(c) *Das Radikal von $\mathcal{A}$ ist gleich dem Durchschnitt aller maximalen Ideale von $\mathcal{A}$.*

Einen Beweis finden Sie im o. g. Buch von Krupnik.

Während in der klassischen Gelfandtheorie jedem maximalen Ideal M und jedem Element a von $\mathcal{A}$ eine *Zahl* $\hat{a}(M)$ entspricht (die invertierbar sein muss damit a invertierbar wird), ist es hier also eine *Matrix*.

Wegen Satz 6.38 ist Krupniks Satz 6.39 anwendbar auf Banachalgebren, die durch zwei Idempotente (und das Einselement) erzeugt werden. Für beliebige solche Algebren gewinnt man auf diese Weise ein Invertierbarkeitskriterium. Für uns ist der folgende Spezialfall ausreichend.

Satz 6.40 (2-Projektoren-Satz, Halmos) *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins e, und seien $p, q \in \mathcal{A}$ Projektoren (= selbstadjungierte Idempotente) mit $\sigma(pqp) = [0, 1]$. Dann ist die kleinste abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die die Elemente*

e, p und q enthält, isometrisch *-isomorph zur C^*-Algebra aller stetigen Funktionen $a : [0,1] \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, für die $a(0)$ und $a(1)$ Diagonalmatrizen sind. Der Isomorphismus kann so gewählt werden, dass er e, p und q in die Funktionen

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t & \sqrt{t(1-t)} \\ \sqrt{t(1-t)} & 1-t \end{pmatrix}$$

überführt.

Wie wir oben gesehen haben, wird die lokale Algebra $\mathcal{O}_x(PC)$ durch das Einselement $e := \pi_x(I)$ und die Projektoren $p := \pi_x(P)$ und $q := \pi_x(\chi_x I)$ erzeugt. Für die Anwendung des 2-Projektoren-Satzes von Halmos benötigen wir

$$\sigma_{\mathcal{O}_x(PC)}(pqp) = \sigma_{\mathcal{O}_x(PC)}(\pi_x(P\chi_x P)).$$

Da man den Operator $P\chi_x P$ mit dem Toeplitzoperator $T(\chi_x)$ identifizieren kann, folgt mit wenig Aufwand aus Satz 6.5, dass für jedes $x \in \mathbb{T}$

$$\sigma_{\mathcal{O}_x(PC)}(\pi_x(P\chi_x P)) = [0,1].$$

Jede der lokalen Algebren $\mathcal{O}_x(PC)$ kann also mit dem 2-Projektoren-Satz von Halmos vollständig beschrieben werden. Das lokale Prinzip von Allan/Douglas liefert schließlich das folgende Fredholmkriterium für Operatoren in $\mathcal{O}(PC)$.

Satz 6.41 *(a) Es gibt einen *-Isomorphismus ξ von der Algebra $\mathcal{O}(PC)/K(L^2)$ auf eine C^*-Algebra von stetigen 2×2-Matrixfunktionen auf dem Zylinder $\mathbb{T}\times[0,1]$ (versehen mit der bereits diskutierten exotischen Topologie). Dieser Isomorphismus überführt die Nebenklassen $I + K(L^2)$, $P_{\mathbb{T}} + K(L^2)$ und $aI + K(L^2)$ mit $a \in PC$ in die Funktionen*

$$(x,t) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (x,t) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(x,t) \mapsto \begin{pmatrix} a(x+0)t + a(x-0)(1-t) & (a(x+0) - a(x-0))\sqrt{t(1-t)} \\ (a(x+0) - a(x-0))\sqrt{t(1-t)} & a(x+0)(1-t) + a(x-0)t \end{pmatrix}.$$

(b) Ein Operator $A \in \mathcal{O}(PC)$ ist genau dann Fredholmsch, wenn die Funktion $\xi(A + K(L^2))$ invertierbar ist, d. h. wenn

$$\det(\xi(A + K(L^2))(x,t)) \neq 0 \quad \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{T}\times[0,1].$$

6.5.3 Ein Kollokationsverfahren für Singuläre Integralgleichungen

Sei $R(\mathbb{T})$ die Menge der Riemann-integrierbaren komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{T}$. Versehen mit punktweisen Operationen und der Supremumsnorm wird $R(\mathbb{T})$ zu einer C^*-Algebra ($\nearrow$ Übung). Mit X_n bezeichnen wir die Menge aller trigonometrischen Polynome $u_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$ vom Grad $\leq n$, und wir setzen

$z_j := \exp(2\pi ij/(2n+1))$ für $j = -n, \ldots, n$. Für jede Funktion $f \in R(\mathbb{T})$ gibt es genau ein Polynom $L_n f \in X_n$ mit $f(z_j) = (L_n f)(z_j)$ für $j = -n, \ldots, n$. Der hierdurch festgelegte Operator L_n heißt der *Lagrange'scher Interpolationsprojektor*. Außerdem sei $P_n : L^2(\mathbb{T}) \to X_n$ der Orthoprojektor. Man kann zeigen, dass

$$\|P_n f - f\|_2 \to 0 \quad \text{für alle } f \in L^2(\mathbb{T})$$

und

$$\|L_n f - f\|_2 \to 0 \quad \text{für alle } f \in R(\mathbb{T}).$$

Wir betrachten die Integralgleichung

$$(aI + bS_{\mathbb{T}})u = f$$

mit Riemann-integrierbarer rechter Seite f und mit Koeffizienten $a, b \in PC$. Wir suchen Näherungslösungen $u_n \in X_n$ dieser Gleichung, die die Bedingungen

$$a(z_j)u_n(z_j) + b(z_j)(S_{\mathbb{T}}u_n)(z_j) = f(z_j), \quad j \in \{-n, \ldots, n\}$$

erfüllen. Dieses kann man schreiben als

$$L_n(aI + bS_{\mathbb{T}})P_n u_n = L_n f.$$

Uns interessiert die Stabilität der Folge $(L_n(aI + bS_{\mathbb{T}})P_n)$. Dazu führen wir die Reflektionsoperatoren

$$R_n : L^2(\mathbb{T}) \to X_n, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k \mapsto c_{-1}z^{-n} + \ldots + c_{-n}z^{-1} + c_0 z^n + \ldots + c_n z^0$$

ein, bezeichnen mit $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ die Menge aller beschränkten Folgen (A_n) von Operatoren $A_n \in L(\operatorname{im} P_n)$, für die die starken Grenzwerte

$$\begin{aligned} W(A_n) &:= \text{s-lim}\, A_n P_n, & W(A_n)^* &:= \text{s-lim}\, A_n^* P_n, \\ \widetilde{W}(A_n) &:= \text{s-lim}\, R_n A_n R_n, & \widetilde{W}(A_n)^* &:= \text{s-lim}\, R_n A_n^* R_n \end{aligned}$$

existieren, schreiben $\mathcal{G}$ für die Menge aller Nullfolgen aus $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ und $\mathcal{J}$ für die Menge

$$\mathcal{J} := \{(P_n K P_n + R_n L R_n + G_n) : K, L \in K(L^2),\ (G_n) \in \mathcal{G}\}.$$

Dann gilt wieder ein Liftungssatz:

Satz 6.42 *$\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ ist eine C^*-Algebra, $\mathcal{G}$ und $\mathcal{J}$ sind abgeschlossene Ideale von $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$, und W und $\widetilde{W}$ sind *-Homomorphismen von $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ in $L(L^2)$. Eine Folge $(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ ist genau dann stabil, wenn die Operatoren $W(A_n)$ und $\widetilde{W}(A_n)$ in $L(L^2)$ und die Nebenklasse $(A_n) + \mathcal{J}$ in $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}/\mathcal{J}$ invertierbar sind.*

Es macht wesentlich mehr Mühe als im Fall des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren zu zeigen, dass die Folgen $(L_n(aI + bS_{\mathbb{T}})P_n)$ für alle $a, b \in PC$ zur Algebra $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ gehören, was vor allem an der Nicht-Selbstadjungiertheit der Projektoren L_n liegt. Wir vermerken hier nur, dass für alle $a, b \in PC$

$$(L_n a P_n)^* = L_n \overline{a} P_n, \quad R_n(L_n(aI + bS)P_n)R_n = L_n(\tilde{a}I + \tilde{b}S)P_n$$

sowie

$$W(L_n(aI + bS)P_n) = aI + bS, \quad \widetilde{W}(L_n(aI + bS)P_n) = \tilde{a}I + \tilde{b}S$$

gilt. Sei $\mathcal{K}(PC)$ die kleinste abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$, die alle Folgen

$$(L_n(aI + bS_{\mathbb{T}})P_n) \quad \text{mit } a, b \in PC$$

sowie das Ideal $\mathcal{J}$ umfasst. Der Liftungssatz reduziert das Stabilitätsproblem für Folgen aus $\mathcal{K}(PC)$ auf ein Invertierbarkeitsproblem für Nebenklassen in der Faktoralgebra $\mathcal{K}(PC)/\mathcal{J}$. Letzteres kann mit dem lokalen Prinzip studiert werden.

Satz 6.43 *Die Menge aller Nebenklassen $(L_n f P_n) + \mathcal{J}$ mit $f \in C(\mathbb{T})$ ist eine C^*-Unteralgebra im Zentrum von $\mathcal{K}(PC)/\mathcal{J}$, die zur Algebra $C(\mathbb{T})$ *-isomorph ist. Der Isomorphismus kann so gewählt werden, dass er $(L_n f P_n) + \mathcal{J}$ in die Funktion f überführt.*

Auch dieser Beweis ist technisch schwieriger als im Fall des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren. Am schwierigsten ist der Nachweis, dass

$$(L_n f P_n)(P_n S P_n) - (P_n S P_n)(L_n f P_n) \in \mathcal{J} \quad \text{für alle } f \in C(\mathbb{T}).$$

Der Raum der maximalen Ideale der in Satz 6.43 beschriebenen zentralen Unteralgebra ist homöomorph zu $\mathbb{T}$. Für jedes $x \in \mathbb{T}$ bezeichne I_x das kleinste abgeschlossene Ideal von $\mathcal{K}(PC)/\mathcal{J}$, welches das maximale Ideal

$$\{(L_n f P_n) + \mathcal{J} : f \in C(\mathbb{T}) \text{ mit } f(x) = 0\}$$

enthält. Weiter stehe $\mathcal{K}_x(PC)$ für die Faktoralgebra $(\mathcal{K}(PC)/\mathcal{J})/I_x$ und Φ_x für den kanonischen Homomorphismus von $\mathcal{K}(PC)$ auf $\mathcal{K}_x(PC)$.

Wir schreiben $aI + bS$ wieder als $cP + dQ$ mit $c = a + b$ und $d = a - b$. Für beliebige $c, d \in PC$ und $f \in C(\mathbb{T})$ gilt die Abschätzung

$$\|(L_n f P_n)(L_n(cP + dQ)P_n) + \mathcal{J}\| \leq \|fc\|_\infty + \|fd\|_\infty.$$

Aus dieser erhält man ähnlich wie im Toeplitzfall, dass die lokale Nebenklasse $\Phi_x(L_n(cP + dQ)P_n)$ geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned}&\big(c(x+0)\Phi_x(L_n\chi_x P_n) + c(x-0)\Phi_x\big(L_n(1-\chi_x)P_n\big)\big)\Phi_x(P_n P P_n)\\ &\quad + \big(d(x+0)\Phi_x(L_n\chi_x P_n) + d(x-0)\Phi_x\big(L_n(1-\chi_x)P_n\big)\big)\,\Phi_x(P_n Q P_n).\end{aligned}$$

Die lokale Algebra $\mathcal{K}_x(PC)$ wird also vom Einselement $\Phi_x(P_n)$ und von den Nebenklassen $\Phi_x(P_nPP_n)$ und $\Phi_x(L_n\chi_xP_n)$ erzeugt. Es zeigt sich, dass diese beiden Nebenklassen Idempotente (und sogar Projektoren) sind. Es ist nämlich

$$PP_n = P_nPP_n \quad \text{und} \quad L_naI = L_naL_n \quad \text{für alle } a \in PC.$$

Ersteres liegt an den Abbildungseigenschaften des singulären Integraloperators $S_{\mathbb{T}}$ (vgl. Satz 3.1); letzteres an der Wirkung der Interpolation auf Multiplikationsoperatoren. Es ist daher

$$P_nPP_n \cdot P_nPP_n = P_nP^2P_n = P_nPP_n, \quad L_n\chi_xP_n \cdot L_n\chi_xP_n = L_n\chi_x^2P_n = L_n\chi_xP_n.$$

Die lokalen Algebren $\mathcal{K}_x(PC)$ sind also erzeugt durch 2 Projektoren (und das Einselement). Es ist übrigens genau dieser Fakt, der das Studium dieses Kollokationsverfahrens noch relativ einfach macht. Das Studium des *Reduktionsverfahrens*

$$(P_n(aI + bS)P_n) \quad \text{für } a, b \in PC$$

ist noch einmal ein ganzes Stück verwickelter ($P_n\chi_xP_n$ ist kein Projektor mehr!). Zurück zur Kollokation. Es zeigt sich, dass

$$\sigma(\Phi_x(P_nPP_n \cdot L_n\chi_xP_n \cdot P_nPP_n)) = [0, 1].$$

Die lokalen Algebren $\mathcal{K}_x(PC)$ können also mit dem 2-Projektoren-Satz von Halmos beschrieben werden. Zusammengefasst ergibt sich schließlich

Satz 6.44 *Es gibt einen* **-Isomorphismus* η *von* $\mathcal{K}(PC)/\mathcal{J}$ *auf eine* C^**-Algebra von stetigen Funktionen* $\mathbb{T} \times [0, 1] \to \mathbb{C}^{2\times 2}$. *Dieser Isomorphismus überführt die Nebenklassen* $(P_n) + \mathcal{J}$, $(P_nPP_n) + \mathcal{J}$ *und* $(L_naP_n) + \mathcal{J}$ *mit* $a \in PC$ *in*

$$(x, t) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (x, t) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, t) \mapsto \begin{pmatrix} a(x+0)t + a(x-0)(1-t) & (a(x+0) - a(x-0))\sqrt{t(1-t)} \\ (a(x+0) - a(x-0))\sqrt{t(1-t)} & a(x+0)(1-t) + a(x-0)t \end{pmatrix}.$$

Eine Nebenklasse $(A_n) + \mathcal{J} \in \mathcal{K}(PC)/\mathcal{J}$ *ist genau dann invertierbar, wenn die Funktion* $\eta((A_n) + \mathcal{J})$ *keine Nullstellen hat, d. h. genau dann, wenn*

$$\det(\eta((A_n) + \mathcal{J})(x, t)) \neq 0 \quad \textit{für alle } (x, t) \in \mathbb{T} \times [0, 1].$$

Zusammen mit Satz 6.41 (b) folgt nun, dass die Fredholmeigenschaft von $W(A_n)$ bereits die Invertierbarkeit von $(A_n) + \mathcal{J}$ impliziert. Der Liftungssatz liefert schließlich das folgende Resultat.

Satz 6.45 *Eine Folge* $(A_n) \in \mathcal{K}(PC)$ *ist genau dann stabil, wenn die Operatoren* $W(A_n)$ *und* $\widetilde{W}(A_n)$ *invertierbar sind.*

Wie beim Reduktionsverfahren für Toeplitzoperatoren finden wir, dass auch die Algebra $\mathcal{K}(PC)/\mathcal{G}$ ist zu einer C^*-Algebra von Paaren $(W(A_n), \widetilde{W}(A_n))$ von Operatoren *-isomorph ist.

Anmerkungen.

1. Ähnliche Resultate wie in den Sätzen 6.31 und 6.45 kennt man mittlerweile für sehr viele Algebren von Näherungsverfahren. Der formale Unterschied zwischen diesen Resultaten liegt in der Art und Weise der Definition und in der Anzahl der Homomorphismen W. Für eine (sehr viele Verfahren umfassende) solche Algebra hat man z. B. für jeden Punkt von $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ einen solchen Homomorphismus (und entsprechend riesig ist das Ideal $\mathcal{J}$).

2. Wir haben gesehen, dass Banachalgebratechniken/lokale Prinzipien zum Studium einiger Näherungsverfahren in dem Sinn notwendig sind, dass keine alternativen Beweise bekannt sind. Die benutzten Techniken liefern in der Regel nicht nur ein Stabilitätskriterium für die uns interessierenden Folgen (wie die Folge $(L_n(aI + bS)P_n)$), sondern (praktisch *ohne Mehraufwand*) für *alle* Folgen aus der konstruierten Algebra. Dies erlaubt einfache Beschreibungen der Algebren, z. B. als C^*-Algebren von geordneten Paaren $(W(A_n), \widetilde{W}(A_n))$. Die Nützlichkeit solcher Beschreibungen sehen wir uns im nächsten Abschnitt an.

7 Spektrale Approximation

7.1 Mengenfunktionen

In diesem Abschnitt untersuchen wir das asymptotische Verhalten der Spektren $\sigma(A_n)$ für Näherungsverfahren (A_n) für einen Operator A. Von besonderem Interesse ist die Frage, ob sich die Spektren von A_n für wachsende n dem Spektrum von A annähern. Wir müssen uns zunächst darüber unterhalten, in welchem Sinn man dieses „Annähern" verstehen soll.

Sei $(M_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Teilmengen von $\mathbb{C}$. Unter dem *Limes superior* $\limsup M_n$ dieser Mengenfolge versteht man die Menge aller $m \in \mathbb{C}$, für die es eine Folge (m_n) von Punkten $m_n \in M_n$ gibt, für die m ein *partieller* Grenzwert ist (d. h. Grenzwert einer Teilfolge). Der *Limes inferior* $\liminf M_n$ der Mengenfolge (M_n) besteht dagegen aus allen $m \in \mathbb{C}$, für die es eine Folge (m_n) mit $m_n \in M_n$ gibt, die gegen m konvergiert. Man sieht leicht, dass $\limsup M_n$ und $\liminf M_n$ abgeschlossene Mengen sind, dass

$$\liminf M_n \subseteq \limsup M_n$$

und dass $\limsup M_n$ nicht leer ist, falls die M_n nicht leer und gleichmäßig beschränkt sind (während $\liminf M_n$ unter diesen Bedingungen durchaus leer sein kann).

Falls $\limsup M_n$ und $\liminf M_n$ für eine Mengenfolge (M_n) übereinstimmen, kann man von *Konvergenz* dieser Mengenfolge sprechen. Diese Konvergenz kann man tatsächlich als Konvergenz in einem geeignet gewählten metrischen Raum auffassen. Dazu bezeichne $\mathbb{C}_{\text{comp}}$ die Menge aller nichtleeren kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ (nur mit solchen werden wir es zu tun haben). Für je zwei Mengen $A, B \in \mathbb{C}_{\text{comp}}$ definiert man ihren *Hausdorff-Abstand* durch

$$h(A,B) := \max\left\{\max_{a\in A} \operatorname{dist}(a,B),\ \max_{b\in B} \operatorname{dist}(b,A)\right\},$$

wobei $\operatorname{dist}(a,B) := \min_{b\in B} |a-b|$.

Ist also $d := h(A,B)$, so liegt A in der abgeschlossenen d-Umgebung von B, und B liegt in der abgeschlossenen d-Umgebung von A. Man kann $h(A,B)$ auch definieren als kleinste Zahl d mit dieser Eigenschaft. Bestehen $A = \{a\}$ und $B = \{b\}$ jeweils aus einem einzigen Punkt, so ist offenbar $h(A,B) = |a-b|$.

Man kann sich davon überzeugen, dass die Abbildung $h : \mathbb{C}_{\text{comp}} \times \mathbb{C}_{\text{comp}} \to \mathbb{R}$ alle Eigenschaften einer Metrik aufweist und somit $(\mathbb{C}_{\text{comp}}, h)$ zu einem metrischen Raum wird. Konvergiert eine Folge (M_n) in $\mathbb{C}_{\text{comp}}$ bzgl. dieser Metrik gegen eine Menge $M \in \mathbb{C}_{\text{comp}}$, so schreiben wir

$$M = \operatorname*{h-lim}_{n\to\infty} M_n \qquad (\text{mit } h \text{ für } \textit{Hausdorff-Limes}).$$

Satz 7.1 *Sei* (M_n) *eine beschränkte Folge in* $\mathbb{C}_{\text{comp}}$. *Dann gilt* $\liminf M_n = \limsup M_n$ *genau dann, wenn diese Folge im Sinne des Hausdorff-Abstands konvergiert. In diesem Fall gilt*

$$\liminf M_n = \limsup M_n = \text{h-lim}\, M_n.$$

Beweis. Sei zunächst (M_n) bzgl. des Hausdorff-Abstands konvergent. Wir zeigen, dass

$$\limsup M_n \subseteq \text{h-lim}\, M_n \subseteq \liminf M_n, \tag{7.1}$$

woraus die Behauptung folgt. Zur ersten Inklusion in (7.1): Sei $m \in \limsup M_n$. Dann gibt es eine Folge $(m_{n(k)})$ von Punkten $m_{n(k)} \in M_{n(k)}$, die gegen m konvergiert. Aus $h(M_n, M) \to 0$ mit $M := \text{h-lim}\, M_n$ folgt $\text{dist}\,(m_{n(k)}, M) \to 0$ und schließlich $\text{dist}\,(m, M) = 0$. Da M abgeschlossen ist, ist $m \in M$.

Zur zweiten Inklusion in (7.1): Für jedes $m \in M$ gilt $\text{dist}\,(m, M_n) \to 0$. Wir wählen Punkte $m_n \in M_n$ mit $|m - m_n| = \text{dist}\,(m, M_n)$. Dann ist $\lim m_n = m$, d. h. $m \in \liminf M_n$. Das beweist (7.1) und impliziert, dass $\limsup M_n = \liminf M_n$.

Sei nun umgekehrt (M_n) eine beschränkte Mengenfolge mit $\liminf M_n = \limsup M_n$. Wir zeigen, dass diese im Hausdorffschen Sinn konvergiert und überlegen uns dazu, dass

$$\max_{m_n \in M_n} \text{dist}\,(m_n, \limsup M_n) \to 0, \tag{7.2}$$

$$\max_{m \in \liminf M_n} \text{dist}\,(m, M_n) \to 0 \tag{7.3}$$

für *jede* beschränkte Mengenfolge (M_n). Wäre (7.2) falsch, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, eine unendliche Teilmenge $\mathbb{N}'$ von $\mathbb{N}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}'$ ein $m_n \in M_n$ mit $\text{dist}\,(m_n, \limsup M_n) \geq \varepsilon$. Aus der beschränkten Folge $(m_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ lässt sich eine konvergente Teilfolge auswählen. Der Grenzwert m dieser Teilfolge gehört nach Definition zu $\limsup M_n$. Andererseits ist nach Konstruktion der Folge (m_n) natürlich $\text{dist}\,(m, \limsup M_n) \geq \varepsilon$. Dieser Widerspruch zeigt, dass (7.2) gilt.

Wäre (7.3) falsch, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, eine unendliche Teilmenge $\mathbb{N}'$ von $\mathbb{N}$ und ein $m \in \liminf M_n$ mit $\text{dist}\,(m, M_n) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}'$. Dann kann aber nicht $m \in \liminf M_n$ sein; ein Widerspruch. Also gilt auch (7.3).

Setzen wir nun in (7.2) und (7.3) $\limsup M_n = \liminf M_n =: M$, so folgt

$$\max \left\{ \max_{m_n \in M_n} \text{dist}\,(m_n, M),\ \max_{m \in M} \text{dist}\,(m, M_n) \right\} \to 0,$$

also $\text{h-lim}\, M_n = M$. ∎

Wir vermerken zwei Eigenschaften des metrischen Raumes $(\mathbb{C}_{\text{comp}}, h)$, die wir im Weiteren nicht benötigen. Der Beweis von (a) ist nicht schwer (Übung), der des Kompaktheitskriteriums in (b) steht z. B. in Felix Hausdorffs Klassiker *Set theory*.

Satz 7.2 (a) *Der metrische Raum* $(\mathbb{C}_{\text{comp}}, h)$ *ist vollständig.*
(b) *Jede beschränkte Folge* (M_n) *in* $\mathbb{C}_{\text{comp}}$ *besitzt eine bzgl.* h *konvergente Teilfolge.*

Was kann man über die Konvergenz von Spektren aussagen? Kakutani konstruierte ein bekannt gewordenes Beispiel einer Folge von Operatoren A_n auf einem Hilbertraum, die in der *Norm* gegen einen Operator A konvergieren und für die

$$\sigma(A_n) = \{0\} \quad \text{für alle } n, \text{ aber } \sigma(A) \neq \{0\}$$

ist. Selbst im Fall einer normkonvergenten Folge von Operatoren konvergiert die Folge der Spektren i. Allg. also nicht. Umso weniger können wir dies für Näherungsfolgen erwarten, die nur stark gegen einen Operator konvergieren. Hier noch zwei positive Resultate.

Satz 7.3 (*a*) *Sind K_n, K kompakte Operatoren und ist $\|K_n - K\| \to 0$, so ist*

$$h(\sigma(K_n), \sigma(K)) \to 0.$$

(*b*) *Sind a, b normale Elemente einer C^*-Algebra mit Eins, so ist*

$$h(\sigma(a), \sigma(b)) \leq \|a - b\|.$$

Beweise finden Sie z. B. in Aupetit: *A Primer on Spectral Theory.*

7.2 Eigenwerte von Toeplitzmatrizen

Wir wenden uns nun den Eigenwerten von Toeplitzmatrizen $P_nT(a)P_n$ zu und fragen nach deren Verhältnis zum Spektrum von $T(a)$.

Beispiel 7.4 Sei $a(t) = t$. Der Toeplitzoperator $T(a)$ ist der Operator der Verschiebung nach rechts. Für ihn gilt $\sigma(T(a)) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$; für alle $n \in \mathbb{N}$ ist aber offenbar $\sigma(P_nT(a)P_n) = \{0\}$. ■

Nach diesem ernüchternden Beispiel formulieren wir zunächst zwei allgemeine Resultate. Es sei wieder $\mathcal{F}$ die Algebra aller beschränkten Folgen (A_n) von Operatoren $A_n : \operatorname{im} P_n \to \operatorname{im} P_n$ mit

$$P_n : l^2(\mathbb{Z}^+) \to l^2(\mathbb{Z}^+), \quad (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (x_0, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots),$$

und $\mathcal{G}$ sei das Ideal der Nullfolgen in $\mathcal{F}$.

Satz 7.5 (*a*) *Für jede Folge $(A_n) \in \mathcal{F}$ gilt*

$$\limsup \sigma(A_n) \subseteq \sigma_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}((A_n) + \mathcal{G}).$$

(*b*) *Für jede Folge $(A_n) \in \mathcal{F}$ von normalen Matrizen A_n gilt*

$$\limsup \sigma(A_n) = \sigma_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}((A_n) + \mathcal{G}).$$

Beweis. (a) Sei $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}((A_n)+\mathcal{G})$. Nach Kozak ist dann $(A_n - \lambda I_n)$ eine stabile Folge. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $M > 0$ mit

$$\|(A_n - \lambda I_n)^{-1}\| \leq M \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Für den Spektralradius r gilt dann wegen $r(A) \leq \|A\|$ natürlich auch

$$r((A_n - \lambda I_n)^{-1}) \leq M \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Nun gilt für invertierbare Operatoren B bekanntlich $\sigma(B^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(B)\}$, womit man erhält

$$\begin{aligned} M \geq r((A_n - \lambda I_n)^{-1}) &= \max\{|\mu| : \mu \in \sigma((A_n - \lambda I_n)^{-1})\} \\ &= \max\{|\mu^{-1}| : \mu \in \sigma(A_n - \lambda I_n)\} \\ &= (\min\{|\mu| : \mu \in \sigma(A_n) - \lambda\})^{-1} \end{aligned}$$

bzw.

$$1/M \leq \min\{|\mu| : \mu \in \sigma(A_n) - \lambda\} \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Der Abstand von λ zu $\sigma(A_n)$ beträgt also für alle $n \geq n_0$ mindestens $1/M$. Folglich kann λ nicht in $\limsup \sigma(A_n)$ liegen.

(b) Seien nun die A_n normal. Liegt λ nicht in $\limsup \sigma(A_n)$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $M > 0$ mit

$$1/M \leq \min\{|\mu| : \mu \in \sigma(A_n - \lambda I_n)\} \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Hieraus folgt die Invertierbarkeit von $A_n - \lambda I_n$ für $n \geq n_0$ und – wie in Teil (a) –

$$r((A_n - \lambda I_n)^{-1}) \leq M \quad \text{für } n \geq n_0. \tag{7.4}$$

Für normales A_n sind aber auch $A_n - \lambda I_n$ und $(A_n - \lambda I_n)^{-1}$ normal. Da für normale Operatoren Norm und Spektralradius zusammenfallen (Satz 4.38 (a)), folgt aus (7.4)

$$\|(A_n - \lambda I_n)^{-1}\| \leq M \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Somit ist die Folge $(A_n - \lambda I_n)$ stabil, d. h. es ist $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}((A_n) + \mathcal{G})$ nach dem Satz von Kozak. ∎

Wir betrachten speziell Folgen aus der Algebra $\mathcal{S}(PC)$ des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren mit Erzeugerfunktionen aus PC. Ist $(A_n) \in \mathcal{S}(PC)$ normal, so haben wir mit Satz 7.5 (b)

$$\limsup \sigma(A_n) = \sigma_{\mathcal{S}(PC)/\mathcal{G}}((A_n) + \mathcal{G}),$$

und mit Satz 6.33 erhält man sofort

$$\sigma_{\mathcal{S}(PC)/\mathcal{G}}((A_n) + \mathcal{G}) = \sigma(W(A_n)) \cup \sigma(\widetilde{W}(A_n)). \tag{7.5}$$

(Man erkennt die Nützlichkeit des Isomorphieresultats 6.33.) Ist z.B. $a \in PC$ reellwertig und sind K und L selbstadjungierte kompakte Operatoren, so folgt

$$\limsup \sigma(P_nT(a)P_n + P_nKP_n + R_nLR_n) = \sigma(T(a) + K) \cup \sigma(T(\tilde{a}) + L). \quad (7.6)$$

Mit Satz 6.4 (von Hartmann/Wintner) erhält man für reellwertige Funktionen $a \in PC$ weiter, dass

$$\limsup \sigma(P_nT(a)P_n) = [\text{ess inf}\, a, \text{ ess sup}\, a]. \quad (7.7)$$

Diese Resultate lassen sich noch wesentlich ergänzen: Die Spektren auf den linken Seiten von (7.5) – (7.7) konvergieren nämlich sogar bzgl. der Hausdorff-Metrik.

Satz 7.6 *Sei $(A_n) \in \mathcal{S}(PC)$ eine Folge normaler Matrizen. Dann gilt*

$$\liminf \sigma(A_n) = \limsup \sigma(A_n) = \sigma(W(A_n)) \cup \sigma(\widetilde{W}(A_n)).$$

Beweis. Aus Satz 7.5 (b) folgt

$$\liminf \sigma(A_n) \subseteq \limsup \sigma(A_n) = \sigma(W(A_n)) \cup \sigma(\widetilde{W}(A_n)).$$

Wir zeigen noch

$$\lambda \notin \liminf \sigma(A_n) \quad \Rightarrow \quad \lambda \notin \sigma(W(A_n)) \cup \sigma(\widetilde{W}(A_n)).$$

Liegt λ nicht in $\liminf \sigma(A_n)$, so gibt es eine Teilfolge (n_k) natürlicher Zahlen und ein $M > 0$ mit

$$1/M \leq \min\{|\mu| : \mu \in \sigma(A_{n_k} - \lambda I_{n_k})\} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wie im Beweis von Satz 7.5 (b) folgt hieraus die Stabilität der Teilfolge

$$(A_{n_k} - \lambda I_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{von} \quad (A_n - \lambda I_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aus der Stabilität dieser Teilfolge kann man mit Aufgabe 2 von Übung 2 bereits auf die Invertierbarkeit von

$$\operatorname*{s-lim}_{k\to\infty} (A_{n_k} - \lambda I_{n_k})P_{n_k} \quad \text{und} \quad \operatorname*{s-lim}_{k\to\infty} R_{n_k}(A_{n_k} - \lambda I_{n_k})R_{n_k}$$

schließen. Diese Grenzwerte stimmen mit $W(A_n - \lambda I_n) = W(A_n) - \lambda I$ und $\widetilde{W}(A_n - \lambda I_n) = \widetilde{W}(A_n) - \lambda I$ überein. Also ist $\lambda \notin \sigma(W(A_n)) \cup \sigma(\widetilde{W}(A_n))$.
■

Damit ist für selbstadjungierte Toeplitzoperatoren alles klar. Für nichtselbstadjungierte Toeplitzoperatoren (wie z. B. den Verschiebungsoperator) kann man Folgendes zeigen.

Satz 7.7 (Schmidt/Spitzer 1960) *Ist a ein trigonometrisches Polynom, so ist*

$$\liminf \sigma(P_nT(a)P_n) = \limsup \sigma(P_nT(a)P_n). \tag{7.8}$$

Diese Menge ist zusammenhängend, und sie lässt sich als endliche Vereinigung analytischer Kurven schreiben.

Die Bilder auf den Seiten 137 A, B stammen aus Böttcher/Silbermann: Introduction to large truncated Toeplitz matrices. Sie zeigen, dass die „Schmidt-Spitzer-Mengen" (7.8) wie ein „Skelett" die Form des von der Kurve $a(\mathbb{T})$ berandeten Gebiets nachahmen.

7.3 Zwei Experimente und eine Erklärung

Experiment 1. Sei

$$a(t) := -t^{-4} - (3+2i)t^{-3} + it^{-2} + t^{-1} + 10t + (3+i)t^2 + 4t^3 + it^4.$$

Das obere Bild auf Seite 137 C zeigt die Kurve $a(\mathbb{T})$ und die 100 *tatsächlichen* Eigenwerte von $P_{100}T(a)P_{100}$, so wie wir sie auch nach Satz 7.7 erwarten können. Die Bilder auf den Seiten 137 D und E zeigen die mit MATLAB berechneten Eigenwerte von $P_nT(a)P_n$ für $n = 200, 400, 500$ und 700. Das erstaunliche Resultat ist, dass die Menge der Eigenwerte von $P_nT(a)P_n$ für wachsendes n immer genauer die Kurve $a(\mathbb{T})$ nachzuahmen scheint.

Fazit 1. Die Bilder auf den Seiten 137 D und E sind *falsch* in dem Sinn, dass sie nicht $\sigma(P_nT(a)P_n)$ zeigen. Diese Spektren müssten sich nämlich entlang des im oberen Bild von Seite 137 C angedeuteten Kurvensystems häufen, und das tun sie offenbar nicht.

2. Diese Bilder tun aber (im Gegensatz zu den korrekten Spektren auf S. 137 C oben) genau das, was wir uns erhoffen: sie vermitteln uns eine Vorstellung von $a(\mathbb{T})$ und damit von $\sigma(T(a))$!

Offenbar berechnet MATLAB also nicht $\sigma(P_nT(a)P_n)$ (was es zwar tun sollte, uns jedoch wenig nützt), sondern etwas anderes (was es zwar nicht sollte, was aber nützlich ist). ■

Experiment 2. Wir betrachten noch einmal die Matrizen $A_n := P_nT(a)P_n$ mit $a(t) = t$. Dann ist $\sigma(A_n) = \{0\}$ für alle n, so dass uns diese Spektren keinerlei Information über $\sigma(T(a)) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ liefern (außer, dass $0 \in \sigma(T(a))$).

Nun stören wir die Matrizen A_n ein wenig und benutzen dazu $n \times n$-Matrizen G_n, in deren Nordostecke $1/n$ steht, während alle übrigen Einträge gleich 0 sind. Offenbar ist $\|G_n\| = 1/n \to 0$, also $(G_n) \in \mathcal{G}$, und die Matrizen G_n werden mit wachsendem n immer „vernachlässigbarer". Die Eigenwerte von $A_n + G_n$ ergeben sich aus

$$
\begin{aligned}
\det(A_n + G_n - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & & & & 1/n \\ 1 & -\lambda & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & & & & \\ 1 & -\lambda & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -\lambda \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & \\ & 1 & -\lambda & \\ & & \ddots & -\lambda \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-\lambda)^n + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \overset{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

(wobei in der ersten Zeile eine $n \times n$ und in der zweiten Zeile zwei $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen stehen) bzw. aus $\lambda^n = 1/n$. Die Eigenwerte von $A_n + G_n$ sind also die Zahlen

$$\lambda_k := \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \, e^{2\pi i k/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Aus $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ folgt nun leicht, dass

$$\limsup \sigma(A_n + G_n) = \liminf \sigma(A_n + G_n) = \mathbb{T}.$$

Während uns die Spektren der A_n also (fast) nichts über $\sigma(T(a))$ verraten, liefern die Spektren der *gestörten* Matrizen $A_n + G_n$ sehr schnell eine Annäherung an den Rand $\mathbb{T}$ von $\sigma(T(a))$. ■

Diese Beobachtung bringt uns auf die Idee, weitere Störungen $(G_n) \in \mathcal{G}$ zuzulassen. Der folgende Satz zeigt, dass dies sinnvoll ist und dass man in der Tat ganz $\sigma((A_n) + \mathcal{G})$ erhält, wenn man *alle* Störungen durch Nullfolgen in Betracht zieht.

Satz 7.8 *Für jede Folge $(A_n) \in \mathcal{F}$ ist*

$$\bigcup_{(G_n) \in \mathcal{G}} \limsup \sigma(A_n + G_n) = \sigma_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}((A_n) + \mathcal{G}).$$

Man muss also Störungen bewusst zulassen, um das gewünschte Resultat zu erhalten. Die (falschen, aber nützlichen) MATLAB-Bilder sind also offenbar entstanden, weil MATLAB nicht exakt rechnet, sondern Fehler durch Rundungen o. ä. macht.

Beweis. Die Inklusion $\subseteq$ folgt sofort aus Satz 7.5 (a). Für die umgekehrte Inklusion sei $\lambda \in \sigma_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}((A_n) + \mathcal{G})$, d. h. die Folge $(A_n - \lambda I_n)$ sei nicht stabil. Dann sind zwei Fälle denkbar:

Fall 1. Es gibt eine unendliche Teilfolge (n_k) von $\mathbb{N}$, für die keine der Matrizen $A_{n_k} - \lambda I_{n_k}$ invertierbar ist. Dann ist $\lambda \in \sigma(A_{n_k})$ für alle k und folglich $\lambda \in \limsup \sigma(A_n)$.

Fall 2. Die Matrizen $A_n - \lambda I_n$ sind invertierbar für alle hinreichend großen n, aber

$$\limsup \|(A_n - \lambda I_n)^{-1}\| = \infty.$$

Dann gibt es eine Teilfolge (n_k) von $\mathbb{N}$, und für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Vektor $x_{n_k} \in \mathbb{C}^{n_k}$ der Länge 1 mit

$$\|(A_{n_k} - \lambda I_{n_k})^{-1} x_{n_k}\| \geq k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wir setzen $y_{n_k} := (A_{n_k} - \lambda I_{n_k})^{-1} x_{n_k}$ und definieren lineare Abbildungen

$$G_{n_k} : \mathbb{C}^{n_k} \to \mathbb{C}^{n_k}, \quad z \mapsto \langle z,\, y_{n_k}\rangle x_{n_k} / \|y_{n_k}\|^2.$$

Dann ist

$$\|G_{n_k}\| = \sup_{z \neq 0} \frac{|\langle z, y_{n_k}\rangle|\, \|x_{n_k}\|}{\|z\|\, \|y_{n_k}\|^2} \leq \frac{1}{\|y_{n_k}\|} \leq \frac{1}{k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Definieren wir noch $G_n := 0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ falls n nicht von der Form n_k für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, so liegt die Folge (G_n) offenbar im Ideal $\mathcal{G}$. Von den Matrizen $A_{n_k} - G_{n_k} - \lambda I_{n_k}$ ist keine invertierbar: Es ist nämlich

$$(A_{n_k} - G_{n_k} - \lambda I_{n_k}) y_{n_k} = (A_{n_k} - \lambda I_{n_k}) y_{n_k} - G_{n_k} y_{n_k} = x_{n_k} - x_{n_k} = 0$$

und $y_{n_k} \neq 0$. Wie wir oben gesehen haben, folgt hieraus $\lambda \in \limsup \sigma(A_n - G_n)$. ■

Folgerung 7.9 *Für $a \in PC$ und K kompakt ist*

$$\bigcup_{(G_n) \in \mathcal{G}} \limsup \sigma(P_n(T(a) + K)P_n + G_n) = \sigma(T(a) + K).$$

7.4 ε-Pseudospektren

Ein PC, der mit endlicher Genauigkeit arbeitet, kann nicht unterscheiden zwischen einer nichtinvertierbaren Matrix und einer invertierbaren Matrix, deren Inverse eine sehr große Norm hat. Die folgende Definition spiegelt diese endliche Genauigkeit wider.

Definition 7.10 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, und $\varepsilon > 0$ sei eine fixierte Konstante. Ein Element $a \in \mathcal{A}$ heißt* ε-invertierbar*, wenn es invertierbar ist und wenn $\|a^{-1}\| < 1/\varepsilon$. Das* ε-Pseudospektrum *$\sigma^\varepsilon(a)$ ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $a - \lambda e$ nicht ε-invertierbar ist.*

Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Menge der ε-invertierbaren Elemente von $\mathcal{A}$ offen ist und dass $\sigma^\varepsilon(a)$ eine nichtleere und kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Außerdem ist

$$\sigma(a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma^\varepsilon(a).$$

Unser Interesse an ε-Pseudospektren rührt vor allem daher, dass diese wesentlich bessere Konvergenzeigenschaften aufweisen als gewöhnliche Spektren. Während wir z. B.

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma(P_nT(a)P_n) = \sigma(T(a))$$

nur für *reellwertige* Funktionen $a \in PC$ zeigen können (und die entsprechende Aussage für $a(t) = t$ definitiv falsch ist), gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma^\varepsilon(P_nT(a)P_n) = \sigma^\varepsilon(T(a))$$

für jede Funktion $a \in PC$ und jedes $\varepsilon > 0$.

Satz 7.11 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins e, und sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für jedes $a \in \mathcal{A}$*

$$\sigma^\varepsilon(a) = \bigcup_{s\in\mathcal{A}, \|s\|\le\varepsilon} \sigma(a+s).$$

Dieser Satz bietet nicht nur eine äquivalente Beschreibung von ε-Pseudospektren, sondern eröffnet auch einen Weg, Pseudospektren von Matrizen numerisch zu bestimmen: Zur Bestimmung von $\sigma^\varepsilon(A)$ für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wählt man zufällig Matrizen $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\|S\| \le \varepsilon$ und plottet die Eigenwerte von $A + S$. Auf diese Weise ist das untere Bild auf Seite 137 C entstanden. Dieses Bild gibt auch Anlass zur Hoffnung, dass die ε-Pseudospektren von $P_nT(a)P_n$ das von $T(a)$ approximieren.

Beweis von Satz 7.11. Sei $S_1 := \sigma^\varepsilon(a)$ und $S_2 := \bigcup_{s\in\mathcal{A}, \|s\|\le\varepsilon} \sigma(a+s)$. Wir zeigen zuerst, dass $S_2 \subseteq S_1$. Sei $\lambda \in S_2$. Dann gibt es ein $s \in \mathcal{A}$ mit $\|s\| \le \varepsilon$, für das $a + s - \lambda e$ nicht invertierbar ist. Falls λ bereits in $\sigma(a)$ liegt, so liegt es auch in $\sigma^\varepsilon(a)$, und wir sind fertig. Nehmen wir also an, $a - \lambda e$ sei invertierbar. Die Identität

$$a + s - \lambda e = (a - \lambda e)(e + (a - \lambda e)^{-1}s) \tag{7.9}$$

zeigt, dass $e + (a - \lambda e)^{-1}s$ nicht invertierbar sein kann (andernfalls würde ja die Invertierbarkeit von $a + s - \lambda e$ folgen). Folglich ist

$$\|(a - \lambda e)^{-1}s\| \ge 1$$

(andernfalls würde die Neumann-Reihe eine Inverse zu $e + (a - \lambda e)^{-1}s$ liefern).

Wegen

$$1 \le \|(a - \lambda e)^{-1}s\| \le \|(a - \lambda e)^{-1}\|\,\|s\| \le \varepsilon\|(a - \lambda e)^{-1}\|$$

folgt

$$\|(a-\lambda e)^{-1}\| \geq 1/\varepsilon, \quad \text{also } \lambda \in S_1.$$

Für den Beweis der Inklusion $S_1 \subseteq S_2$ nehmen wir an, dass $\lambda \notin S_2$ und zeigen, dass dann $\lambda \notin S_1$. Sei also $\lambda \notin S_2$, d.h., $a+s-\lambda e$ ist für alle $s \in \mathcal{A}$ mit $\|s\| \leq \varepsilon$ invertierbar. Wählt man $s=0$, so folgt die Invertierbarkeit von $a-\lambda e$ und damit auch die von $a^* - \overline{\lambda} e = (a-\lambda e)^*$. Wählt man weiter $s = \mu(a^* - \overline{\lambda} e)^{-1}$ mit einer komplexen Zahl μ mit

$$0 < |\mu| \leq \varepsilon / \|(a^* - \overline{\lambda} e)^{-1}\| \tag{7.10}$$

(diese Bedingung sichert, dass $\|s\| \leq \varepsilon$), so erhalten wir die Invertierbarkeit von

$$a - \lambda e + \mu(a^* - \overline{\lambda} e)^{-1} = \mu(a-\lambda e)\left[\frac{1}{\mu} e + (a-\lambda e)^{-1}(a^* - \overline{\lambda} e)^{-1}\right].$$

Also ist $\frac{1}{\mu} e + (a-\lambda e)^{-1}(a^* - \overline{\lambda} e)^{-1}$ invertierbar für alle μ, die (7.10) erfüllen. Damit ist klar, dass

$$r((a-\lambda e)^{-1}(a^* - \overline{\lambda} e)^{-1}) < \frac{1}{\varepsilon}\|(a^* - \overline{\lambda} e)^{-1}\|. \tag{7.11}$$

Nun ist $(a-\lambda e)^{-1}(a^* - \overline{\lambda} e)^{-1}$ selbstadjungiert, und für selbstadjungierte Elemente stimmen Norm und Spektralradius überein. Aus (7.11) folgt also

$$\|(a-\lambda e)^{-1}(a^* - \overline{\lambda} e)^{-1}\| < \frac{1}{\varepsilon}\|(a^* - \overline{\lambda} e)^{-1}\|$$

und schließlich mit dem C^*-Axiom und $\|b\| = \|b^*\|$

$$\|(a-\lambda e)^{-1}\|^2 < \frac{1}{\varepsilon}\|(a-\lambda e)^{-1}\| \quad \text{bzw.} \quad \|(a-\lambda e)^{-1}\| < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Folglich ist $\lambda \notin S_1$. ∎

Hauptresultat dieses Abschnittes ist der folgende allgemeine Konvergenzsatz. Die Algebra $\mathcal{F}$ ist wie in 7.2 definiert.

Satz 7.12 *Sei* $(A_n) \in \mathcal{F}$ *und* $\varepsilon > 0$. *Dann ist*

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma^\varepsilon(A_n) = \sigma^\varepsilon((A_n) + \mathcal{G}).$$

Im Beweis benötigen wir ein Resultat, welches für sich genommen interessant ist. Zur Erinnerung: Aus der Funktionentheorie kennen wir das *Maximumprinzip für holomorphe Funktionen*:

> *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion $f: G \to \mathbb{C}$, die in G ein lokales Maximum ihres Absolutbetrages annimmt, ist konstant in G.*

Nun betrachtet man auch holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Banachalgebren, und viele aus der „gewöhnlichen“ Funktionentheorie bekannte Resultate gelten auch in diesem allgemeineren Kontext. Z. B. wird die Tatsache, dass Spektren nicht leer sind, meist mit einer Verallgemeinerung des Satzes von Liouville bewiesen. Das Maximumprinzip lässt sich jedoch i. Allg. NICHT übertragen!

Beispiel 7.13 Die Funktion

$$f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ eine konstante Norm:

$$\left\| \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \max\{|z|, 1\} = 1,$$

ist aber selbst nicht konstant. ■

Der folgende Satz sagt nun, dass für gewisse holomorphe C^*-Algebra-wertige Funktionen wie etwa die Resolventen

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathcal{A}, \quad \lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1}$$

das Maximumprinzip gilt.

Satz 7.14 (Globevnik 1976) *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins I, sei $A \in \mathcal{A}$, und sei $A - \lambda I$ invertierbar für alle λ aus einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$. Wenn*

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq M \quad \text{für alle } \lambda \in U,$$

dann ist sogar $\|(A - \lambda I)^{-1}\| < M$ für alle $\lambda \in U$.

Beweis (Daniluk 1994). Wir zeigen die Aussage für den Fall $\mathcal{A} = L(H)$ mit einem Hilbertraum H. Da jede C^*-Algebra *-isometrisch zu einer C^*-Unteralgebra von $L(H)$ mit einem geeignet gewählten Hilbertraum ist, bedeutet dies keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Weiter: Wenn es ein $\lambda_0 \in U$ mit $\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| = M$ gibt, so gilt für $B := A - \lambda_0 I$:

> *$B - \lambda I$ ist invertierbar und $\|(B - \lambda I)^{-1}\| \leq M$ für alle $\lambda \in U - \lambda_0$ (= algebraische Differenz), und es ist $\|B^{-1}\| = M$.*

Es genügt daher, anstelle der Behauptung des Satzes die folgende spezielle Aussage zu beweisen:

> *Wenn $0 \in U$ und $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq M$ für alle $\lambda \in U$, dann ist $\|A^{-1}\| < M$.*

Wir beweisen diese Aussage indirekt. Angenommen, es ist $\|A^{-1}\| = M$. Aus der Invertierbarkeit von A folgt die von $A-\lambda I$ für alle $|\lambda| \leq r$, falls r nur hinreichend klein ist. Außerdem ist dann

$$(A - \lambda I)^{-1} = A^{-1}(I - \lambda A^{-1})^{-1} = A^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j A^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j A^{-j-1}.$$

Für alle $x \in H$ ist also

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)^{-1} x\|^2 &= \left\langle \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j A^{-j-1} x, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^{-k-1} x \right\rangle \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \lambda^j \overline{\lambda}^k \langle A^{-j-1} x, A^{-k-1} x \rangle. \end{aligned}$$

Wir wählen $\lambda = rz$ mit $|z| = 1$, multiplizieren mit $-iz^{-1}$ und integrieren über den Kreis $|z| = 1$ im Gegenuhrzeigersinn:

$$\begin{aligned} &\int_{|z|=1} (-iz^{-1}) \|(A - rzI)^{-1} x\|^2 \, \mathrm{d}z \\ &\qquad = \int_{|z|=1} \sum_{j,k=0}^{\infty} r^{j+k} z^{j-k-1} (-i) \langle A^{-j-1} x, A^{-k-1} x \rangle \, \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int_{|z|=1} z^m \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } m = -1 \\ 0 & \text{für } m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

folgt

$$2\pi \sum_{j=0}^{\infty} r^{2j} \|A^{-j-1} x\|^2 = \int_{|z|=1} (-iz^{-1}) \|(A - rzI)^{-1} x\|^2 \, \mathrm{d}z.$$

Die linke Seite ist offenbar positiv für $x \neq 0$. Also ist auch die rechte Seite positiv, und wir können abschätzen:

$$2\pi \sum_{j=0}^{\infty} r^{2j} \|A^{-j-1} x\|^2 \leq \int_{|z|=1} |-iz^{-1}| \|(A - rz)^{-1} x\|^2 \, \mathrm{d}z \leq 2\pi M^2 \|x\|^2.$$

Folglich ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^{2j} \|A^{-j-1} x\|^2 \leq M^2 \|x\|^2.$$

Berücksichtigen wir nur die ersten beiden Summanden der Summe, folgt weiter

$$\|A^{-1} x\|^2 + r^2 \|A^{-2} x\|^2 \leq M^2 \|x\|^2. \tag{7.12}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\|A^{-1}\| = M$ gibt es ein $x_\varepsilon \in H$ mit $\|x_\varepsilon\| = 1$ und

$$\|A^{-1}x_\varepsilon\|^2 \geq M^2 - \varepsilon.$$

Wir setzen x_ε für x in (7.12) ein und erhalten

$$M^2 - \varepsilon + r^2\|A^{-2}x_\varepsilon\|^2 \leq M^2 \quad \text{bzw.} \quad \|A^{-2}x_\varepsilon\| \leq \varepsilon/r^2.$$

Hieraus folgt schließlich

$$1 = \|x_\varepsilon\|^2 \leq \|A^2\|^2\|A^{-2}x_\varepsilon\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{r^2}\|A^2\|^2.$$

Dies ist für kleine ε unmöglich. Widerspruch. ■

Beweis von Satz 7.12. Zunächst sei $\lambda \in \sigma^\varepsilon_{\mathcal{F}/\mathcal{G}}((A_n) + \mathcal{G})$. Zwei Fälle sind möglich: Entweder die Nebenklasse $(A_n - \lambda I_n) + \mathcal{G}$ ist nicht invertierbar, oder sie ist invertierbar mit

$$\|((A_n - \lambda I_n) + \mathcal{G})^{-1}\| \geq 1/\varepsilon. \tag{7.13}$$

Im ersten Fall ist die Folge $(A_n - \lambda I_n)$ nicht stabil. Wenn es eine Teilfolge (n_k) von $\mathbb{N}$ so gibt, dass $(A_{n_k} - \lambda I_{n_k})$ für kein k invertierbar ist, so ist $\lambda \in \sigma(A_{n_k}) \subseteq \sigma^\varepsilon(A_{n_k})$ für alle k und folglich $\lambda \in \limsup \sigma^\varepsilon(A_n)$. Gibt es eine solche Teilfolge nicht, so gibt es eine Teilfolge (n_k) von $\mathbb{N}$ mit

$$\|(A_{n_k} - \lambda I_{n_k})^{-1}\| \geq k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Für $k > 1/\varepsilon$ liegt dann λ in $\sigma^\varepsilon(A_{n_k})$ und folglich ebenfalls in $\limsup \sigma^\varepsilon(A_n)$.

Wir betrachten den zweiten Fall, d. h. es gilt (7.13). Aus dem Satz von Daniluk folgt, dass es in jeder offenen Umgebung U von λ ein λ_0 gibt mit

$$\|((A_n - \lambda_0 I_n) + \mathcal{G})^{-1}\| > 1/\varepsilon \tag{7.14}$$

(andernfalls wäre ja $\|((A_n - \lambda_0 I_n) + \mathcal{G})^{-1}\| \leq 1/\varepsilon$ für alle $\lambda_0 \in U$, und Satz 7.14 würde $\|((A_n - \lambda_0 I_n) + \mathcal{G})^{-1}\| < 1/\varepsilon$ für alle $\lambda_0 \in U$ einschließlich $\lambda_0 = \lambda$ liefern). Wegen (7.14) findet man für alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$ Zahlen $\lambda_k \in U$ mit

$$\|((A_n - \lambda_k I_n) + \mathcal{G})^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon - 1/k}. \tag{7.15}$$

Da man U beliebig klein wählen kann, lässt sich erreichen, dass $\lambda_k \to \lambda$.

Wegen der für beliebige Folgen $(A_n) \in \mathcal{F}$ gültigen Beziehung

$$\limsup_{n\to\infty} \|A_n\| = \|(A_n) + \mathcal{G}\| \tag{7.16}$$

(Satz 6.14) ist (7.15) äquivalent zu

$$\limsup_{n\to\infty} \|(A_n - \lambda_k I_n)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon - 1/k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\frac{1}{\varepsilon - 1/k} > \frac{1}{\varepsilon}$ findet man schließlich eine monoton wachsende Folge (n_k) natürlicher Zahlen mit

$$\|(A_{n_k} - \lambda_k I_{n_k})^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Es ist also $\lambda_k \in \sigma^\varepsilon(A_{n_k})$ und somit $\lambda = \lim \lambda_k \in \limsup \sigma^\varepsilon(A_n)$.

Für die umgekehrte Inklusion $\limsup \sigma^\varepsilon(A_n) \subseteq \sigma^\varepsilon((A_n) + \mathcal{G})$ zeigen wir, dass aus $\lambda \notin \sigma^\varepsilon((A_n) + \mathcal{G})$ folgt $\lambda \notin \limsup \sigma^\varepsilon(A_n)$. Sei also $\lambda \notin \sigma^\varepsilon((A_n) + \mathcal{G})$. Dann ist die Nebenklasse $(A_n - \lambda I_n) + \mathcal{G}$ invertierbar in $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ und

$$\|((A_n - \lambda I_n) + \mathcal{G})^{-1}\| = \frac{1}{\varepsilon} - 2\delta < \frac{1}{\varepsilon}$$

mit einem $\delta > 0$. Für hinreichend große n sind dann die $A_n - \lambda I_n$ invertierbar, und aus (7.16) folgt

$$\limsup \|(A_n - \lambda I_n)^{-1}\| = \frac{1}{\varepsilon} - 2\delta.$$

Hieraus folgt weiter, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|(A_n - \lambda I_n)^{-1}\| < \frac{1}{\varepsilon} - \delta \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Sei $n \geq n_0$, und $\mu \in \mathbb{C}$ erfülle $|\lambda - \mu| < \varepsilon\delta(1/\varepsilon - \delta)^{-1}$. Ein einfaches Neumann-Reihen-Argument zeigt, dass

$$\begin{aligned}
\|(A_n - \mu I_n)^{-1}\| &\leq \frac{\|(A_n - \lambda I_n)^{-1}\|}{1 - |\lambda - \mu| \, \|(A_n - \lambda I_n)^{-1}\|} \\
&< \frac{1/\varepsilon - \delta}{1 - \varepsilon\delta(1/\varepsilon - \delta)^{-1}(1/\varepsilon - \delta)} = \frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Das heißt aber, dass $\mu \notin \sigma^\varepsilon(A_n)$ für alle $n \geq n_0$ und alle μ aus einer offenen Umgebung U von λ. Dann kann λ nicht zu $\limsup \sigma^\varepsilon(A_n)$ gehören. ■

Um diesen Satz für ein konkretes Näherungsverfahren ausnutzen zu können, benötigen wir präzise Kenntnisse über die Nebenklassen $(A_n) + \mathcal{G}$. Über solche verfügen wir, falls $(A_n) \in \mathcal{S}(PC)$ (Algebra des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren mit PC Erzeugern) oder $(A_n) \in \mathcal{K}(PC)$ (Algebra des Kollokationsverfahrens für SIO) und für viele weitere Verfahren. In diesen Fällen kann man statt mit der Nebenklasse $(A_n) + \mathcal{G}$ mit dem Paar $(W(A_n), \widetilde{W}(A_n))$ von Operatoren rechnen und findet sofort für solche Folgen

$$\sigma^\varepsilon((A_n) + \mathcal{G}) = \sigma^\varepsilon\left((W(A_n), \widetilde{W}(A_n))\right) = \sigma^\varepsilon(W(A_n)) \cup \sigma^\varepsilon(\widetilde{W}(A_n)).$$

Folgerung 7.15 *Sei $(A_n) \in \mathcal{S}(PC)$ oder $(A_n) \in \mathcal{K}(PC)$. Dann ist*

$$\limsup \sigma^\varepsilon(A_n) = \sigma^\varepsilon(W(A_n)) \cup \sigma^\varepsilon(\widetilde{W}(A_n)).$$

(Beachten Sie, dass die Homomorphismen W und $\widetilde{W}$ für die Algebren $\mathcal{S}(PC)$ und $\mathcal{K}(PC)$ unterschiedlich definiert sind.) Da die Abbildungen W und $\widetilde{W}$ in beiden Fällen über starke Grenzwerte definiert sind, lässt sich Folgerung 7.15 noch wesentlich ergänzen:

Satz 7.16 *Sei $(A_n) \in \mathcal{S}(PC)$ oder $(A_n) \in \mathcal{K}(PC)$. Dann konvergiert die Folge der ε-Pseudospektren $\sigma^\varepsilon(A_n)$ bzgl. der Hausdorff-Metrik gegen*

$$\sigma^\varepsilon(W(A_n)) \cup \sigma^\varepsilon(\widetilde{W}(A_n)).$$

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass

$$\limsup \sigma^\varepsilon(A_n) \subseteq \liminf \sigma^\varepsilon(A_n)$$

und tun dies für Folgen aus $\mathcal{S}(PC)$. Sei $\lambda \in \limsup \sigma^\varepsilon(A_n) \setminus \liminf \sigma^\varepsilon(A_n)$. Dann gibt es eine Teilfolge (n_k) von $\mathbb{N}$ mit

$$\lambda \notin \limsup_{k\to\infty} \sigma^\varepsilon(A_{n_k}).$$

Nach Satz 7.12 ist dann $\lambda \notin \sigma^\varepsilon((A_{n_k}) + \mathcal{G})$, d. h. die Folge $(A_{n_k} - \lambda I_{n_k})$ ist stabil und

$$\|((A_{n_k} - \lambda I_{n_k}) + \mathcal{G})^{-1}\| < 1/\varepsilon.$$

(Streng genommen müssten $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ für diese Überlegungen modifiziert werden: Statt der Folgen $(A_n)_{n\geq 1}$ betrachtet man nun Folgen $(A_{n_k})_{k\geq 1}$.) Aus der Stabilität der Folge $(A_{n_k} - \lambda I_{n_k})$ folgt wie früher die Invertierbarkeit der Operatoren

$$\operatorname*{s-lim}_{k\to\infty} (A_{n_k} - \lambda I_{n_k})P_{n_k} \quad \text{und} \quad \operatorname*{s-lim}_{k\to\infty} R_{n_k}(A_{n_k} - \lambda I_{n_k})R_{n_k},$$

die offenbar mit $W(A_n - \lambda I_n) = W(A_n) - \lambda I$ und $\widetilde{W}(A_n - \lambda I_n) = \widetilde{W}(A_n) - \lambda I$ übereinstimmen. Dann ist das Verfahren anwendbar, es konvergieren auch die invertierten Folgen stark, und aus Banach-Steinhaus folgt

$$\begin{aligned}
\|(W(A_n) - \lambda I)^{-1}\| &= \|\operatorname*{s-lim}_{k\to\infty} (A_{n_k} - \lambda I_{n_k})^{-1}\| \\
&\leq \liminf \|(A_{n_k} - \lambda I_{n_k})^{-1}\| \\
&\leq \limsup \|(A_{n_k} - \lambda I_{n_k})^{-1}\| \\
&= \|((A_{n_k} - \lambda I_{n_k}) + \mathcal{G})^{-1}\| < 1/\varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei wir wieder (7.16) benutzt haben. Es ist also

$$\lambda \notin \sigma^\varepsilon(W(A_n)) \quad \text{und analog} \quad \lambda \notin \sigma^\varepsilon(\widetilde{W}(A_n)),$$

woraus

$$\lambda \notin \sigma^\varepsilon\left((W(A_n), \widetilde{W}(A_n))\right) = \sigma^\varepsilon((A_n) + \mathcal{G})$$

folgt. Es ist also wegen Satz 7.12 $\lambda \notin \limsup \sigma^\varepsilon(A_n)$ im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Insbesondere ist beispielsweise für $a \in PC$ und K, L kompakt

$$\begin{aligned} &\text{h-lim}\, \sigma^\varepsilon(P_n T(a) P_n + P_n K P_n + R_n L R_n) \\ &= \sigma^\varepsilon(T(a) + K) \cup \sigma^\varepsilon(T(\tilde{a}) + L). \end{aligned}$$

Noch spezieller: für $a \in PC$ ist

$$\text{h-lim}\, \sigma^\varepsilon(P_n T(a) P_n) = \sigma^\varepsilon(T(a)) \cup \sigma^\varepsilon(T(\tilde{a})).$$

Mit der bereits früher benutzten Identität

$$T(\tilde{a}) = CT(a)^* C = CT(\overline{a})C$$

folgt weiter $\sigma^\varepsilon(T(\tilde{a})) = \sigma^\varepsilon(T(a))$ ($\nearrow$ Übung), so dass wir schließlich erhalten

Folgerung 7.17 *Für $a \in PC$ ist*

$$\text{h-lim}\, \sigma^\varepsilon(P_n T(a) P_n) = \sigma^\varepsilon(T(a)).$$

Für das ε-Pseudospektrum von Toeplitzoperatoren vermerken wir abschließend folgendes Resultat, in dem Δ_ε für $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le \varepsilon\}$ steht.

Satz 7.18 (Böttcher/Grudsky) *Für $a \in PC$ ist*

$$\sigma(T(a)) + \Delta_\varepsilon \subseteq \sigma^\varepsilon(T(a)) \subseteq \overline{\operatorname{conv} a(\mathbb{T})} + \Delta_\varepsilon.$$

(Das + steht für die algebraische Summe.) Ist insbesondere $\sigma(T(a)) = \overline{\operatorname{conv} a(\mathbb{T})}$ (wie z. B. für die Funktion $a(t) = t$), so folgt

$$\sigma^\varepsilon(T(a)) = \sigma(T(a)) + \Delta_\varepsilon.$$

In leicht modifizierter Form gilt dies für beliebige Funktionen $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ (man ersetze $a(\mathbb{T})$ durch das wesentliche Bild von a).