

Vorlesung Analysis
WS 2018/19 und SS 2019

Steffen Roch

Inhaltsverzeichnis

1	Die reellen Zahlen	1
1.1	Die Körperaxiome	2
1.1.1	Die Axiome der Addition	2
1.1.2	Die Axiome der Multiplikation	3
1.2	Die Anordnungsaxiome	4
1.2.1	Das Rechnen mit Ungleichungen	5
1.2.2	Der Betrag einer reellen Zahl	5
1.3	Das Vollständigkeitsaxiom	6
1.3.1	Das babylonische Wurzelziehen	6
1.3.2	Minimum und Maximum, Infimum und Supremum	8
1.3.3	Das Vollständigkeitsaxiom	9
1.3.4	Die natürlichen Zahlen	10
1.3.5	Die Archimedische Anordnung der reellen Zahlen	13
1.4	Darstellung reeller Zahlen durch Dezimalbrüche	14
2	Mengen und Abbildungen	15
2.1	Mengen und Mengenoperationen	15
2.1.1	Operationen mit Mengen	15
2.2	Abbildungen	17
2.2.1	Definitionen	17
2.2.2	Die Umkehrabbildung	20
2.2.3	Verknüpfung von Abbildungen	20
2.3	Mächtigkeit von Mengen	22
3	Metrische Räume	26
3.1	Der Euklidische Raum \mathbb{R}^n	26
3.1.1	Der Abstand in \mathbb{R}	26
3.1.2	Der Raum \mathbb{R}^n	27
3.2	Der Körper der komplexen Zahlen	30
3.3	Metrische Räume	32
3.4	Folgen in metrischen Räumen	38
3.5	Vollständige metrische Räume	41
4	Zahlenfolgen	44
4.1	Rechnen mit Grenzwerten	44
4.2	Die Vollständigkeit von \mathbb{R}	46
4.3	Einige wichtige Grenzwerte	50
4.4	Partielle Grenzwerte	53
4.5	Die Vollständigkeit von \mathbb{R}^k und \mathbb{C}	54

5	Zahlenreihen	57
5.1	Konvergenz von Reihen	57
5.2	Absolut konvergente Reihen	61
5.3	Umordnung von Reihen	65
5.4	Produkte von Reihen	68
6	Stetige Funktionen	71
6.1	Stetige Funktionen	71
6.2	Stetige Funktionen auf oder nach \mathbb{R}^n	75
6.3	Potenzreihen in \mathbb{C}	80
6.4	Einige spezielle Funktionen	85
6.4.1	Die Exponentialfunktion	85
6.4.2	Die trigonometrischen Funktionen	86
6.5	Der Zwischenwertsatz	88
6.6	Monotonie und Umkehrfunktion	91
6.6.1	Die reelle Logarithmusfunktion	93
6.6.2	Zyklometrische oder Arkusfunktionen	94
6.6.3	Areafunktionen	95
6.7	Stetige Funktionen auf kompakten Mengen	96
6.7.1	Kompakte Mengen	96
6.7.2	Stetige Funktionen auf kompakten Mengen	98
6.8	Stetige Funktionen auf zusammenhängenden Mengen	100
7	Differentialrechnung	103
7.1	Definition der Ableitung und einfache Eigenschaften	104
7.2	Rechnen mit Ableitungen	105
7.3	Ableitungen spezieller Funktionen	108
7.3.1	Polynome und rationale Funktionen	108
7.3.2	Exponential-, Logarithmus- und Potenzfunktionen	109
7.3.3	Trigonometrische Funktionen	110
7.4	Die Mittelwertsätze und der Satz von Taylor	110
7.4.1	Der Satz von Rolle	110
7.4.2	Die Mittelwertsätze der Differentialrechnung	112
7.4.3	Konvexität und höhere Ableitungen	114
7.4.4	Der Satz von Taylor	116
7.4.5	Taylorreihen und Potenzreihen	118
7.5	Einige Anwendungen der Differentialrechnung	120
7.5.1	Kurvendiskussion	120
7.5.2	Bestimmung von Grenzwerten	122
7.6	Differentiation vektorwertiger Funktionen	123

8	Das Riemann-Integral	125
8.1	Der Begriff des Riemann-Integrals	125
8.2	Darboux'sche Integrale	127
8.3	Einige Klassen Riemann-integrierbarer Funktionen	131
8.4	Das Lebesguesche Integrabilitätskriterium	132
8.5	Eigenschaften des Riemann-Integrals	136
8.6	Integralungleichungen und Mittelwertsätze	137
8.7	Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung	138
8.7.1	Stammfunktionen	139
8.7.2	Der (erste) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	140
8.7.3	Der zweite Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	141
8.8	Integrationstechniken	141
8.8.1	Linearität	142
8.8.2	Partielle Integration	142
8.8.3	Integration durch Substitution	143
8.9	Stammfunktionen rationaler Funktionen	145
8.10	Uneigentliche Integrale	148
8.10.1	Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall	148
8.10.2	Integrale mit offenem Integrationsintervall	151
8.11	Flächeninhalte	151
9	Folgen und Reihen von Funktionen	155
9.1	Punktweise Konvergenz	155
9.2	Gleichmäßige Konvergenz	156
9.3	Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit	160
9.4	Gleichmäßige Konvergenz und Integrierbarkeit/Differenzierbarkeit	161
9.5	Ergänzungen zu Potenzreihen	163
9.6	Fourierreihen	170
9.6.1	Periodische Funktionen	170
9.6.2	Trigonometrische Reihen	170
9.6.3	Fourierreihen	172
9.6.4	Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen	173
9.6.5	Konvergenz im quadratischen Mittel	175
10	Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher	180
10.1	Lineare Abbildungen und Stetigkeit	180
10.2	Partielle Differenzierbarkeit	184
10.3	Differenzierbarkeit	188
10.4	Richtungsableitungen	194
10.5	Der Mittelwertsatz	195
10.6	Der Satz von Taylor	196
10.7	Lokale Extrema	200
10.8	Parameterabhängige Integrale	202

11 Kurvenintegrale	209
11.1 Wege und Kurven	209
11.2 Rektifizierbare Wege und Bogenlänge	210
11.3 Wegintegrale	214
11.4 Ergänzungen zu zusammenhängenden Mengen	219
11.5 Stammfunktionen und Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen .	221
12 Gleichungen und Mannigfaltigkeiten	226
12.1 Der Banachsche Fixpunktsatz	226
12.2 Der Satz über die Umkehrfunktion	228
12.3 Der Satz über implizite Funktionen	233
12.4 Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	237
12.5 Extrema unter Nebenbedingungen	240
13 Das Riemann-Integral für Funktionen mehrerer Veränderlicher	245
13.1 Das Riemann-Integral über Intervallen im \mathbb{R}^n	245
13.2 Integrierbarkeitskriterien	247
13.2.1 Charakterisierung über Darboux'sche Integrale	247
13.2.2 Charakterisierung über Nullmengen	248
13.3 Der Satz von Fubini	249
13.4 Integration über Jordan-messbaren Mengen	251
13.5 Inhalt von Ordinatenmengen	258
13.6 Integration über Normalbereiche	260
13.7 Die Substitutionsregel	262
14 Oberflächenintegrale und Integralsätze	271
14.1 Flächen, Tangenten und Normalen	271
14.2 Flächenintegrale	275
14.3 Die Divergenz eines Vektorfeldes	279
14.4 Der Gaußsche Integralsatz im Raum	281
14.5 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene	285
14.6 Der Stokessche Integralsatz	288
14.7 Einige weitere Differential- und Integralformeln	293
14.7.1 Der Nabla-Operator	293
14.7.2 Mehrfache Anwendungen der Differentialoperatoren	294
14.7.3 Produktregeln	294
14.7.4 Die Greenschen Formeln	294

Vorbemerkungen

In diesem Semester werden wir die elementare Analysis bis hin zur Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen kennenlernen. Im Mittelpunkt werden die Begriffe

Abbildung – Konvergenz – Stetigkeit – Differenzierbarkeit

stehen. Dabei werden Sie oft Dingen begegnen, die Sie aus der Schule kennen. Unser Ziel ist es, ein möglichst übersichtliches, einheitliches und allgemeines Konzept der Analysis zu finden.

Es gibt eine Vielzahl ausgezeichnete Lehrbücher zur Analysis. Ich werde mich im wesentlichen auf

- Barner/Flohr: Analysis I,
- Forster: Analysis I,
- Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1

stützen. Auch einen Blick in

- Fichtenholz: Differential- und Integralrechnung I (sehr klassisch, viele Beispiele),
- Dieudonné: Grundzüge der modernen Analysis I (modern, recht abstrakt)

kann ich Ihnen empfehlen.

1 Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen bilden das Fundament der Analysis. Es ist naheliegend, die reellen Zahlen über ihre Dezimalbruchdarstellung einzuführen, etwa

$$\pi = 3.14159\dots$$

Dieses Vorgehen führt jedoch rasch auf Probleme, deren Behandlung (insbesondere zu Beginn des Studiums) recht schwierig ist. Wir beschränken uns daher darauf, ein System von Axiomen bereit zu stellen, die von der Menge der reellen Zahlen erfüllt werden und auf die in allen Beweisen zurückgegriffen wird. Die Menge der reellen Zahlen bezeichnen wir mit \mathbb{R} .

1.1 Die Körperaxiome

1.1.1 Die Axiome der Addition

Auf \mathbb{R} gibt es eine Operation, die jedem geordneten Paar (a, b) reeller Zahlen eine eindeutig bestimmte Zahl $c := a + b$ zuordnet. Diese Zuordnung heißt *Addition*, und die Zahl c heißt die *Summe* von a und b . Dabei sind folgende Axiome erfüllt:

(A1) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität).

(A2) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a + b = b + a$ (Kommutativität).

(A3) Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ so, dass $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(A4) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ so, dass $a + x = 0$.

Lemma 1.1 (a) *Es gibt genau eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$, die (A3) erfüllt.*

(b) *Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$, so dass (A4) gilt.*

Beweis. (a) Seien $0_1, 0_2$ Zahlen, die (A3) erfüllen. Dann ist

$$0_1 \stackrel{(A3)}{=} 0_1 + 0_2 \stackrel{(A2)}{=} 0_2 + 0_1 \stackrel{(A3)}{=} 0_2, \quad \text{also } 0_1 = 0_2.$$

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$, und seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ Zahlen, so dass jeweils gilt $a + x_1 = 0$ und $a + x_2 = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_1 &\stackrel{(A3)}{=} x_1 + 0 = x_1 + (a + x_2) \stackrel{(A1)}{=} (x_1 + a) + x_2 \stackrel{(A2)}{=} (a + x_1) + x_2 \\ &= 0 + x_2 \stackrel{(A2)}{=} x_2 + 0 \stackrel{(A3)}{=} x_2, \end{aligned}$$

d.h. es ist $x_1 = x_2$. ■

Die eindeutig bestimmte Zahl 0 aus (A3) heißt die *Null*. Die zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existierende und eindeutig bestimmte Zahl x aus (A4) heißt zu a *entgegengesetzt* und wird mit $-a$ bezeichnet.

Satz 1.2 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a + x = b$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass eine solche Zahl x existiert und dass sie eindeutig bestimmt ist.

Existenz: Die Existenz einer Zahl mit bestimmten Eigenschaften kann man zeigen, indem man eine solche Zahl angibt. In unserem Fall ist dies einfach. Für $x := (-a) + b$ ist nämlich

$$a + x = a + ((-a) + b) \stackrel{(A1)}{=} (a + (-a)) + b \stackrel{(A4)}{=} 0 + b \stackrel{(A2)}{=} b + 0 = b.$$

Eindeutigkeit: Sei x eine Zahl, für die $a + x = b$ ist. Dann ist

$$x = 0 + x = ((-a) + a) + x = (-a) + (a + x) = (-a) + b,$$

d.h. x ist notwendigerweise gleich $(-a) + b$. ■

An Stelle von $(-a) + b$ oder $b + (-a)$ schreiben wir auch $b - a$.

Eine Menge, auf der eine Operation $+$ erklärt ist, welche den Axiomen (A1) – (A4) genügt, heißt *kommutative Gruppe*. Lemma 1.1 und Satz 1.2 gelten in beliebigen kommutativen Gruppen.

1.1.2 Die Axiome der Multiplikation

Auf \mathbb{R} gibt es eine Operation, die jedem geordneten Paar (a, b) reeller Zahlen eine eindeutig bestimmte Zahl $c := a \cdot b$ zuordnet. Diese Zuordnung heißt *Multiplikation*, und die Zahl c heißt das *Produkt* von a und b . An Stelle von $a \cdot b$ schreibt man auch kurz ab . Dabei gelten folgende Axiome:

(M1) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a(bc) = (ab)c$ (Assoziativität).

(M2) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $ab = ba$ (Kommutativität).

(M3) Es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$ so, dass $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(M4) Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ so, dass $a \cdot x = 1$.

Lemma 1.3 (a) *Es gibt genau eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$, die (M3) erfüllt.*

(b) *Für jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es genau $x \in \mathbb{R}$ so, dass (M4) gilt.*

Die eindeutig bestimmte Zahl 1 aus (M3) heißt die *Eins*. Die zu jeder reellen Zahl $a \neq 0$ existierende und eindeutig bestimmte Zahl x aus (M4) heißt zu a *invers* oder *reziprok* und wird mit $1/a$ oder a^{-1} bezeichnet.

Satz 1.4 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $ax = b$.*

Die Beweise von Lemma 1.3 und Satz 1.4 verlaufen wie die von Lemma 1.1 und Satz 1.2. Die Zahl x aus Satz 1.4 ist gleich $(1/a) \cdot b$ bzw. $a^{-1}b$. Wir schreiben dafür auch b/a .

Die Menge der reellen Zahlen ungleich 0 bildet also bezüglich der Multiplikation eine kommutative Gruppe. Wir benötigen noch zwei Axiome, welche Addition und Multiplikation miteinander verknüpfen:

(K1) Es ist $0 \neq 1$.

(K2) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $(a + b)c = ac + bc$ (Distributivität).

Dabei halten wir uns an die Vereinbarung “Punktrechnen geht vor Strichrechnen”; $ac + bc$ bedeutet also $(ac) + (bc)$.

Lemma 1.5 (a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $a \cdot 0 = 0$.

(b) Wenn $ab = 0$, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$.

(Zum mathematischen Sprachgebrauch: das “oder” ist *nicht* ausschließend. Wir könnten auch sagen: *wenigstens* eine der Zahlen a, b ist gleich 0.)

Beweis von Lemma 1.5. (a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist

$$a \cdot 0 \stackrel{(A3)}{=} a(0 + 0) \stackrel{(K2)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Hieraus folgt mit Satz 1.2, dass $a \cdot 0 = 0$.

(b) Sei $a \neq 0$. Die Gleichung $ax = 0$ hat nach Satz 1.4 genau eine Lösung. Eine Lösung ist $x = 0$ nach Aussage (a). ■

Eine Menge mit zwei Operationen $+$ und \cdot , die die Axiome (A1) – (A4), (M1) – (M4) sowie (K1) und (K2) erfüllen, heißt ein *Körper*.

1.2 Die Anordnungsaxiome

Auf \mathbb{R} ist eine Relation $<$ erklärt, d.h. für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Aussage $a < b$ wahr oder falsch. Folgende Axiome verlangen wir:

(O1) Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a \quad (\text{Trichotomie}).$$

(O2) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $a < b$ und $b < c$, dann ist $a < c$ (Transitivität).

(O3) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $a < b$, dann $a + c < b + c$ (Monotonie bzgl. der Addition).

(O4) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $a < b$ und $0 < c$, dann $ac < bc$ (Monotonie bzgl. der Multiplikation).

Aus der Relation $<$ leiten wir einige weitere Relationen ab. So schreiben wir

$$a \leq b, \quad \text{wenn } a < b \quad \text{oder} \quad a = b.$$

$$a > b, \quad \text{wenn } b < a,$$

$$a \geq b, \quad \text{wenn } a > b \quad \text{oder} \quad a = b.$$

Außerdem führen wir folgende Bezeichnungen ein: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *positiv*, wenn $a > 0$, *negativ*, wenn $a < 0$ und *nicht-negativ*, wenn $a \geq 0$.

Schließlich führen wir für bestimmte Teilmengen von \mathbb{R} Bezeichnungen ein: Für $a < b$ sei

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \text{abgeschlossenes Intervall,}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \text{halboffenes Intervall,}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \text{halboffenes Intervall,}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{offenes Intervall.}$$

An Stelle von (a, b) sieht man oft auch $]a, b[$.

1.2.1 Das Rechnen mit Ungleichungen

Satz 1.6 (a) Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$ (Addition von Ungleichungen).

(b) Aus $0 < a < b$ und $0 < c < d$ folgt $ac < bd$ (Multiplikation von Ungleichungen).

Beweis. Wir überlegen uns nur Aussage (a). Aussage (b) zeigt man genauso. Aus (O3) folgt $a + c < b + c$ sowie $b + c < b + d$. Mit (O2) folgt $a + c < b + d$. ■

Satz 1.7 Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $ac > bc$ (Multiplikation mit einer negativen Zahl).

Beweis. Aus $c < 0$ folgt durch Addition von $-c$, dass $0 < -c$. Aus $a < b$ und $0 < -c$ folgt mit Axiom (O4), dass $a(-c) < b(-c)$. Nun ist aber

$$ac + a(-c) = a(c + (-c)) = a \cdot 0 = 0,$$

d.h. es ist $a(-c) = -ac$ und analog $b(-c) = -bc$. Wir erhalten somit $-ac < -bc$, und nach Addition von $ac + bc$ auf beiden Seiten folgt $bc < ac$. ■

Folgerung 1.8 Für $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$.

Beweis. Für $a > 0$ folgt dies aus Axiom (O4). Ist $a < 0$, so wenden wir diese Begründung auf $0 < -a$ an und beachten, dass $(-a)^2 = a^2$. ■

Folgerung 1.9 Es ist $0 < 1$.

Dies ergibt sich sofort aus (K1) und Folgerung 1.8.

1.2.2 Der Betrag einer reellen Zahl

Den Betrag $|a|$ der reellen Zahl a erklären wir durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geq 0, \\ -a, & \text{wenn } a < 0. \end{cases}$$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist dann $a \leq |a|$ sowie $-a \leq |a|$.

Satz 1.10 (a) Für $a \in \mathbb{R}$ ist $|a| \geq 0$, und es ist genau dann $|a| = 0$, wenn $a = 0$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $|ab| = |a||b|$.

(c) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung).

Beweis. Aussage (a) folgt sofort aus der Definition des Betrages.

(b) Wir unterscheiden die vier Fälle

$$a \geq 0 \text{ und } b \geq 0, \quad a \geq 0 \text{ und } b < 0, \quad a < 0 \text{ und } b \geq 0, \quad a < 0 \text{ und } b < 0.$$

Wir wollen uns die Aussage am Beispiel von Fall 4 überlegen (die übrigen Fälle behandelt man entsprechend). Aus $a < 0$ und $b < 0$ folgt mit Satz 1.7, dass $ab > 0$. Also ist $|ab| = ab$ und $|a||b| = (-a)(-b)$. Die Behauptung folgt nun aus $(-a)(-b) = ab$ (Hausaufgabe).

(c) Falls $a + b \geq 0$, so ist

$$|a + b| = a + b \stackrel{(O3)}{\leq} |a| + b \stackrel{(O3)}{\leq} |a| + |b|.$$

Ist dagegen $0 > a + b$, so ist

$$|a + b| = -(a + b) = -a - b.$$

Weiter ist $-a \leq |-a| = |a|$ sowie $-b \leq |-b| = |b|$ und somit

$$|a + b| = -a - b \leq |a| + |b|. \quad \blacksquare$$

Folgerung 1.11 Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Beweis. Nach Satz 1.10 (c) ist $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$, d.h.

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Analog erhält man $|b| - |a| \leq |a - b|$. Dann ist aber auch $||a| - |b|| \leq |a - b|$. \blacksquare

1.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Die bisher eingeführten Axiome charakterisieren \mathbb{R} noch nicht ausreichend. Sie werden z.B. auch von der Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen erfüllt. Die Menge der rationalen Zahlen ist aber in dem Sinn unvollständig, dass es Punkte auf der Zahlengeraden gibt, denen keine rationale Zahl entspricht. Wir benötigen daher ein weiteres Axiom, welches die Vollständigkeit von \mathbb{R} garantiert (und \mathbb{R} von \mathbb{Q} unterscheidet).

1.3.1 Das babylonische Wurzelziehen

Den folgenden Algorithmus zur näherungsweisen Bestimmung der Quadratwurzel aus einer Zahl $x \geq 1$ findet man auf einer altbabylonischen Gesetzestafel (um 1950 v.u.Z). Als Startwert für den Algorithmus wählt man

$$w_0 := x. \tag{1.1}$$

Ausgehend von w_0 werden neue Werte nach der Vorschrift

$$w_{n+1} := \frac{1}{2} \left(w_n + \frac{x}{w_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

schrittweise oder *rekursiv* berechnet. Wir werden später beweisen, dass sich die Zahlen w_n mit wachsendem n der Wurzel \sqrt{x} immer weiter annähern. Zunächst begnügen wir uns damit, zwei einfache Eigenschaften der Zahlen w_n nachzuweisen.

Lemma 1.12 *Für die durch (1.1) und (1.2) definierten Zahlen w_n gilt:*

- (a) $w_n^2 \geq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (b) $w_n \geq w_{n+1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Zur Vorbereitung des Beweises zeigen wir zunächst, dass für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$ab \leq \frac{1}{4} (a + b)^2 \quad (1.3)$$

gilt. Diese Ungleichung ist äquivalent zu den Ungleichungen

$$\begin{aligned} 4ab \leq (a + b)^2 \quad \text{bzw.} \quad 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \\ \text{bzw.} \quad 0 \leq (a - b)^2. \end{aligned}$$

Diese letzte Ungleichung ist wahr wegen Folgerung 1.8. Somit ist (1.3) gezeigt. Setzen wir nun in (1.3) $a := w_n$ sowie $b := x/w_n$, so erhalten wir

$$x \leq \frac{1}{4} \left(w_n + \frac{x}{w_n} \right)^2 = w_{n+1}^2.$$

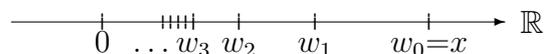
Damit ist Aussage (a) wenigstens für alle $n \geq 1$ gezeigt. Der Fall $n = 0$, d.h. die Ungleichung $x^2 \geq x$, ist Hausaufgabe.

Hieraus erhalten wir nun auch leicht Behauptung (b): Zunächst sind nach Definition alle w_n positiv, und es gilt:

$$\begin{aligned} x \leq w_n^2 &\implies \frac{x}{w_n} \leq w_n \implies w_n + \frac{x}{w_n} \leq 2w_n \\ &\implies \frac{1}{2} \left(w_n + \frac{x}{w_n} \right) \leq w_n. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $w_{n+1} \leq w_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

Die Zahlen w_n werden also mit wachsendem n höchstens kleiner und verlassen den Bereich der positiven Zahlen nicht:



Die Anschauung lässt uns vermuten, dass sich die w_n der größten Zahl nähern, die kleiner oder gleich allen w_n ist. Doch **GIBT** es eine solche Zahl überhaupt? Im Bereich der rationalen Zahlen werden wir eine solche Zahl im allgemeinen **NICHT** finden. Diese Zahl ist nämlich (wie wir später sehen werden) gleich \sqrt{x} . Wie wir bereits wissen, ist aber z.B. für $x = 2$ die Zahl \sqrt{x} nicht rational. Dies kann man sich mit einem *indirekten Beweis* klarmachen.

Wir wollen zeigen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Dazu nehmen wir an, $\sqrt{2}$ wäre rational. Dann gibt es teilerfremde ganze Zahlen p, q mit $q > 0$, so dass $\sqrt{2} = p/q$. Hieraus folgt $2q^2 = p^2$. Nach dem Satz über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist der Primfaktor 2 auf der rechten Seite in gerader Anzahl und auf der linken Seite in ungerader Anzahl enthalten, was unmöglich ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war. Die Wurzel aus 2 ist also keine rationale Zahl. ■

Wir benötigen daher ein Axiom, welches uns die *Existenz* der gesuchten Zahl sichert.

1.3.2 Minimum und Maximum, Infimum und Supremum

Definition 1.13 Sei M eine Teilmenge der reellen Zahlen. Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt obere (bzw. untere) Schranke für M , wenn $m \leq s$ (bzw. $s \leq m$) für alle m aus M . Die Menge M heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn es eine obere (bzw. untere) Schranke für M gibt. Die Menge M heißt beschränkt, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

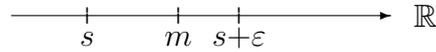
Die Zahl s heißt das Maximum (bzw. das Minimum) von M , wenn sie eine obere (bzw. untere) Schranke für M ist und wenn sie zu M gehört. Schließlich heißt s das Supremum (bzw. das Infimum) von M , wenn s eine obere (bzw. untere) Schranke für M ist und es keine kleinere obere (bzw. größere untere) Schranke für M gibt.

Maximum, Minimum, Supremum und Infimum einer Menge M sind eindeutig bestimmt (sofern solche Zahlen überhaupt existieren). Wir bezeichnen sie mit $\max M$, $\min M$, $\sup M$ und $\inf M$. Wenn das Maximum (bzw. das Minimum) einer Menge existiert, so ist es zugleich das Supremum (bzw. das Infimum) dieser Menge.

Beispiel. Obere Schranken für das Intervall $(0, 1]$ sind z.B. 1, 2 und π . Die Zahl 1 ist sowohl das Maximum als auch das Supremum dieser Menge. Die Zahl 0 ist das Infimum von $(0, 1]$. Ein Minimum besitzt diese Menge dagegen nicht. ■

Der folgende Satz dient häufig zum Nachweis, dass eine bestimmte Zahl das Infimum einer gegebenen Menge ist. Ein analoger Satz gilt für das Supremum. Versuchen Sie selbst, diesen analogen Satz zu formulieren und zu beweisen.

Satz 1.14 Sei M eine Teilmenge von \mathbb{R} . Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ ist genau dann das Infimum von M , wenn s eine untere Schranke für M ist und wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $m \in M$ existiert mit $m < s + \varepsilon$.



Beweis. Es handelt sich um eine “genau dann, wenn” Aussage. Wir müssen also zwei Implikationen beweisen.

Sei zunächst s das Infimum von M . Dann ist s nach Definition eine untere Schranke für M . Die zweite Aussage zeigen wir indirekt. Angenommen, es gibt ein $\varepsilon > 0$, für das man kein $m \in M$ mit $m < s + \varepsilon$ finden kann. Dann ist offenbar $m \geq s + \varepsilon$ für alle $m \in M$, d.h. $s + \varepsilon$ ist ebenfalls eine untere Schranke für M . Diese untere Schranke ist echt größer als s . Dies ist unmöglich, da s das Infimum von M ist.

Sei nun umgekehrt s eine untere Schranke für M mit der Eigenschaft

$$\text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } m \in M \text{ mit } m < s + \varepsilon. \quad (1.4)$$

Sei $s' > s$. Wir setzen $\varepsilon := s' - s > 0$ und schließen aus (1.4): Es gibt ein $m \in M$ so, dass

$$m < s + \varepsilon = s + (s' - s) = s'.$$

Somit ist s' keine untere Schranke für M . Es gibt also keine untere Schranke für M , welche größer als s ist. Somit ist s das Infimum von M . ■

1.3.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Wir postulieren nun das *Vollständigkeitsaxiom*:

- (V) Jede nach unten beschränkte nichtleere Menge reeller Zahlen besitzt ein Infimum.

Als erste Anwendung überlegen wir uns, dass dieses Axiom tatsächlich die Existenz der Quadratwurzel von nichtnegativen reellen Zahlen sichert.

Satz 1.15 Sei $x \geq 1$, und die Zahlen w_n seien durch (1.1) und (1.2) erklärt. Weiter sei $w := \inf\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $w^2 = x$.

Beweis. Sei $v := \inf\{w_n^2 : n \in \mathbb{N}\}$. Im ersten Beweisschritt überlegen wir uns, dass $w^2 = v$.

Aus $0 \leq w \leq w_n$ folgt $w^2 \leq w_n^2$ und damit $w^2 \leq v$. Angenommen, es wäre $w^2 < v$. Sei $\varepsilon := \min\{1, \frac{v-w^2}{2w+1}\}$. Offenbar ist $\varepsilon > 0$, und mit diesem ε gilt:

$$(w + \varepsilon)^2 = w^2 + \varepsilon(2w + \varepsilon) \leq w^2 + \frac{v - w^2}{2w + 1} (2w + 1) = v.$$

Es ist also $(w + \varepsilon)^2 \leq v \leq w_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits gibt es nach Definition von w und wegen Satz 1.14 ein w_n mit $w_n < w + \varepsilon$. Für dieses w_n haben wir

$$w_n^2 < (w + \varepsilon)^2 \leq w_n^2,$$

ein Widerspruch. Die Annahme $w^2 < v$ ist also falsch. Folglich muss $w^2 = v$ sein. Im zweiten Beweisschritt zeigen wir, dass $v = x$. (Dann folgt $w^2 = x$, und wir sind fertig.) Aus Lemma 1.12 (a) wissen wir, dass $x \leq w_n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist $x \leq v$. Angenommen, es wäre $x < v$. Wir wählen $\varepsilon := v - x$. Dann ist $\varepsilon > 0$, und nach Satz 1.14 gibt es ein w_n mit $w_n^2 < v + \varepsilon$. Für die Zahl w_{n+1} gilt dann

$$\begin{aligned} v &\leq w_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left(w_n + \frac{x}{w_n} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(w_n^2 + 2x + \frac{x^2}{w_n^2} \right) \\ &< \frac{1}{4} \left(v + \varepsilon + 2x + \frac{x^2}{x} \right) \quad (\text{wegen } w_n^2 < v + \varepsilon \text{ und } x \leq w_n^2) \\ &= \frac{1}{4}(v + 3x + \varepsilon) \\ &= \frac{1}{4}(v + 3x + v - x) = \frac{1}{2}(v + x) \quad (\text{Definition von } \varepsilon). \end{aligned}$$

Aus $v < \frac{1}{2}(v + x)$ folgt $v < x$, im Widerspruch zur Annahme $x < v$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $x = v$. ■

Damit ist zumindest für reelle Zahlen $x \geq 1$ die Existenz einer Quadratwurzel im Bereich der reellen Zahlen gezeigt. Für $0 < x < 1$ zeigt man die Existenz einer Quadratwurzel, indem man Satz 1.15 (babylonisches Wurzelziehen) auf $1/x > 1$ anwendet.

Eine unmittelbare Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms ist

Folgerung 1.16 *Jede nach oben beschränkte nichtleere Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.*

Die Zurückführung von Folgerung 1.16 auf Axiom (V) erfolgt durch Spiegelung der Menge am Nullpunkt.

1.3.4 Die natürlichen Zahlen

Wir wollen die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen innerhalb der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen charakterisieren.

Definition 1.17 *Eine Menge M von reellen Zahlen heisst induktiv, wenn $0 \in M$ und wenn aus $n \in M$ auch $n + 1 \in M$ folgt.*

Beispiele für induktive Mengen sind die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen selbst oder aber die Menge \mathbb{Q} der rationalen oder \mathbb{Z} der ganzen Zahlen. Klar ist, dass jede induktive Menge die Zahlen $0, 1 = 0 + 1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1$ u.s.w. enthält.

Lemma 1.18 *Der Durchschnitt beliebig vieler induktiver Mengen ist eine induktive Menge.*

Beweis. Die Zahl 0 liegt in jeder der induktiven Mengen, also auch in deren Durchschnitt. Weiter: wenn n im Durchschnitt der induktiven Mengen liegt, so liegt n in jeder einzelnen dieser Mengen. Wegen der Induktivität liegt dann $n + 1$ in jeder einzelnen dieser Mengen, also auch in deren Durchschnitt. ■

Nehmen wir also *alle* induktiven Teilmengen von \mathbb{R} und bilden deren Durchschnitt, so erhalten wir wieder eine induktive Teilmenge. Diese ist offenbar die *kleinste* induktive Teilmenge von \mathbb{R} .

Definition 1.19 *Die kleinste induktive Teilmenge von \mathbb{R} heißt die Menge der natürlichen Zahlen. Wir bezeichnen sie mit \mathbb{N} .*

Mit dieser Definition erhält man sofort das wichtige *Prinzip der vollständigen Induktion*. Es sei $A(n)$ eine Aussage über die natürliche Zahl n . Wenn wir folgendes beweisen können:

Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ ist wahr.

Induktionsschritt: Für jede natürliche Zahl n gilt:
Wenn $A(n)$ wahr ist, so ist auch $A(n + 1)$ wahr.

dann ist die Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl n wahr.

Um zu verstehen, warum das so ist, betrachten wir die Menge W aller natürlichen Zahlen n , für die $A(n)$ wahr ist. Im Induktionsanfang zeigen wir, dass $0 \in W$, und im Induktionsschritt, dass gilt

$$\text{wenn } n \in W, \text{ dann ist auch } n + 1 \in W.$$

Also ist W eine induktive Menge. Nun ist aber W eine Teilmenge von \mathbb{N} , und \mathbb{N} ist laut Definition die kleinste induktive Menge. Deshalb kann W nicht kleiner als \mathbb{N} sein. Es ist also $W = \mathbb{N}$, d.h. die Aussage $A(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. ■

Tritt an Stelle des Induktionsanfangs die Aussage “ $A(n_0)$ ist wahr”, und lässt sich der Induktionsschritt für alle $n \geq n_0$ beweisen, so erhält man ganz analog, dass $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr ist (zum Beweis führe man die neue Aussage $B(n) := A(n + n_0)$ ein).

Beispiel 1: *Die Summe der ersten n positiven natürlichen Zahlen.*

Mittels vollständiger Induktion wollen wir zeigen: *Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$ ist*

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (\stackrel{\Delta}{=} A(n))$$

Beweis. *Induktionsanfang:* Die Aussage $A(1)$ lautet

$$\sum_{k=1}^1 k = \frac{1(1+1)}{2} \quad \text{bzw.} \quad 1 = 1$$

und ist offensichtlich wahr.

Induktionsschritt: Sei $A(n)$ wahr. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

d.h. es gilt auch $A(n+1)$. Damit ist die Gültigkeit von $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ bewiesen. ■

Beispiel 2: *Die Summe der ersten $n+1$ Glieder einer geometrischen Reihe.*

Sei $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\stackrel{\wedge}{=} A(n)).$$

Beweis. *Induktionsanfang:* $A(0)$ reduziert sich auf $1 = 1$ und ist offenbar eine wahre Aussage.

Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q)q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Beispiel 3: *Bernoullische Ungleichung.* Sei $a > -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1 + a)^n \geq 1 + na. \quad (\stackrel{\wedge}{=} A(n)).$$

Beweis. *Induktionsanfang:* $A(0)$ lautet $1 \geq 1$ und ist offenbar wahr.

Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

$$\begin{aligned} (1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n(1 + a) \\ &\geq (1 + na)(1 + a) \quad (\text{hier benutzen wir } A(n)) \\ &= 1 + na + a + na^2 = 1 + a(n+1) + na^2 \\ &\geq 1 + a(n+1) \quad (\text{da } na^2 \geq 0). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Folgerung. Für $p > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sqrt[n]{p} - 1 \leq \frac{p-1}{n}.$$

Beweis. Man setzt $a := \sqrt[n]{p} - 1$ in die Bernoullische Ungleichung ein. Einfache Umformungen ergeben die Behauptung (Hausaufgabe). ■

Zum Abschluss noch eine Aufgabe zum Knobeln und Nachdenken. Versuchen Sie, die beiden Ungleichungen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

und

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$$

für alle $n \geq 1$ mittels vollständiger Induktion zu beweisen. Beachten Sie, dass die zweite Ungleichung schwächer als die erste ist.

1.3.5 Die Archimedische Anordnung der reellen Zahlen

Als Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms (V) überlegen wir uns eine weitere Eigenschaft von \mathbb{R} bezüglich des Relation $<$. Vorbereitend zeigen wir:

Lemma 1.20 *Die Menge \mathbb{N} ist nach oben unbeschränkt.*

Beweis. Wäre \mathbb{N} nach oben beschränkt, so würde nach Folgerung 1.16 das Supremum $\sup \mathbb{N} =: s$ existieren (beachte: $0 \in \mathbb{N}$, also ist \mathbb{N} nicht leer). Nach Satz 1.14 (in der Fassung für das Supremum) gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $s - 1 < n \leq s$. Die Zahl $n + 1$ liegt ebenfalls in \mathbb{N} , und für diese gilt $s < n + 1$ im Widerspruch zur Definition von s . ■

Satz 1.21 (Archimedische Eigenschaft) *Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $an > b$.*

Beweis. Gäbe es keine solche Zahl n , so wäre $an \leq b$ bzw. $n \leq b/a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann wäre \mathbb{N} nach oben beschränkt im Widerspruch zu Lemma 1.20. ■

Es gibt Axiomensysteme der reellen Zahlen, in denen die Aussage von Satz 1.21 als *Archimedisches Axiom* gefordert wird.

Die folgende Folgerung von Lemma 1.20 wird uns bei der Bestimmung von Grenzwerten wieder begegnen.

Folgerung 1.22 *Gilt für eine reelle Zahl a , dass $0 \leq a < 1/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist $a = 0$.*

Beweis. Angenommen, es wäre $a > 0$. Aus $a < 1/n$ folgt dann $n < 1/a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was im Widerspruch zur Unbeschränktheit von \mathbb{N} nach oben steht. ■

1.4 Darstellung reeller Zahlen durch Dezimalbrüche

Wir ordnen jeder reellen Zahl $x \in [0, 1)$ einen unendlichen Dezimalbruch

$$0, z_1 z_2 z_3 \dots \quad \text{mit} \quad z_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \quad (1.5)$$

zu, wobei die Ziffern z_i wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} z_1 & \text{ ist die größte natürliche Zahl} && \leq 10x \\ z_2 & \text{ ist die größte natürliche Zahl} && \leq 10^2(x - z_1 \cdot 10^{-1}) \\ z_3 & \text{ ist die größte natürliche Zahl} && \leq 10^3(x - z_1 \cdot 10^{-1} - z_2 \cdot 10^{-2}) \end{aligned}$$

usw. Ist $x \geq 1$, so suchen wir zunächst eine Zehnerpotenz 10^r so, dass $0 \leq \frac{x}{10^r} < 1$, bestimmen den zu $\frac{x}{10^r}$ gehörenden Dezimalbruch wie oben, und erhalten den zu x gehörenden Dezimalbruch durch Multiplikation mit 10^r . Wir werden später zeigen, dass umgekehrt jeder Dezimalbruch der Form (1.5) eine nichtnegative reelle Zahl definiert und dass die Zuordnung einer Zahl zu einem Dezimalbruch eineindeutig wird, wenn man Dezimalbrüche ausschließt, die von einer gewissen Stelle an nur noch die Ziffer 9 enthalten.

2 Mengen und Abbildungen

Einer der zentralen Begriffe der Mathematik und ihrer Anwendungen ist der Begriff der *Funktion* oder *Abbildung*. Es erweist sich für viele Probleme notwendig, Funktionen zuzulassen, die *nicht* durch analytische Ausdrücke (wie etwa $f(x) = \sin(x^2)$) definiert sind. Wir führen daher zunächst den Begriff einer Abbildung in einer solchen Allgemeinheit ein, wie es für das Folgende zweckmäßig ist. Dazu nutzen wir die Sprache der Mengenlehre. Später spezialisieren wir uns auf reellwertige Funktionen.

2.1 Mengen und Mengenoperationen

Eine Begründung der Mengenlehre auf der Basis eines Axiomensystems ist nicht einfach, und einige damit im Zusammenhang stehende Fragen sind Gegenstand der Forschung. Wir begnügen uns mit der “naiven” Mengenlehre und vereinbaren:

Eine *Menge* ist eine (gedankliche) Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen *Elemente* der Menge. Ist ein Objekt a Element einer Menge A , so schreiben wir $a \in A$. Ist jedes Element einer Menge A auch Element einer Menge B , so heißt A *Teilmenge* von B (in Zeichen: $A \subseteq B$). Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt *leere Menge* und wird mit \emptyset bezeichnet.

Wir verwenden folgende Schreibweisen:

$A = \{1, 2, 3\}$	Menge mit den Elementen 1, 2 und 3.
$A = \mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen.
$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$	Menge aller reellen Zahlen x mit der Eigenschaft $x^2 < 1$.

Beispielweise ist $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\} = (-1, 1)$.

Aus der Definition folgt, dass $\emptyset \subseteq A$ und $A \subseteq A$ für jede Menge A . Außerdem ist die Relation \subseteq *transitiv*: aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$.

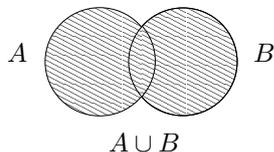
2.1.1 Operationen mit Mengen

Seien E und A Mengen, und für jedes $\alpha \in A$ sei E_α eine Teilmenge von E . Die Menge A dient also als “Menge von Indizes”.

Unter der *Vereinigung* der Mengen E_α versteht man die Menge aller Elemente von E , die in *wenigstens einer* der Mengen E_α liegen. Wir notieren diese Vereinigung durch

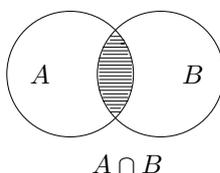
- $\cup_{\alpha \in A} E_\alpha$ für allgemeines A ,

- $E_1 \cup E_2$ an Stelle von $\cup_{\alpha \in \{1,2\}} E_\alpha$ für $A = \{1, 2\}$,
- $\cup_{\alpha=0}^\infty E_\alpha$ an Stelle von $\cup_{\alpha \in \mathbb{N}} E_\alpha$ für $A = \mathbb{N}$.



Unter dem *Durchschnitt* der Mengen E_α versteht man die Menge aller Elemente von E , die zu *jeder* der Mengen E_α gehören. Schreibweisen sind

- $\cap_{\alpha \in A} E_\alpha$ für allgemeines A ,
- $E_1 \cap E_2$ an Stelle von $\cap_{\alpha \in \{1,2\}} E_\alpha$ für $A = \{1, 2\}$,
- $\cap_{\alpha=0}^\infty E_\alpha$ an Stelle von $\cap_{\alpha \in \mathbb{N}} E_\alpha$ für $A = \mathbb{N}$.



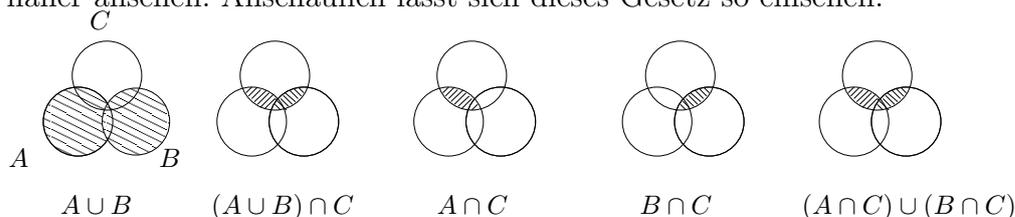
Sind A, B Teilmengen von E , so besteht die *Differenz* $A \setminus B$ aus allen Elementen von E , die in A , jedoch nicht in B liegen. Speziell heißt $E \setminus A$ das *Komplement* von A in E (Bezeichnung: A^C). Zwei Mengen A, B heißen *disjunkt*, wenn $A \cap B = \emptyset$.



Eigenschaften des Durchschnitts und der Vereinigung

- Assoziativität: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- Kommutativität: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- Distributivität: $(\cup_{\alpha \in A} E_\alpha) \cap B = \cup_{\alpha \in A} (E_\alpha \cap B)$,
 $(\cap_{\alpha \in A} E_\alpha) \cup B = \cap_{\alpha \in A} (E_\alpha \cup B)$.

Daneben gibt es eine Vielzahl weiterer Beziehungen wie etwa $\emptyset \cup A = A$ und $\emptyset \cap A = \emptyset$ für jede Menge A . Einige davon werden Sie in der Übung kennenlernen. Als ein Beispiel wollen wir uns das Distributivgesetz $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ näher ansehen. Anschaulich lässt sich dieses Gesetz so einsehen:



Ein formaler Beweis kann so geführt werden: Es ist

$$x \in (A \cup B) \cap C$$

$$\iff x \in A \cup B \text{ und } x \in C$$

$$\iff (x \text{ gehört zu } A \text{ oder } B) \text{ und } x \text{ gehört zu } C$$

$$\iff (x \text{ gehört zu } A \text{ und } C) \text{ oder } (x \text{ gehört zu } B \text{ und } C)$$

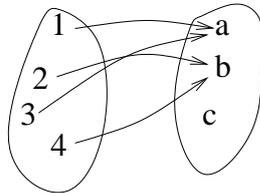
$$\iff (x \in A \cap C) \text{ oder } (x \in B \cap C)$$

$$\iff x \in (A \cap C) \cup (B \cap C). \quad \blacksquare$$

2.2 Abbildungen

2.2.1 Definitionen

Seien A und B Mengen. Ist *jedem* Element x von A *genau ein* Element $f(x)$ aus B zugeordnet, so sagen wir, dass durch A und B und durch diese Zuordnung eine *Abbildung* f von A nach B erklärt ist. Wir schreiben dann auch $f : A \rightarrow B$ oder $x \mapsto f(x)$ für $x \in A$. NICHT verwenden werden wir Ausdrücke wie “die Funktion $y = f(x)$ ”. Für uns ist $f(x)$ *stets* dasjenige Element der Menge B , welches man erhält, wenn man f auf x anwendet. Das Element $y = f(x)$ heißt das *Bild* von x , und x heißt ein *Urbild* von y .



Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Dann heißt

- A der *Definitionsbereich* von f , und wir schreiben $A = D(f)$,
- die Menge $W(f) := \{y \in B : \text{es gibt ein } x \in A \text{ so, dass } y = f(x)\}$ der *Wertebereich* von f ,
- für jede Teilmenge C von A die Menge

$$f(C) := \{y \in B : \text{es gibt ein } x \in C \text{ so, dass } y = f(x)\}$$

das *Bild* von C ,

- für jede Teilmenge D von B die Menge

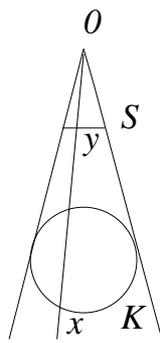
$$f^{-1}(D) := \{x \in A : f(x) \in D\}$$

das *Urbild* von D .

Insbesondere ist also $f(A) = W(f)$ und $f^{-1}(B) = A = D(f)$.

Beispiele

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ $W(f) = \mathbb{R}$,
- (2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ $W(f) = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$,
- (3) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ $W(f) = \mathbb{R}^+$,
- (4) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$ $W(f) = \mathbb{R}^+$.
- (5) $A :=$ Menge aller nichtleeren beschränkten Teilmengen von \mathbb{R} , $B := \mathbb{R}$,
 $f : A \rightarrow B, M \mapsto \inf M$ $W(f) = \mathbb{R}$.
- (6) $A :=$ Kreis K , $B :=$ Strecke S wie in der Skizze.
 f ordnet dem Punkt $x \in K$ denjenigen Punkt $y \in S$ zu, der auf der Geraden durch 0 und x liegt. Dann ist $W(f) = S$.



Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt

- *surjektiv* oder eine *Abbildung auf*, wenn $W(f) = B$.
- *injektiv* oder *eineindeutig*, wenn jedes $y \in W(f)$ genau ein Urbild besitzt oder – mit anderen Worten – wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.
- *bijektiv*, wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist.

In den obigen Beispielen ist die Abbildung f in

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| (1) bijektiv, | (2) weder surjektiv noch injektiv, |
| (3) injektiv, nicht surjektiv, | (4) bijektiv, |
| (5) surjektiv, nicht injektiv, | (6) surjektiv, nicht injektiv. |

Für jede nichtleere Menge A heißt $f : A \rightarrow A, x \mapsto x$ die *identische Abbildung* auf A . Sie ist offenbar bijektiv. Wir bezeichnen sie mit id_A oder kurz mit id .

Für Mengen A und B bezeichnen wir mit $A \times B$ die Menge aller *geordneten Paare* (a, b) von Elementen $a \in A$ und $b \in B$. Die Menge $A \times B$ heißt das *cartesische*

Produkt von A und B . Beispielsweise kann man $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$ mit der Menge aller Punkte der Ebene identifizieren.

Im allgemeinen ist das cartesische Produkt nicht kommutativ. Streng genommen ist es auch nicht assoziativ! Sind A, B, C Mengen, so besteht $(A \times B) \times C$ per Definition aus Paaren $((a, b), c)$ mit $a \in A, b \in B, c \in C$, während $A \times (B \times C)$ aus Paaren $(a, (b, c))$ besteht. Im allgemeinen identifiziert man aber die Paare $((a, b), c)$ und $(a, (b, c))$ miteinander und schreibt dafür einfach das Tripel (a, b, c) . In *diesem* Sinne ist dann tatsächlich

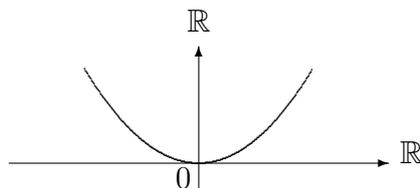
$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

Man kann also *endliche* cartesische Produkte bilden. In diesem Sinn ist insbesondere auch der Raum $\mathbb{R}^3 := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ zu verstehen.

Nur am Rande soll bemerkt werden, dass man auch cartesische Produkte *beliebig vieler* Mengen definieren kann. Hat man für jedes Element α einer Indexmenge A eine Menge E_α gegeben, so versteht man unter dem cartesischen Produkt $\times_{\alpha \in A} E_\alpha$ der Mengen E_α die Menge aller Funktionen $f : A \rightarrow \cup_{\alpha \in A} E_\alpha$ mit $f(\alpha) \in E_\alpha$. Hier wird es aber problematisch: Es ist keineswegs klar, dass es solche Funktionen gibt! Erst das (umstrittene) *Auswahlaxiom* der Mengenlehre stellt die Existenz solcher Funktionen sicher. ■

Nach diesem kleinen Exkurs zu cartesischen Produkten zurück zu den Abbildungen. Ist $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung, so nennen wir die Menge aller geordneten Paare aus $A \times B$ der Gestalt $(x, f(x))$ mit $x \in A$ den *Graphen* von f .

Beispiel. Der Graph der Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, ist



Jede Abbildung besitzt einen eindeutig bestimmten Graphen, und umgekehrt bestimmt ein gegebener Graph die dazugehörige Abbildung vollständig. Mitunter werden daher Abbildungen mit ihren Graphen identifiziert. Man trifft daher meist die folgende Definition des Begriffs “Abbildung”, die ohne umgangssprachliche Umschreibungen wie “Zuordnung” auskommt.

Definition 2.1 Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ ist eine Teilmenge M des cartesischen Produktes $A \times B$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Für jedes $a \in A$ gibt es ein $b \in B$ mit $(a, b) \in M$.
- (b) Aus $(a, b_1) \in M$ und $(a, b_2) \in M$ folgt $b_1 = b_2$.

Hieraus folgt insbesondere, dass zwei Abbildungen $f : A \rightarrow B$ und $g : A \rightarrow B$ genau dann übereinstimmen, wenn $f(x) = g(x)$ für *alle* $x \in A$.

2.2.2 Die Umkehrabbildung

Ist $f : A \rightarrow B$ bijektiv, so hat *jedes* Element von B *genau ein* Urbild. Wir können daher eine Abbildung $f^{-1} : B \rightarrow A$ definieren durch

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{genau dann, wenn} \quad f(x) = y.$$

Diese Abbildung heißt die *Umkehrabbildung* von f . Man überprüft leicht, dass f^{-1} wieder bijektiv ist. Ist f bijektiv und D eine Teilmenge von B , so können wir $f^{-1}(D)$ auf zweierlei Weise verstehen: als Urbild von D bzgl. f , oder als Bild von D bzgl. f^{-1} . Beide Interpretationen bestimmen die gleiche Teilmenge von A .

In den Beispielen (1) – (6) aus 2.2.1 existiert die Umkehrabbildung nur bei (1) und (4). Im Beispiel (1) ist sie gegeben durch

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x,$$

und im Beispiel (4) durch

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

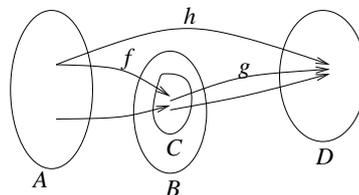
Allgemein ist für jede nichtleere Menge A die Umkehrabbildung der identischen Abbildung id_A die Abbildung id_A selbst.

2.2.3 Verknüpfung von Abbildungen

Es seien A, B, C, D Mengen und $f : A \rightarrow B$ sowie $g : C \rightarrow D$ Abbildungen mit $f(A) = W(f) \subseteq C = D(g)$ (d.h. der Wertebereich von f muss im Definitionsbereich von g liegen). Dann wird durch

$$h(x) := g(f(x)) \quad \text{für } x \in A$$

eine Abbildung $h : A \rightarrow D$ erklärt. Diese heißt die *Verknüpfung* (oder *Hintereinanderausführung* oder *Verkettung*) von f und g und wird mit $h = g \circ f$ bezeichnet.



Die Reihenfolge der Verknüpfung von f und g ist wesentlich. So braucht $f \circ g$ gar nicht definiert zu sein, wenn man $g \circ f$ bilden kann. Auch wenn beide Verknüpfungen $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert sind, müssen sie nicht übereinstimmen.

Beispiel. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$. Dann können sowohl $f \circ g$ als auch $g \circ f$ gebildet werden. Die Funktionen

$$(f \circ g)(x) = (\sin x)^2 \quad \text{und} \quad (g \circ f)(x) = \sin(x^2)$$

sind aber voneinander verschieden. ■

Für jede Abbildung $f : A \rightarrow B$ gilt offenbar

$$f \circ \text{id}_A = f, \quad \text{id}_B \circ f = f,$$

und für jede bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ gilt

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B.$$

Satz 2.2 *Die Verknüpfung von Abbildungen ist assoziativ, d.h. sind f, g und h Abbildungen, für die $g \circ f$ und $h \circ g$ gebildet werden können, so sind auch die Abbildungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ erklärt, und es gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis. Wir überlegen uns zuerst, dass sich die genannten Verknüpfungen bilden lassen. Dazu seien A, B bzw. C die Definitionsbereiche von f, g bzw. h . Nach Voraussetzung ist $f(A) \subseteq B$ und $g(B) \subseteq C$.

Der Definitionsbereich von $g \circ f$ ist A . Nun ist aber

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq C = D(h),$$

d.h. wir können $h \circ (g \circ f)$ bilden. Weiter: Der Definitionsbereich von $h \circ g$ ist B , und wegen $W(f) = f(A) \subseteq B$ kann man auch $(h \circ g) \circ f$ bilden.

Um schließlich die Gleichheit der Abbildungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ zu zeigen, sehen wir uns ihre Wirkung auf ein willkürlich gewähltes Element $x \in A$ an:

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))), \\ ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

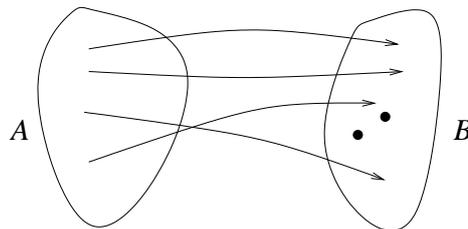
Satz 2.3 *Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ bijektive Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f : A \rightarrow C$ bijektiv, und für die Umkehrabbildungen gilt:*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Den Beweis werden Sie in der Übung führen.

2.3 Mächtigkeit von Mengen

Wir sehen uns nun an, wie man Mengen hinsichtlich ihrer “Größe” miteinander vergleicht. Bei Mengen A, B mit endlich vielen Elementen ist das einfach. Man zählt die Elemente von A und B und betrachtet A und B als “gleich groß”, wenn sie gleich viele Elemente besitzen. Eleganter ist das folgende Verfahren, bei dem man nicht einmal zählen können muss. Man versucht, jedem Element von A auf eineindeutige Weise ein Element B zuzuordnen. Bleiben dabei in einer der Mengen Elemente übrig, so betrachten wir diese Menge als die größere. Geht dagegen die Zuordnung auf, so betrachten wir A und B als gleich groß.



Hier ist die formale Definition.

Definition 2.4 Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig (in Zeichen: $A \cong B$), wenn es eine bijektive Abbildung von A auf B gibt.

Satz 2.5 Es seien A, B, C beliebige Mengen. Dann gilt

- (a) $A \cong A$ (Reflexivität),
- (b) $A \cong B \Rightarrow B \cong A$ (Symmetrie),
- (c) $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$ (Transitivität).

Eine Relation mit den Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität heißt eine Äquivalenzrelation.

Beweis von Satz 2.5. (a) Für jede Menge A ist id_A eine Bijektion von A auf A . Also ist $A \cong A$.

(b) Sei $A \cong B$. Dann gibt es eine Bijektion f von A auf B . Die Umkehrabbildung f^{-1} ist eine Bijektion von B auf A . Also ist $B \cong A$.

(c) Sei $A \cong B$ und $B \cong C$. Dann gibt es Bijektionen f von A auf B und g von B auf C . Nach Satz 2.3 ist $g \circ f$ eine Bijektion von A auf C . Also ist $A \cong C$. ■

Beispiel. Die Abbildung $f : n \mapsto n^2$ ist eine Bijektion von \mathbb{N} auf die Menge aller Quadratzahlen. Unendliche Mengen können also zu einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig sein. Bei endlichen Mengen ist dies unmöglich. ■

Definition 2.6 (a) Eine Menge A heißt endlich, wenn $A = \emptyset$ oder wenn es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ so gibt, dass $A \cong \{1, 2, \dots, n\}$.

(b) Eine Menge A heißt abzählbar, wenn $A \cong \mathbb{N}$.

(c) Eine Menge A heißt überabzählbar, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.

Mengen, die nicht endlich sind, heißen *unendlich*. Mengen, die nicht überabzählbar sind, heißen *höchstens abzählbar*. Die Abzählbarkeit einer Menge bedeutet anschaulich, dass man die Elemente dieser Menge durchnummerieren kann.

Satz 2.7 Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis. Wir ordnen die positiven rationalen Zahlen in ein Schema, welches uns die Nummerierbarkeit erkennen lässt (Cantorsches Diagonalverfahren):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & \dots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
 \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
 \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \dots \text{ usw.}, \\
 & & \swarrow & & & & &
 \end{array}$$

d.h. es ist $\frac{1}{1} = a_1$, $\frac{2}{1} = a_2$, $\frac{1}{2} = a_3$ usw. Offenbar kommen alle positiven rationalen Zahlen in diesem Schema vor. Gelangt man beim Durchnummerieren an eine Zahl, an die bereits eine Nummer vergeben wurde (z.B. $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = a_1$), so wird diese übersprungen. Auf diese Weise erhält man eine Bijektion von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ auf die positiven rationalen Zahlen.

Ist nun a_1, a_2, a_3, \dots die so gewonnene Durchnummerierung der positiven rationalen Zahlen, so erhält man eine Bijektion von \mathbb{N} auf \mathbb{Q} wie folgt:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\
 & \downarrow & \\
 \mathbb{Q} & 0 & a_1 & -a_1 & a_2 & -a_2 & a_3 & -a_3 & a_4 & \dots
 \end{array}$$

■

Mit der gleichen Idee kann man den folgenden Satz beweisen:

Satz 2.8 Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Beispielsweise ist die Menge aller Punkte der Ebene mit rationalen Koordinaten abzählbar. Gibt es überhaupt überabzählbare Mengen?

Satz 2.9 Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis. Die Menge \mathbb{R} ist sicher nicht endlich. Wir zeigen, dass sie auch nicht abzählbar ist. Dies tun wir indirekt, d.h. wir nehmen an, die Menge \mathbb{R} könnte durchnummeriert werden:

$$\mathbb{R} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}. \quad (2.1)$$

Wir wählen ein Intervall $I_0 = [a_0, b_0]$, welches x_0 nicht enthält. Dieses unterteilen wir in drei abgeschlossene Teilintervalle, die höchstens ihre Endpunkte gemeinsam haben:

$$\begin{array}{ccccccc} & & x_1 & & & & \\ & & | & & | & & \\ \hline & | & | & | & | & | & \\ & a_0 & a_1 & b_1 & b_0 & & \end{array}$$

Der Punkt x_1 kann dann in höchstens zwei dieser Intervalle liegen. Sei $I_1 = [a_1, b_1]$ eines der drei Intervalle, welches den Punkt x_1 nicht enthält. Nun unterteilen wir I_1 in drei Teilintervalle und wählen daraus ein Intervall $I_2 = [a_2, b_2]$, welches x_2 nicht enthält. Eine Wiederholung dieser Überlegungen liefert eine Folge $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ von Intervallen $I_k = [a_k, b_k]$ derart, dass $x_k \notin I_k$ für alle k .

Wir betrachten die Menge M aller rechten Endpunkte b_k dieser Intervalle. Diese Menge ist nach unten beschränkt (z.B. ist jedes a_n eine untere Schranke). Sie besitzt daher nach dem Vollständigkeitsaxiom ein Infimum. Sei $s := \inf M$. Die reelle Zahl s gehört zu jedem der Intervalle I_k : Andernfalls gäbe es ja ein n so, dass $s < a_n$. Da a_n eine untere Schranke von M ist, wäre s nicht die größte untere Schranke im Widerspruch zur Definition.

Die reelle Zahl s kommt aber in der Aufzählung (2.1) nicht vor: Wäre nämlich $s = x_n$ für ein n , so hätten wir einerseits $x_n = s \in I_n$ (soeben bewiesen) und andererseits $x_n \notin I_n$ (nach Konstruktion). Die Aufzählung (2.1) kann also nicht alle reellen Zahlen enthalten. ■

Der Beweis von Satz 2.9 hat die folgende wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen mitgeliefert:

Satz 2.10 *Der Durchschnitt einer absteigenden Folge $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ abgeschlossener Intervalle ist nicht leer.*

Wir kommen hierauf noch zurück.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einigen Resultaten zur Konstruktion "beliebig großer Mengen". Diese Resultate benötigen wir im weiteren nicht. Sei M eine nichtleere Menge. Unser Ziel ist es, eine Menge zu konstruieren, welche eine größere Mächtigkeit als M hat. Dazu betrachten wir die Menge F aller auf M definierten Funktionen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen. Für jedes $m \in M$ sei $f^{(m)}$ die Funktion

$$f^{(m)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = m, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und es sei F_M die Menge aller Funktionen $f^{(m)}$ mit $m \in M$. Es ist klar, dass die Abbildung $m \mapsto f^{(m)}$ eine Bijektion von M auf F_M ist. Die Menge M ist also zu einer

Teilmenge (nämlich F_M) von F gleichmächtig. Sie ist aber *nicht zur gesamten Menge F gleichmächtig*. Wir beweisen dies indirekt. Angenommen, es gäbe eine Bijektion

$$M \rightarrow F, \quad m \mapsto f_m. \quad (2.2)$$

Dann definieren wir eine Funktion f auf M wie folgt:

$$f(m) := \begin{cases} 1 & \text{falls } f_m(m) = 0, \\ 0 & \text{falls } f_m(m) = 1. \end{cases}$$

Diese Funktion liegt in F , stimmt aber mit keiner der Funktionen f_m überein. Also gibt es keine Bijektion (2.2), d.h. die Mächtigkeit von F ist größer als die von M .

Wir wollen dieses Ergebnis noch einmal anders formulieren. Dazu bezeichnen wir für jede Teilmenge A von M mit χ_A ihre *charakteristische Funktion*:

$$\chi_A(m) := \begin{cases} 1 & \text{falls } m \in A, \\ 0 & \text{falls } m \notin A. \end{cases}$$

Die Abbildung $A \mapsto \chi_A$ ist offenbar eine Bijektion der Menge aller Teilmengen von M (der sogenannten *Potenzmenge* von M) auf die Menge aller charakteristischen Funktionen. Letztere Menge ist aber gerade die oben eingeführte Menge F . Wir erhalten:

Satz 2.11 *Die Potenzmenge einer nichtleeren Menge M hat eine größere Mächtigkeit als die Menge M selbst.*

Mit dem soeben benutzten Verfahren, welches ebenfalls auf Cantor zurückgeht, hätten wir auch einen anderen Beweis von Satz 2.9 erbringen können. Dazu hätten wir uns genauer mit der Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen befassen müssen (was wir noch nachholen).

Mit den in diesem Abschnitt eingeführten Begriffen ist eines der bekanntesten Probleme der Mathematik verknüpft: Gibt es Mengen, deren Mächtigkeit zwischen der von \mathbb{N} und der von \mathbb{R} liegt (Kontinuumshypothese)?

3 Metrische Räume

Zahlreiche Aufgaben in der Mathematik wie auch im täglichen Leben führen auf das Problem, Abstände zu messen:

- Festlegung einer Reiseroute. Als Maß für den Abstand zweier Orte kann dienen:
 - Länge der Luftlinie,
 - Länge der kürzesten Straßenverbindung,
 - mindestens benötigte Zeit,
 - mindestens entstehende Kosten.
- In der numerischen Mathematik kann man nur mit Objekten arbeiten, die sich durch endlich viele Zahlen beschreiben lassen. Dies ist z.B. für Polynome möglich, im allgemeinen aber nicht für beliebige (etwa stetige) Funktionen. Man möchte daher kompliziertere Funktionen durch Polynome approximieren. Um die Güte der Approximation beurteilen zu können, muss man in der Lage sein, Abstände zwischen Funktionen zu messen.
- Wir werden zum ersten Mal auf die Notwendigkeit stoßen, Abstände zu messen, wenn wir den Begriff des Grenzwertes einführen.

Mit dem Begriff des metrischen Raumes stellen wir einen Rahmen bereit, in den sich alle genannten Abstandsprobleme (und viele weitere) einbetten lassen und in dem man Begriffe wie Grenzwert oder Stetigkeit allgemein definieren kann. Wir werden nicht tief in die Theorie der metrischen Räume eindringen. Eine eingehendere Beschäftigung mit diesen (und allgemeineren) Räumen erfolgt in der Vorlesung “Funktionalanalysis”.

3.1 Der Euklidische Raum \mathbb{R}^n

3.1.1 Der Abstand in \mathbb{R}

Der Abstand zweier reeller Zahlen x, y erklären wir durch

$$d(x, y) := |x - y|.$$

Diese Definition stimmt mit unserer Anschauung überein, wenn wir uns x und y als Punkte auf der Zahlengeraden vorstellen. Für den so festgelegten Abstand gilt nach Satz 1.10 für beliebige Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$

- (a) $d(x, y) \geq 0$, und es ist $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
- (b) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).
- (c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

3.1.2 Der Raum \mathbb{R}^n

Sei $n \in \mathbb{N}$ positiv. Der Raum \mathbb{R}^n besteht aus allen geordneten n -Tupeln $x = (x_1, \dots, x_n)$ reeller Zahlen. Man kann diesen Raum identifizieren mit dem n -fachen cartesischen Produkt von \mathbb{R} mit sich selbst:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \quad (n \text{ Faktoren}).$$

Die Elemente des \mathbb{R}^n heißen auch Vektoren. In \mathbb{R}^n führen wir folgende Operationen ein:

Addition $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die *Summe* zweier Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist der Vektor

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Es ist klar, dass diese Operation den Axiomen (A1) – (A4) genügt. Dabei übernimmt der Vektor $(0, \dots, 0)$ die Rolle der Null, und der zu $x = (x_1, \dots, x_n)$ entgegengesetzte Vektor ist $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$. Der \mathbb{R}^n bildet also bzgl. der Addition eine kommutative Gruppe. Insbesondere gelten Lemma 1.1 und Satz 1.2 entsprechend auch für den \mathbb{R}^n .

Multiplikation mit reellen Zahlen $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Das *Produkt* der reellen Zahl λ mit dem Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist erklärt durch

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Man sieht sofort, dass für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(SM1) \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$$

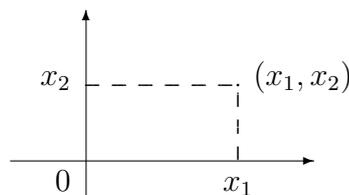
$$(SM2) \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

$$(SM3) \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x.$$

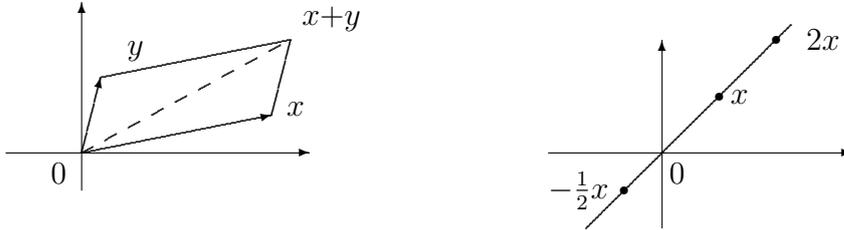
$$(SM4) \quad 1 \cdot x = x.$$

Eine Menge, auf der eine Operation $+$ mit den Eigenschaften (A1) – (A4) sowie eine Multiplikation mit reellen Zahlen mit den Eigenschaften (SM1) – (SM4) erklärt sind, heißt *reeller linearer Raum* oder *Vektorraum über dem Körper \mathbb{R}* . Der \mathbb{R}^n ist also ein Beispiel für einen reellen linearen Raum.

Wir sehen uns zunächst den \mathbb{R}^2 etwas genauer an. Die Elemente des \mathbb{R}^2 kann man sich als Punkte der Ebene vorstellen:



Entsprechend hat man für die Addition bzw. Multiplikation mit Zahlen die folgende Vorstellung



Für den Abstand des Punktes $x = (x_1, x_2)$ von Nullpunkt $0 = (0, 0)$ findet man mit dem Satz des Pythagoras

$$d(x, 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

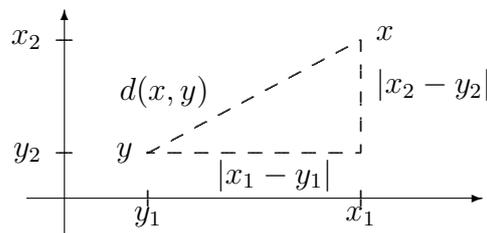
Diese Zahl heißt auch die *Norm* des Vektors x und wird mit $\|x\|$ bezeichnet. Anhand der Skizzen macht man sich klar, dass für beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ und Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\|x\| \geq 0$, und es ist $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Den Abstand zweier Punkte kann man ebenfalls leicht mit dem Satz des Pythagoras berechnen: Für $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ ist

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Wegen $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$ besteht somit zwischen Abstand und Norm im \mathbb{R}^2 der folgende Zusammenhang: $d(x, y) = \|x - y\|$.

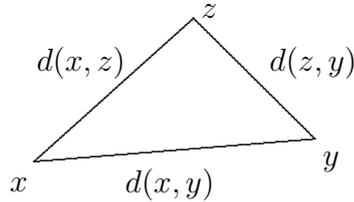


Die folgenden Eigenschaften des Abstands gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ und sind offensichtlich:

- $d(x, y) \geq 0$, und es $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.

- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Letztere Eigenschaft ist als *Dreiecksungleichung* bekannt.



Wir kommen nun zurück zum \mathbb{R}^n mit beliebigem $n \geq 1$. Nahegelegt durch die Situation im \mathbb{R}^2 vereinbaren wir die folgende Definition.

Definition 3.1 Die Norm eines des Vektors $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die Zahl

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Der Abstand zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $d(x, y) := \|x - y\|$.

Es betrachtet auf \mathbb{R}^n auch andere Normen, wie z.B.

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &:= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} && \text{("Maximumnorm")}, \\ \|x\|_1 &:= |x_1| + \dots + |x_n| && \text{("Summennorm")}. \end{aligned}$$

Die in Definition 3.1 eingeführte Norm heißt die *Euklidische Norm*. Sie wird oft auch mit $\|\cdot\|_2$ bezeichnet. Der lineare Raum \mathbb{R}^n , versehen mit der Norm $\|\cdot\|_2$, heißt der *Euklidische Raum*.

Satz 3.2 (a) Eigenschaften der Euklidischen Norm: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\|x\| \geq 0$, und es ist $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Dreiecksungleichung*).

(b) Eigenschaften des Abstandes: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt:

- $d(x, y) \geq 0$, und es ist $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$ (*Symmetrie*),
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*Dreiecksungleichung*).

Zum Beweis. Die ersten beiden Aussagen von (a) und (b) folgen sofort aus den Definitionen. Die Dreiecksungleichung für den Abstand folgt leicht aus der für die Norm. Für beliebige $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ist nämlich

$$\begin{aligned} d(x, y) = \|x - y\| &= \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Es verbleibt daher, die Dreiecksungleichung für die Norm zu beweisen. Dies werden wir in der Übung tun. ■

Die in Satz 3.2 festgestellten Eigenschaften der Euklidischen Norm gelten auch für die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ und die aus ihnen resultierenden Abstände.

3.2 Der Körper der komplexen Zahlen

Wir betrachten den im vorigen Abschnitt eingeführten Raum \mathbb{R}^2 mit der Addition und der Euklidischen Norm. Der \mathbb{R}^2 zeichnet sich vor den Räumen \mathbb{R}^n mit $n > 2$ dadurch aus, dass sich in ihm eine Multiplikation definieren lässt, welche diesen Raum zu einem Körper macht.

Definition 3.3 Das Produkt von $z = (x, y)$ und $w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ ist erklärt durch

$$zw = (x, y)(u, v) := (xu - yv, xv + yu) \in \mathbb{R}^2.$$

Satz 3.4 Mit dem so erklärten Produkt gelten (M1) – (M4) sowie (K1) und (K2), d.h. \mathbb{R}^2 ist ein Körper.

Beweis. Seien $z = (x, y)$, $w = (u, v)$ und $c = (a, b)$ beliebige Elemente des \mathbb{R}^2 . Die Assoziativität der Multiplikation (Axiom (M1)) folgt aus

$$\begin{aligned} (zw)c &= (xu - yv, xv + yu)(a, b) \\ &= ((xu - yv)a - (xv + yu)b, (xu - yv)b + (xv + yu)a) \\ &= (x(ua - vb) - y(va + ub), x(va + ub) + y(ua - vb)) \\ &= (x, y)(ua - vb, va + ub) = z(wc). \end{aligned}$$

Die Kommutativität der Multiplikation (Axiom (M2)) ergibt sich sofort aus der Definition:

$$zw = (xu - yv, xv + yu) = wz.$$

Für das geordnete Paar $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$z(1, 0) = (x, y)(1, 0) = (x, y) = z \quad \text{für alle } z,$$

d.h. $(1, 0)$ ist das Einselement bezüglich der Multiplikation (Axiom (M3)). Sei schließlich $z = (x, y) \neq (0, 0)$. Für das Paar $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ gilt:

$$(x, y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}, 0\right) = (1, 0),$$

d.h. die Gleichung $zw = (1, 0)$ ist lösbar (Axiom (M4)). Offenbar ist auch $(1, 0) \neq (0, 0)$, d.h. Axiom (K1) ist erfüllt. Schließlich rechnen wir das Distributivgesetz (Axiom (K2)) nach:

$$\begin{aligned}(z + w)c &= (x + u, y + v)(a, b) \\ &= ((x + u)a - (y + v)b, (x + u)b + (y + v)a) \\ &= (xa - yb, xb + ya) + (ua - vb, ub + va) \\ &= zc + wc.\end{aligned}$$

\mathbb{R}^2 ist also tatsächlich ein Körper. ■

Wir können daher mit den Elementen von \mathbb{R}^2 rechnen wie mit reellen Zahlen. Man bezeichnet den Körper \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} und nennt seine Elemente *komplexe Zahlen*. Sehen wir uns einige komplexe Zahlen näher an.

Beispiel 1. Für komplexe Zahlen der speziellen Gestalt $(x, 0)$ und $(u, 0)$ gilt

$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0) \quad \text{sowie} \quad (x, 0)(u, 0) = (xu, 0).$$

Beide Operationen liefern also wieder ein Element der Gestalt $(a, 0)$, und die reelle Zahl a wird wie im Reellen aus x und u berechnet. In diesem Sinn ist \mathbb{R} in \mathbb{C} enthalten. Genauer: Die Abbildung $x \mapsto (x, 0)$ ist eine Bijektion von \mathbb{R} auf $\{(x, y) \in \mathbb{C} : y = 0\}$, und diese Bijektion erhält die Operationen. (In der Algebra werden Sie solche Abbildungen *Isomorphismen* nennen.) Man schreibt daher statt $(x, 0)$ oft einfach x . ■

Beispiel 2. Für die komplexe Zahl $i := (0, 1)$ ist

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

In \mathbb{C} lässt sich also aus -1 eine Quadratwurzel ziehen! ■

Mit diesen Vereinbarungen und Notationen lässt sich eine zweckmäßige Schreibweise für komplexe Zahlen einführen:

$$z = (x, y) \quad \text{schreiben wir als} \quad (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + iy.$$

Addition und Multiplikation lauten in dieser Schreibweise

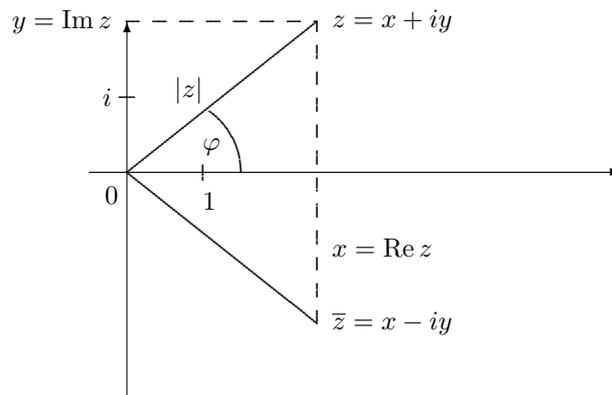
$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v),$$

$$(x + iy)(u + iv) = (xu + iyiv) + (xiv + iyu) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Wir führen noch einige weitere Bezeichnungen ein: Für $z = x + iy$ heißt

- x der *Realteil* von z . Schreibweise: $x = \operatorname{Re} z$.

- y der *Imaginärteil* von z . Schreibweise: $y = \operatorname{Im} z$.
- $\sqrt{x^2 + y^2}$ der *Betrag* von z . Schreibweise: $|z|$.
- $x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*. Schreibweise: \bar{z} .
- φ das *Argument* von z . Schreibweise: $\arg z$.



Das Argument einer komplexen Zahl z wird nur für $z \neq 0$ erklärt. Es ist eindeutig festgelegt, wenn man (z.B.) verlangt, dass $0^0 \leq \varphi < 360^0$. Aus der Skizze liest man unmittelbar ab, dass für $z \neq 0$

$$\operatorname{Re} z = x = |z| \cos \varphi, \quad \operatorname{Im} z = y = |z| \sin \varphi$$

und daher

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

ist. Dies ist die sogenannte *trigonometrische Darstellung* der komplexen Zahl z . In dieser Darstellung ist das Multiplizieren und Wurzelziehen besonders einfach (wir kommen in der Übung und in Abschnitt 6.4.2 darauf zurück). Schließlich definieren wir noch den Abstand zweier komplexer Zahlen z, w durch $d(z, w) := |z - w|$.

3.3 Metrische Räume

Definition 3.5 *Es sei M eine Menge mit einer Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. je zwei Elementen x, y von M ist eine reelle Zahl $d(x, y)$ zugeordnet. Gilt für beliebige Elemente $x, y, z \in M$*

- $d(x, y) \geq 0$, und es ist $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$ (*Symmetrie*),

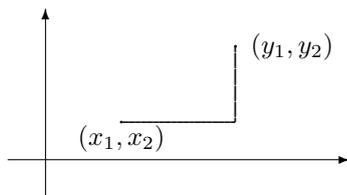
(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung),

so heißt d eine Abstandsfunktion oder Metrik auf M , die Zahl $d(x, y)$ heißt der Abstand der Punkte $x, y \in M$, und das Paar (M, d) heißt ein metrischer Raum.

Mitunter nennt man auch (nicht ganz korrekt) M einen metrischen Raum (und denkt sich das d dazu).

Beispiele für metrische Räume.

- (1) Der für uns in diesem Semester wichtigste metrische Raum ist $M = \mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) := |x - y|$. Mit der gleichen Abstandsfunktion sind auch Teilmengen von \mathbb{R} wie $M = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $[-1, 1]$ metrische Räume.
- (2) $M = \mathbb{C}$ mit $d(z, w) = |z - w|$.
- (3) $M = \mathbb{R}^n$ mit $d(x, y) = \|x - y\|_2$ (Euklidischer Abstand).
- (4) $M = \mathbb{R}^n$ mit $d(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$ (Manhattan-Abstand).



- (5) M ist ein Schachbrett und $d(x, y)$ ist Minimalzahl der Züge, die ein Turm (bzw. Dame, König, Springer) benötigt, um vom Feld x zum Feld y zu gelangen. ■

Definition 3.6 Es sei (M, d) ein metrischer Raum, $x \in M$ und ε eine positive reelle Zahl. Unter der Umgebung von x vom Radius ε oder kurz ε -Umgebung von x versteht man die Menge

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Im \mathbb{R}^1 ist $U_\varepsilon(x)$ das offene Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, und im \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 (jeweils versehen mit dem Euklidischen Abstand) ist $U_\varepsilon(x)$ die Kreisscheibe bzw. die Kugel mit Mittelpunkt x und Radius ε (jeweils ohne ihren Rand bzw. Oberfläche).

Die in der folgenden Definition eingeführten Begriffe dienen der Beschreibung der Lage eines Punktes in Bezug auf eine Menge.

Definition 3.7 Es sei (M, d) metrischer Raum und $A \subseteq M$.

- (a) Ein Punkt $a \in A$ heißt innerer Punkt von A , wenn es eine Umgebung von a gibt, die ganz in A liegt.

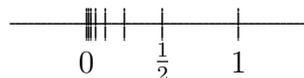
- (b) Ein Punkt $a \in M$ heißt Randpunkt von A , wenn in jeder Umgebung von a sowohl Punkte aus A als auch aus dem Komplement $M \setminus A$ liegen.
- (c) Ein Punkt $a \in M$ heißt Häufungspunkt von A , wenn jede Umgebung von a einen Punkt aus A enthält, der von a verschieden ist.
- (d) Ein Punkt $a \in A$ heißt isolierter Punkt von A , wenn a kein Häufungspunkt von A ist.
- (e) Die Menge A heißt offen, wenn jeder ihrer Punkte ein innerer Punkt von A ist.
- (f) Die Menge A heißt abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von A zu A gehört.
- (g) Die Menge aller inneren Punkte von A heißt das Innere von A und wird mit A° oder $\text{int } A$ bezeichnet.
- (h) Die Menge aller Randpunkte von A heißt der Rand von A und wird mit ∂A bezeichnet.
- (i) Die Vereinigung von A mit der Menge aller Häufungspunkte von A heißt die Abschließung von A und wird mit \bar{A} oder $\text{clos } A$ bezeichnet.

Offenbar ist stets $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$, und eine Menge A ist genau dann offen, wenn $A^\circ = A$, und genau dann abgeschlossen, wenn $A = \bar{A}$ (↗ Übung).

Beispiele. Als Abstand dient in den folgenden Beispielen stets $d(x, y) = |x - y|$.

- (1) $M = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$. Dann ist $A^\circ = A$, $\bar{A} = [0, 1]$, A offen und $\partial A = \{0, 1\}$.
- (2) $M = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$. Dann ist $A^\circ = (0, 1)$, $\bar{A} = A$, A abgeschlossen und $\partial A = \{0, 1\}$.
- (3) $M = \mathbb{C}$, $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Dann ist $A^\circ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\partial A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\bar{A} = A$ und A ist abgeschlossen.

- (4) $M = \mathbb{R}$, $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$.



Dann ist $A^\circ = \emptyset$, $\bar{A} = A \cup \{0\}$, $\partial A = A \cup \{0\}$, 0 ist einziger Häufungspunkt von A , und A ist weder offen noch abgeschlossen.

- (5) $M = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$. Dann ist $A^\circ = \emptyset$, $\bar{A} = \partial A = \mathbb{R}$, und A ist weder offen noch abgeschlossen.

- (6) $M = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$. Dann ist $A^\circ = A = \bar{A}$, $\partial A = \emptyset$, und A ist offen und abgeschlossen.
- (7) $M = \mathbb{R}$, $A = \emptyset$. Dann ist $A^\circ = A = \bar{A}$, $\partial A = \emptyset$, und A ist offen und abgeschlossen.
- (8) $M = [0, 1] \cup [2, 3]$, $A = [0, 1]$. Dann ist $A^\circ = A = \bar{A}$, $\partial A = \emptyset$, und A ist offen und abgeschlossen.
- (9) $M = \mathbb{C}$, $A = [0, 1]$. Dann ist $A^\circ = \emptyset$, $\bar{A} = A$, $\partial A = A$, A abgeschlossen. ■

Beachten Sie: Betrachtet als Teilmenge von \mathbb{R} ist das Intervall $[0, 1]$ nicht offen. Dagegen ist $[0, 1]$ offen, wenn man dieses Intervall als Teilmenge von $[0, 1] \cup [2, 3]$ betrachtet. Als Teilmenge von \mathbb{C} hat $[0, 1]$ nicht einmal innere Punkte. Die Eigenschaft einer Menge A , offen bzw. abgeschlossen zu sein, hängt also vom Raum M ab, in dem man A betrachtet.

Wir überlegen uns nun einige Eigenschaften offener bzw. abgeschlossener Mengen. Dabei sei (M, d) ein beliebiger metrischer Raum. Wer sich noch nicht an die neuen Begriffe gewöhnt hat, darf sich auch $M = \mathbb{R}^1$ oder $M = \mathbb{R}^2$ mit dem Euklidischen Abstand vorstellen.

Satz 3.8 *Die Mengen M und \emptyset sind sowohl offen als auch abgeschlossen und haben beide \emptyset als ihren Rand.*

Dies folgt aus den Definitionen.

Satz 3.9 *Sei $x \in M$ und ε eine positive reelle Zahl. Dann ist*

- (a) $U_\varepsilon(x) := \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\}$ *offen,*
 (b) $K_\varepsilon(x) := \{y \in M : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ *abgeschlossen.*

Die Mengen $U_\varepsilon(x)$ bzw. $K_\varepsilon(x)$ heißen auch die *offene* bzw. die *abgeschlossene Kugel* um x vom Radius ε .

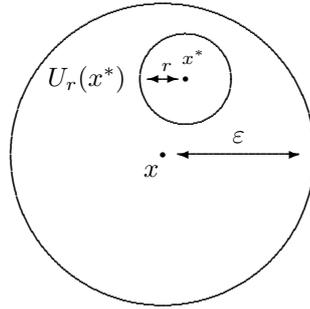
Beweis. (a) Sei x^* ein Punkt aus $U_\varepsilon(x)$, d.h. es ist $d(x, x^*) < \varepsilon$. Wir müssen zeigen: x^* ist ein *innerer* Punkt von $U_\varepsilon(x)$. Dazu wählen wir $r \in \mathbb{R}$ so, dass

$$0 < r < \varepsilon - d(x, x^*).$$

Für jeden Punkt y aus $U_r(x^*)$ ist dann

$$d(x, y) \leq d(x, x^*) + d(x^*, y) < d(x, x^*) + r < \varepsilon,$$

d.h. es ist $y \in U_\varepsilon(x)$. Da $y \in U_r(x^*)$ beliebig gewählt war, ist ganz $U_r(x^*)$ in $U_\varepsilon(x)$ enthalten, und $U_\varepsilon(x)$ ist offen.



(b) Sei x^* ein Häufungspunkt von $K_\varepsilon(x)$. Wir müssen zeigen, dass x^* zu $K_\varepsilon(x)$ gehört. Wir gehen indirekt vor, nehmen also an, dass $x^* \notin K_\varepsilon(x)$ bzw. $d(x, x^*) > \varepsilon$ ist. Wir wählen $r \in \mathbb{R}$ so, dass $0 < r < d(x, x^*) - \varepsilon$. Für jeden Punkt $y \in U_r(x^*)$ ist dann

$$d(x, y) \geq d(x, x^*) - d(x^*, y) > d(x, x^*) - r > \varepsilon.$$

Die Umgebung $U_r(x^*)$ von x^* enthält also keine Punkte von $K_\varepsilon(x)$. Dann kann x^* kein Häufungspunkt von $K_\varepsilon(x)$ sein. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war. ■

Satz 3.10 Jede Menge, die nur ein Element enthält, ist abgeschlossen.

Beweis. ↗ Übung.

Satz 3.11 Eine Menge $A \subseteq M$ ist genau dann offen, wenn ihr Komplement $M \setminus A$ abgeschlossen ist.

Beweis. (\Rightarrow) Sei A offen und x ein Häufungspunkt von $M \setminus A$. Wir wollen zeigen, dass x in $M \setminus A$ liegt. Läge x in A , so gäbe es eine Umgebung $U_\varepsilon(x)$ von x , die ganz in A liegt. In dieser Umgebung liegen keine Punkte aus $M \setminus A$, so dass x kein Häufungspunkt von $M \setminus A$ sein kann. Dieser Widerspruch zeigt, dass x in $M \setminus A$ liegt. Da x ein beliebiger Häufungspunkt von $M \setminus A$ ist, ist $M \setminus A$ abgeschlossen.

(\Leftarrow) Sei $M \setminus A$ abgeschlossen und $x \in A$. Wir wollen zeigen, dass x ein innerer Punkt von A ist. Da $M \setminus A$ abgeschlossen ist, ist x kein Häufungspunkt von $M \setminus A$. Es gibt daher eine Umgebung von x , die keinen Punkt aus $M \setminus A$ enthält. Diese Umgebung liegt also vollständig in A . Damit ist x ein innerer Punkt von A . Da x beliebig aus A gewählt war, ist A offen. ■

Folgerung 3.12 Eine Menge $A \subseteq M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement $M \setminus A$ offen ist.

Satz 3.13 Für jede Teilmenge $A \subseteq M$ ist

- (a) ihr Inneres A° offen,
- (b) ihre Abschließung \overline{A} abgeschlossen,
- (c) ihr Rand ∂A abgeschlossen.

Beweis. (a) Sei $x \in A^\circ$. Dann gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon(x)$ von x , die ganz in A liegt. Wir wollen zeigen, dass $U_\varepsilon(x)$ sogar in A° liegt. Dazu sei $y \in U_\varepsilon(x)$ beliebig. Da $U_\varepsilon(x)$ nach Satz 3.9 (a) offen ist, gibt es eine Umgebung $U_r(y)$, welche in $U_\varepsilon(x)$ enthalten ist. Offenbar ist $U_r(y)$ dann auch in A enthalten. Damit ist y innerer Punkt von A , also $y \in A^\circ$. Da $y \in U_\varepsilon(x)$ beliebig war, folgt $U_\varepsilon(x) \subseteq A^\circ$. Somit ist x innerer Punkt von A° , und A° ist offen.

(b) Wir benutzen Folgerung 3.12 und zeigen, dass $M \setminus \overline{A}$ offen ist. Sei $x \in M \setminus \overline{A}$. Wir müssen zeigen, dass x ein innerer Punkt von $M \setminus \overline{A}$ ist, d.h. dass es eine Umgebung $U_\varepsilon(x)$ von x gibt, die keinen Punkt aus \overline{A} enthält.

Angenommen, dies sei falsch. Dann gibt es in jeder Umgebung $U_\varepsilon(x)$ von x einen Punkt $y_\varepsilon \in \overline{A}$. Dieses y_ε liegt in A oder ist ein Häufungspunkt von A . Im zweiten Fall wählen wir eine Umgebung $U_r(y_\varepsilon)$ von y_ε , die komplett in $U_\varepsilon(x)$ liegt (dies ist möglich, da $U_\varepsilon(x)$ nach Satz 3.9 offen ist). Da y_ε ein Häufungspunkt von A ist, liegt in $U_r(y_\varepsilon)$ wenigstens ein Punkt z_ε aus A . Offenbar liegt z_ε dann auch in $U_\varepsilon(x)$, so dass $U_\varepsilon(x)$ in jedem Fall einen Punkt aus A enthält (der wegen $x \in M \setminus \overline{A}$ ungleich x ist). Dann ist x aber ein Häufungspunkt von A , im Widerspruch zur Annahme $x \in M \setminus \overline{A}$.

Dieser Widerspruch zeigt: Es gibt eine Umgebung von x , die keinen Punkt aus \overline{A} enthält. Somit ist x ein innerer Punkt von $M \setminus \overline{A}$. Da $x \in M \setminus \overline{A}$ beliebig gewählt war, folgt, dass $M \setminus \overline{A}$ offen ist.

(c) Sei x Häufungspunkt von ∂A und $U_\varepsilon(x)$ eine beliebige Umgebung von x . Dann liegt in $U_\varepsilon(x)$ wenigstens ein Punkt $y \in \partial A$. Sei $U_r(y)$ eine Umgebung von y , die ganz in $U_\varepsilon(x)$ liegt. Wegen $y \in \partial A$ gibt es Punkte $z_1 \in A$ und $z_2 \in M \setminus A$, die in $U_r(y)$ und folglich auch in $U_\varepsilon(x)$ liegen. Jede Umgebung von x enthält also Punkte aus A und Punkte aus $M \setminus A$. Also gehört x zu ∂A . ■

Den Beweis der beiden folgenden Aussagen sollten Sie zur Übung selbst versuchen:

Satz 3.14 *Für jede Teilmenge A von M gilt*

$$\overline{A} = A \cup \partial A, \quad A^\circ = A \setminus \partial A, \quad A^\circ \cap \partial A = \emptyset, \quad A^\circ \cup \partial A = \overline{A}.$$

Satz 3.15 (a) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen. Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*

(b) *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Schließlich vereinbaren wir noch:

Definition 3.16 *Eine Menge $A \subseteq M$ heißt beschränkt, wenn es ein $x \in M$ und ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass $A \subseteq U_\varepsilon(x)$. Die Menge A heißt dicht in M , wenn $\overline{A} = M$.*

Satz 3.17 \mathbb{Q} ist dicht \mathbb{R} .

Beweis. Offenbar ist $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass auch $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Ist sogar $x \in \mathbb{Q}$, so sind wir fertig. Im weiteren sei also $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Wir betrachten die Menge $M := \{q \in \mathbb{Q} : x \leq q\}$. Diese ist nicht leer (archimedische Eigenschaft von \mathbb{R} , Satz 1.21) und nach unten beschränkt (z.B. durch x). Sei $s := \inf M$ (Vollständigkeitsaxiom). Da x eine untere Schranke von M ist, folgt $x \leq s$.

Angenommen, es wäre $x < s$. Dann ist $s - x > 0$. Wegen der archimedischen Eigenschaft von \mathbb{R} gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < s - x$ bzw. $x < s - \frac{1}{n}$. Außerdem gibt es wegen $s = \inf M$ ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $s \leq q < s + \frac{1}{n}$ (Satz 1.14). Dann ist

$$x < s - \frac{1}{n} \leq q - \frac{1}{n} < s,$$

was wegen $q - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ der Definition von s widerspricht.

Es ist also $x = s$. Dann gibt es nach Satz 1.14 für jedes $\varepsilon > 0$ ein $q \in \mathbb{Q}$ (welches wegen $x \notin \mathbb{Q}$ von x verschieden ist) so, dass $x < q < x + \varepsilon$. In jeder Umgebung von x liegt also eine von x verschiedene rationale Zahl, d.h. x ist Häufungspunkt von \mathbb{Q} . ■

3.4 Folgen in metrischen Räumen

Wir beginnen mit einer einfachen Definition.

Definition 3.18 Sei M eine Menge. Eine Folge in M ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow M$.

Eine Folge ordnet also jeder natürlichen Zahl n ein Element $a(n)$ aus M zu. Statt $a(n)$ schreibt man meist a_n , und die Folge gibt man oft in der Form $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n \geq 0}$ oder einfach (a_0, a_1, a_2, \dots) an. Oft lässt man Folgen auch erst bei $n = 1$ oder $n = n_0$ mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$ beginnen.

Von nun an sei (M, d) ein metrischer Raum. Die folgende Definition ist eine der wichtigsten in diesem Semester.

Definition 3.19 Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M heißt konvergent, wenn es ein Element $a \in M$ mit folgender Eigenschaft gibt: für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N (die im allgemeinen von ε abhängen wird), so dass

$$d(a, a_n) < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Es bietet sich an, an dieser Stelle die Quantoren \forall und \exists einzuführen: \forall steht für “für alle”, und \exists für “es existiert”. Konvergenz der Folge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt dann: es gibt ein Element $a \in M$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \quad d(a, a_n) < \varepsilon.$$

Da $d(a, a_n) < \varepsilon$ gleichbedeutend mit $a_n \in U_\varepsilon(a)$ ist, können wir auch sagen:

Jede Umgebung von a enthält alle Glieder der Folge (a_n) mit Ausnahme höchstens endlich vieler.

Wir werden gleich sehen, dass es für jede konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nur ein solches Element a geben kann. Dieses a heißt der *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und man schreibt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*. Schließlich heißt eine Folge (a_n) *beschränkt*, wenn ihr Wertebereich (also die Menge der a_n) beschränkt ist.

Beispiele (1) Sei $M = \mathbb{R}$ und $d(x, y) = |x - y|$. Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n = 1/n$ konvergiert gegen $a = 0$. Es ist nämlich

$$d(a, a_n) = d(0, 1/n) = |0 - 1/n| = 1/n.$$

Dies ist sicher dann kleiner als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$, wenn $n > 1/\varepsilon$. Wählen wir für N also eine natürliche Zahl größer als $1/\varepsilon$, so sind alle Anforderungen aus Definition 3.19 erfüllt.

(2) Sei (M, d) wie in Beispiel (1) und $a_n = 1/n^k$ mit $k, n \in \mathbb{N}$ und $k, n \geq 1$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ebenfalls gegen 0. Um

$$d(a, a_n) = d(0, 1/n^k) = 1/n^k$$

kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ zu machen, muss $1/n^k < \varepsilon$ bzw. $n > \sqrt[k]{1/\varepsilon}$ sein. Wählen wir also $N \in \mathbb{N}$ größer als $\sqrt[k]{1/\varepsilon}$, sind die Bedingungen aus Definition 3.19 erfüllt.

(3) Sei $M = \mathbb{R}^2$ mit dem Euklidischen Abstand und $a_n = (1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n^2}) \in \mathbb{R}^2$. Wir wollen zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ gegen den Punkt $a = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert. Zunächst ist

$$d(a, a_n) = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{n} - 1\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{n^2} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}.$$

Natürlich könnte man versuchen, die Ungleichung $\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} < \varepsilon$ nach n umzustellen und so eine untere Schranke für N zu gewinnen. Da wir aber nicht am *kleinstmöglichen* N interessiert sind (Definition 3.19 verlangt nur, *irgendein* N mit der angegebenen Eigenschaft zu finden), schätzen wir vorher ab:

$$d(a, a_n) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \leq \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{2}{n}.$$

Um $\frac{2}{n}$ kleiner als ε zu machen, genügt es, $N > \frac{2}{\varepsilon}$ und $n \geq N$ zu wählen.

(4) Sei $M = \mathbb{C}$ mit dem Betragsabstand und $a_n = i^n$. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist

divergent. Wir überlegen uns dies indirekt. Angenommen, $a \in \mathbb{C}$ ist Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Da diese Folge jede der Zahlen $1, i, -1, -i$ unendlich oft enthält, müsste jede dieser Zahlen in jeder noch so kleinen Umgebung von a liegen, z.B. in $U_{1/2}(a)$. Nach der Dreiecksungleichung wäre dann

$$d(1, -1) \leq d(1, a) + d(a, -1) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

was offenbar falsch ist. ■

Wir überlegen uns nun einige einfache Eigenschaften konvergenter Folgen.

Satz 3.20 *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Angenommen, die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert sowohl gegen a' als auch gegen a'' . Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es dann Zahlen N' und N'' so, dass

$$d(a', a_n) < \varepsilon/2 \text{ für alle } n \geq N' \quad \text{und} \quad d(a'', a_n) < \varepsilon/2 \text{ für alle } n \geq N''.$$

Sei $N := \max\{N', N''\}$. Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$0 \leq d(a', a'') \leq d(a', a_n) + d(a'', a_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist also $0 \leq d(a', a'') < \varepsilon$. Nach Folgerung 1.22 aus dem Archimedischen Axiom ist dann $d(a', a'') = 0$, d.h. $a' = a''$. ■

Satz 3.21 *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

Beweis. Sei (a_n) eine konvergente Folge und a ihr Grenzwert a . Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $d(a, a_n) < 1$ für alle $n \geq N$. Wir wählen $r \in \mathbb{R}$ so, dass

$$r > \max\{1, d(a, a_0), d(a, a_1), \dots, d(a, a_{N-1})\}.$$

Dann liegen alle Folgenglieder a_n in $U_r(a)$. ■

Beispielsweise ist die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$ unbeschränkt und folglich divergent. Beispiel (4) zeigt, dass die Umkehrung von Satz 3.21 nicht gilt.

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum und $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $k_0 < k_1 < k_2 < \dots$. Dann heißt die Folge $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* der Folge (a_n) . Wir greifen also aus (a_n) genau die Folgenglieder mit den Indizes k_n heraus. Für $a_n = \frac{1}{n}$ und $k_n = 2n$ ist etwa

$$(a_{k_n})_{n=1}^\infty = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right).$$

In der Sprache der Abbildungen können wir den Begriff "Teilfolge" auch wie folgt erklären: Sei $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ eine Folge und $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ streng monoton wachsend (d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $k(n) < k(n+1)$). Dann heißt $a \circ k$ eine Teilfolge von a .

Satz 3.22 *Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a , so konvergiert auch jede Teilfolge von (a_n) und hat ebenfalls den Grenzwert a .*

Dies folgt unmittelbar aus der Definition. Umgekehrt: besitzt eine Folge eine divergente Teilfolge, so ist sie selbst divergent.

3.5 Vollständige metrische Räume

Wollen wir die Konvergenz einer Folge mittels Definition 3.19 überprüfen, so müssen wir ihren Grenzwert bereits kennen (oder wenigstens vermuten). Man wünscht sich daher Konvergenzkriterien, die man benutzen kann, *ohne* den Grenzwert im voraus errahnen zu müssen. Wir beschreiben in diesem Abschnitt das für die Analysis nützlichste Konvergenzkriterium. Sei wieder (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 3.23 Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M heißt *Fundamentalfolge* oder *Cauchy-Folge*, wenn für jedes reelle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Satz 3.24 Jede konvergente Folge ist eine Fundamentalfolge.

Beweis. Es sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a , und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N so, dass

$$d(a, a_n) < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Für alle $m, n \geq N$ ist dann wegen der Dreiecksungleichung

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Umkehrung von Satz 3.24 im allgemeinen *nicht* gilt.

Beispiel. Wir betrachten noch einmal die Folge des Babylonischen Wurzelziehens. Für $x > 1$ sei also

$$w_0 := x, \quad w_{n+1} = \frac{1}{2} \left(w_n + \frac{x}{w_n} \right) \quad \text{für } n \geq 0.$$

Aus Abschnitt 1.3 wissen wir, dass $(w_n)_{n \geq 0}$ eine fallende Folge positiver Zahlen ist und dass für ihr Infimum $w := \inf\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ gilt $w = \sqrt{x}$. Wir überlegen uns nun, dass die Folge (w_n) sogar gegen w konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach Satz 1.14 gibt es ein Folgenglied w_N mit $w \leq w_N < w + \varepsilon$. Da die Folge (w_n) monoton fällt und w das Infimum der w_n ist, folgt

$$w \leq w_n \leq w_N < w + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Für alle $n \geq N$ ist also $d(w, w_n) = |w - w_n| < \varepsilon$. Somit ist tatsächlich $\lim w_n = w$. Die Folge (w_n) konvergiert also für jeden Startwert $w_0 \geq 1$ und ist demzufolge nach Satz 3.24 eine Fundamentalfolge in \mathbb{R} . Sei nun speziell $w_0 = 2$. Man überprüft leicht, dass dann alle w_n rationale Zahlen sind (z.B. mit vollständiger Induktion). Für diesen Startwert ist (w_n) also sogar eine Fundamentalfolge in \mathbb{Q} . Diese Folge ist aber *in* \mathbb{Q} nicht konvergent, da $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. \blacksquare

Definition 3.25 Ein metrischer Raum (M, d) heißt vollständig, wenn in ihm jede Fundamentalfolge konvergiert.

Wie das soeben betrachtete Beispiel zeigt, ist der Raum \mathbb{Q} der rationalen Zahlen mit dem Betragsabstand *nicht* vollständig. Wir werden später sehen, dass die Räume \mathbb{R} und \mathbb{C} mit dem Betragsabstand ebenso wie die Räume \mathbb{R}^n mit dem Euklidischen Abstand vollständig sind. Dies ist der wesentliche Grund für die Unentbehrlichkeit der reellen Zahlen in der Analysis.

Wir sehen uns noch einige wichtige Eigenschaften vollständiger metrischer Räume an.

Satz 3.26 (Cantorscher Durchschnittssatz) Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, und für die abgeschlossenen Kugeln $K_{r_n}(x_n) := \{y \in M : d(y, x_n) \leq r_n\}$ gelte

$$K_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq K_{r_n}(x_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{sowie} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Dann gibt es genau einen Punkt $x^* \in M$, der jeder der Kugeln $K_{r_n}(x_n)$ liegt.

Beweis. Wir wollen zeigen, dass der Durchschnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{r_n}(x_n)$ genau ein Element enthält. Wir zeigen zuerst, dass dieser Durchschnitt nicht leer ist und überlegen uns dazu, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Kugelmittelpunkte eine Fundamentalfolge ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $r_n \rightarrow 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$0 \leq r_n < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Seien $m, n \geq N$. Wegen der Einbettungseigenschaft gilt $x_n \in K_{r_m}(x_m)$ falls $n \geq m$ und $x_m \in K_{r_n}(x_n)$ falls $m \geq n$. In jedem Fall ist

$$d(x_n, x_m) \leq \max\{r_n, r_m\} < \varepsilon.$$

Also ist (x_n) tatsächlich eine Fundamentalfolge.

Da der Raum (M, d) vollständig ist, besitzt diese Folge einen Grenzwert, den wir mit x^* bezeichnen. Wir zeigen als nächstes, dass x^* in jeder der Kugeln $K_{r_n}(x_n)$ liegt.

In $K_{r_n}(x_n)$ liegen wegen der Einbettungseigenschaft aller Glieder der Folge $(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$, die nach Satz 3.22 ebenfalls gegen x^* konvergiert. Also liegt x^* in der Abschließung von $K_{r_n}(x_n)$. Da $K_{r_n}(x_n)$ bereits abgeschlossen ist (Satz 3.9 (b)), gehört x^* zu $K_{r_n}(x_n)$.

Abschließend überlegen wir uns, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{r_n}(x_n)$ keine zwei voneinander verschiedenen Punkte enthält. Angenommen, x^* und x^{**} liegen in diesem Durchschnitt. Für jedes $\varepsilon > 0$ findet man ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $2r_n < \varepsilon$ (da ja $r_n \rightarrow 0$). Für dieses n ist

$$0 \leq d(x^*, x^{**}) \leq d(x^*, x_n) + d(x_n, x^{**}) \leq 2r_n < \varepsilon.$$

Es ist also $0 \leq d(x^*, x^{**}) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. Nach Folgerung 1.22 ist dann $d(x^*, x^{**}) = 0$, d.h. $x^* = x^{**}$. ■

Dieser Satz gilt auch in einer allgemeineren Form. Dazu definieren wir den *Durchmesser* einer beschränkten Menge $A \subseteq M$ durch

$$\text{diam } A := \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Satz 3.27 (Cantorscher Durchschnittssatz) *Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer abgeschlossener beschränkter Teilmengen von M mit folgenden Eigenschaften:*

$$F_{n+1} \subseteq F_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0.$$

Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ nicht leer und besteht aus genau einem Punkt.

Der Beweis verläuft genau wie der von Satz 3.26. Anstelle der Mittelpunkte x_n der Kugeln $K_{r_n}(x_n)$ wählt man irgendwelche Punkte $x_n \in F_n$, und die Rolle der Radien r_n wird von den Durchmessern $\text{diam } F_n$ übernommen. Die Details sollten Sie selbst ausarbeiten. ■

Anmerkung. In der Definition von Begriffen wie *innerer Punkt*, *Häufungspunkt* usw. kommt die Abstandsfunktion explizit nicht vor. Es genügt, wenn man den Begriff der Umgebung voraussetzt. Auch den *Grenzwert* einer Folge kann man einführen, wenn man den Begriff der Umgebung eines Punktes zur Verfügung hat. Dies führt uns auf folgende Idee: Ist M eine nichtleere Menge, so geben wir uns nicht eine Abstandsfunktion auf M vor, sondern für jeden Punkt die Menge seiner Umgebungen. Dies wiederum ist im wesentlichen nichts anderes, als sich die offenen Mengen auf M vorzugeben. Ausgehend von den bekannten Eigenschaften offener Mengen in metrischen Räumen definiert man:

Definition 3.28 *Sei M eine nichtleere Menge, und \mathcal{T} sei eine Menge von Teilmengen von M . Man nennt \mathcal{T} eine Topologie auf M und das Paar (M, \mathcal{T}) einen topologischen Raum, wenn gilt*

- (a) $\emptyset \in \mathcal{T}$, und $M \in \mathcal{T}$.
- (b) Der Durchschnitt endlich vieler Elemente von \mathcal{T} liegt in \mathcal{T} .
- (c) Die Vereinigung beliebig vieler Elemente aus \mathcal{T} liegt in \mathcal{T} .

Ist (M, d) ein metrischer Raum, so wissen wir aus Satz 3.8 und Satz 3.15, dass die Menge aller offener Teilmengen von M eine Topologie auf M bildet.

Ist (M, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $x \in M$, so heißt jede Menge $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ eine *Umgebung* von x . Die Definitionen aus Abschnitt 3.3 lassen sich nun wortwörtlich auf topologische Räume übertragen. NICHT übertragen lässt sich jedoch die Definition einer Fundamentalfolge. Hierfür benötigt man eine zusätzliche Struktur, die Umgebungen verschiedener Punkte vergleichbar macht.

Für jede nichtleere Menge M ist sowohl die Menge $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, M\}$ als auch die Menge \mathcal{T}_2 aller Teilmengen von M eine Topologie auf M . Versuchen Sie zu verstehen, wann eine Folge in M bezüglich einer dieser Topologien konvergiert. ■

4 Zahlenfolgen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Folgen reeller oder komplexer Zahlen.

4.1 Rechnen mit Grenzwerten

Wir beginnen mit einigen einfachen Regeln für den Umgang mit konvergenten Zahlenfolgen, die ohne das Vollständigkeitsaxiom auskommen.

Satz 4.1 *Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen reeller Zahlen, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n \leq b_n$. Dann ist auch $\lim a_n \leq \lim b_n$.*

Beweis. Sei $a := \lim a_n$ und $b := \lim b_n$. Angenommen, es wäre $a > b$. Dann wählen wir ein $\varepsilon \in (0, \frac{a-b}{2})$ sowie Folgenglieder $a_n \in U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ und $b_n \in U_\varepsilon(b) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ (diese a_n und b_n gibt es nach Definition des Grenzwertes).

$$\begin{array}{ccccccc} & & b_n & & a_n & & \\ & & | & & | & & \\ \text{---} & (& | & | &) & (& | & | &) & \text{---} \\ & b - \varepsilon & b & b + \varepsilon & a - \varepsilon & a & a + \varepsilon & & \end{array}$$

Wegen $2\varepsilon < a - b$ ist $a - \varepsilon > b + \varepsilon$. Wir erhalten

$$a_n > a - \varepsilon > b + \varepsilon > b_n,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Die Aussage des Satzes bleibt richtig, wenn man $a_n \leq b_n$ für alle n aus einer unendlichen Teilmenge von \mathbb{N} voraussetzt. Es ist aber NICHT richtig, dass aus $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $\lim a_n < \lim b_n$ folgt.

Satz 4.2 (Einschließungskriterium) *Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls die Folgen (a_n) und (c_n) konvergieren und den gleichen Grenzwert a besitzen, so konvergiert auch die Folge (b_n) , und ihr Grenzwert ist ebenfalls a .*

Beweis. Offenbar liegt wenigstens einer der Punkte a_n, c_n nicht näher an a als b_n , d.h. es ist

$$|a - b_n| \leq \max\{|a - a_n|, |a - c_n|\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann finden wir Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$ und $|a - c_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_2$. Für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ ist

$$|a - b_n| \leq \max\{|a - a_n|, |a - c_n|\} < \varepsilon,$$

d.h. die Folge (b_n) konvergiert gegen a . ■

Eine Folge (a_n) komplexer Zahlen heißt eine *Nullfolge*, wenn $\lim a_n = 0$.

Satz 4.3 Das Produkt $(a_n b_n)$ einer beschränkten Folge (b_n) komplexer Zahlen mit einer Nullfolge (a_n) ist eine Nullfolge.

Beweis. Da (b_n) beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$ so, dass $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes n ist dann

$$0 \leq |a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq M |a_n|.$$

Wegen $\lim a_n = 0$ folgt die Behauptung aus dem Einschließungskriterium (Satz 4.2). ■

Satz 4.4 Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen komplexer Zahlen. Dann konvergieren auch die Folgen $(a_n \pm b_n)$, $(a_n b_n)$ und – falls $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ – auch $(\frac{a_n}{b_n})$, und es gilt

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Zu Aussage (c) sei vermerkt, dass aus $\lim b_n \neq 0$ bereits $b_n \neq 0$ für alle hinreichend großen n folgt.

Beweis. Sei $a := \lim a_n$ und $b := \lim b_n$.

(a) Wir zeigen die Aussage für die Addition. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann findet man Zahlen N_1, N_2 so, dass $|a - a_n| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N_1$ und $|b - b_n| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N_2$. Sei $N := \max\{N_1, N_2\}$. Für alle $n \geq N$ gilt dann

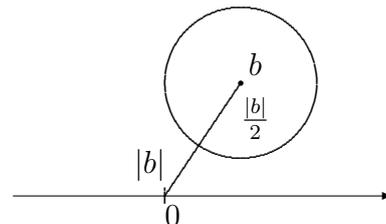
$$|(a + b) - (a_n + b_n)| = |(a - a_n) + (b - b_n)| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \varepsilon.$$

(b) In der Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 \leq |ab - a_n b_n| &= |ab - ab_n + ab_n - a_n b_n| = |a(b - b_n) + (a - a_n)b_n| \\ &\leq |a| |b - b_n| + |a - a_n| |b_n| \end{aligned} \quad (4.1)$$

sind die Folgen $(|a|)$ und $(|b_n|)$ beschränkt nach Satz 3.21, und die Folgen $(|b - b_n|)$ und $(|a - a_n|)$ sind Nullfolgen. Nach Satz 4.3 sind dann auch $(|a| |b - b_n|)$ sowie $(|a - a_n| |b_n|)$ Nullfolgen. Aus Teil (a) dieses Satzes folgt, dass die rechte Seite von (4.1) für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Das Einschließungskriterium (Satz 4.2) liefert dann $|ab - a_n b_n| \rightarrow 0$.

(c) Wir zeigen uns zuerst, dass die Folge $(1/b_n)$ beschränkt ist. Wegen $\lim b_n = b$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|b - b_n| < |b|/2$ für alle $n \geq N$.



Für die b_n mit $n \geq N$ gilt dann $|b_n| \geq |b|/2$ bzw. $|1/b_n| \leq 2/|b|$. Mit

$$M := \max \left\{ \left| \frac{1}{b_1} \right|, \left| \frac{1}{b_2} \right|, \dots, \left| \frac{1}{b_{N-1}} \right|, \frac{2}{|b|} \right\}$$

gilt dann $|1/b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $(1/b_n)$ ist beschränkt. Nun ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n} \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{a}{b_n} + \frac{a}{b_n} - \frac{a_n}{b_n} \right| = \left| a \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} \right) + \frac{1}{b_n} (a - a_n) \right| \\ &= \left| \frac{a}{bb_n} (b_n - b) + \frac{1}{b_n} (a - a_n) \right| \leq \left| \frac{a}{bb_n} \right| |b_n - b| + \left| \frac{1}{b_n} \right| |a - a_n|, \end{aligned}$$

und wir können wie in Teil (b) argumentieren, um die Konvergenz von a_n/b_n gegen a/b zu erhalten. ■

Beispiele. (1) Es sei $a_n = \frac{n^2+3n-4}{2n^2-n+5}$. Wegen $a_n = \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}$ und wegen $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ für $k = 1, 2$ (vgl. Beispiel (2) aus Abschnitt 3.4) gilt nach Satz 4.4 $\lim a_n = 1/2$.

(2) Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Definition 4.5 Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt bestimmt divergent mit dem uneigentlichen Grenzwert $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn für jedes $w > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n > w$ für alle $n \geq N$ (bzw. $a_n < -w$ für alle $n \geq N$). In diesem Fall schreiben wir $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$).

Beispiele. Die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$. Ist nämlich $w > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt es nach Satz 1.21 (Archimedisches Axiom) ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \sqrt{w}$. Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$a_n = n^2 \geq N^2 > w.$$

Dagegen ist die Folge (b_n) mit $b_n = (-1)^n n^2$ divergent, aber nicht bestimmt divergent. ■

4.2 Die Vollständigkeit von \mathbb{R}

Unser nächstes Ziel ist es, die Vollständigkeit des metrischen Raumes $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ zu zeigen. Auf dem Weg dahin leiten wir einige Konvergenzkriterien ab. Die Beweise der beiden ersten Sätze sind uns im wesentlichen bereits bekannt.

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*), wenn $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n \geq a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.6 Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Jede monoton fallende und nach unten beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Der Beweis verläuft für monoton fallende Folgen genauso wie im Beispiel aus Abschnitt 3.5, wo wir gezeigt haben, dass die (monoton fallende) Folge der Näherungswerte beim babylonischen Wurzelziehen gegen ihr Infimum konvergiert. Dieser Beweis kann leicht auf monoton wachsende Folgen übertragen werden (↗ HA).

Satz 4.7 (Intervallschachtelungssatz) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei ein abgeschlossenes Intervall $I_n = [a_n, b_n]$ (mit $a_n \leq b_n$) gegeben. Weiter gelte

$$I_{n+1} \subseteq I_n \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \quad \text{sowie} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ nicht leer und besteht aus genau einem Punkt.

Diese Aussage erinnert an den Cantorsche Durchschnittssatz. Da wir aber noch nicht wissen, dass \mathbb{R} vollständig ist, können wir uns nicht auf diesen Satz berufen.

Beweis. Wir betrachten die Folgen (a_n) bzw. (b_n) der linken bzw. rechten Randpunkte der Intervalle I_n . Aus der Einbettungseigenschaft folgt, dass (a_n) eine monoton wachsende und nach oben (z.B. durch b_0) beschränkte Folge ist, und die Folge (b_n) ist monoton fallend und nach unten (etwa durch a_0) beschränkt. Nach Satz 4.6 sind beide Folgen konvergent. Wir bezeichnen den Grenzwert der Folge (a_n) mit a und den von (b_n) mit b . Dann ist $a = b$, denn

$$a - b = \lim a_n - \lim b_n = \lim(a_n - b_n) = 0.$$

Wir zeigen als nächstes, dass a zu jedem Intervall I_k gehört. Für alle $n \geq k$ ist $a_k \leq a_n \leq b_k$. Übergang zum Grenzwert $n \rightarrow \infty$ liefert $a_k \leq a \leq b_k$, also $a \in I_k$. Insbesondere ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ nicht leer.

Schließlich überlegen wir uns, dass $a(=b)$ der einzige Punkt in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ ist. Für jeden Punkt x in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ ist

$$a_n \leq x \leq b_n \quad \text{für alle } n.$$

Wir lassen in dieser Ungleichung n gegen ∞ streben und erhalten $a \leq x \leq b$, woraus wegen $a = b$ sofort $x = a$ folgt. ■

Satz 4.8 (Bolzano/Weierstraß) *Jede unendliche beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} besitzt einen Häufungspunkt.*

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ unendlich und beschränkt. Dann kann M sicher in ein Intervall $I_1 := [a_1, b_1]$ eingeschlossen werden. Das Intervall I_1 wird halbiert. Dann gibt es eine Hälfte, in der unendlich viele Punkte aus M liegen. Diese Hälfte bezeichnen wir mit $I_2 := [a_2, b_2]$. (Sollten in beiden Hälften von I_1 unendlich viele Punkte aus M liegen, so wählen wir eine davon als I_2 .)

$$\begin{array}{l}
 I_1: \quad a_1 \quad \text{-----} \quad b_1 \\
 \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\
 I_2: \quad \quad \quad a_2 \quad \text{-----} \quad b_2 \\
 \quad \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\
 I_3: \quad \quad \quad \quad a_3 \quad \text{-----} \quad b_3 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad | \quad \quad \quad |
 \end{array}$$

Nun halbieren wir I_2 und wählen eine der Hälften so, dass sie unendlich viele Punkte aus M enthält. Diese sei $I_3 := [a_3, b_3]$. Wir fahren auf diese Weise fort und erhalten eine Folge (I_n) abgeschlossener Intervalle mit $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle n . Für die Intervalllängen gilt:

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \dots = \frac{b_2 - a_2}{2^{n-2}} = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}.$$

Da $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ eine Nullfolge und $(\frac{1}{2^{n-1}})_{n \geq 1}$ eine Teilfolge von $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Der Intervallschachtelungssatz ist somit anwendbar. Es gibt also genau einen Punkt x aus \mathbb{R} , der in jedem der Intervalle I_n liegt. Wir zeigen noch, dass x ein Häufungspunkt von M ist.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es wegen $b_n - a_n \rightarrow 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $0 < b_N - a_N < \varepsilon$. Da $a_N \leq x \leq b_N$ ist, folgt hieraus $|a_N - x| < \varepsilon$ und $|x - b_N| < \varepsilon$. Somit ist $[a_N, b_N] = I_N \subseteq U_\varepsilon(x)$.

$$\begin{array}{c}
 \text{-----} \left[\text{-----} \right] \text{-----} \\
 x - \varepsilon \quad a_N \quad x \quad b_N \quad x + \varepsilon
 \end{array}$$

Da I_N nach Definition unendlich viele Punkte aus M enthält, enthält auch $U_\varepsilon(x)$ unendlich viele Punkte aus M . Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, enthält *jede* Umgebung von x unendlich viele Punkte aus M . Also ist x ein Häufungspunkt von M . ■

Der Satz von Bolzano/Weierstraß wird oft in folgender Form benutzt:

Satz 4.9 (Bolzano/Weierstraß) *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Die Menge $\{a_n : n \geq 1\}$ ist endlich. Dann muss es einen Wert, etwa a_N , geben, der in der Folge (a_n) unendlich oft vorkommt. Es gibt somit eine Teilfolge (a_{k_n}) von (a_n) mit $a_{k_n} = a_N$ für alle n . Die Teilfolge (a_{k_n}) ist konstant und daher konvergent.

Fall 2: Die Menge $\{a_n : n \geq 1\}$ ist unendlich. Diese Menge ist nach Voraussetzung beschränkt und besitzt folglich nach Bolzano/Weierstraß einen Häufungspunkt x . Wir zeigen, dass x Grenzwert einer Teilfolge von (a_n) ist. Diese Teilfolge lässt sich wie folgt konstruieren. In $U_1(x)$ liegen unendlich viele der Folgenglieder a_n . Wir wählen eines davon aus, das von x verschieden ist. Dieses sei a_{k_1} . In $U_{1/2}(x)$ liegen ebenfalls unendlich viele der a_n . Wir wählen eines davon, etwa a_{k_2} , und zwar so, dass $a_{k_2} \neq x$ und $k_2 > k_1$. Dann wählen wir aus $U_{1/3}(x)$ ein a_{k_3} mit $a_{k_3} \neq x$ und $k_3 > k_2$ und fahren so fort. Das Resultat ist eine Teilfolge (a_{k_n}) von (a_n) , und diese Teilfolge konvergiert gegen x , da nach Konstruktion $|x - a_{k_n}| < 1/n$ für alle $n \geq 1$ ist. ■

Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um die Vollständigkeit von \mathbb{R} beweisen zu können. Die folgenden beiden Sätze drücken exakt das Gleiche aus.

Satz 4.10 (Vollständigkeit von \mathbb{R}) *Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen, versehen mit dem Betragsabstand, ist ein vollständiger metrischer Raum.*

Satz 4.11 (Cauchysches Konvergenzkriterium) *Eine Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie eine Fundamentalfolge ist.*

Beweis. In Satz 3.24 haben wir bewiesen, dass jede konvergente Folge eine Fundamentalfolge ist. Zu zeigen ist also noch, dass jede Fundamentalfolge reeller Zahlen konvergiert. Wir gliedern den Beweis in drei Schritte.

1. Schritt: Wir zeigen, dass jede Fundamentalfolge beschränkt ist. Sei (a_n) eine Fundamentalfolge. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|a_n - a_m| < 1 \quad \text{für alle } m, n \geq N.$$

Insbesondere ist $|a_n - a_N| < 1$ für alle $n \geq N$. Von der Stelle N an liegen also alle Folgenglieder in der 1-Umgebung von a_N . Wir vergrößern diese Umgebung so weit, dass sie auch die übrigen (endlich vielen) Folgenglieder a_0, a_1, \dots, a_{N-1} umfasst. In dieser vergrößerten Umgebung liegen alle Glieder der Folge. Also ist die Folge (a_n) beschränkt.

2. Schritt: Aus Schritt 1 und dem Satz von Bolzano/Weierstraß folgt sofort: *Jede Fundamentalfolge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

3. Schritt: Wir zeigen abschließend: *Wenn eine Fundamentalfolge eine konvergente Teilfolge besitzt, so ist sie selbst konvergent.*

Sei (a_n) eine Fundamentalfolge und (a_{k_n}) eine konvergente Teilfolge von (a_n) mit Grenzwert a . Weiter sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da (a_n) eine Fundamentalfolge ist, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } m, n \geq N_1.$$

Da die Folge (a_{k_n}) gegen a konvergiert, gibt es außerdem ein $N_2 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a - a_{k_n}| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq N_2.$$

Wegen $k_n \geq n$ gilt für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$

$$|a - a_n| = |a - a_{k_n} + a_{k_n} - a_n| \leq |a - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a_n| < \varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge (a_n) und hat a als ihren Grenzwert. ■

Beachten Sie, dass die in den Schritten 1 und 3 formulierten Teilaussagen in beliebigen metrischen Räumen gelten.

4.3 Einige wichtige Grenzwerte

Beispiel 1. Sei $r \in \mathbb{R}$ und $a_n := r^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{falls } r > 1 \quad (\text{bestimmte Divergenz}), \\ 1 & \text{falls } r = 1, \\ 0 & \text{falls } r \in (-1, 1), \end{cases}$$

und die Folge (a_n) ist divergent, aber nicht bestimmt divergent, für $r \leq -1$. Es gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ für $r \in \mathbb{C}$ und $|r| < 1$. Dies sollen Sie in der Übung zeigen. ■

Beispiel 2. Sei $r > 0$. Für jede positive natürliche Zahl n sei $a_n := \sqrt[n]{r}$. Wir haben uns bisher nicht über n . Wurzeln aus positiven reellen Zahlen unterhalten, falls $n > 2$. Dies holen wir später nach. Im Moment genügen uns die Kenntnisse aus der Schule. Man kann $\sqrt[k]{r}$ auch wie beim babylonischen Wurzelziehen erklären. Die durch den Startwert $w_0 := r$ und die Iterationsvorschrift

$$w_{n+1} := \frac{1}{k} \left((k-1)w_n + \frac{r}{w_n^{k-1}} \right) \quad \text{für } n \geq 0$$

festgelegte Folge (w_n) konvergiert nämlich gegen $\sqrt[k]{r}$.

Wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r} = 1.$$

Sei zunächst $r \geq 1$. Setzt man in der Bernoullischen Ungleichung

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \text{für alle } a > -1 \text{ und alle } n \in \mathbb{N}$$

für a den Wert $\sqrt[n]{r} - 1$ ein, so erhält man nach einfachen Umformungen

$$0 \leq \sqrt[n]{r} - 1 \leq \frac{r-1}{n}.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r-1}{n} = 0$ folgt die Behauptung aus dem Einschließungskriterium (Satz 4.2). Liegt r in $(0, 1)$, so schreiben wir r als $1/s$ mit $s > 1$ und können wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{s}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{s}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{s}}$$

(nach Satz 4.4) das Resultat für $r > 1$ anwenden. ■

Beispiel 3. Wir zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Dazu leiten wir zunächst die folgende Ungleichung her:

$$\text{Für alle } x \geq 0 \text{ und jede natürliche Zahl } n \geq 2 \text{ gilt: } (1+x)^n \geq \frac{n^2}{4} x^2. \quad (4.2)$$

Nach dem binomischen Satz ist

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \geq \binom{n}{2} x^2 = \frac{n(n-1)}{2} x^2,$$

da alle weggelassenen Summanden nicht negativ sind. Die zu zeigende Ungleichung folgt nun sofort aus

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2} (n-1) \geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}.$$

Setzen wir in der Ungleichung (4.2) für x den Wert $\frac{2}{\sqrt[n]{n}}$ ein, so folgt

$$\left(1 + \frac{2}{\sqrt[n]{n}}\right)^n \geq \frac{n^2}{4} \cdot \frac{4}{n} = n \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt[n]{n}}.$$

Es ist also $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt[n]{n}}$ für alle $n \geq 1$. Wir zeigen nun noch, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0. \quad (4.3)$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $N > 1/\varepsilon^2$. Für alle $n \geq N$ ist dann

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon.$$

Hieraus folgt (4.3), und das Einschließungskriterium (Satz 4.2) liefert die Behauptung. ■

Beispiel 4. Wir wollen zeigen, dass die Folge (a_n) mit $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ konvergiert. Dazu zeigen wir, dass diese Folge monoton wächst und nach oben durch 3 beschränkt ist. Satz 4.6 liefert dann die Existenz des Grenzwertes.

Monotonie. Für $n \geq 2$ ist

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1}.$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} = 1,$$

d.h. es ist $a_n \geq a_{n-1}$ für alle $n \geq 2$.

Beschränktheit. Aus dem binomischen Satz folgt zunächst

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Für alle $k \geq 1$ gilt die Abschätzung

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Hieraus und mit der Summenformel für die geometrische Reihe folgt

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Damit ist die Existenz des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ gesichert. Dieser Grenzwert heißt *Eulersche Zahl* und wird mit e bezeichnet. Eine näherungsweise Berechnung liefert $e \approx 2.7182\dots$ Wir zeigen später, dass e irrational ist. ■

Beispiel 5. Für $n \geq 1$ sei $a_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$. Wir wollen die Konvergenz der Folge (a_n) nachweisen. Da diese Folge offenbar nicht monoton ist, arbeiten wir mit dem Cauchyschen Konvergenzkriterium, d.h. wir zeigen, dass (a_n) eine Fundamentalfolge ist. Für $m \geq n+2$ ist

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^m (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \right| = \left| (-1)^n \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^m (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} - \sum_{k=n+2}^m (-1)^{k-n} \frac{1}{k} \right|. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Weiter ist

$$\sum_{k=n+2}^m (-1)^{k-n} \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) + \dots > 0$$

sowie

$$\sum_{k=n+2}^m (-1)^{k-n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+2} - \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) - \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} \right) - \dots < \frac{1}{n+2}.$$

Hieraus und aus (4.4) folgt $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Dies gilt nun sogar für alle $m \geq n$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Für alle $m, n \geq N$ gilt dann

$$|a_m - a_n| \leq \max \left\{ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1} \right\} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Also ist (a_n) eine Fundamentalfolge und damit konvergent. Wir werden später zeigen, dass der Grenzwert dieser Folge gleich $\ln 2$ ist. ■

4.4 Partielle Grenzwerte

Sei (M, d) ein metrischer Raum und (a_n) eine Folge in M . Ein Punkt $a \in M$ heißt *partieller Grenzwert* der Folge (a_n) , wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert. Eine konvergente Folge besitzt genau einen partiellen Grenzwert, nämlich den Grenzwert dieser Folge. In den folgenden Beispielen ist $M = \mathbb{R}$.

Beispiele. (1) Sei $a_n := (-1)^n$. Die Folgenglieder mit geradem Index sind gleich 1, die mit ungeradem Index gleich -1 . Die Folge (a_n) besitzt daher genau zwei partielle Grenzwerte, nämlich 1 und -1 .

(2) Die Folge $(1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, \dots)$ hat 0 und 1 als ihre partiellen Grenzwerte.

(3) Sei (a_n) eine Folge, deren Werte die rationalen Zahlen aus $(0, 1)$ durchlaufen (eine solche Folge haben wir im Beweis der Abzählbarkeit von \mathbb{Q} konstruiert). Dann ist *jeder* Punkt aus $[0, 1]$ ein partieller Grenzwert der Folge (a_n) . ■

Satz 4.12 Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine beschränkte Folge in \mathbb{R} . Dann ist die Menge aller partiellen Grenzwerte von (a_n) abgeschlossen, beschränkt und nicht leer.

Zum Beweis. Aus dem Satz von Bolzano/Weierstraß wissen wir, dass jede beschränkte Folge reeller Zahlen eine konvergente Teilfolge besitzt. Also ist die Menge der partiellen Grenzwerte von (a_n) nicht leer. Dass diese Menge auch abgeschlossen und beschränkt ist, bleibt auch richtig, wenn in der Formulierung des Satzes \mathbb{R} durch einen beliebigen metrischen Raum ersetzt wird. Diesen Beweis sollen Sie in der Übung führen. ■

Wir betrachten nun ausschließlich Folgen in \mathbb{R} . Da die Menge der partiellen Grenzwerte einer beschränkten Folge nichtleer und beschränkt ist, besitzt sie ein endliches Infimum und Supremum. Da diese Menge außerdem abgeschlossen ist, gehören Infimum und Supremum zur Menge. Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt also einen kleinsten und einen größten partiellen Grenzwert. Diese heißen der *Limes inferior* oder der *untere Limes* bzw. der *Limes superior* oder der *obere Limes* von (a_n) und werden mit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

bezeichnet. Ist die Folge (a_n) nach unten bzw. oben unbeschränkt, so schreibt man auch

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

In den oben betrachteten Beispielen (2) und (3) ist offenbar $\liminf a_n = 0$ und $\limsup a_n = 1$.

Es ist auch klar, dass eine beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen genau dann konvergiert, wenn $\liminf a_n = \limsup a_n$, und dass in diesem Fall der Grenzwert der Folge mit $\liminf a_n$ übereinstimmt. Schließlich sei noch - ohne Beweis - vermerkt, dass für jede beschränkte Folge (a_n) gilt:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf \{a_k : k \geq n\}), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup \{a_k : k \geq n\}).$$

4.5 Die Vollständigkeit von \mathbb{R}^k und \mathbb{C}

Wir betrachten nun Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ in \mathbb{R}^k , den wir mit dem Euklidischen Abstand versehen. Jedes Folgenglied a_n ist ein k -Tupel $a_n = (a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(k)})$. Daher definiert jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in \mathbb{R}^k k *Koordinatenfolgen* $(a_n^{(1)})_{n \geq 1}, \dots, (a_n^{(k)})_{n \geq 1}$. Dies sind Folgen reeller Zahlen.

Satz 4.13 *Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in \mathbb{R}^k . Dann gilt:*

- (a) *Die Folge (a_n) konvergiert genau dann in \mathbb{R}^k , wenn jede ihrer Koordinatenfolgen in \mathbb{R} konvergiert. In diesem Fall gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(1)}, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(k)} \right).$$

- (b) *Die Folge (a_n) ist genau dann eine Fundamentalfolge in \mathbb{R}^k , wenn jede ihrer Koordinatenfolgen eine Fundamentalfolge in \mathbb{R} ist.*

Beweis. Wir zeigen nur Aussage (a). Aussage (b) lässt sich völlig analog nachweisen.

Die Folge (a_n) mit $a_n = (a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(k)})$ konvergiere gegen $a = (a^{(1)}, \dots, a^{(k)})$. Für jedes $j = 1, \dots, k$ gilt dann

$$0 \leq |a_n^{(j)} - a^{(j)}| \leq \sqrt{(a_n^{(1)} - a^{(1)})^2 + \dots + (a_n^{(k)} - a^{(k)})^2} = \|a_n - a\| \rightarrow 0.$$

Jede Folge $(a_n^{(j)})_{n \geq 1}$ konvergiert also gegen $a^{(j)}$.

Es gelte umgekehrt $a_n^{(j)} \rightarrow a^{(j)}$ für jedes $j = 1, \dots, k$. Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $j = 1, \dots, k$ gibt es dann ein $N_j \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_n^{(j)} - a^{(j)}| < \varepsilon/\sqrt{k} \quad \text{für alle } n \geq N_j.$$

Sei $N := \max\{N_1, \dots, N_k\}$. Für alle $n \geq N$ ist dann

$$0 \leq \|a_n - a\|^2 = \sum_{j=1}^k |a_n^{(j)} - a^{(j)}|^2 < \varepsilon^2,$$

also $0 \leq \|a_n - a\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Somit gilt $a_n \rightarrow a$. ■

Satz 4.14 *Für jedes $k \geq 1$ ist der Raum \mathbb{R}^k , versehen mit dem Euklidischen Abstand, vollständig.*

Beweis. Ist (a_n) eine Fundamentalfolge in \mathbb{R}^k , so ist nach Satz 4.13 (b) jede Koordinatenfolge $(a_n^{(j)})$ eine Fundamentalfolge in \mathbb{R} . Da \mathbb{R} vollständig ist (Cauchysches Konvergenzkriterium), konvergiert jede Koordinatenfolge in \mathbb{R} . Nach Satz 4.13 (a) konvergiert dann auch die Folge (a_n) in \mathbb{R}^k . ■

Folgerung 4.15 *Der Raum $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist vollständig.*

Folgerung 4.16 *In \mathbb{R}^k (insbesondere in \mathbb{C}) gilt der Cantorsche Durchschnittssatz.*

Folgerung 4.17 (Bolzano/Weierstraß in \mathbb{R}^k)

(a) *Jede unendliche beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^k besitzt einen Häufungspunkt.*

(b) *Jede beschränkte Folge in \mathbb{R}^k besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Wir skizzieren den Beweis von Aussage (b). Ist (a_n) eine beschränkte Folge in \mathbb{R}^k , so ist jede der Koordinatenfolgen $(a_n^{(j)})$ beschränkt in \mathbb{R} . Nach Bolzano/Weierstraß für \mathbb{R} (= Satz 4.9) findet man eine Teilfolge (a_{k_n}) von (a_n) , für die die erste Koordinatenfolge $(a_{k_n}^{(1)})$ konvergiert. Für diese Teilfolge findet man wiederum eine Teilfolge, für die auch die zweite Koordinatenfolge konvergiert. Wir fahren so fort und erhalten schließlich eine Teilfolge von (a_n) , für die jede Koordinatenfolge konvergiert. Nach Satz 4.13 (a) ist diese Teilfolge selbst konvergent. ■

Ein Ausblick: Julia-Mengen Diese nach Gaston Julia (1893 – 1978) benannten

Mengen zeigen, dass bereits einfachste Bildungsvorschriften für Folgen zu sehr komplexen Erscheinungen führen können. Wir fixieren eine komplexe Zahl c und betrachten für jeden Startwert $z_0 \in \mathbb{C}$ die durch

$$z_{n+1} := z_n^2 + c, \quad n \in \mathbb{N}$$

bestimmte Folge $(z_n)_{n \geq 0}$. Offenbar gibt es für jeden Startwert z_0 genau zwei Möglichkeiten: entweder die Folge (z_n) ist beschränkt, oder sie ist unbeschränkt. Die Menge aller Startwerte, für die die Folge (z_n) beschränkt bleibt, heißt die *Gefangenenmenge* des Parameters c , und die übrigen Startwerte fasst man zur *Fluchtmenge* von c zusammen.

Beide Mengen sind nicht leer. Da die Gleichung $z^2 + c = z$ stets eine komplexe Lösung besitzt, gibt es nämlich Startwerte, für die die Folge (z_n) konstant ist. Also ist die Gefangenenmenge nicht leer. Andererseits kann man sich leicht überlegen, dass Startwerte mit genügend großem Betrag immer in der Fluchtmenge liegen.

Unter der *Juliamenge* des Parameters c versteht man den gemeinsamen Rand der Gefangenen- bzw. Fluchtmenge von c . Für $c = 0$ ist

$$z_{n+1} = z_n^2 = z_{n-1}^4 = \dots = z_0^{2^{n+1}},$$

so dass die Gefangenenmenge gerade die Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ und die Juliamenge die Einheitskreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist. Bei anderen Parametern c wird man in der Regel wesentlich kompliziertere (und ästhetisch ansprechende) Juliamengen erhalten. Eine Auswahl von Bildern solcher Mengen finden Sie beispielsweise in den Büchern von Peitgen, Jürgens und Saupe: “Bausteine des Chaos: Fraktale” und “Chaos: Bausteine der Ordnung”.

Auch die berühmte *Mandelbrot-Menge* (auch als “Apfelmännchen” bekannt) lässt sich auf ähnliche Weise definieren. Sie besteht genau aus den Zahlen $c \in \mathbb{C}$, für die die durch $z_0 := c$ und $z_{n+1} := z_n^2 + c$ erklärte Folge beschränkt ist. Zwischen Juliamengen und der Mandelbrotmenge gibt es zahlreiche Verbindungen. Auf eine davon gehen wir später ein.

5 Zahlenreihen

Mit Hilfe der Körperaxiome lassen sich Summen *endlich* vieler Zahlen erklären. In diesem Abschnitt untersuchen wir Summen unendlich vieler Zahlen – so genannte Reihen. Dazu betrachten wir Reihen als spezielle Folgen.

5.1 Konvergenz von Reihen

Wir beginnen mit der Definition einer Reihe.

Definition 5.1 Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen, und sei $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$. Die Folge $(s_n)_{n \geq 0}$ heißt die zu (a_n) gehörende Reihe. Die Zahlen a_n heißen die Glieder der Reihe, und die s_n ihre Partialsummen. Ist die Folge (s_n) konvergent und s ihr Grenzwert, so heißt die Reihe konvergent, die Zahl s heißt die Summe dieser Reihe, und man schreibt $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Konvergiert die Folge (s_n) nicht, so heißt die Reihe divergent.

Eine Reihe ist also die Folge ihrer Partialsummen. Häufig wählt man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auch als *Bezeichnung* für die Reihe (s_n) (und formuliert Aussagen wie: *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ ist divergent.*) Aus dem Kontext wird in der Regel klar, ob $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für die Reihe selbst oder für ihre Summe steht.

Es macht offenbar keinen Sinn, Reihen in allgemeinen metrischen Räumen zu betrachten. Man kann aber Reihen in \mathbb{R}^k und insbesondere in \mathbb{C} definieren. **Viele der nachfolgenden Resultate gelten auch für Reihen in \mathbb{R}^k und in \mathbb{C}** (gegebenenfalls nach Ersetzen des Betrages durch die Euklidische Norm).

Satz 5.2 (Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| = |a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } m > n \geq N.$$

Beweis. Wir wenden das Cauchysche Konvergenzkriterium auf die Folge (s_n) an und beachten, dass

$$s_m - s_n = \sum_{k=0}^m a_k - \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=n+1}^m a_k$$

für alle $m > n$. ■

Wählt man $m = n + 1$ in Satz 5.2, so reduziert sich $\sum_{k=n+1}^m a_k$ auf einen einzigen Summanden a_{n+1} , und man erhält

Satz 5.3 (Notwendiges Konvergenzkriterium) Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Satz 5.2 liefert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Dagegen ist die Bedingung $\lim a_k = 0$ aus Satz 5.3 nur notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz dieser Reihe (vgl. das folgende Beispiel 2).

Beispiel 1: Die geometrische Reihe. Sei $z \in \mathbb{C}$ und $a_n = z^n$ für $n \geq 0$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ kann für $|z| \geq 1$ nicht konvergieren, da in diesem Fall die notwendige Bedingung aus Satz 5.3 verletzt ist. Sei also $|z| < 1$. Aus Abschnitt 1.3.4 wissen wir, dass

$$s_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0$ für $|z| < 1$ (vgl. Beispiel 1 aus Abschnitt 4.3), folgt sofort

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - z}, \quad \text{d.h.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z} \quad \text{für } |z| < 1.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ heißt *geometrische Reihe*. Sie konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$, und ihre Summe ist gleich $\frac{1}{1-z}$. ■

Beispiel 2: Die harmonische Reihe. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ heißt die *harmonische Reihe*. Für sie ist die notwendige Bedingung aus Satz 5.3 erfüllt. Dennoch divergiert diese Reihe. Für jedes $n \geq 1$ ist nämlich

$$|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium kann (s_n) nicht konvergieren. Da (s_n) bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, schreibt man auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. ■

Beispiel 3: Eine Reihe für e . Wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ gegen die in Beispiel 4 in Abschnitt 4.3 eingeführte Zahl e konvergiert. Dazu bezeichnen wir $(1 + \frac{1}{n})^n$ mit a_n und schreiben s_n für $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Im Beispiel 4 aus Abschnitt 4.3 haben wir uns überlegt, dass

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = s_n \leq 3. \quad (5.1)$$

Die Folge (s_n) ist offenbar monoton wachsend und wegen (5.1) nach oben beschränkt. Nach Satz 4.6 konvergiert diese Folge, und wir bezeichnen ihren Grenzwert mit s . Geht man in der Ungleichung $a_n \leq s_n$ aus (5.1) mit n gegen Unendlich, folgt $e \leq s$.

Wir überlegen uns nun, dass auch $e \geq s$ ist, und schätzen dazu a_n nach unten ab. Sei $m \in \mathbb{N}$ eine fixierte Zahl. Für alle $n \geq m$ ist

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}. \quad (5.2)$$

Auf der rechten Seite von (5.2) steht eine Summe mit einer von n unabhängigen Anzahl von Summanden, und für $n \rightarrow \infty$ geht der k . Summand gegen $\frac{1}{k!}$. Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in (5.2) liefert daher

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} = s_m. \quad (5.3)$$

Dies gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$. Lässt man in (5.3) m gegen Unendlich laufen, folgt $e \geq s$. Damit ist gezeigt, dass $s = e$.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist übrigens wesentlich besser zur näherungsweisen Berechnung von e geeignet als der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. ■

In Beispiel 5 aus Abschnitt 4.3 haben wir mit $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ ein weiteres Beispiel für eine konvergente Reihe kennengelernt. Der Konvergenznachweis aus diesem Beispiel lässt sich übertragen auf allgemeinere alternierende Reihen.

Definition 5.4 Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$ heißt alternierend, wenn $c_k > 0$ für alle k .

Satz 5.5 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen) Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$ eine alternierende Reihe. Zusätzlich gelte, dass die Folge (c_k) monoton fällt und gegen 0 konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$.

Beweis. Für $m > n$ sei $s_{nm} := c_{n+1} - c_{n+2} + c_{n+3} - \dots + (-1)^{m-n-1} c_m$. Dann ist zunächst

$$s_{nm} = (c_{n+1} - c_{n+2}) + (c_{n+3} - c_{n+4}) + \dots + \begin{cases} c_m & \text{falls } m - n \text{ ungerade,} \\ (c_{m-1} - c_m) & \text{falls } m - n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Da (c_n) monoton fallend ist und alle c_n positiv sind, folgt $s_{nm} \geq 0$. Durch anderes Setzen der Klammern erhalten wir

$$s_{nm} = c_{n+1} - (c_{n+2} - c_{n+3}) - \dots - \begin{cases} c_m & \text{falls } m - n \text{ gerade,} \\ (c_{m-1} - c_m) & \text{falls } m - n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wie vorher folgt hieraus $s_{nm} \leq c_{n+1}$.

Nach diesen Vorüberlegungen wenden wir das Cauchysche Konvergenzkriterium auf die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$ an. Für die Partialsummen dieser Reihe finden wir im Fall $m > n$

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |(-1)^{n+1} c_{n+1} + (-1)^{n+2} c_{n+2} + \dots + (-1)^m c_m| \\ &= |(-1)^{n+1}| |c_{n+1} - c_{n+2} + \dots + (-1)^{m-n-1} c_m| \\ &= |s_{nm}| = s_{nm} \leq c_{n+1}. \end{aligned}$$

Genauso ergibt sich $|s_m - s_n| \leq c_{m+1}$ im Fall $n \geq m$. In jedem Fall ist also

$$|s_m - s_n| \leq \max \{c_{m+1}, c_{n+1}\} \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\lim c_n = 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|c_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Sind nun $n, m \geq N$, so sind erst recht $n+1, m+1 \geq N$. Aus (5.4) folgt $|s_m - s_n| < \varepsilon$. Also ist (s_n) eine Fundamentalfolge und damit konvergent. ■

Aus diesem Kriterium folgt beispielsweise die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}.$$

Es folgen einige Anmerkungen zum Rechnen mit Reihen. Aus Satz 4.4 (a) erhalten wir sofort:

Satz 5.6 *Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$, und ihre Summe ist gleich*

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Bei *endlichen* Summen wissen wir, dass Klammern beliebig gesetzt werden dürfen (Assoziativität). Wie sieht dies bei Reihen aus?

Satz 5.7 *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen. Weiter sei $(k_n)_{n \geq 0}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$, und es sei $A_n := a_{k_n} + a_{k_n+1} + \dots + a_{k_{n+1}-1}$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ konvergent, und es ist*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Beweis. Wir setzen $S_m := \sum_{n=0}^m A_n$ und $s_m := \sum_{n=0}^m a_n$. Dann ist offenbar

$$S_m = A_0 + \dots + A_m = a_0 + a_1 + \dots + a_{k_{m+1}-1} = s_{k_{m+1}-1}.$$

Die Folge (S_m) ist also eine Teilfolge der konvergenten Folge (s_m) und folglich selbst konvergent. Außerdem haben beide Folgen den gleichen Grenzwert. ■

Man darf also in konvergenten Reihen beliebig Klammern setzen, ohne an den Konvergenzeigenschaften oder der Summe der Reihe etwas zu ändern. Man darf jedoch Klammern NICHT weglassen, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = 0$ für alle n konvergiert offenbar und hat die Summe 0. Wir können diese Reihe auch auffassen als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0 + 0 + 0 + \dots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

Weglassen der Klammern führt auf die divergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. ■

Bei endlichen Summen wissen wir auch, dass es auf die Reihenfolge der Summanden nicht ankommt (Kommutativität). Wir werden sehen, dass man die Glieder einer Reihe im allgemeinen NICHT vertauschen darf, dass aber eine Vertauschung möglich ist, wenn die Reihe stärkere Konvergenzeigenschaften besitzt. Mit diesen Eigenschaften befassen wir uns im nächsten Abschnitt.

5.2 Absolut konvergente Reihen

Definition 5.8 Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Beispielsweise ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent (Leibniz-Kriterium), aber nicht absolut konvergent (harmonische Reihe). Dagegen ist $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ eine konvergente (Leibniz-Kriterium) und auch absolut konvergente Reihe (Reihe für e). Reihen mit ausschließlich nichtnegativen Gliedern sind offenbar genau dann konvergent, wenn sie absolut konvergent sind. Da außerdem bei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ die Folge der Partialsummen monoton wächst, folgt mit Satz 4.6:

Eine Reihe mit ausschließlich nichtnegativen Gliedern ist genau dann (absolut) konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Satz 5.9 Absolut konvergente Reihen sind konvergent.

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe, und seien $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ sowie $S_n := \sum_{k=0}^n |a_k|$. Für alle $m > n$ gilt

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m| = S_m - S_n.$$

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|S_m - S_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$. Dann ist aber auch $|s_m - s_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$. Das Cauchysche Konvergenzkriterium liefert die Behauptung. ■

Wir sehen uns nun einige Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen an.

Satz 5.10 (Vergleichskriterium)

- (a) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent und gilt $|a_n| \leq b_n$ für alle n , so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- (b) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent und gilt $0 \leq b_n \leq a_n$ für alle n , so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Im Fall (a) heißt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine *konvergente Majorante* für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, im Fall (b) eine *divergente Minorante*.

Beweis. (a) Für jede Partialsumme s_n von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ gilt

$$s_n = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| \leq b_0 + b_1 + \dots + b_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty.$$

Die Folge (s_n) ist also nach oben beschränkt und offenbar monoton wachsend. Aus Satz 4.6 folgt die Konvergenz von (s_n) und damit die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Für die Partialsummen s_n von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gilt $s_n = a_0 + \dots + a_n \geq b_0 + \dots + b_n$. Da $\sum_{k=0}^n b_k$ mit n unbeschränkt wächst, ist auch die Folge (s_n) unbeschränkt. ■

Beispiel. (a) Die Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ lassen sich nach oben abschätzen durch

$$\frac{1}{n^2} \leq \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ \frac{1}{n(n-1)} & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Die Reihe $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ ist aber konvergent. Für ihre Partialsumme s_n gilt nämlich

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Die Folge (s_n) konvergiert also (und ihr Grenzwert ist 2). Daher konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Wir werden später sehen, dass die Summe dieser Reihe gleich $\pi^2/6$ ist.

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist eine konvergente Majorante für die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ mit $r \geq 2$, die sich damit ebenfalls als konvergent erweisen. ■

Satz 5.11 (Wurzelkriterium) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

(a) konvergiert absolut, wenn $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$,

(b) divergiert, wenn $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.

Im Fall $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ ist keine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ möglich. Aus Beispiel 3 in Abschnitt 4.3 wissen wir, dass $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Die Anwendung des Wurzelkriteriums auf die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ liefert also jeweils den Wert 1 für den oberen Limes. Die erste dieser Reihen ist divergent, während die zweite konvergent.

Beweis von Satz 5.11. Sei bezeichne $a := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

(a) Wir führen den Beweis mit Hilfe des Vergleichskriteriums und wählen als Vergleichsreihe eine geometrische Reihe. Sei $q \in (a, 1)$ (beachte: $a < 1$). Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ für alle $n \geq N$. (Dies folgt unmittelbar aus der Definition des oberen Limes; anderenfalls wären ja unendlich viele der $\sqrt[n]{|a_n|}$ größer oder gleich q . Diese hätten einen partiellen Grenzwert größer oder gleich $q > a$, was der Definition von a widerspricht.) Es ist also

$$|a_n| < q^n \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Da die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} q^n$ konvergiert (Beispiel 1 aus Abschnitt 5.1), konvergiert nach Satz 5.10 (a) die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

(b) Wegen $a > 1$ gibt es natürliche Zahlen $k_0 < k_1 < \dots$ so, dass $\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} \geq 1$ für alle $n \geq 1$. Es gilt also $|a_{k_n}| \geq 1$ für unendlich viele Glieder der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so dass das notwendige Konvergenzkriterium (Satz 5.3) verletzt ist. ■

In einigen Fällen einfacher zu handhaben, dafür aber schwächer als das Wurzelkriterium, ist das folgende Kriterium.

Satz 5.12 (Quotientenkriterium) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

(a) konvergiert absolut, wenn $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$,

(b) divergiert, wenn $a_n \neq 0$ und $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ für alle hinreichend großen n . Insbesondere ist $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ hinreichend für die Divergenz.

Beweis. (a) Sei $b := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$. Wir wählen ein $q \in (b, 1)$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$ für alle $n \geq N$. Hieraus erhalten wir schrittweise

$$|a_{N+1}| < q|a_N|, \quad |a_{N+2}| < q|a_{N+1}| < q^2|a_N|, \dots$$

und allgemein (wie man leicht mit vollständiger Induktion bestätigt)

$$|a_n| \leq q^{n-N}|a_N| \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} q^{n-N}|a_N| = |a_N| \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist wegen $q \in (0, 1)$ konvergent (geometrische Reihe) und folglich eine konvergente Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \dots \geq |a_{N+1}| \geq |a_N| > 0.$$

Das notwendige Konvergenzkriterium (Satz 5.3) ist also verletzt. ■

Man kann folgendes beweisen (vgl. Barner/Flohr, Analysis 1, S. 161): Wenn $a_n \neq 0$ für alle hinreichend großen n , dann ist

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Wenn also die absolute Konvergenz einer Reihe aus dem Quotientenkriterium folgt, so kann man sie (wenigstens im Prinzip) auch aus dem Wurzelkriterium herleiten. Das Wurzelkriterium liefert mitunter aber auch dann noch eine Entscheidung, wenn das Quotientenkriterium versagt.

Beispiel. Sei $0 < q < 1$. Wir betrachten die folgende Umordnung der geometrischen Reihe

$$q^1 + q^0 + q^3 + q^2 + q^5 + q^4 + q^7 + q^6 + \dots$$

Für diese Reihe ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \begin{cases} 1/q > 1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ q^3 < 1 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es ist daher $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1/q > 1$ und $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q^3 < 1$, so dass das Quotientenkriterium keine Entscheidung liefert. Dagegen ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{q^{n+1}} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \sqrt[n]{q^{n-1}} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1.$$

Die Reihe konvergiert also absolut nach dem Wurzelkriterium. ■

Es gibt eine Vielzahl weiterer Konvergenzkriterien. Beispielsweise gilt

Satz 5.13 (Raabesches Kriterium)

- (a) Für alle hinreichend großen n sei $a_n \neq 0$ und $\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \leq 1 - \frac{c}{n}$ mit einer Konstanten $c > 1$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- (b) Für alle hinreichend großen n sei $a_n > 0$ und $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 - \frac{1}{n}$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Einen Beweis finden Sie in Barner/Flohr, S. 163. Mit diesem Satz lässt sich z.B. die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nachprüfen, was mit dem Wurzelkriterium nicht gelingt.

Satz 5.14 (Cauchyscher Verdichtungssatz) Sei $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die „verdichtete“ Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert. Im Konvergenzfall ist also $\lim 2^n a_{2^n} = 0$.

Einen Beweis sollen Sie in der Übung finden. Dieser Satz zeigt auf einfache Weise (↗ Übung), dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \quad \text{mit } r > 1$$

konvergiert.

5.3 Umordnung von Reihen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ (d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit den Gliedern $b_n = a_{\sigma(n)}$) heißt eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *unbedingt konvergent*, wenn sie konvergiert und wenn auch jede Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert und die gleiche Summe wie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hat. Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht unbedingt konvergent, so heißt sie *bedingt konvergent*.

Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ (mit $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$) konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, und wegen

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ist die Summe dieser Reihe positiv. (Diese Summe ist $\ln 2$, wie wir später sehen werden.) Wir definieren eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ durch

n	1	2	3	4	5	6	...	$3m-2$	$3m-1$	$3m$...
$\sigma(n)$	1	3	2	5	7	4	...	$4m-3$	$4m-1$	$2m$...

Die entsprechende umgeordnete Reihe ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots \\ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \dots \\ \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Die umgeordnete Reihe konvergiert also ebenfalls. Ihre Summe $\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist aber wegen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > 0$ von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verschieden. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist also nur bedingt konvergent. ■

Satz 5.15 *Eine Reihe komplexer Zahlen ist genau dann unbedingt konvergent, wenn sie absolut konvergent ist.*

Beweis. *Schritt 1.* Sei zunächst $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente (= absolut konvergente) Reihe nichtnegativer reeller Zahlen. Wir zeigen, dass diese Reihe unbedingt konvergiert. Dazu sei $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion, und seien

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k, \quad S_n := \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)}$$

die Partialsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bzw. der durch σ definierten Umordnung dieser Reihe. Beide Folgen (s_n) und (S_n) sind monoton wachsend. Sei $s := \sup s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Dann ist s eine obere Schranke für $\{S_m : m \in \mathbb{N}\}$. Um dies einzusehen, definieren wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein n durch

$$n := \max \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(m)\}.$$

Dann kommen alle Summanden von S_m auch in s_n vor, und es ist in der Tat

$$S_m \leq s_n \leq s \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (5.5)$$

Die Folge (S_m) ist also nach oben beschränkt und folglich konvergent. Für ihren Grenzwert S gilt wegen (5.5) $S \leq s$.

Wenn wir diese Überlegung wiederholen, dabei aber $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als Umordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ betrachten (die zugehörige Bijektion ist die Umkehrabbildung σ^{-1} zu σ), so gelangen wir zur Ungleichung $s \leq S$. Also ist $s = S$.

Schritt 2. Sei nun $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen. Für jede *reelle* Zahl a definieren wir

$$a^+ := \max \{a, 0\} \quad \text{und} \quad a^- := \max \{-a, 0\}.$$

Offenbar gilt $a = a^+ - a^-$ und $|a| = a^+ + a^-$ für jedes $a \in \mathbb{R}$. Jede *komplexe* Zahl $a = b + ic$ mit $b, c \in \mathbb{R}$ kann nun geschrieben werden als $a = (b^+ - b^-) + i(c^+ - c^-)$. In diesem Sinn schreiben wir

$$a_n = b_n + ic_n = (b_n^+ - b_n^-) + i(c_n^+ - c_n^-) \quad \text{mit } b_n^{\pm}, c_n^{\pm} \geq 0.$$

Aus $|b_n| = |\operatorname{Re} a_n| \leq |a_n|$ folgt, dass $\sum |a_n|$ eine konvergente Majorante für $\sum |b_n|$ ist. Also konvergiert die Reihe $\sum b_n$ absolut. Weiter ist $|b_n^+| \leq |b_n|$, so dass auch die Reihe $\sum b_n^+$ absolut konvergiert. Analog erhält man die absolute Konvergenz der Reihen $\sum b_n^-$, $\sum c_n^+$ und $\sum c_n^-$. Diese Reihen haben ausschließlich nichtnegative Glieder und können demzufolge nach Schritt 1 umgeordnet werden, ohne etwas an ihren Summen zu ändern. Für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gilt also

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \sum b_n^+ - \sum b_n^- + i \sum c_n^+ - i \sum c_n^- \\ &= \sum b_{\sigma(n)}^+ - \sum b_{\sigma(n)}^- + i \sum c_{\sigma(n)}^+ - i \sum c_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Jede absolut konvergente Reihe ist also unbedingt konvergent.

Schritt 3. Sei nun $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen, die nicht absolut konvergiert. Aus Satz 4.13 folgt, dass dann die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ konvergieren, aber wenigstens eine dieser Reihen konvergiert nicht

absolut. Die absolute Konvergenz jeder dieser beiden Reihen würde nämlich wegen $|a_n| \leq |\operatorname{Re} a_n| + |\operatorname{Im} a_n|$ die absolute Konvergenz der Reihe $\sum a_n$ erzwingen.

Wenn wir zeigen können, dass jede konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe *reeller* Zahlen eine Umordnung besitzt, deren Summe nicht mit der Summe der ursprünglichen Reihe übereinstimmt, dann ist klar, dass auch die Reihe $\sum a_n$ nicht unbedingt konvergent sein kann. Diese Behauptung formulieren wir als einen eigenständigen Satz, dessen Beweis den Beweis von Satz 5.15 abschließt. ■

Satz 5.16 (Riemannscher Umordnungssatz) *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann gibt es für jede Zahl $S \in \mathbb{R}$ eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ so, dass die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergiert und ihre Summe gleich S ist.*

Auch die bestimmte Divergenz der umgeordneten Reihe gegen $+\infty$ oder $-\infty$ lässt sich erreichen.

Beweisidee. Sei (p_n) die Folge, die aus (a_n) durch Streichen aller negativen Glieder entsteht, und (q_n) sei die Folge, die entsteht, wenn in (a_n) alle nichtnegativen Glieder gestrichen werden und die übrig bleibenden Zahlen mit -1 multipliziert werden. Nach Definition sind (p_n) und (q_n) Folgen nichtnegativer Zahlen. In einem ersten Beweisschritt macht man sich klar, dass jede der Reihen $\sum p_n$ und $\sum q_n$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.

Ist dies geschehen, konstruiert man die gesuchte Umordnung wie folgt: man wählt k_0 als kleinste natürliche Zahl mit

$$\sum_{n=0}^{k_0} p_n > S.$$

Dann wählt man k_1 als kleinste natürliche Zahl mit

$$\sum_{n=0}^{k_0} p_n - \sum_{n=0}^{k_1} q_n < S.$$

Anschließend wählt man k_2 als kleinste natürliche Zahl größer als k_0 mit

$$\sum_{n=0}^{k_0} p_n - \sum_{n=0}^{k_1} q_n + \sum_{n=k_0+1}^{k_2} p_n > S$$

usw. Die gesuchte Umordnung $(a_{\sigma(n)})$ von (a_n) ist dann die Folge

$$(p_0, p_1, \dots, p_{k_0}, -q_0, -q_1, \dots, -q_{k_1}, p_{k_0+1}, p_{k_0+2}, \dots, p_{k_2}, -q_{k_1+1}, \dots).$$

In der Tat, für $k_{2m} \leq n < k_{2m+1}$ unterscheidet sich die n . Partialsumme der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ höchstens um $p_{k_{2m}}$ von S , und für $k_{2m+1} \leq n < k_{2m+2}$ unterscheiden die n . Partialsumme und S höchstens um $q_{k_{2m+1}}$. Da (p_n) und (q_n) nach dem notwendigen Konvergenzkriterium Nullfolgen sind, folgt die Konvergenz der umgeordneten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ gegen S . ■

5.4 Produkte von Reihen

Das Produkt der beiden endlichen Summen $a_0 + \dots + a_n$ und $b_0 + \dots + b_m$ ist gleich der Summe über alle Produkte $a_i b_j$ mit $0 \leq i \leq n$ und $0 \leq j \leq m$. Analog entstehen beim formalen Multiplizieren der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ die Produkte

$$\begin{array}{cccccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & \dots & \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \end{array} \quad (5.6)$$

Es ist keineswegs offensichtlich, wie diese Produkte in einer "neuen Reihe" $\sum c_n$, dem Produkt der Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$, angeordnet werden sollen. Falls jedoch beide Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergieren, dann kommt es auf die Art der Anordnung der Produkte 5.6 überhaupt nicht an. Dies zeigt der folgende Satz.

Satz 5.17 *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen, und die Folge $(c_n)_{n \geq 0}$ durchlaufe die Menge der Produkte in (5.6) (genauer: mit einer gewissen Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $n \mapsto (\sigma_1(n), \sigma_2(n))$) gilt $c_n = a_{\sigma_1(n)} b_{\sigma_2(n)}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut, und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right). \quad (5.7)$$

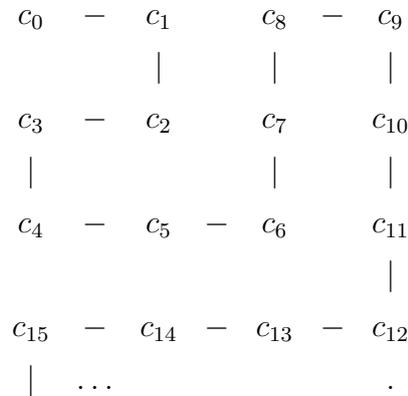
Beweis. Wir zeigen zuerst die absolute Konvergenz der Reihe $\sum c_n$. Dazu bezeichnen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit ℓ_n die kleinste natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft: alle Folgenglieder c_0, \dots, c_n kommen unter den Produkten $a_k b_m$ mit $k \leq \ell_n$ und $m \leq \ell_n$ vor. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^n |c_k| \leq \sum_{k=0}^{\ell_n} \sum_{m=0}^{\ell_n} |a_k b_m| = \left(\sum_{k=0}^{\ell_n} |a_k| \right) \left(\sum_{m=0}^{\ell_n} |b_m| \right) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \right).$$

Die rechte Seite dieser Abschätzung ist nach Voraussetzung endlich, also konvergiert die Reihe $\sum c_n$ absolut.

Wir zeigen nun noch die Produktformel (5.7). Nach Satz 5.15 ist die Reihe $\sum c_n$ unbedingt konvergent und kann beliebig umgeordnet werden. Insbesondere

können wir für (c_n) eine Folge wählen, die die Produkte (5.6) wie folgt durchläuft:

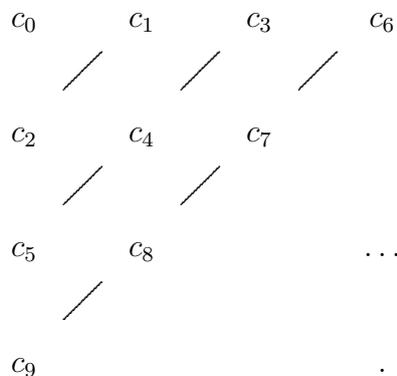


Bei dieser Art des Durchlaufens gilt für die Partialsummen $s_{n^2-1} := \sum_{k=0}^{n^2-1} c_k$

$$s_{n^2-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} a_k b_m = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) \left(\sum_{m=0}^{n-1} b_m \right).$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert die Behauptung (5.7). ■

Für Produkte von Potenzreihen, die wir im nächsten Abschnitt kennenlernen werden, ist eine andere Variante des Durchlaufens der Produkte (5.6) besonders interessant:



Nach Setzen von Klammern führt dies auf die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \tag{5.8}$$

Für beliebige (nicht notwendig konvergente) Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nennt man die durch (5.8) erklärte Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ mit $d_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ das *Cauchy-Produkt* dieser Reihen. Da es sich dabei nur um ein spezielles Durchlaufen der Produkte (5.6) handelt, liefert Satz 5.17 sofort:

Folgerung 5.18 Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen, so ist auch ihr Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Aussage von Folgerung 5.18 nicht mehr gilt, wenn die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nicht absolut konvergieren.

Beispiel. Für $n \geq 1$ sei $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, aber sie konvergieren nicht absolut, da die harmonische Reihe eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist.

Das allgemeine Glied des Cauchyprodukts $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ lautet

$$d_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}}.$$

Nun ist für jedes natürliche $n \geq 1$ und jedes k zwischen 1 und n

$$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}} \geq \frac{2}{n+1}. \quad (5.9)$$

Um dies einzusehen, formen wir äquivalent um:

$$\sqrt{k(n+1-k)} \leq \frac{n+1}{2},$$

und das ist nichts anderes als die bekannte Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel der Zahlen k und $n+1-k$. Aus (5.9) folgt nun

$$|d_n| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1} \geq 1.$$

Das Cauchyprodukt $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergiert nach dem notwendigen Konvergenzkriterium. ■

6 Stetige Funktionen

Zahlreiche Naturvorgänge lassen sich durch Abbildungen (von nun an sagen wir meist *Funktionen*) mit folgender Eigenschaft beschreiben: *kleine Änderungen des Argumentes bewirken auch nur kleine Änderungen des Funktionswertes*. Wir werden diese Eigenschaft präzisieren und gelangen so zum Begriff der Stetigkeit.

6.1 Stetige Funktionen

In diesem Abschnitt seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

Definition 6.1 (a) Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt stetig im Punkt $x^* \in X$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ in X mit Grenzwert x^* die Folge $(f(x_n))_{n \geq 0}$ der Funktionswerte in Y konvergiert und ihr Grenzwert gleich $f(x^*)$ ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x^*) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n).$$

(b) Die Funktion f heißt stetig auf X , wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Die Stetigkeit in einem Punkt lässt sich wie folgt charakterisieren.

Satz 6.2 Die Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig in $x^* \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x^*) < \delta$ gilt $d_Y(f(x), f(x^*)) < \varepsilon$.

In Kurzfassung lautet diese Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x^*) : \quad f(x) \in U_\varepsilon(f(x^*)) \quad (6.1)$$

oder noch kürzer

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad f(U_\delta(x^*)) \subseteq U_\varepsilon(f(x^*)).$$

Beweis. (\Rightarrow) Wir zeigen: gilt (6.1) nicht, dann ist f nicht stetig in x^* . Sei also (6.1) verletzt, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in U_\delta(x^*) : \quad f(x) \notin U_\varepsilon(f(x^*)).$$

Da dies für jedes $\delta > 0$ gilt, können wir $\delta := 1/k$ mit $k \geq 1$ wählen und erhalten für ein gewisses $\varepsilon > 0$

$$\forall k \geq 1 \quad \exists x_k \in U_{1/k}(x^*) : \quad f(x_k) \notin U_\varepsilon(f(x^*)).$$

Die x_k konvergieren also gegen x^* , die Funktionswerte $f(x_k)$ konvergieren jedoch nicht gegen $f(x^*)$. Somit ist f nicht stetig in x^* .

(\Leftarrow) Wir zeigen: gilt (6.1), so ist f stetig in x^* . Sei (x_n) sei eine Folge in X mit

Grenzwert x^* . Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir δ gemäß (6.1). Wegen $\lim x_n = x^*$ finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$x_n \in U_\delta(x^*) \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wegen (6.1) ist dann für alle $n \geq N$ auch $f(x_n) \in U_\varepsilon(f(x^*))$, d.h. die Folge $(f(x_n))$ konvergiert gegen $f(x^*)$. ■

Beispiele. Wir betrachten \mathbb{R} und \mathbb{C} mit den üblichen Abständen.

(1) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

heißt *Polynom n. Grades*. Sie ist auf ganz \mathbb{C} stetig. Ist nämlich $x^* \in \mathbb{C}$ und (x_n) eine Folge, die gegen x^* konvergiert, so gilt nach Satz 4.4

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (a_n x_k^n + a_{n-1} x_k^{n-1} + \dots + a_1 x_k + a_0) \\ &= a_n (x^*)^n + a_{n-1} (x^*)^{n-1} + \dots + a_1 x^* + a_0 = f(x^*). \end{aligned}$$

(2) Die *Signumfunktion* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird erklärt durch

$$f(x) = \operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Sie ist nur im Punkt $x^* = 0$ nicht stetig. Für die Folge (x_n) mit $x_n = 1/n$ gilt nämlich $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0)$.

(3) Die *Dirichletfunktion*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt $x^* \in \mathbb{R}$ stetig. Ist nämlich x^* rational, so gibt es in jeder Umgebung von x^* irrationale Zahlen. Für jedes $\delta > 0$ gibt es also ein $x \in U_\delta(x^*)$ mit $|f(x) - f(x^*)| = 1$. Genauso sieht man, dass f auch in keinem irrationalen Punkt stetig ist. ■

Eng verwandt mit dem Begriff der Stetigkeit ist der Begriff des Grenzwertes einer Funktion in einem Punkt.

Definition 6.3 Sei $x^* \in X$ Häufungspunkt von X und $f : X \setminus \{x^*\} \rightarrow Y$. Man sagt, dass f einen Grenzwert an der Stelle x^* besitzt, wenn für jede konvergente Folge (x_n) aus $X \setminus \{x^*\}$ mit Grenzwert x^* die Folge $(f(x_n))$ konvergiert. Ist dies der Fall, so haben alle Folgen $(f(x_n))$ den gleichen Grenzwert $y^* \in Y$. Dieses y^* heißt der Grenzwert von f an der Stelle x^* , und man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = y^*.$$

Beachten Sie: Es ist *nicht* erforderlich, dass die Funktion f an der Stelle x^* definiert ist.

Dass alle Folgen $(f(x_n))$ den gleichen Grenzwert haben, ist leicht zu sehen: Seien (x_n^1) und (x_n^2) Folgen in $X \setminus \{x^*\}$ mit Grenzwert x^* , und sei $f(x_n^1) \rightarrow y^*$ und $f(x_n^2) \rightarrow y^{**}$. Dann ist $x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, x_3^1, x_3^2, \dots$ ebenfalls eine Folge in $X \setminus \{x^*\}$ mit Grenzwert x^* . Die zugehörige Folge der Funktionswerte konvergiert nur, wenn $y^* = y^{**}$. ■

Satz 6.4 *Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig in $x^* \in X$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

- (a) x^* ist ein isolierter Punkt von X , oder
- (b) x^* ist Häufungspunkt von X , der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x)$ existiert, und dieser Grenzwert stimmt mit $f(x^*)$ überein.

Beweis. Die Implikation (\Rightarrow) folgt unmittelbar aus den Definitionen. Wir zeigen die Implikation (\Leftarrow) .

Sei (x_n) eine Folge in X mit Grenzwert x^* . Falls x^* ein isolierter Punkt von X ist, so ist $x_n = x^*$ für alle hinreichend großen n . Dann ist offenbar $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x^*)$. Sei nun x^* ein Häufungspunkt von X . Ist die Menge aller $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq x^*$ endlich, so ist wieder $x_n = x^*$ für alle hinreichend großen n und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x^*)$. Ist diese Menge dagegen unendlich, so können wir eine Teilfolge (x_{k_n}) von (x_n) auswählen, die genau die Elemente dieser Menge als ihre Werte annimmt. Diese Teilfolge liegt in $X \setminus \{x^*\}$ und konvergiert gegen x^* . Wegen Bedingung (b) gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(x^*)$. Die übrigen (nicht für die Teilfolge ausgewählten) Glieder der Folge (x_n) sind gleich x^* . Damit ist klar, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x^*)$. ■

Satz 6.5 *Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig auf X , wenn das Urbild jeder in Y offenen Menge offen in X ist.*

Beweis. Sei zunächst f stetig auf X und G offen in Y . Falls $f^{-1}(G) = \emptyset$, so ist $f^{-1}(G)$ offen (Satz 3.8). Sei also $f^{-1}(G) \neq \emptyset$ und x^* ein beliebiger Punkt aus $f^{-1}(G)$. Dann ist $f(x^*) \in G$. Da G offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x^*)) \subseteq G$. Nach Satz 6.2 existiert zu diesem ε ein $\delta > 0$ so, dass $f(U_\delta(x^*)) \subseteq U_\varepsilon(f(x^*))$. Dann ist $U_\delta(x^*) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x^*)))$ und somit erst recht $U_\delta(x^*) \subseteq f^{-1}(G)$. Also ist das Urbild $f^{-1}(G)$ offen.

Sei nun umgekehrt $f^{-1}(G)$ für jede in Y offene Menge G offen. Wir zeigen, dass dann f auf X stetig ist. Sei $x^* \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $U_\varepsilon(f(x^*))$ in Y offen (Satz 3.9). Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x^*)))$ offen in X . Da x^* in diesem Urbild liegt, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(x^*) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x^*)))$. Dann ist aber $f(U_\delta(x^*)) \subseteq U_\varepsilon(f(x^*))$, d.h. f ist stetig an der Stelle x^* . Da x^* beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. ■

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass er eine Charakterisierung der Stetigkeit bei alleiniger Kenntnis der offenen Mengen in X und Y erlaubt (beachten Sie die Anmerkung am Ende von Abschnitt 3). Er kann benutzt werden, um stetige Funktionen auf topologischen Räumen zu definieren.

Wir betrachten nun Verknüpfungen stetiger Funktionen.

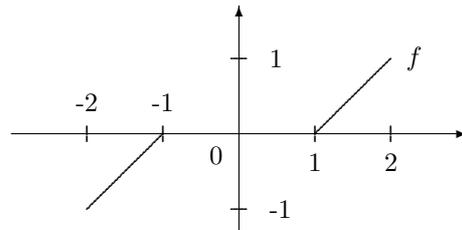
Satz 6.6 *Seien X, Y, Z metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ Funktionen. Ist f in $x^* \in X$ und g in $f(x^*) \in Y$ stetig, so ist die Verknüpfung $g \circ f : X \rightarrow Z$ in x^* stetig.*

Beweis. Sei (x_n) eine konvergente Folge in X mit Grenzwert x^* . Wegen der Stetigkeit von f in x^* konvergiert die Folge $(f(x_n))$ in Y gegen $f(x^*)$. Da g in $f(x^*)$ stetig ist, folgt die Konvergenz der Folge $(g(f(x_n)))$ gegen $g(f(x^*))$ in Z . ■

Man beachte aber: Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige bijektive Funktion, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \rightarrow X$ NICHT notwendig wieder stetig!

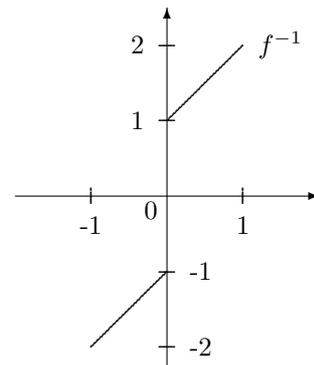
Beispiel. Sei $X = [-2, -1) \cup [1, 2]$, $Y = [-1, 1]$ und

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in [-2, -1), \\ x - 1 & \text{falls } x \in [1, 2]. \end{cases}$$



Die Funktion f bildet X bijektiv auf Y ab und ist in jedem Punkt von X stetig. Die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ist

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x \in [-1, 0), \\ x + 1 & \text{falls } x \in [0, 1]. \end{cases}$$



Diese ist offenbar an der Stelle $x^* = 0$ unstetig. ■

Wir geben später Bedingungen an, die die Stetigkeit der Umkehrfunktion einer stetigen Funktion garantieren. Abschließend vermerken wir ein nützliches hinreichendes Kriterium für Stetigkeit.

Definition 6.7 *Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt Lipschitzstetig in $x^* \in X$, wenn*

es eine reelle Konstante C und eine Umgebung $U_\varepsilon(x^*)$ (mit $\varepsilon > 0$) so gibt, dass

$$d_Y(f(x), f(x^*)) \leq C d_X(x, x^*) \quad \text{für alle } x \in U_\varepsilon(x^*). \quad (6.2)$$

Jedes solche C heißt eine lokale Lipschitzkonstante für f . Gilt (6.2) für alle x, x^* aus X (mit einer gemeinsamen Konstanten C), so heißt f Lipschitzstetig auf X .

Satz 6.8 Ist $f : X \rightarrow Y$ Lipschitzstetig in $x^* \in X$, so ist f in x^* stetig.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen.

Beispiele. (1) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ ist Lipschitzstetig auf \mathbb{R}^n . Wegen der Dreiecksungleichung gilt nämlich für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|,$$

d. h. $C = 1$ ist eine von x unabhängige Lipschitzkonstante.

(2) Wir zeigen, dass die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ im Punkt 0 nicht Lipschitzstetig ist. Wäre f Lipschitzstetig in 0, so gäbe es ein $C > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq C |x - 0| \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{x} \leq Cx \quad \text{für alle } x \in [0, \varepsilon).$$

Für hinreichend großes n liegt $\frac{1}{n^2}$ in $[0, \varepsilon)$, und es müsste gelten:

$$\sqrt{1/n^2} \leq C/n^2 \quad \text{bzw.} \quad n \leq C \quad \text{für alle hinreichend großen } n.$$

Dies ist offenbar unmöglich (\mathbb{N} ist ja nach oben unbeschränkt). Die Funktion f ist aber stetig in 0. Um dies einzusehen, müssen wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so angeben, dass $0 \leq \sqrt{x} < \varepsilon$ für alle $0 \leq x < \delta$. Jede Wahl von $\delta < \varepsilon^2$ leistet dies. Dieses Beispiel zeigt, dass Lipschitzstetigkeit eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit ist. ■

6.2 Stetige Funktionen auf oder nach \mathbb{R}^n

Wir betrachten nun Funktionen, die auf Teilmengen von \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{R}^n definiert sind oder in diese Räume abbilden.

Sei X ein metrischer Raum und $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$. Unter der *Summe* $f + g$, dem *Produkt* fg und – falls $0 \notin g(X)$ – dem *Quotienten* f/g versteht man die auf X durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (fg)(x) := f(x)g(x) \quad \text{und} \quad (f/g)(x) := f(x)/g(x)$$

erklärten Funktionen.

Satz 6.9 Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ in $x^* \in X$ stetig, so sind auch $f + g$, fg und – falls $0 \notin g(X)$ – f/g in x^* stetig.

Dies folgt sofort aus dem entsprechenden Resultat für Grenzwerte (Satz 4.4). ■

Die Summe $f + g$ lässt sich natürlich auch für Funktionen $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ erklären, und die erste Aussage von Satz 6.9 gilt entsprechend.

Sind $P, Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Polynome und ist Q nicht überall identisch 0, so heißt die auf $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$ definierte Funktion P/Q *rational*. Als Folgerung aus Satz 6.9 erhält man sofort die Stetigkeit rationaler Funktionen auf ihrem natürlichen Definitionsgebiet.

Wir betrachten nun Funktionen auf \mathbb{R} genauer. Für jeden Punkt $x^* \in \mathbb{R}$ gibt es im wesentlichen zwei Möglichkeiten, sich diesem Punkt zu nähern: von links oder von rechts. Dementsprechend definiert man:

Definition 6.10 Sei Y ein metrischer Raum, $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow Y$, und $x^* \in \mathbb{R}$ sei ein Häufungspunkt der Menge $D_l := \{x \in D : x < x^*\}$. Man sagt, dass der linksseitige Grenzwert von f an der Stelle x^* existiert, wenn es ein $y^* \in Y$ gibt, so dass für jede Folge (x_n) in D_l mit Grenzwert x^* gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y^*$. Dann heißt y^* auch der linksseitige Grenzwert von f an der Stelle x^* , und man schreibt $\lim_{x \rightarrow x^*-0} f(x) = y^*$ oder $\lim_{x \nearrow x^*} f(x) = y^*$ oder auch $f(x^* - 0) = y^*$.

Analog definiert man den rechtsseitigen Grenzwert von f an der Stelle x^* .

Definition 6.11 Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow Y$, und $x^* \in D$ sei ein Häufungspunkt von $D_l := \{x \in D : x < x^*\}$. Dann heißt f linksseitig stetig oder stetig von links in x^* , wenn

$$\lim_{x \rightarrow x^*-0} f(x) = f(x^*).$$

Analog definiert man Stetigkeit von rechts. Der Beweis des folgenden Satzes ergibt sich wieder leicht aus den Definitionen und ist Hausaufgabe.

Satz 6.12 Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow Y$, und $x^* \in D$ sei Häufungspunkt jeder der Mengen $D_l := \{x \in D : x < x^*\}$ und $D_r := \{x \in D : x > x^*\}$. Dann ist f genau dann stetig in x^* , wenn f in x^* sowohl links- als auch rechtsseitig stetig ist.

Wir sehen uns nun einige Typen von Unstetigkeiten genauer an. Der Einfachheit halber sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $x^* \in (a, b)$. Wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x^*-0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x^*+0} f(x)$ existieren und voneinander verschieden sind, so heißt x^* eine *Sprungstelle* (manchmal auch Unstetigkeitsstelle 1. Art). Falls diese beiden Grenzwerte gleich sind, jedoch nicht mit $f(x^*)$ übereinstimmen, heißt x^* eine *hebbare Unstetigkeit*. In diesem Fall kann man durch

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \neq x^*, \\ \lim_{x \rightarrow x^*-0} f(x) & \text{falls } x = x^* \end{cases}$$

eine neue Funktion g erklären, die auf $(a, b) \setminus \{x^*\}$ mit f übereinstimmt und in x^* stetig ist. Unstetigkeitsstellen, die weder hebbar noch Sprünge sind, fasst man oft unter Unstetigkeitsstellen 2. Art zusammen.

Beispiele. (1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

besitzt an der Stelle 1 eine hebbare Unstetigkeit. Für $x \neq 1$ ist nämlich $f(x) = x + 1$ und daher $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

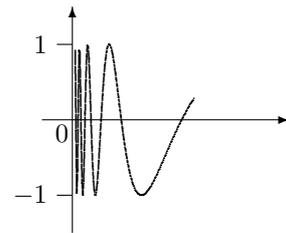
(2) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ hat bei $x^* = 0$ eine Sprungstelle.

(3) Für jede reelle Zahl x bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner als oder gleich x ist. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto [x]$ ist in jedem ganzzahligen Punkt unstetig und besitzt dort eine Sprungstelle.

(4) Die Dirichletfunktion hat in jedem Punkt eine Unstetigkeit 2. Art.

(5) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$



besitzt in $x^* = 0$ eine Unstetigkeit 2. Art. ■

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow Y$ heißt *stückweise stetig*, wenn es endlich viele Zahlen $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ gibt so, dass f auf jedem Intervall (a_i, a_{i+1}) stetig ist und in allen Punkten a_i alle einseitigen Grenzwerte von f existieren. Die Funktionen aus den Beispielen (2) und (3) sind stückweise stetig.

Schließlich sei darauf hingewiesen, dass die Betrachtung von Grenzwerten “in eine bestimmte Richtung” auch nützlich ist bei Funktionen mehrerer Veränderlicher. Als Beispiel fragen wir uns, ob die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

stetig in $(0, 0)$ ist. Dazu lassen wir für jedes feste $\alpha \in \mathbb{R}$ den Punkt (x, y) entlang der Geraden $y = \alpha x$ gegen $(0, 0)$ streben:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=\alpha x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^2}{x^2 + \alpha^2 x^2} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}.$$

Das Resultat hängt offenbar von der Richtung ab, in der wir uns dem Punkt $(0, 0)$ genähert haben. Also ist f nicht stetig in $(0, 0)$.

Oft möchte man das Verhalten einer Funktion f bei Annäherung an einen Punkt x_0 genauer beschreiben. Dies kann geschehen durch Vergleich mit einer anderen Funktion. Dazu treffen wir folgende Vereinbarungen. Es sei $\overline{\mathbb{R}}$ die um die Punkte $\pm\infty$ erweiterte Zahlengerade. Jede Menge der Gestalt $[-\infty, s) := (-\infty, s) \cup \{-\infty\}$ mit $s \in \mathbb{R}$ heißt eine *Umgebung* von $-\infty$, und jede Menge der Gestalt $(s, \infty] := (s, \infty) \cup \{+\infty\}$ mit $s \in \mathbb{R}$ eine *Umgebung* von $+\infty$. Ist U eine Umgebung von $x \in \overline{\mathbb{R}}$, so heißt $U \setminus \{x\}$ eine *punktierte Umgebung* von x .

Definition 6.13 Sei $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, und seien f und g reellwertige Funktionen, die auf einer punktierten Umgebung $\dot{U}(x_0)$ von x_0 definiert sind. Ferner sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \dot{U}(x_0)$. Man vereinbart folgende Symbolik:

- $f(x) = O(g(x))$ ($x \rightarrow x_0$) bedeutet: Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ so, dass $|f(x)| \leq C|g(x)|$ für alle x aus einer punktierten Umgebung von x_0 .
- $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow x_0$) bedeutet: $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow x_0$.
- $f(x) \simeq g(x)$ ($x \rightarrow x_0$) bedeutet: Es gibt $c, C \in (0, \infty)$ so, dass $c|g(x)| \leq |f(x)| \leq C|g(x)|$ für alle x aus einer punktierten Umgebung von x_0 .
- $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow x_0$) bedeutet: $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$ für $x \rightarrow x_0$.

Man liest dies der Reihe nach als: f ist groß O von g , f ist klein o von g , f ist von gleicher Ordnung wie g , und f und g sind asymptotisch gleich.

Ist schließlich h eine auf $\dot{U}(x_0)$ definierte reellwertige Funktion, so vereinbart man die Schreibweisen

$$f(x) = h(x) + O(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0)$$

für $f(x) - h(x) = O(g(x))$ ($x \rightarrow x_0$) sowie

$$f(x) = h(x) + o(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0)$$

für $f(x) - h(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow x_0$).

Beispiele. (1) $f(x) = O(1)$ ($x \rightarrow x_0$) bedeutet $|f(x)| \leq C \cdot 1$ für $x \in \dot{U}(x_0)$, d.h. f ist in einer punktierten Umgebung von x_0 beschränkt. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \sin x &= O(1) \quad (x \rightarrow \infty), \\ \sin x &= O(1) \quad (x \rightarrow 0), \\ 1/x &= O(1) \quad (x \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

aber $1/x \neq O(1)$ ($x \rightarrow 0$).

(2) $f(x) = o(1)$ ($x \rightarrow x_0$) bedeutet $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow x_0$. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned}\sin x &= o(1) & (x \rightarrow 0), \\ \sin x &= x + o(1) & (x \rightarrow 0),\end{aligned}$$

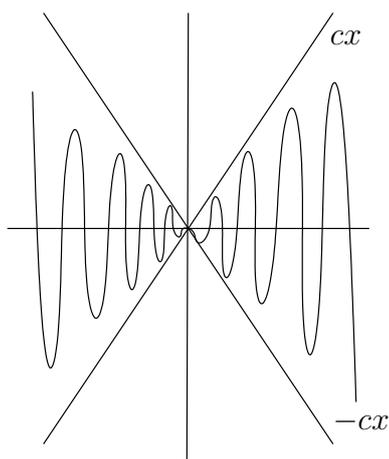
aber $\sin x \neq o(1)$ ($x \rightarrow \infty$).

(3) $f(x) = O(x^n)$ ($x \rightarrow x_0$) bedeutet: es gibt ein reelles C so, dass $|f(x)| \leq C|x|^n$ für alle $x \in \dot{U}(x_0)$. Beispielsweise ist

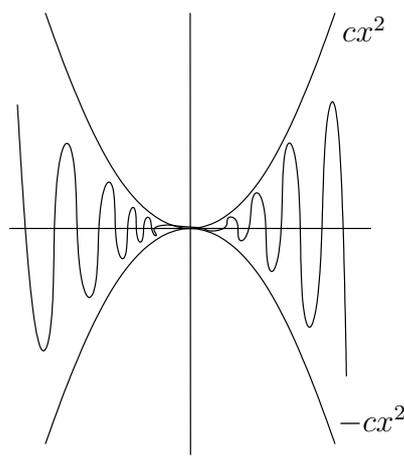
$$\begin{aligned}\sin x &= O(x^2) & (x \rightarrow \infty), \\ \sin x &= O(x^2) & (x \rightarrow 1),\end{aligned}$$

aber $\sin x \neq O(x^2)$ ($x \rightarrow 0$).

Für $n \geq 1$ ist $f(x) = O(x^n)$ ($x \rightarrow \infty$) eine Bedingung an das Wachstum von $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$, und $f(x) = O(x^n)$ ($x \rightarrow 0$) beschreibt, wie schnell $f(x)$ für $x \rightarrow 0$ gegen 0 strebt.



$$f(x) = O(x)(x \rightarrow 0)$$



$$f(x) = O(x^2)(x \rightarrow 0)$$

(4) Für $x > 0$ sei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x . Tschebyscheff hat gezeigt, dass

$$\pi(x) \simeq \frac{x}{\ln x} \quad (x \rightarrow \infty),$$

Hadamard und de la Vallée Poisson haben den *Primzahlsatz*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

bewiesen, und eine große unbewiesene Vermutung der Zahlentheorie ist, dass

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O(\sqrt{x}) \quad (x \rightarrow \infty). \quad \blacksquare$$

6.3 Potenzreihen in \mathbb{C}

Ist $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen, so kann man für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ betrachten. Diese Reihe heißt eine *Potenzreihe*, und die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die diese Reihe konvergiert, heißt ihr *Konvergenzbereich*. Ist D dieser Konvergenzbereich, so wird durch

$$D \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine komplexwertige Funktion auf D festgelegt. Allgemeiner betrachtet man auch Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit einem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Da diese lediglich durch Verschiebung um z_0 aus der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hervorgehen, beschränken wir uns im folgenden oft auf den Fall $z_0 = 0$.

Beispiel. Aus Beispiel 1 in Abschnitt 5.1 wissen wir, dass der Konvergenzbereich der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ gleich $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist und dass auf dieser Menge $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ gilt. ■

In diesem Beispiel ist der Konvergenzbereich eine Kreisscheibe. Dies ist typisch für Potenzreihen! Vorbereitend zeigen wir:

Lemma 6.14 (a) Wenn die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für ein $z_0 \neq 0$ konvergiert, so konvergiert sie für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ absolut.
 (b) Divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für ein $z_0 \neq 0$, dann divergiert sie für jedes z mit $|z| > |z_0|$.

Beweis. (a) Aus der Konvergenz an der Stelle z_0 und dem notwendigen Konvergenzkriterium folgt die Beschränktheit der Folge $(a_n z_0^n)$. Es gibt also ein $M \in \mathbb{R}$ so, dass $|a_n z_0^n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$. Wir schreiben z als λz_0 mit $|\lambda| < 1$. Wegen $|\lambda| < 1$ und

$$|a_n z^n| = |a_n \lambda^n z_0^n| = |\lambda^n| |a_n z_0^n| \leq M |\lambda|^n$$

ist die Reihe $M \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n$ eine konvergente Majorante für $\sum a_n z^n$. Nach dem Vergleichskriterium konvergiert die Reihe $\sum a_n z^n$ absolut.

(b) Würde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für ein $|z| > |z_0|$ konvergieren, so würde nach Teil (a) auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergieren. Widerspruch. ■

Folgerung 6.15 Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für jedes $z \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut.

Satz 6.16 Für jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gibt es eine Kreisscheibe $K_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ mit folgender Eigenschaft: Liegt z im Innern von K_R (d.h. ist $|z| < R$), so konvergiert $\sum a_n z^n$ absolut; liegt z außerhalb von K_R (d.h. ist $|z| > R$), so divergiert $\sum a_n z^n$.

Dabei lassen wir ausdrücklich folgende Grenzfälle zu:

$$R = 0 \Leftrightarrow K_R = \{0\} \quad \text{sowie} \quad R = \infty \Leftrightarrow K_R = \mathbb{C}.$$

Beweis. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und D ihr Konvergenzbereich. Offenbar ist stets $0 \in D$ und daher $D \neq \emptyset$.

Falls $D = \{0\}$ oder $D = \mathbb{C}$, so ist die Aussage des Satzes richtig wegen Folgerung 6.15. Sei also $\{0\} \subset D \subset \mathbb{C}$. Dann gibt es Punkte $z_0, z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergiert und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ divergiert. Die Menge

$$\mathcal{M} := \{r \in \mathbb{R} : \exists z \in D \text{ mit } |z| = r\}$$

ist nach oben beschränkt (z.B. durch $|z_1|$) und enthält positive Zahlen (z.B. $|z_0|$). Also besitzt \mathcal{M} ein positives und endliches Supremum, welches wir R nennen.

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$. Nach Satz 1.14 gibt es ein $r \in \mathcal{M}$ so, dass $|z| < r \leq R$, d.h. es gibt ein $z_0 \in D$ mit $|z| < |z_0| \leq R$. Lemma 6.14 (a) liefert in diesem Fall die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Sei nun noch $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$. Würde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergieren, so wäre $|z| \in \mathcal{M}$ und daher $|z| \leq R$, ein Widerspruch. ■

Ein zu Satz 6.16 analoges Resultat gilt auch für Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $z_0 \neq 0$; dann hat man K_R durch $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ zu ersetzen.

Die "Zahl" $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ aus Satz 6.16 ist eindeutig bestimmt und heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Satz 6.17 (Formel von Cauchy/Hadamard) Für den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gilt

$$R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}.$$

Dabei vereinbaren wir:

$$R = 0 \text{ falls } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \quad \text{sowie} \quad R = \infty \text{ falls } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Beweis. Sei zunächst $0 < \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$. Wegen

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

liefert das Wurzelkriterium (Satz 5.11):

- für $|z| < (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut.
- für $|z| > (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Also stimmt in diesem Fall $(\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ mit dem Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ überein. Der Beweis in den beiden übrigen Fällen $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in \{0, \infty\}$ ist Hausaufgabe. ■

Folgerung 6.18 Die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ haben den gleichen Konvergenzradius.

In der Tat, wegen $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ (Beispiel 3 in Abschnitt 4.3) ist

$$\limsup \sqrt[n]{|n a_n|} = \limsup \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Satz 6.19 Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ stetig und für jedes $r \in (0, R)$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ Lipschitzstetig.

Beweis. Sei $r \in (0, R)$. Wir zeigen zuerst, dass f auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ Lipschitzstetig ist. Dazu schätzen wir $|f(z) - f(z_0)|$ für beliebige z, z_0 mit $|z|, |z_0| \leq r$ nach oben ab. Mit der leicht nachzurechnenden Identität

$$z^n - z_0^n = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} \quad (n \geq 1)$$

finden wir

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n) \right| \\ &= \left| (z - z_0) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} \right| \\ &\leq |z - z_0| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k |z_0|^{n-1-k} \\ &\leq |z - z_0| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} \quad (\text{wegen } |z|, |z_0| \leq r). \end{aligned}$$

Nach Folgerung 6.18 hat die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n z^n$ den gleichen Konvergenzradius R wie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Wegen $r < R$ ist also auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}$ konvergent. Bezeichnen wir ihre Summe mit C , so folgt

$$|f(z) - f(z_0)| \leq C |z - z_0| \quad \text{für alle } |z| \leq r.$$

Die Funktion f ist also Lipschitzstetig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Da jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| < R$ in einer solchen Kreisscheibe liegt (mit einem r zwischen $|z_0|$ und R), ist f nach Satz 6.8 stetig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. ■

Das Abklingen der Potenzreihe wird genauer beschrieben in folgendem Satz. Den Beweis sollten sie zur Übung selbst versuchen.

Satz 6.20 Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^n + O(x^{k+1}) \quad (x \rightarrow 0).$$

In den Bezeichnungen von Satz 6.19 gilt für jedes z_0 mit $|z_0| < R$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lim_{z \rightarrow z_0} z)^n. \quad (6.3)$$

Satz 6.19 trifft also eine Aussage über die Vertauschbarkeit der beiden Grenzprozesse $\lim_{z \rightarrow z_0}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}$ in dieser speziellen Situation. Aussagen über die Vertauschbarkeit von Grenzprozessen sind für die Analysis außerordentlich wichtig und werden uns noch oft begegnen.

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$. Im allgemeinen kann man nichts über die Konvergenz dieser Reihe in Punkten z mit $|z| = R$ sagen: Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ haben beide den Konvergenzradius 1; die erste dieser Reihen konvergiert für kein z mit $|z| = 1$, die zweite für jedes z mit $|z| = 1$.

Im wesentlichen sagt der folgende Satz, dass man die Konvergenzaussage aus (6.3) noch retten kann, wenn $|z_0| = R$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergiert. In diesem Satz beschränken wir uns der Einfachheit halber auf $R = 1$ und $z_0 = 1$.

Satz 6.21 (Abelscher Grenzwertsatz) Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe den Konvergenzradius $R = 1$, und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Für jede reelle Folge (x_n) mit $0 \leq x_n < 1$ und $x_n \rightarrow 1$ gilt dann $f(x_n) \rightarrow f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis. Sei $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $A = 0$ (andernfalls ersetzen wir in der gegebenen Reihe a_0 durch $a_0 - A$).

Im Beweis machen wir Gebrauch von der Abelschen Summationsformel („partielle Summation“). Dazu sei $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ und $s_{-1} := 0$. Dann ist $a_n = s_n - s_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^{n+1} = (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

(man beachte, dass die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^{n+1}$ wegen $s_n \rightarrow A = 0$ einen Konvergenzradius von mindestens 1 haben).

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $s_n \rightarrow A = 0$ gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ so, dass $|s_n| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq M$. Für jedes $x \in (0, 1)$ ist dann

$$\begin{aligned} \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \right| &\leq \left| (1-x) \sum_{n=0}^{M-1} s_n x^n \right| + \left| (1-x) \sum_{n=M}^{\infty} s_n x^n \right| \\ &\leq (1-x) \sum_{n=0}^{M-1} |s_n| + (1-x) \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=M}^{\infty} x^n \\ &= (1-x) \sum_{n=0}^{M-1} |s_n| + \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \frac{x^M}{1-x}, \end{aligned}$$

also

$$|f(x)| \leq (1-x)C + \frac{\varepsilon}{2}$$

mit $C := \sum_{n=0}^{M-1} |s_n| < \infty$. Wegen $x_n \rightarrow 1$ finden wir schließlich ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $(1-x_n)C < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Für alle $n \geq N$ ist dann $|f(x_n)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, d.h. $f(x_n) \rightarrow f(1) = 0$. \blacksquare

Der Satz gilt für beliebige Konvergenzradien $R \in (0, \infty)$ und beliebige Punkte z_0 mit $|z_0| = R$, für die die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergiert. Auch muss die Annäherung von x_n an z_0 nicht radial erfolgen; vielmehr dürfen sich die x_n entlang einer beliebigen Strecke in Konvergenzgebiet mit z_0 als Endpunkt bewegen. Die Konvergenzgeschwindigkeit wird jedoch geringer, je näher diese Strecke zum Rand des Konvergenzgebietes liegt.

Man kann Satz 6.21 benutzen, um Reihendarstellungen für $\ln 2$ und $\frac{\pi}{4}$ zu gewinnen.

Wir sehen uns noch das Produkt von Potenzreihen an. Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen, die beide auf der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ mit $r > 0$ konvergieren, so konvergieren sie dort absolut (Satz 6.16). Wir können daher nach Satz 5.17 das Produkt $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n)$ bilden, indem wir alle Produkte $a_n z^n b_k z^k = a_n b_k z^{n+k}$ bilden und diese in beliebiger Reihenfolge aufsummieren. Zweckmäßig wird man dieses Aufsummieren so organisieren, dass man Summanden mit gleichem Exponenten bei z zusammenfasst:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) \\ &= a_0 b_0 z^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z^1 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n =: \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ist offenbar nichts anderes als das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Sie konvergiert nach Satz 5.17 absolut für $|z| < r$.

6.4 Einige spezielle Funktionen

6.4.1 Die Exponentialfunktion

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut, wie man mit dem Quotientenkriterium sofort überprüft:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z^{n+1}| n!}{(n+1)! |z^n|} = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die somit auf ganz \mathbb{C} definierte Funktion $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt die *Exponentialfunktion* und wird mit \exp bezeichnet. Nach Satz 6.19 ist diese Funktion stetig auf \mathbb{C} . Außerdem gilt offenbar $\exp 0 = 1$ sowie $\exp 1 = e$ nach Beispiel 3 aus Abschnitt 5.1.

Die Exponentialfunktion genügt einer Funktionalgleichung.

Satz 6.22 Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$.

Beweis. Zur Multiplikation der Reihen $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ und $\exp w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ benutzen wir das Cauchyprodukt (beide Reihen konvergieren ja auf ganz \mathbb{C} absolut, so dass es auf die Reihenfolge des Zusammenfassens der Summanden $\frac{z^n}{n!} \cdot \frac{w^k}{k!}$ nicht ankommt). Damit ist

$$\begin{aligned} \exp z \cdot \exp w &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \exp(z+w). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Folgerung 6.23 Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp z \neq 0$.

Es ist nämlich $\exp z \cdot \exp(-z) = \exp 0 = 1$. ■

Folgerung 6.24 Für alle rationalen Zahlen $r = m/n$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 1$ ist

$$\exp r = e^r = \sqrt[n]{e^m}.$$

Beweis. Aus Satz 6.22 folgt $\exp(mz) = (\exp z)^m$ für alle $m \geq 1$. Für $m = 0$ ist diese Aussage offenbar ebenfalls richtig, und für $m < 0$ haben wir wegen $\exp(mz) \exp(-mz) = 1$

$$\exp(mz) = \frac{1}{\exp(-mz)} = \frac{1}{(\exp z)^{-m}} = (\exp z)^m.$$

Es ist somit $\exp(mz) = (\exp z)^m$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist $\exp m = (\exp 1)^m = e^m$ und $e = \exp 1 = \exp \frac{n}{n} = (\exp \frac{1}{n})^n$, also $\exp \frac{1}{n} = e^{1/n} = \sqrt[n]{e}$. Wir erhalten damit

$$\exp r = \exp \frac{m}{n} = \left(\exp \frac{1}{n} \right)^m = \left(\sqrt[n]{e} \right)^m = e^{m/n} = e^r. \quad \blacksquare$$

Da $\exp r = e^r$ für alle rationalen Zahlen gilt, wählt man häufig e^z statt $\exp z$ als Bezeichnung für die Exponentialfunktion.

Folgerung 6.25 Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ ist $e^{x_1} < e^{x_2}$.

Beweis. Für die positive Zahl $y := x_2 - x_1$ gilt

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \dots > 1.$$

Somit ist $e^{x_2-x_1} = e^{x_2}e^{-x_1} = e^{x_2}/e^{x_1} > 1$ und folglich $e^{x_2} > e^{x_1}$. ■

6.4.2 Die trigonometrischen Funktionen

Die Potenzreihen $\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ und $\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ konvergieren für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut (Quotientenkriterium) und definieren die *Sinus*- bzw. *Kosinusfunktion* auf \mathbb{C} . Beide Funktionen sind nach Satz 6.5 stetig auf \mathbb{C} .

Durch Einsetzen der entsprechenden Potenzreihen überprüft man, dass

$$\cos z = \frac{1}{2} \left(\exp(iz) + \exp(-iz) \right) \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{1}{2i} \left(\exp(iz) - \exp(-iz) \right) \quad (6.4)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Durch Addition folgt aus (6.4) die *Eulersche Formel*

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Eine Kombination dieser Formel mit der Beziehung $\exp(nz) = (\exp z)^n$ liefert die *Formel von Moivre*

$$(\cos z + i \sin z)^n = \exp(niz) = \cos(nz) + i \sin(nz) \quad \text{für } z \in \mathbb{C},$$

die u.a. die Grundlage für das Wurzelziehen im Bereich der komplexen Zahlen bildet.

Anwendung. Wir suchen alle n -ten Wurzeln einer gegebenen komplexen Zahl

$$w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0,$$

d.h. wir suchen alle Zahlen $z = s(\cos \psi + i \sin \psi)$ mit $z^n = w$. Nach Moivre ist

$$z^n = s^n (\cos(n\psi) + i \sin(n\psi)) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ein Vergleich von Betrag und Argument liefert $s^n = r$, also $s = \sqrt[n]{r}$, sowie $n\psi = \varphi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. (Wir werden π später exakt definieren. Dies ist das ‘‘Schul- π ’’.) Die Argumente $\psi_k := (\varphi + 2k\pi)/n$ nehmen nur für $k = 0, \dots, n-1$ verschiedene Werte an. Es gibt daher genau n n -te Wurzeln aus $w \neq 0$, nämlich die Zahlen

$$z_k := \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right)$$

mit $k = 0, \dots, n-1$. Diese liegen auf dem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{r}$ um 0 und bilden die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks. ■

Außerdem folgt unmittelbar aus den Definitionen

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos z = \cos(-z), \quad \sin z = -\sin(-z).$$

Funktionen f mit der Eigenschaft $f(z) = f(-z)$ bzw. $f(z) = -f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ oder $z \in \mathbb{R}$ heißen auch *gerade* bzw. *ungerade*.

Satz 6.26 Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(z \pm w) &= \cos z \cos w \mp \sin z \sin w, \\ \sin(z \pm w) &= \sin z \cos w \pm \cos z \sin w. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis kann wie der von Satz 6.22 durch Multiplikation der entsprechenden Potenzreihen geführt werden. Einfacher ist es, Satz 6.22 und die Identitäten (6.4) zu benutzen. So ist

$$\begin{aligned} &\cos z \cos w - \sin z \sin w \\ &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \frac{1}{2} (e^{iw} + e^{-iw}) - \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \frac{1}{2i} (e^{iw} - e^{-iw}) \\ &= \frac{1}{4} \left[(e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)}) \right. \\ &\quad \left. + (e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} - e^{i(w-z)} + e^{-i(z+w)}) \right] \\ &= \frac{1}{2} (e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}) = \cos(z+w). \end{aligned}$$

Das zweite Additionstheorem zeigt man ebenso. ■

Aus den Additionstheoremen erhält man eine Vielzahl weiterer Beziehungen zwischen Sinus- und Kosinusfunktionswerten. Gleichsetzen von z und w ergibt die für alle $z \in \mathbb{C}$ gültigen Identitäten

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \\ \cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z &= 2 \cos^2 z - 1 = 1 - 2 \sin^2 z, \\ \sin(2z) &= 2 \sin z \cos z \end{aligned}$$

(wobei, wie üblich, $\cos^2 z$ für $(\cos z)^2$ steht). Außerdem gilt (↗ Hausaufgabe):

$$\begin{aligned}\sin z \pm \sin w &= 2 \cos \frac{z \mp w}{2} \sin \frac{z \pm w}{2}, \\ \cos z + \cos w &= 2 \cos \frac{z + w}{2} \cos \frac{z - w}{2}, \\ \cos z - \cos w &= -2 \sin \frac{z + w}{2} \sin \frac{z - w}{2}.\end{aligned}$$

Den *Tangens* und *Kotangens* von $z \in \mathbb{C}$ erklären wir durch

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Diese Definition ist natürlich nur für solche $z \in \mathbb{C}$ möglich, für die $\cos z$ bzw. $\sin z$ ungleich 0 sind. Über die Nullstellen der Sinus- und Kosinusfunktion machen wir uns im nächsten Abschnitt Gedanken.

Schließlich definieren wir für $z \in \mathbb{C}$ die *Hyperbelfunktionen*

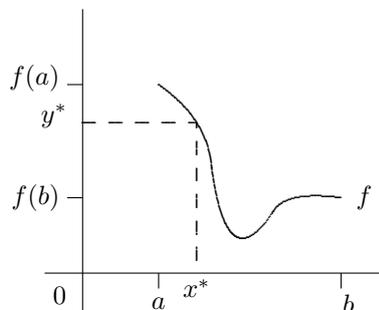
$$\begin{aligned}\sinh z &:= \frac{1}{2} \left(\exp z - \exp(-z) \right) = -i \sin(iz), \\ \cosh z &:= \frac{1}{2} \left(\exp z + \exp(-z) \right) = \cos(iz),\end{aligned}$$

die man z. B. als *Hyperbelsinus* oder *sinus hyperbolicus* liest.

6.5 Der Zwischenwertsatz

Für die weitere Untersuchung der trigonometrischen Funktionen benötigen wir das folgende Resultat, welches eine wichtige Eigenschaft stetiger reellwertiger Funktionen beschreibt.

Satz 6.27 (Zwischenwertsatz von Bolzano) *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sei $f(a) \neq f(b)$. Dann gibt es für jede Zahl y^* , die echt zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt (d.h. es ist $f(a) < y^* < f(b)$ oder $f(b) < y^* < f(a)$) ein $x^* \in (a, b)$ mit $f(x^*) = y^*$.*



Beweis. Wir führen den Beweis mit Hilfe einer Intervallschachtelung. Der Bestimmtheit halber sei $f(b) > f(a)$ (falls $f(b) < f(a)$ verläuft der Beweis analog). Für $k \geq 0$ definieren wir rekursiv

$$I_0 := [a_0, b_0] \quad \text{mit} \quad a_0 = a, \quad b_0 = b,$$

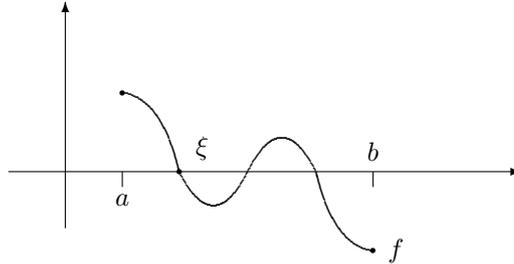
$$I_{k+1} := [a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k \right] & \text{falls } f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \leq y^* \leq f(b_k), \\ \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2} \right] & \text{falls } f(a_k) \leq y^* < f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right). \end{cases}$$

Diese Intervalle sind ineinander geschachtelt (d.h. $I_{k+1} \subseteq I_k$ für alle k), und für ihre Längen gilt

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2} (b_k - a_k) = \dots = \frac{1}{2^{k+1}} (b_0 - a_0) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Nach dem Intervallschachtelungssatz gibt es genau eine reelle Zahl x^* mit $x^* \in I_k$ für alle k , und es gilt $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$. Da f stetig ist, folgt hieraus $f(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k)$. Der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ in $f(a_k) \leq y^* \leq f(b_k)$ liefert nun sofort $f(x^*) = y^*$. Schließlich kann x^* wegen $f(a) < y^* < f(b)$ weder mit a noch mit b zusammenfallen. ■

Folgerung 6.28 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $f(a)f(b) < 0$. Dann gibt es eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.



Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes können wir nun zeigen:

Satz 6.29 Die Sinusfunktion auf \mathbb{R} besitzt genau eine Nullstelle im Intervall $(0, 4]$.

Beweis. Es ist

$$\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} : \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} \leq \begin{cases} 2^2/6 < 1 & \text{falls } x \in [0, 2], n \geq 0, \\ 4^2/20 < 1 & \text{falls } x \in [0, 4], n \geq 1. \end{cases}$$

Auf $(0, 4]$ ist die Sinusfunktion also durch eine alternierende Reihe mit monoton fallenden und gegen 0 konvergierenden Gliederbeträgen erklärt. Ähnliche Abschätzungen wie im Beweis des Leibniz-Kriteriums (Satz 5.5) liefern für $0 < x \leq 2$

$$\sin x > x - \frac{x^3}{3!} = x \left(1 - \frac{x^2}{6} \right) \geq x \left(1 - \frac{4}{6} \right) > 0$$

und für $x = 4$

$$\sin 4 < \frac{4}{1!} - \left(\frac{4^3}{3!} - \frac{4^5}{5!} \right) - \left(\frac{4^7}{7!} - \frac{4^9}{9!} \right) = -\frac{268}{405} < 0.$$

Nach Folgerung 6.28 hat die reelle Sinusfunktion eine Nullstelle zwischen 2 und 4.

Wir zeigen noch, dass diese Funktion höchstens eine Nullstelle in $(0, 4]$ hat. Wie wir bereits gesehen haben, müssen alle diese Nullstellen in $(2, 4)$ liegen. Angenommen, es gibt zwei solcher Nullstellen, d.h. es gibt Zahlen $2 < x_1 < x_2 < 4$ mit $\sin x_1 = \sin x_2 = 0$. Nach den Additionstheoremen ist dann

$$\sin(x_2 - x_1) = \sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1 = 0,$$

d.h. auch $x_2 - x_1$ ist eine Nullstelle. Nun ist aber $0 < x_2 - x_1 < 2$, und auf dem Intervall $(0, 2)$ ist die Sinusfunktion streng positiv. Widerspruch. ■

Die in Satz 6.29 beschriebene Nullstelle nennen wir π . Eine näherungsweise Berechnung (z.B. über eine Intervallschachtelung wie im Beweis von Satz 6.27) ergibt $\pi \approx 3.14159\dots$ Man kann beweisen, dass π nicht rational ist.

Aus $\sin \pi = 0$ und $\sin^2 \pi + \cos^2 \pi = 1$ folgt $|\cos \pi| = 1$. Da $\cos \pi$ reell ist, ist entweder $\cos \pi = 1$ oder $\cos \pi = -1$. Wäre $\cos \pi = 1$, so würde aus

$$1 = \cos \pi = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

folgen, dass $\sin \frac{\pi}{2} = 0$. Dies ist unmöglich, da $\frac{\pi}{2} < \pi$ und π per Definition die kleinste positive Nullstelle der Sinusfunktion ist. Daher $\cos \pi = -1$. Ähnlich findet man die Werte

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mit den Additionstheoremen bekommt man dann für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sin(z + \pi) &= -\sin z, & \cos(z + \pi) &= -\cos z, \\ \sin(z + 2\pi) &= \sin z, & \cos(z + 2\pi) &= \cos z, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) &= \cos z, & \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) &= \mp \sin z. \end{aligned}$$

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) heißt *periodisch*, wenn es eine komplexe (oder reelle) Zahl $p \neq 0$ so gibt, dass $f(z+p) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (bzw. \mathbb{R}). Die Zahl p heißt dann eine *Periode* von f . Die Sinus- und Kosinusfunktion sind also periodisch auf \mathbb{C} , und 2π ist eine Periode für beide Funktionen.

Wir vermerken noch eine Konsequenz der Eulerschen Formel:

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

welche die 5 bemerkenswerten Zahlen $0, 1, i, e, \pi$ miteinander verknüpft. Quadrieren dieser Gleichung liefert $e^{2\pi i} = 1$. Zusammen mit dem Additionstheorem (Satz 6.19) zeigt dies, dass

$$\exp z = \exp(z + 2\pi i) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Die komplexe Exponentialfunktion ist also $2\pi i$ -periodisch.

Satz 6.30 *Die komplexe Sinusfunktion hat ihre Nullstellen genau in den Punkten $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und die komplexe Kosinusfunktion hat ihre Nullstellen genau in den Punkten $(k + \frac{1}{2})\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.*

Alle Nullstellen dieser komplexen Funktionen sind also reell.

Beweis. Wir überlegen uns die Aussage für die Sinusfunktion. Da die Sinusfunktion in $(0, \pi)$ keine Nullstellen hat und $\sin(x + \pi) = -\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt sofort, dass die Zahlen die Gestalt $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, die einzigen reellen Nullstellen der Sinusfunktion sind.

Wir überlegen uns noch, dass es keine nichtreellen Nullstellen gibt. Angenommen, es ist $\sin(x + iy) = 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Mit dem Additionstheorem erhalten wir

$$\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0.$$

Hieraus folgt durch Vergleich der Real- und Imaginärteile

$$\sin x \cosh y = 0, \quad \cos x \sinh y = 0. \quad (6.5)$$

Wegen $\cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) > 0$ folgt aus der ersten Gleichung in (6.5), dass $\sin x = 0$ und folglich $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist. Für diese x ist aber $|\cos x| = 1$, und aus der zweiten Gleichung von (6.5) folgt dann $\sinh y = 0$. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = 0 \quad \iff \quad e^y = e^{-y} \quad \iff \quad e^{2y} = 1.$$

Diese Gleichung ist für $y = 0$ erfüllt, und weitere Lösungen kann es nach Folgerung 6.25 nicht geben. Alle Nullstellen der Sinusfunktion liegen also auf der reellen Achse. ■

6.6 Monotonie und Umkehrfunktion

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) auf D , wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \leq x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$). Die Funktion f heißt *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) auf D , wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$). Nach Folgerung 6.25 ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend auf \mathbb{R} .

Jede streng monotone Funktion ist injektiv (aus $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$) und, betrachtet als Funktion f von D auf $f(D) = W(f)$, auch surjektiv. Man kann also ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \rightarrow D$ bilden.

Satz 6.31 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei streng monoton wachsend (bzw. fallend). Dann ist die Funktion $f^{-1} : W(f) \rightarrow I$ ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend), und diese Funktion ist stetig.

Beachten Sie, dass wir die Stetigkeit von f nicht verlangt haben.

Beweis. Sei beispielsweise f streng monoton wachsend. Ist $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ mit $y_1 < y_2$, so muss auch $x_1 < x_2$ sein (andernfalls würde aus $x_1 \geq x_2$ ja $f(x_1) \geq f(x_2)$ folgen, da f monoton wachsend ist). Also ist f^{-1} streng monoton wachsend.

Wir zeigen noch die Stetigkeit von f^{-1} in jedem Punkt $y_0 \in W(f)$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in W(f) \quad \text{mit} \quad |y - y_0| < \delta \quad \text{gilt:} \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

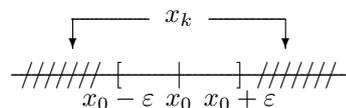
Diesen Beweis führen wir indirekt. Wir nehmen also an, dass

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists y \in W(f) \quad \text{mit} \quad |y - y_0| < \delta \quad \text{gilt:} \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \geq \varepsilon.$$

Da dies für alle $\delta > 0$ gelten soll, können wir für δ der Reihe nach die Zahlen $1/1, 1/2, \dots, 1/k, \dots$ wählen und erhalten für ein gewisses $\varepsilon > 0$

$$\text{Es gibt Zahlen } y_k \in W(f) \text{ mit } y_k \rightarrow y_0 \text{ so, dass } |f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)| \geq \varepsilon.$$

Sei $x_k := f^{-1}(y_k)$ und $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Da $|x_k - x_0| \geq \varepsilon$, ist wenigstens eine der folgenden Möglichkeiten realisiert: Es ist



- $x_k \leq x_0 - \varepsilon$ für alle k aus einer unendlichen Teilmenge \mathbb{N}_L von \mathbb{N} , oder
- $x_k \geq x_0 + \varepsilon$ für alle k aus einer unendlichen Teilmenge \mathbb{N}_R von \mathbb{N} .

Im ersten Fall gilt wegen der strengen Monotonie von f

$$y_k = f(x_k) \leq f(x_0 - \varepsilon) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_L,$$

woraus nach Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ folgt

$$y_0 \leq f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0,$$

ein Widerspruch. Genauso erhält man im zweiten Fall einen Widerspruch. Also ist f^{-1} stetig. ■

6.6.1 Die reelle Logarithmusfunktion

Nach Folgerung 6.25 ist die Exponentialfunktion auf ganz \mathbb{R} streng monoton wachsend. Der Wertebereich dieser Funktion ist das Intervall $(0, \infty)$. Wegen $\exp n = e^n > 2^n$ nimmt sie nämlich beliebig große und wegen $\exp(-n) = (\exp n)^{-1}$ auch beliebig kleine positive Werte an. Nach dem Zwischenwertsatz muss sie dann alle positiven Werte annehmen. Außerdem ist $\exp x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass \exp (wieder nach dem Zwischenwertsatz) keine negativen Werte annimmt. Die Umkehrfunktion der Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ heißt der *natürliche Logarithmus*. Sie wird mit \ln oder \log bezeichnet. Der natürliche Logarithmus \ln ist also eine Abbildung von $(0, \infty)$ auf \mathbb{R} . Aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion erhält man leicht:

- \ln ist streng monoton wachsend und stetig auf $(0, \infty)$ (Satz 6.2).
- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty$.
- Für alle $x, y \in (0, \infty)$ ist $xy = e^{\ln(xy)}$ sowie $xy = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$, also

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

- Insbesondere ist $\ln(1/x) = -\ln x$ und $\ln(x^n) = n \ln x$.

Die Logarithmusfunktion ermöglicht die Definition von Potenzen zu einer beliebigen Basis $a > 0$ durch

$$a^b := e^{b \ln a} \quad \text{für } b \in \mathbb{R}.$$

Für $a \in (0, 1)$ ist $\ln a < 0$, und für $a > 1$ ist $\ln a > 0$. Die *Exponentialfunktion zur Basis a* ,

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x,$$

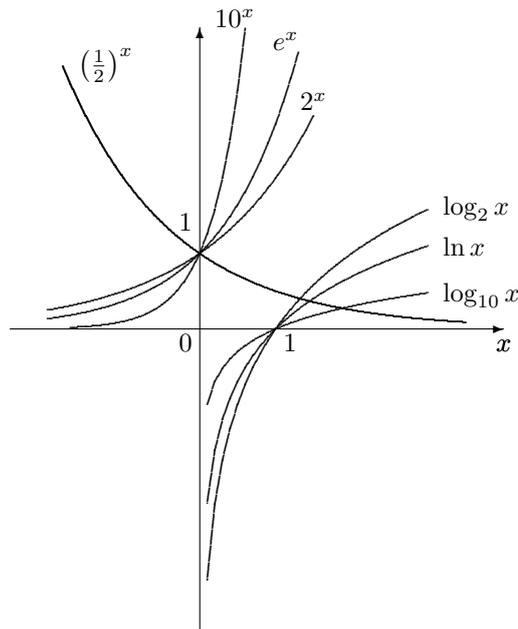
ist daher für $0 < a < 1$ streng monoton fallend und für $a > 1$ streng monoton wachsend. Für $a = 1$ ist die Funktion $x \mapsto a^x$ konstant gleich 1. Man bestätigt auch leicht die aus der Schule bekannten Potenzgesetze

$$a^{x+y} = e^{(x+y) \ln a} = e^{x \ln a} \cdot e^{y \ln a} = a^x a^y,$$

$$(a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{y \ln(e^{x \ln a})} = e^{yx \ln a} = a^{(xy)}.$$

Wegen $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$ ist der Graph der Funktion $x \mapsto a^x$ das Spiegelbild des Graphen der Funktion $x \mapsto (1/a)^x$ an der y -Achse.

Für $a > 1$ nennen wir die Umkehrfunktion zu $\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto a^x$ den *Logarithmus zur Basis a* und bezeichnen diese Funktion mit \log_a . Insbesondere ist $\log_e = \ln$.



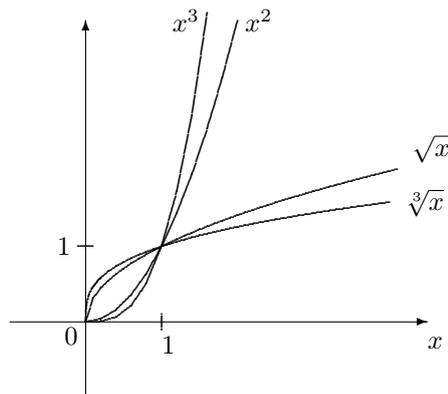
Ganz ähnlich erhält man, dass die für $a \in \mathbb{R}$ definierte *Potenzfunktion*

$$(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^a := e^{a \ln x}$$

auf $(0, \infty)$ streng monoton wachsend ist für $a > 0$, streng monoton fallend für $a < 0$ und konstant gleich 1 für $a = 0$. Für $a \neq 0$ ist ihre Umkehrfunktion gegeben durch

$$(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{1/a}.$$

Nach Satz 6.31 sind diese Funktionen stetig.



6.6.2 Zyklometrische oder Arkusfunktionen

Die zyklometrischen Funktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Da die trigonometrischen Funktionen nicht auf ganz \mathbb{R} injektiv sind (Periodizität!), kann man sie nur auf Teilintervallen von \mathbb{R} umkehren. Je

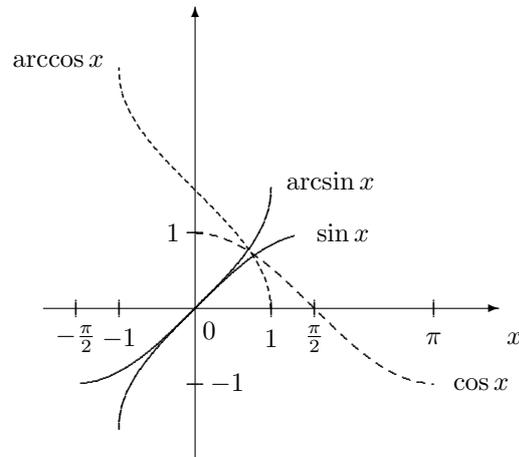
nach Wahl dieses Intervalls ergeben sich verschiedene Umkehrfunktionen. Häufig gewählt werden folgende Intervalle:

(a) $f(x) = \sin x$ auf $[-\pi/2, \pi/2]$.
 $f^{-1}(x) = \arcsin x$ auf $[-1, 1]$.

(b) $f(x) = \cos x$ auf $[0, \pi]$,
 $f^{-1}(x) = \arccos x$ auf $[-1, 1]$.

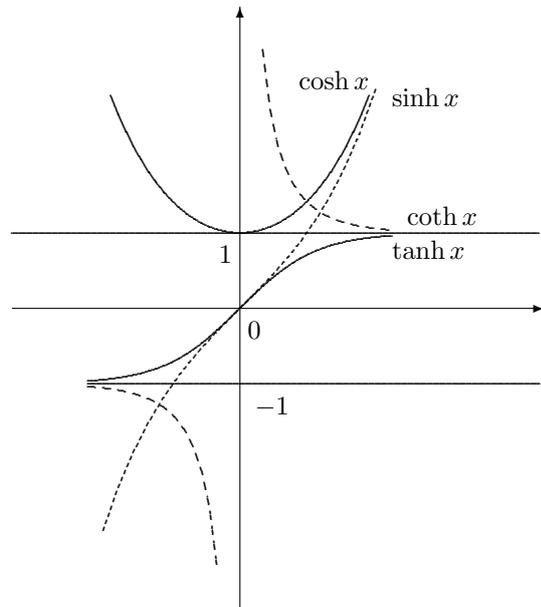
(c) $f(x) = \tan x$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$.
 $f^{-1}(x) = \arctan x$ auf \mathbb{R} .

(d) $f(x) = \cot x$ auf $(0, \pi)$.
 $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$ auf \mathbb{R} .



6.6.3 Areafunktionen

Die Areafunktionen sind die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen. Da $x \mapsto \sinh x$ auf \mathbb{R} streng monoton wachsend ist, existiert die Umkehrfunktion $x \mapsto \operatorname{arsinh} x$ auf \mathbb{R} (lies: Areasinushyperbolicus von x). Dagegen ist die Funktion $x \mapsto \cosh x$ auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend. Aus $\cosh[0, \infty) = [1, \infty)$ folgt: Die Umkehrfunktion zu $f : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $x \mapsto \cosh x$ existiert. Man bezeichnet sie mit arcosh .



Weiter definiert man auch

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{und} \quad \operatorname{coth} x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

(letzteres nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Diese Funktionen haben Umkehrfunktionen $\operatorname{artanh} x$ auf $(-1, 1)$ und $\operatorname{arcoth} x$ auf $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

6.7 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

6.7.1 Kompakte Mengen

Wir haben bereits mehrfach den Satz von Bolzano/Weierstraß benutzt. Dieser gilt in \mathbb{R} und auch in \mathbb{R}^n , jedoch nicht in beliebigen metrischen Räumen. Räume, in denen dieser Satz gilt, spielen eine wichtige Rolle in der Analysis.

Definition 6.32 Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $A \subseteq M$ heißt kompakt, wenn jede unendliche Teilmenge von A einen Häufungspunkt besitzt, der zu A gehört. Insbesondere ist jede endliche Menge kompakt. Mengen, deren Abschließung kompakt ist, heißen relativ kompakt.

Der folgende Satz wird genauso bewiesen wie die Äquivalenz der beiden Fassungen des Satzes von Bolzano/Weierstraß (Sätze 4.8 und 4.9).

Satz 6.33 Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $A \subseteq M$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in A eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert zu A gehört.

Wir beschreiben nun einige Eigenschaften kompakter Mengen.

Satz 6.34 Kompakte Teilmengen metrischer Räume sind abgeschlossen und beschränkt.

Beweis. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$ kompakt.

Abgeschlossenheit von A : Sei $x^* \in M$ Häufungspunkt von A . Dann gibt es eine Folge (x_n) in A , die gegen x^* konvergiert. Nach Satz 6.33 besitzt diese Folge eine Teilfolge (x_{k_n}) , die gegen einen Punkt x^{**} aus A konvergiert. Die Grenzwerte von (x_n) und (x_{k_n}) fallen aber zusammen (Satz 3.22). Somit gehört $x^* = x^{**}$ zu A .

Beschränktheit von A : Wir zeigen, dass es in jeder unbeschränkten Teilmenge A von M eine Folge gibt, die keine konvergente Teilfolge besitzt.

Sei $x_0 \in A$ beliebig. Wir wählen $x_1 \in A$ so, dass $d(x_1, x_0) \geq 1$. Die weiteren Folgenglieder definieren wir rekursiv. Seien x_0, x_1, \dots, x_k bereits konstruiert, und sei R_k der Radius einer Kugel um x_0 , die x_1, \dots, x_k enthält. Dann wählen wir x_{k+1} so, dass $d(x_{k+1}, x_0) \geq R_k + 1$. Für alle $l \leq k$ ist dann

$$d(x_{k+1}, x_l) \geq d(x_{k+1}, x_0) - d(x_0, x_l) \geq R_k + 1 - R_k = 1.$$

Je zwei beliebige Glieder der Folge (x_n) haben also einen Abstand von mindestens 1 voneinander. Diese Folge enthält daher keine konvergente Teilfolge. ■

Satz 6.35 Eine Teilmenge des Euklidischen Raumes \mathbb{R}^k ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis. Ist $A \in \mathbb{R}^k$ kompakt, so ist A abgeschlossen und beschränkt nach Satz 6.34. Umgekehrt ist nach dem Satz von Bolzano/Weierstraß im \mathbb{R}^k (Folgerung 4.17) jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^k kompakt. ■

Folgerung 6.36 Eine Teilmenge des \mathbb{R}^k ist genau dann relativ kompakt, wenn sie beschränkt ist.

Für eine weitere Charakterisierung kompakter Mengen definieren wir zunächst:

Definition 6.37 Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Weiter sei $\mathcal{G} = (G_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein System offener Mengen in M . Das System \mathcal{G} heißt eine offene Überdeckung von A , wenn $A \subseteq \cup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Man sagt weiter, dass \mathcal{G} eine endliche Überdeckung von A enthält, wenn es endlich viele Indizes $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ so gibt, dass $A \subseteq G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$.

Satz 6.38 (Überdeckungssatz von Heine/Borel) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $A \subseteq M$ ist genau dann kompakt, wenn sich aus jeder offenen Überdeckung von A eine endliche Überdeckung auswählen lässt.

Beachten Sie, dass man die kompakten Mengen bereits mit Hilfe der offenen Mengen vollständig charakterisieren kann.

Beweis. Den kompletten Beweis finden Sie in Lehrbüchern zur Funktionalanalysis. Wir werden den schwierigeren Teil nur für $M = \mathbb{R}$ zeigen. Dieser Teil lässt sich ohne Mühe auch auf $M = \mathbb{R}^k$ übertragen (Intervalle werden zu Quadern).

(\Leftarrow) Wir zeigen: Wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Überdeckung enthält, so ist A kompakt. Diesen Beweis führen wir indirekt. Angenommen, A besitzt eine unendliche Teilmenge S , die keinen Häufungspunkt in A hat. Dann besitzt jeder Punkt x von A eine offene Umgebung $U_r(x)$ (wobei r von x abhängen kann), die außer möglicherweise x selbst keinen weiteren Punkt aus S enthält.

Das System $\{U_r(x)\}_{x \in A}$ bildet eine offene Überdeckung von A . Jede Menge aus diesem System überdeckt höchstens einen Punkt von S . Da S unendlich viele Punkte enthält, kann man aus $\{U_r(x)\}_{x \in A}$ keine endliche Überdeckung von A auswählen. Widerspruch zur Voraussetzung.

(\Rightarrow) Sei nun speziell $M = \mathbb{R}$ und $A \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Weiter sei $\mathcal{G} := (G_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Wir zeigen, dass man aus \mathcal{G} eine endliche Überdeckung von A auswählen kann. Dies zeigen wir wieder indirekt, d.h. wir nehmen an, es lasse sich aus \mathcal{G} keine endliche Überdeckung von A auswählen.

Da A beschränkt ist, gibt es ein abgeschlossenes Intervall J_0 , das A enthält. Wir zerlegen J_0 in zwei gleichlange abgeschlossene Teilintervalle. Wenigstens eines dieser Teilintervalle hat die Eigenschaft, dass sich der Durchschnitt von A mit diesem Teilintervall nicht durch endlich viele der G_α überdecken lässt. Dieses Teilintervall nennen wir J_1 . Nun halbieren wir J_1 und wählen wie oben ein abgeschlossenes Teilintervall J_2 von J_1 , so dass zur Überdeckung von $A \cap J_2$ unendlich viele der G_α erforderlich sind. Wir fahren so fort und erhalten eine Folge $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots$ ineinander geschachtelter abgeschlossener Intervalle, deren Intervalllängen eine Nullfolge bilden und so, dass für die Überdeckung von $A \cap J_k$ jeweils unendlich viele der G_α erforderlich sind.

Nach dem Intervallschachtelungssatz gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in J_k$ für alle k . Da A abgeschlossen ist, liegt x in A . Insbesondere gibt es ein $G_\alpha \in \mathcal{G}$ mit $x \in G_\alpha$. Da G_α offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq G_\alpha$. Dann liegen aber für hinreichend großes n auch alle Intervalle J_n in G_α . Jedes dieser Intervalle (und damit jede der Mengen $J_n \cap A$) wird also bereits durch *eine* der Mengen G_α überdeckt. Widerspruch. ■

6.7.2 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Satz 6.39 *Seien X, Y metrische Räume, $A \subseteq X$ kompakt und $f : A \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Dann ist auch $f(A)$ kompakt.*

Kurz: *Stetige Funktionen überführen kompakte Mengen in kompakte Mengen.*

Beweis. Sei (y_n) eine Folge in $f(A) \subseteq Y$. Wir wählen zu jedem y_n ein $x_n \in A$ mit $f(x_n) = y_n$. Da A kompakt ist, besitzt die Folge (x_n) eine in A konvergente Teilfolge (x_{k_n}) mit Grenzwert x^* in A . Aus $x_{k_n} \rightarrow x^*$ und der Stetigkeit von f folgt $f(x_{k_n}) = y_{k_n} \rightarrow f(x^*) \in f(A)$. Somit besitzt (y_n) eine in $f(A)$ konvergente Teilfolge. ■

Im Falle $Y = \mathbb{R}$ lässt sich dieser Satz noch ergänzen. Da $f(A)$ beschränkt ist, besitzt $f(A)$ ein (endliches) Infimum und ein (endliches) Supremum, und da $f(A)$ abgeschlossen ist, ist das Infimum ein Minimum und das Supremum ein Maximum.

Satz 6.40 (Weierstraß) *Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ kompakt und nicht leer und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es Punkte x_{\min}, x_{\max} in A so, dass*

$$f(x_{\min}) = \inf_{x \in A} f(x), \quad f(x_{\max}) = \sup_{x \in A} f(x).$$

Kurz: *Stetige reellwertige Funktionen auf nichtleeren kompakten Mengen nehmen ihr Infimum und ihr Supremum an.*

Die Kompaktheit des Definitionsgebietes einer bijektiven stetigen Funktion garantiert auch die Stetigkeit der Umkehrfunktion. Genauer:

Satz 6.41 *Seien X, Y metrische Räume, A subseteq X kompakt und $f : A \rightarrow Y$ stetig und injektiv. Dann ist $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ stetig.*

Beweis. Sei (y_n) eine Folge in $f(A)$ mit Grenzwert $y^* \in f(A)$. Seien $x_n, x^* \in A$ so, dass $f(x_n) = y_n$ und $f(x^*) = y^*$. Wir zeigen, dass $x_n \rightarrow x^*$.

Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Umgebung $U_\varepsilon(x^*)$ mit $\varepsilon > 0$, außerhalb derer unendlich viele der x_n liegen. Wegen der Kompaktheit von A läßt sich aus diesen x_n eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) auswählen, deren Grenzwert \bar{x} von x^* verschieden ist (aus $d(x^*, x_{n_k}) > \varepsilon$ folgt ja $d(x^*, \bar{x}) \geq \varepsilon$). Aus der Stetigkeit von f folgt nun $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(\bar{x})$. Da aber bereits $y_n \rightarrow y^*$ gilt, muss $f(\bar{x}) = y^*$

und somit $\bar{x} = x^*$ sein, ein Widerspruch. ■

Mit diesem Resultat kann man auch eine gewisse Umkehrung zu Satz 6.31 zeigen.

Satz 6.42 Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und injektive Funktion. Dann ist f streng monoton.

Einen Beweis finden Sie in Barner/Flohr, Analysis I, S. 236. ■

Abschließend diskutieren wir eine weitere Eigenschaft stetiger Funktionen auf kompakten Mengen, die in vielen Beweisen ausgenutzt wird. Dazu vereinbaren wir:

Definition 6.43 Seien X, Y metrische Räume und $A \subseteq X$. Eine Funktion $f : A \rightarrow Y$ heißt gleichmäßig stetig auf A , wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass für alle $x, y \in A$ mit $d_X(x, y) < \delta$ gilt: $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Beachten Sie, dass δ nicht von x bzw. y abhängt, sondern allein von ε (während bei der Definition der (gewöhnlichen) Stetigkeit von f auf A das δ sowohl von ε als auch von $x \in A$ abhängt). Hält man in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit den Punkt $y = x_0$ fest, so ergibt sich gerade die Stetigkeit von f an der Stelle x_0 . Aus der *gleichmäßigen* Stetigkeit von f auf A folgt also die (gewöhnliche) Stetigkeit von f in jedem Punkt von A . Die Umkehrung gilt nicht, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel. Für $x \in (0, 1]$ sei $f(x) := 1/x$. Die Funktion f ist auf $(0, 1]$ stetig. Wäre sie auch gleichmäßig stetig auf $(0, 1]$, so gäbe es für $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ so, dass aus $|x - y| < \delta$ folgt $|1/x - 1/y| < 1$.

Wir wählen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ so, dass $\frac{1}{n} < \delta$. Für $x := \frac{1}{n}$ und $y := \frac{1}{2n}$ ist dann $|x - y| < \delta$, aber $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = n$, ein Widerspruch. ■

Satz 6.44 Seien X, Y metrische Räume, $A \subseteq X$ kompakt und $f : A \rightarrow Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf A .

Kurz: *Stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir stützen den Beweis auf die in Satz 6.33 bewiesene Charakterisierung kompakter Mengen und führen ihn indirekt. (Empfehlung: Suchen Sie einen alternativen Beweis unter Benutzung des Heine/Borelschen Überdeckungssatzes.)

Angenommen, f ist auf A stetig, jedoch nicht gleichmäßig stetig. Im Gegensatz zur Definition der gleichmäßigen Stetigkeit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in A \text{ mit } d_X(x, y) < \delta : \quad d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

soll also gelten

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \in A \text{ mit } d_X(x_\delta, y_\delta) < \delta : \quad d_Y(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon.$$

Dies gilt für alle $\delta > 0$. Wir wählen für δ die Zahlen $1/k$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und schreiben x_k, y_k statt x_δ, y_δ . Wir erhalten so zwei Folgen $(x_k), (y_k)$ in A . Da A kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) von (x_k) mit Grenzwert $x^* \in A$. Da nach Wahl von x_k, y_k für alle k die Ungleichung $d_X(x_k, y_k) < 1/k$ gilt, konvergiert auch die Teilfolge (y_{n_k}) von (y_k) gegen x^* . Schließlich gilt mit der Dreiecksungleichung für jedes n_k

$$0 < \varepsilon \leq d_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d_Y(f(x_{n_k}), f(x^*)) + d_Y(f(x^*), f(y_{n_k})).$$

Nun ist f aber stetig. Für $k \rightarrow \infty$ konvergiert daher die rechte Seite dieser Abschätzung gegen 0, woraus der Widerspruch $0 < \varepsilon \leq 0$ folgt. ■

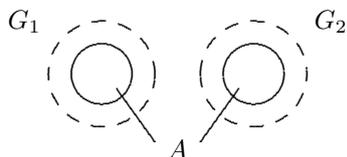
6.8 Stetige Funktionen auf zusammenhängenden Mengen

In diesem Abschnitt werden wir die anschauliche Vorstellung, dass eine Menge aus “einem Stück” ist, präzisieren.

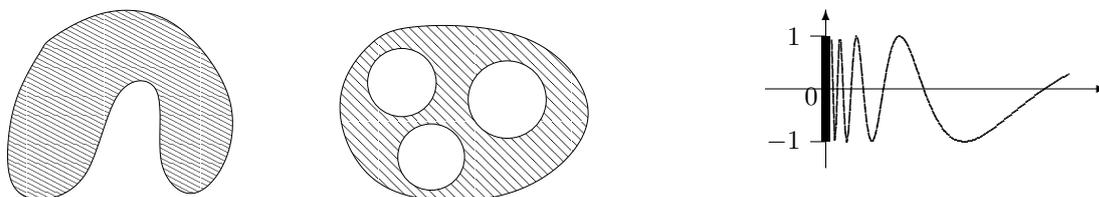
Definition 6.45 Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn es keine zwei offene Mengen G_1, G_2 in X mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset, \quad A \subseteq G_1 \cup G_2, \quad A \cap G_1 \neq \emptyset \quad \text{und} \quad A \cap G_2 \neq \emptyset.$$

Diese Definition ist etwas verzwickelt. Am einfachsten ist wohl zu verstehen, wann eine Menge nicht zusammenhängend ist:



Dagegen sind folgende Mengen zusammenhängend:



Die Menge in letztem Bild ist der Graph der Funktion $x \mapsto \sin(1/x)$ auf $(0, \infty)$, vereinigt mit dem Intervall $[-1, 1]$ auf der y -Achse.

Wir beschreiben nun die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} .

Satz 6.46 Die folgenden Aussagen sind äquivalent für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$:

- (a) A ist zusammenhängend.
- (b) Aus $x, y \in A$ und $x < z < y$ folgt $z \in A$.

Beweis. (a) \Rightarrow (b) Diese Implikation zeigen wir indirekt. Angenommen, es gibt Punkte $x, y \in A$ und $z \in \mathbb{R} \setminus A$ mit $x < z < y$. Dann sind die Mengen

$$G_1 := (-\infty, z) \quad \text{und} \quad G_2 := (z, +\infty)$$

offen. Weiter ist $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und $A \subseteq G_1 \cup G_2$, und die Durchschnitte $A \cap G_1$ und $A \cap G_2$ sind nicht leer, da ja $x \in G_1 \cap A$ und $y \in G_2 \cap A$. Also ist A nicht zusammenhängend.

(b) \Rightarrow (a) Auch diesen Teil zeigen wir indirekt. Ist A nicht zusammenhängend, so gibt es offene Mengen $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset, \quad A \subseteq G_1 \cup G_2, \quad A \cap G_1 \neq \emptyset, \quad A \cap G_2 \neq \emptyset.$$

Wir wählen Punkte $x \in A \cap G_1$ und $y \in A \cap G_2$. Wegen $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ist $x \neq y$. Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, nehmen wir $x < y$ an (andernfalls tauschen wir die Rollen von G_1 und G_2). Unser Ziel ist es, einen Punkt $z \in \mathbb{R}$ mit $x < z < y$ zu finden, der nicht zu A gehört.

Dazu betrachten wir die Menge $C := G_1 \cap [x, y]$. Diese Menge ist beschränkt und nicht leer und besitzt folglich ein endliches Supremum $z := \sup C$. Wegen $C \subseteq [x, y]$ ist $x \leq z \leq y$. Wir zeigen, dass $z < y$. Da y innerer Punkt von G_2 ist, gibt es eine offene Umgebung U von y , die ganz in G_2 liegt. Wegen $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ enthält U keine Punkte aus G_1 , und da U offen ist, kann U auch keine Häufungspunkte von G_1 enthalten. Insbesondere ist $z \notin U$ und damit $z < y$. Ganz ähnlich erhält man, dass $x < z$.

Wir zeigen, dass $z \notin G_1 \cup G_2$. Zunächst ist $z \notin G_1$. Da nämlich (wie wir bereits wissen) $z \in (x, y)$ ist und G_1 offen ist, würde aus $z \in G_1$ folgen, dass mit z auch eine ganze Umgebung von z in $G_1 \cap (x, y)$ liegt. Dann kann aber z nicht das Supremum von C sein.

Der Punkt z kann aber auch nicht in G_2 liegen, da er dann ja einerseits ein innerer Punkt von G_2 wäre, andererseits in jeder Umgebung von z Punkte aus G_1 lägen, im Widerspruch zu $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Also ist $z \notin G_1 \cup G_2$ und damit erst recht $z \notin A$. ■

Folgerung 6.47 *Eine Teilmenge von \mathbb{R} ist genau dann zusammenhängend, wenn sie gleich einem der Intervalle*

$$[a, b], \quad [a, d), \quad (c, b] \quad \text{oder} \quad (c, d)$$

ist, wobei $c = -\infty$ und $d = +\infty$ zugelassen sind.

Beweis. Mit Satz 6.46 macht sich sofort klar, dass jedes der angegebenen Intervalle zusammenhängend ist. Sei umgekehrt A eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} , die nicht von der Gestalt eines dieser Intervalle ist, und sei $m := \inf A$ und $M := \sup A$ ($m = -\infty$ und $M = +\infty$ sind zugelassen). Dann existiert ein Punkt $z \in \mathbb{R} \setminus A$ mit $m < z < M$ (da sonst ja eine der Intervalldefinitionen

erfüllt wäre). Dann findet man (vgl. Satz 1.14) aber auch Punkte $x, y \in A$ mit $m \leq x < z < y \leq M$. Nach Satz 6.46 kann A nicht zusammenhängend sein. ■

Einschub: Dieses einfache Bild, welches man von den zusammenhängenden Mengen in \mathbb{R} hat, ändert sich drastisch, wenn man zu \mathbb{R}^2 oder \mathbb{C} übergeht. Z.B. kann man relativ leicht überprüfen, dass die Juliamengen (die wir in Abschnitt 4.5 kurz angesprochen haben) für alle Parameter $c \in [-2, 1/4]$ zusammenhängend sind, während sie für alle Parameter von Betrag größer 2 nicht zusammenhängend sind. Sie sind dann sogar in einem besonders hohen Maß nichtzusammenhängend: ihre Bilder ähneln "fein verteiltem Staub". Man nennt solche Mengen auch *total unzusammenhängend*.

Für die übrigen Parameterwerte ist es meist nicht so einfach zu entscheiden, ob die zugehörige Juliamenge zusammenhängend ist oder nicht. Wirklich erstaunlich ist aber der folgende Satz:

Die zum Parameter c gehörende Juliamenge ist genau dann zusammenhängend, wenn c zur Mandelbrotmenge gehört.

Außerdem weiss man noch (Donady/Hubbard 1982):

Die Mandelbrotmenge ist zusammenhängend.

Für Details muss ich Sie auf Spezialliteratur verweisen. ■

Abschließend schauen wir uns stetige Funktionen auf zusammenhängenden Mengen an.

Satz 6.48 *Seien X, Y metrische Räume, $A \subseteq X$ zusammenhängend, und $f : A \rightarrow Y$ sei stetig. Dann ist $f(A)$ zusammenhängend.*

Kurz: *Stetige Funktionen überführen zusammenhängende Mengen in zusammenhängende Mengen.*

Beweis. Angenommen, $f(A)$ ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es nichtleere offene Teilmengen G_1, G_2 von Y so, dass

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset, \quad f(A) \subseteq G_1 \cup G_2, \quad f(A) \cap G_1 \neq \emptyset, \quad f(A) \cap G_2 \neq \emptyset. \quad (6.6)$$

Seien $D_1 := f^{-1}(G_1)$ und $D_2 := f^{-1}(G_2)$. Da f stetig ist, sind D_1 und D_2 offen in X (Satz 6.5). Aus (6.6) folgt sofort

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset, \quad A \subseteq D_1 \cup D_2, \quad A \cap D_1 \neq \emptyset \quad \text{und} \quad A \cap D_2 \neq \emptyset.$$

Also ist A im Widerspruch zur Voraussetzung nicht zusammenhängend. ■

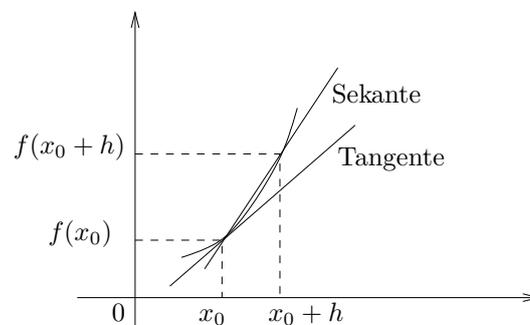
Speziell können wir diesen Satz anwenden auf stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Da das Intervall $[a, b]$ zusammenhängend ist, ist auch $f([a, b])$ nach Satz 6.48 zusammenhängend. Dann ist $f([a, b])$ nach Folgerung 6.47 ein Intervall. Da $f(a)$ und $f(b)$ zu diesem Intervall gehören, muss auch jeder zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegende Wert ein Funktionswert von f sein. Dies ist aber genau die Aussage des Zwischenwertsatzes (Satz 6.27). Wir können Satz 6.48 somit als Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes auf beliebige metrische Räume deuten.

7 Differentialrechnung für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen

Die Beschäftigung mit den folgenden beiden Problemen hat wesentlich zur Herausbildung der Differentialrechnung beigetragen.

Tangentenproblem (Leibniz). Gegeben ist eine reellwertige Funktion f , die auf einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert ist. Gesucht ist der Anstieg der Tangenten an den Graphen der Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Der Anstieg der Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ mit $h \neq 0$ ist leicht zu bestimmen:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Anschaulich erwartet man, dass sich der Anstieg der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ ergibt, wenn man den Grenzwert der Sekantenanstiege für $h \rightarrow 0$ betrachtet:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Geschwindigkeitsproblem (Newton). Sei $s(t)$ die bis zur Zeit t zurückgelegte Weglänge eines Massepunktes bei geradliniger Bewegung. Bei gleichförmiger Bewegung ist der Quotient

$$v := \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

von den Zeitpunkten t_0, t unabhängig und gibt die Geschwindigkeit des Massepunktes an. Bei einer beschleunigten Bewegung kann dieser Quotient nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit sein. Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 sollte sich als Grenzwert ergeben:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

7.1 Definition der Ableitung und einfache Eigenschaften

Definition 7.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, und $x_0 \in D$ sei ein Häufungspunkt von D . Dann heißt die Funktion

$$D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

der Differenzenquotient von f in x_0 . Die Funktion f heißt in x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt die Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet. Die Funktion f heißt differenzierbar auf D , wenn jeder Punkt von D ein Häufungspunkt von D ist und wenn f in jedem Punkt von D differenzierbar ist. Schließlich heißt f stetig differenzierbar auf D , wenn f auf D differenzierbar ist und wenn die Funktion

$$f' : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

auf D stetig ist.

Eine äquivalente Beschreibung der Differenzierbarkeit liefert folgender Satz.

Satz 7.2 (Zerlegungssatz) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D . Die Funktion f ist genau dann differenzierbar in x_0 , wenn es eine reelle Zahl α und eine Funktion $r : D \rightarrow \mathbb{R}$, die in x_0 stetig und gleich 0 ist, so gibt, dass

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \quad \text{für alle } x \in D. \quad (7.1)$$

In diesem Fall ist $\alpha = f'(x_0)$.

Beweis. (\Rightarrow) Sei f differenzierbar in x_0 . Dann definieren wir $\alpha := f'(x_0)$ sowie

$$r(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{falls } x \in D \setminus \{x_0\}, \\ 0 & \text{falls } x = x_0. \end{cases}$$

Offenbar ist die Funktion r auf ganz D definiert und gleich 0 in x_0 . Wegen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 = r(x_0)$$

ist r auch stetig in x_0 . Mit dieser Wahl von α und r folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha + r(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

zunächst für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$. Die letzte Identität ist aber offenbar auch für $x = x_0$ richtig.

(\Leftarrow) Aus (7.1) folgt für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha + r(x). \quad (7.2)$$

Die rechte Seite von (7.2) hat für $x \rightarrow x_0$ den Grenzwert $\alpha + r(x_0) = \alpha$. Also hat auch die linke Seite von (7.2) diesen Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha.$$

Das heißt aber, dass f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = \alpha$ ist. ■

Folgerung 7.3 *Ist f differenzierbar in x_0 , so ist f stetig in x_0 .*

Um dies zu sehen, lässt man in (7.1) x gegen x_0 streben und erhält $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. ■

Die Umkehrung von Folgerung 7.3 ist falsch, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel. Die Funktion $f : x \mapsto |x|$ ist auf \mathbb{R} stetig, in $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$ aber nicht differenzierbar. Für $x_0 = 0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nämlich

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Der Grenzwert von $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \rightarrow x_0$ existiert also nicht. ■

Dieses Beispiel legt nahe, in Analogie zu links- und rechtsseitigen Grenzwerten von Funktionen auch einseitige Ableitungen zu betrachten. So nennt man die Grenzwerte (sofern sie existieren)

$$f'(x_0 - 0) := \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{bzw.} \quad f'(x_0 + 0) := \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die *links-* bzw. *rechtsseitige Ableitung von f an der Stelle x_0* . Für die Funktion $f : x \mapsto |x|$ ist z.B. $f'(0 - 0) = -1$ und $f'(0 + 0) = +1$.

7.2 Rechnen mit Ableitungen

Satz 7.4 *Seien f und g an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f \pm g$, cf , fg sowie (falls $g(x_0) \neq 0$) f/g an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt*

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0), & (cf)'(x_0) &= cf'(x_0), \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \\ (f/g)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir überlegen uns beispielsweise die Produktregel:

$$\begin{aligned}
 (fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Für die Differenzierbarkeit verketteter Funktionen hat man folgendes Resultat.

Satz 7.5 (Kettenregel) *Die Funktionen f und g seien so beschaffen, dass die Verkettung $g \circ f$ gebildet werden kann. Weiter sei f an der Stelle x_0 und g an der Stelle $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \quad (7.3)$$

Beweis. Wir führen den Beweis mit Hilfe von Satz 7.2. Differenzierbarkeit von f in x_0 bzw. von g in $f(x_0)$ bedeutet demnach

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0), \quad (7.4)$$

$$g(y) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + s(y)(y - f(x_0)), \quad (7.5)$$

wobei die Funktion r in x_0 stetig und gleich 0 ist und s in $f(x_0)$ stetig und gleich 0 ist. Wir ersetzen in (7.5) y durch $f(x)$ und setzen dann (7.4) in (7.5) ein:

$$\begin{aligned}
 g(f(x)) - g(f(x_0)) &= g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + s(f(x))(f(x) - f(x_0)) \\
 &= g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + g'(f(x_0))r(x)(x - x_0) \\
 &\quad + s(f(x))(f'(x_0) + r(x))(x - x_0) \\
 &= g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + t(x)(x - x_0)
 \end{aligned}$$

mit $t(x) := g'(f(x_0))r(x) + s(f(x))f'(x_0) + s(f(x))r(x)$. Die Funktion t ist an der Stelle x_0 stetig und gleich 0 (Satz 6.6). Aus Satz 7.2 folgt die Behauptung. \blacksquare

Es sei nun f eine bijektive Funktion. Wenn f an der Stelle x_0 differenzierbar ist und wenn die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar ist, dann folgt aus der Kettenregel (7.3)

$$1 = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \text{bzw.} \quad g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Wir zeigen nun, dass diese Resultate bereits unter weit schwächeren Voraussetzungen an g (Stetigkeit in y_0) gelten, wenn man die Invertierbarkeit von $f'(x_0)$ fordert.

Satz 7.6 Die bijektive Funktion f sei an der Stelle x_0 differenzierbar, und es sei $f'(x_0) \neq 0$. Weiter sei die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist g differenzierbar an der Stelle y_0 , und es gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (7.6)$$

Beweis. Sei $y \neq y_0$ aus dem Definitionsbereich von g und $g(y) =: x$. Dann ist

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}. \quad (7.7)$$

Strebt y gegen y_0 , so streben wegen der Stetigkeit von g an der Stelle y_0 die entsprechenden Funktionswerte $g(y) = x$ gegen $g(y_0) = x_0$. Damit strebt

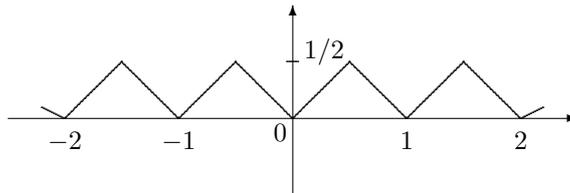
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{gegen} \quad f'(x_0).$$

Aus $f'(x_0) \neq 0$ folgt weiter

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Die rechte Seite von (7.7) konvergiert also für $y \rightarrow y_0$ gegen $1/f'(x_0)$. Dann muss auch die linke Seite von (7.7) für $y \rightarrow y_0$ konvergieren (d.h. g ist differenzierbar an der Stelle y_0), und der Grenzwert ist $1/f'(x_0)$ (d.h. die Beziehung (7.6) gilt). ■

Anmerkung. Es gibt Funktionen, die auf ganz \mathbb{R} stetig, jedoch in keinem Punkt von \mathbb{R} differenzierbar sind. Um eine solche Funktion zu konstruieren, sei zunächst g die 1-periodische Funktion mit $g(x) = |x|$ für $|x| \leq 1/2$.



Die Funktion g ist genau an den Stellen $k/2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ nicht differenzierbar. Wir “verdichten” diese “singulären Stellen”, indem wir für $j \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren

$$g_j(x) := \frac{1}{2^j} g(2^j x).$$

Jede Funktion g_j ist stetig und genau an den Stellen $k/2^{j+1}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ nicht differenzierbar. Wir erklären eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x).$$

Man kann nun zeigen:

- diese Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ (Majorantenkriterium; beachten Sie, dass $|g_j(x)| \leq 2^{-j}$).
- f ist auf ganz \mathbb{R} stetig (direkt beweisen oder auf Abschnitt 9 warten).
- f ist in keinem Punkt von \mathbb{R} differenzierbar.

Zum Beweis der dritten Aussage ist folgende Tatsache hilfreich.

Lemma 7.7 Die Funktion f sei in a differenzierbar, und für Folgen (x_n) und (y_n) gelte: $x_n \neq y_n$ und $x_n \leq a \leq y_n$ für alle n sowie $\lim x_n = \lim y_n = a$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

Versuchen Sie, dieses Lemma zu beweisen. Mit diesem Lemma erhält man leicht die Nichtdifferenzierbarkeit von f an der Stelle a , wenn man die Folgen (x_n) und y_n so wählt, dass

$$x_n = \frac{k_n}{2^n} \leq a \leq \frac{k_n + 1}{2^n} = y_n \quad \text{mit } k_n \in \mathbb{Z}.$$

Details finden Sie in Barner/Flor, Analysis I, S. 261 – 265. ■

7.3 Ableitungen spezieller Funktionen

7.3.1 Polynome und rationale Funktionen

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Im Fall $k \geq 1$ nutzen wir zum Nachweis der Differenzierbarkeit und zur Berechnung der Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$ die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gültige Identität

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + x^{k-3}y^2 + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1}).$$

Mit dieser folgt sofort

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \dots + xx_0^{k-2} + x_0^{k-1}) = kx_0^{k-1}.$$

Die Funktion $f : x \mapsto x^k$ ist also für jedes $k \geq 1$ auf ganz \mathbb{R} differenzierbar, und

$$f'(x) = kx^{k-1}. \tag{7.8}$$

Im Fall $k = 0$ (d.h. $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$) überprüft man die Differenzierbarkeit von f unmittelbar und findet $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist schließlich $k < 0$, so bekommt man mit der Quotientenregel die Differenzierbarkeit von $f : x \mapsto x^k$ für alle $x \neq 0$ und die Gültigkeit von (7.8) für alle diese x .

Mit (7.8) können wir die Ableitungen beliebiger Polynome und auch die beliebiger rationaler Funktionen (das sind Funktionen der Gestalt P/Q , wobei P und $Q \neq 0$ Polynome sind) bestimmen.

7.3.2 Exponential-, Logarithmus- und Potenzfunktionen

Wir untersuchen zunächst die Differenzierbarkeit der durch $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, gegebenen Funktion. Wegen

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h}$$

haben wir den Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$ zu bestimmen. Nach Definition der Exponentialfunktion ist für $x \neq 0$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) - 1 \right) = \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \quad (7.9)$$

Die rechts stehende Potenzreihe konvergiert auf ganz \mathbb{R} (sogar auf \mathbb{C}) absolut und stellt nach Satz 6.19 eine stetige Funktion dar. Der Grenzübergang $x \rightarrow 0$ in (7.9) liefert daher

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (7.10)$$

Also ist die Funktion $f : x \mapsto e^x$ auf ganz \mathbb{R} differenzierbar, und

$$f'(x) = e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (7.11)$$

Die Umkehrabbildung zu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ ist die auf $(0, \infty)$ erklärte Funktion $g : x \mapsto \ln x$. Nach Satz 6.31 ist g stetig. Außerdem ist $f'(x) = e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass g nach Satz 7.6 in jedem Punkt $y_0 = f(x_0)$ von $(0, \infty)$ differenzierbar ist und die Ableitung

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}$$

besitzt. Es ist also

$$g(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \in (0, \infty). \quad (7.12)$$

Mit (7.11), (7.12) und der Kettenregel können wir weitere Funktionen differenzieren.

- Sei $f(x) = a^x$ mit $a > 0$. Wir schreiben $a^x = e^{x \ln a}$ und erhalten mit der Kettenregel (mit $g : x \mapsto x \ln a$ als innerer und $h : x \mapsto e^x$ als äußerer Funktion)

$$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x. \quad (7.13)$$

- Sei $f(x) = \log_a x$ mit $a > 1$. Dann ist f die Umkehrfunktion zu $g : x \mapsto a^x$. Mit (7.13) und Satz 7.6 folgt mit $y = \log_a x$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\ln a \cdot a^y} = \frac{1}{\ln a \cdot a^{\log_a x}} = \frac{1}{x \ln a}. \quad (7.14)$$

- Sei $f(x) = x^a$ mit $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $x^a = e^{a \ln x}$ und erhalten mit der Kettenregel (und $g : x \mapsto a \ln x$ bzw. $h : x \mapsto e^x$ als innerer bzw. äußerer Funktion)

$$f'(x) = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}. \quad (7.15)$$

Die Differenzierbarkeit der Hyperbelfunktionen sowie die Beziehungen

$$\sinh' x = \cosh x, \quad \cosh' x = \sinh x$$

(in Kurzfassung) sollten Sie sich selbst überlegen.

7.3.3 Trigonometrische Funktionen

Eine ähnliche Begründung mit Hilfe von Potenzreihen wie für den Grenzwert (7.10) zeigt, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (7.16)$$

Aus den in Abschnitt 6.4.2 vermerkten Identitäten

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} &= \cos \frac{x + x_0}{2} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}}, \\ \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} &= -\sin \frac{x + x_0}{2} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \end{aligned}$$

folgt zusammen mit dem Grenzwert (7.16) sofort die Differenzierbarkeit der Funktionen \sin und \cos auf \mathbb{R} sowie die Identitäten

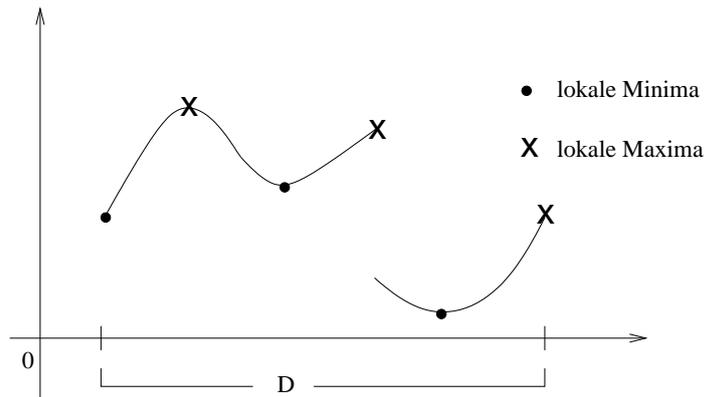
$$\sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x.$$

Hiermit bekommt man auch leicht die Ableitungen der \tan - bzw. \cot -Funktion sowie der Arkusfunktionen (\nearrow Übung).

7.4 Die Mittelwertsätze und der Satz von Taylor

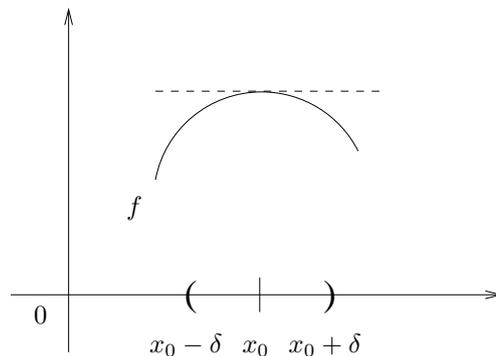
7.4.1 Der Satz von Rolle

Definition 7.8 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Die Funktion f hat in x_0 ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum), wenn es eine Umgebung U von x_0 so gibt, dass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in U \cap D$ (bzw. $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in U \cap D$).



Lemma 7.9 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 ein innerer Punkt von D . Die Funktion f habe in x_0 ein lokales Maximum (Minimum) und sei in x_0 differenzierbar. Dann ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall, dass in x_0 ein lokales Maximum vorliegt. Dazu wählen wir $\delta > 0$ so, dass $U := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D$ und dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U$.



Für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ gilt dann

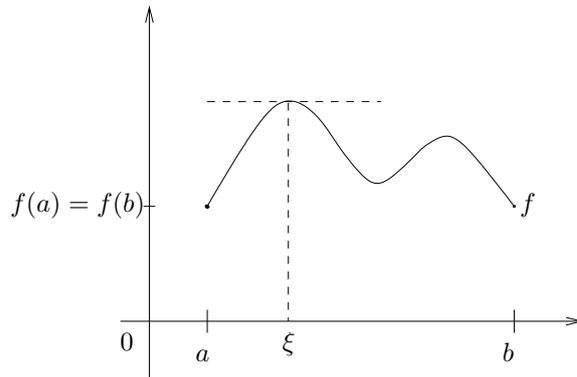
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{und folglich} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ ist dagegen

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{und folglich} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Also ist $f'(x_0) = 0$. ■

Satz 7.10 (Rolle) Sei f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) , und es sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.



Beweis. Die Funktion f ist stetig auf $[a, b]$ und nimmt nach dem Satz von Weierstraß (Satz 6.40) ihr Supremum und ihr Infimum an. Es gibt also Punkte $\eta, \zeta \in [a, b]$ mit $f(\eta) \geq f(x) \geq f(\zeta)$ für alle $x \in [a, b]$. Falls $f(\eta) = f(\zeta)$, so ist f konstant auf $[a, b]$, und es ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Sei also $f(\eta) > f(\zeta)$. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

- (A) Es ist $f(a) = f(b) < f(\eta)$. Dann ist η innerer Punkt von $[a, b]$, und f besitzt ein lokales Maximum in η . Nach Lemma 7.9 ist $f'(\eta) = 0$.
- (B) Es ist $f(a) = f(b) > f(\zeta)$. Dann ist ζ innerer Punkt von $[a, b]$, und f besitzt ein lokales Minimum in ζ . Nach Lemma 7.9 ist nun $f'(\zeta) = 0$. ■

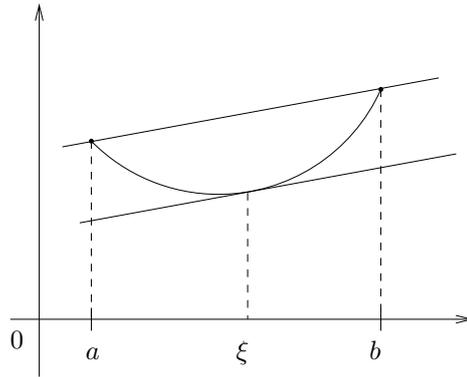
7.4.2 Die Mittelwertsätze der Differentialrechnung

Durch Anwendung des Satzes von Rolle auf geeignete “Hilfsfunktionen” lassen sich weitere Existenzaussagen über “Zwischen- oder Mittelwerte” ableiten.

Satz 7.11 (Mittelwertsatz) *Die Funktion f sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) . Dann gibt es einen Punkt $\zeta \in (a, b)$ so, dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\zeta).$$

Geometrische Interpretation. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist der Anstieg der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$, und $f'(\zeta)$ ist der Anstieg einer dazu parallelen Tangente an den Graphen von f .



Beweis des MWS. Für $x \in [a, b]$ sei

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a).$$

Die Funktion h ist stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) , und es gilt $h(a) = h(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\zeta \in (a, b)$ so, dass

$$h'(\zeta) = f'(\zeta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \quad \blacksquare$$

Folgerung 7.12 Die Funktion f sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) .

- (a) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant auf $[a, b]$.
- (b) Ist $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) auf $[a, b]$.

Beweis. Wir zeigen nur Aussage (a). Der Beweis von Aussage (b) verläuft analog. Seien $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\zeta \in (x_1, x_2)$ mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\zeta).$$

Nach Voraussetzung ist $f'(\zeta) = 0$. Also ist $f(x_1) = f(x_2)$ für beliebige $x_1, x_2 \in [a, b]$. ■

Folgerung 7.13 Die Funktion f sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) . Dann ist f genau dann monoton wachsend (bzw. monoton fallend) auf $[a, b]$, wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a, b)$.

Die Implikation \Rightarrow zeigt man wie im Beweis von Lemma 7.9; die Implikation \Leftarrow wie im Beweis von Folgerung 7.12. ■

Folgerung 7.14 Die Funktionen f und g seien stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) , und sei $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Dann unterscheiden sich f und g nur um eine Konstante.

Dies ergibt sich unmittelbar aus Folgerung 7.12 (a), angewandt auf die Funktion $f - g$. ■

Satz 7.15 (Zweiter oder Erweiterter MWS) Die Funktionen f und g seien stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) , und es sei $g(a) \neq g(b)$ sowie $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gibt es ein $\zeta \in (a, b)$ so, dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}.$$

Beweis. Man benutze den Satz von Rolle für die Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)). \quad \blacksquare$$

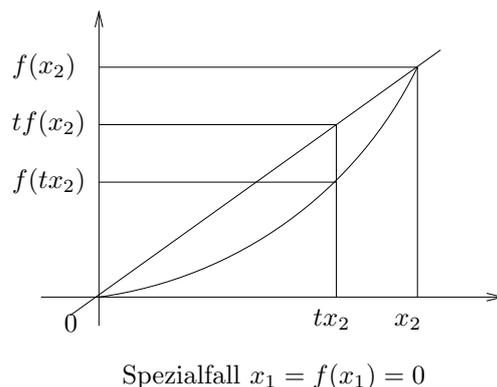
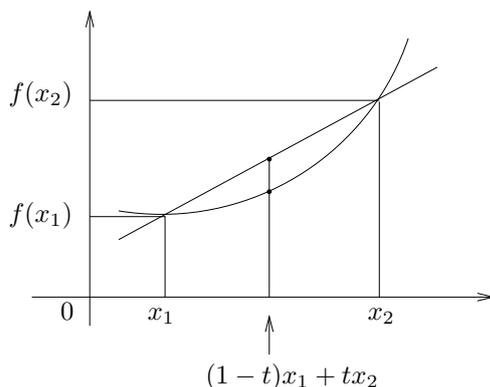
7.4.3 Konvexität und höhere Ableitungen

Definition 7.16 Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ und für alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \quad (7.17)$$

Steht in (7.17) für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ und alle $t \in [0, 1]$ das Relationszeichen \geq , so heißt f konkav.

Geometrische Deutung. Der Graph einer konvexen (bzw. konkaven) Funktion liegt unterhalb (bzw. oberhalb) der Verbindungsstrecke zweier beliebiger seiner Punkte.



Die Konvexität differenzierbarer Funktionen lässt sich wie folgt charakterisieren.

Satz 7.17 Sei f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex auf $[a, b]$, wenn die Ableitung f' auf (a, b) monoton wachsend ist.

Beweis. Sei zunächst f konvex und $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ sowie $t \in [0, 1]$. Mit

$$x := (1-t)x_1 + tx_2 \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \quad 1-t = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}$$

können wir die Konvexitätsbedingung (7.17) äquivalent schreiben als

$$(x_2 - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2). \quad (7.18)$$

Ist nun speziell $a < x_1 < x_2 < b$ und $t \in (0, 1)$, so ist $x - x_1 \neq 0$ und $x_2 - x \neq 0$, und aus (7.18) bekommt man leicht

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Außerdem ist f an den Stellen x_1 und x_2 differenzierbar. Der Grenzübergang $x \rightarrow x_1$ in der linken bzw. $x \rightarrow x_2$ in der rechten Ungleichung liefert

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$

d.h. f' ist monoton wachsend auf (a, b) .

Sei nun umgekehrt f' monoton wachsend auf (a, b) und $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen $\zeta_1 \in (x_1, x)$ und $\zeta_2 \in (x, x_2)$ so, dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\zeta_1) \quad \text{und} \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\zeta_2).$$

Wegen der Monotonie von f' ist $f'(\zeta_1) \leq f'(\zeta_2)$, d.h.

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Hieraus erhält man leicht (7.18) für alle $x \in (x_1, x_2)$. Für $x = x_1$ und $x = x_2$ ist (7.18) offenbar auch richtig. ■

Wir wissen aus Folgerung 7.13, dass man die Monotonie einer differenzierbaren Funktion f mit Hilfe ihrer Ableitung f' beschreiben kann. In Satz 7.17 benötigen wir die Monotonie der Ableitung. Diese können wir mit Mitteln der Differentialrechnung untersuchen, wenn f' differenzierbar ist.

Differenzierbare Funktionen auf (a, b) , deren Ableitung f' auf (a, b) differenzierbar ist, heißen *zweimal differenzierbar*, und $(f)'$ heißt die *zweite Ableitung* von f . Statt $(f)'$ schreibt man f'' . Ganz analog erklärt man k mal differenzierbare Funktionen sowie k . Ableitungen. Als Bezeichnung für die k . Ableitung von f dient $f^{(k)}$ oder $\frac{d^k f}{dx^k}$. Mitunter ist es zweckmäßig, die Funktion f selbst als 0. Ableitung von f zu betrachten. Man schreibt dann auch $f = f^{(0)}$.

Aus Satz 7.17 und Folgerung 7.13 schließen wir:

Folgerung 7.18 *Sei f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) zweimal differenzierbar. Dann ist f konvex auf $[a, b]$ genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.*

Eine analoge Aussage gilt für konkave Funktionen.

7.4.4 Der Satz von Taylor

Wir schreiben den Mittelwertsatz in der Form

$$\exists \zeta \in (x_0, x) : f(x) = f(x_0) + f'(\zeta)(x - x_0) \quad (7.19)$$

und interpretieren ihn neu: *Der Term $f'(\zeta)(x - x_0)$ beschreibt den Fehler, den wir begehen, wenn wir die Funktion f durch die konstante Funktion $f(x_0)$ approximieren.*

Man kann nun daran denken, die Funktion f genauer zu approximieren, indem nicht nur (wie in (7.19)) konstante Funktionen, sondern Polynome zur Approximation zugelassen werden. Es ist naheliegend, diese Polynome P so zu wählen, dass nicht nur (wie in (7.19)) die Funktionswerte $f(x_0)$ und $P(x_0)$ übereinstimmen, sondern auch die Werte der Ableitungen $f'(x_0) = P'(x_0)$, $f''(x_0) = P''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0)$, wobei n der Grad des Polynoms ist. Wir überlegen uns zunächst, wie ein solches Polynom aussieht und betrachten dazu den Ansatz

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Offenbar ist $P(x_0) = a_0$. Weiter ist

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

und folglich $P'(x_0) = a_1$. Aus

$$P''(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

folgt $a_2 = \frac{1}{2}P''(x_0)$. Allgemein findet man

$$a_k = \frac{1}{k!}P^{(k)}(x_0),$$

was mit den Vereinbarungen $0! = 1$ und $P^{(0)} = P$ auch für $k = 0$ richtig ist. Es ist somit

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Ist nun f eine in x_0 n mal differenzierbare Funktion, so wird durch

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \quad (7.20)$$

ein Polynom von Grad $\leq n$ definiert, welches im Punkt x_0 in allen Ableitungen bis zur n . mit der Funktion f übereinstimmt. Dieses Polynom heißt das *Taylorpolynom* von f vom Grad n . Der Fehler, der beim Ersetzen von f durch das Polynom (7.20) gemacht wird, wird in folgendem Satz beschrieben. Dazu vereinbaren wir, eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, die auf D n mal differenzierbar ist, *n mal stetig differenzierbar auf D* zu nennen, wenn ihre n . Ableitung stetig auf D ist.

Satz 7.19 (Taylor) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n mal stetig differenzierbar, und auf (a, b) existiere die $n + 1$. Ableitung. Dann gibt es ein $\zeta \in (a, b)$ so, dass

$$f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(b-a)^k}_{\text{Taylorpolynom } n. \text{ Grades}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}}_{\text{Restglied nach Lagrange}}. \quad (7.21)$$

Beweis. Wir definieren eine Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!} (b-x) - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (b-x)^n - m \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

wobei wir $m \in \mathbb{R}$ so wählen, dass $h(a) = 0$. Die Funktion h ist stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) , und es gilt $h(a) = h(b) = 0$. Ihre Ableitung im Punkt $x \in (a, b)$ ist

$$h'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + m \frac{(b-x)^n}{n!} \quad (7.22)$$

(Nachrechnen!). Nach Rolle existiert ein $\zeta \in (a, b)$ mit $h'(\zeta) = 0$. Aus (7.22) erhält man dann für m

$$-\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!} (b-\zeta)^n + m \frac{(b-\zeta)^n}{n!} = 0 \quad \text{bzw.} \quad m = f^{(n+1)}(\zeta).$$

Wir setzen diesen Wert in die Definition von h ein, wählen $x = a$ und erhalten die Darstellung (7.21). ■

Beispiel A. Wir betrachten die Funktion $f : x \mapsto \ln(1+x)$ und wählen $a = 0$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ und $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! (1+x)^{-k}$ für $k \geq 2$ und daher

$$f^{(0)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{für } k \geq 1.$$

Einsetzen in die Taylorsche Formel (7.21) mit $b := x > -1$ liefert

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{(1+\zeta)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

mit einem $\zeta \in (0, x)$. Für $x = 1$ ist insbesondere $\zeta \in (0, 1)$ und folglich

$$\left| (-1)^n \frac{1}{(1+\zeta)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| < \frac{1}{n+1}.$$

Damit ist klar: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ konvergiert, und ihre Summe ist $\ln 2$. Zur näherungsweisen Berechnung von $\ln 2$ ist diese Reihe allerdings ungeeignet, da sie zu langsam konvergiert. ■

Beispiel B. Für $f(x) = e^x$ und $a = 0$ ist $f^{(k)}(a) = 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\zeta}{(n+1)!}x^{n+1}$$

mit einem $\zeta \in (0, x)$. Für $x = 1$ ist insbesondere

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{c_n}{(n+1)!}$$

mit einem $c_n \in (1, e)$ (man beachte, dass ζ von n abhängen kann).

Wir wollen diese Darstellung nutzen, um die Irrationalität von e zu zeigen. Angenommen, e ist rational. Dann ist $e = m/n$ mit natürlichen Zahlen m und $n \neq 0$. O.E.d.A. nehmen wir $n \geq 3$ an. Dann ist

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{c_n}{(n+1)!}.$$

Multiplikation mit $n!$ liefert

$$(n-1)!m - n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \frac{c_n}{n+1}.$$

Auf der linken Seite steht eine ganze Zahl, und auf der rechten Seite wegen

$$\frac{1}{n+1} < \frac{c_n}{n+1} < \frac{3}{4} < 1$$

eine Zahl in $(0, 1)$. Dies ist offenbar unmöglich. Also ist e irrational. ■

7.4.5 Taylorreihen und Potenzreihen

In der Taylorschen Formel (7.21) haben wir eine genügend oft differenzierbare Funktion f durch ihr Taylorpolynom $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$ ersetzt und den dabei entstehenden Fehler beschrieben. Ist f beliebig oft differenzierbar, so können wir das Taylorpolynom von f für jedes n bilden und uns fragen, was beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ passiert. Die formal entstehende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \tag{7.23}$$

heißt die *Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt x_0* . Zwei Fragen sind naheliegend:

- Konvergiert die Taylorreihe für alle x aus einer Umgebung von x_0 ?
- Wenn ja, stimmt sie dann an der Stelle x mit $f(x)$ überein?

Die Antwort auf die erste Frage haben wir bereits in Abschnitt 6.3 gegeben: Die Taylorreihe (7.23) ist nichts anderes als eine um x_0 verschobene Potenzreihe. Es sind daher drei Fälle möglich:

- die Reihe (7.23) konvergiert nur für $x = x_0$.
- die Reihe (7.23) konvergiert für $|x - x_0| < r$ absolut und divergiert für $|x - x_0| > r$ mit einem $r > 0$, dem Konvergenzradius der verschobenen Potenzreihe.
- die Reihe (7.23) konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

Welcher dieser Fälle eintritt, kann mit der Formel von Cauchy-Hadamard für den Konvergenzradius entschieden werden. Zur Beantwortung der zweiten Frage betrachten wir zwei Beispiele.

Beispiel C. Sei $f(x) = e^x$ und $x_0 = 0$. Dann ist $f^{(k)}(0) = 1$ für alle k , und die Taylorreihe von f stimmt mit der die Funktion $f = \exp$ definierenden Potenzreihe überein:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad \blacksquare$$

Beispiel D. Die durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

erklärte Funktion ist ebenfalls auf ganz \mathbb{R} differenzierbar, und es ist $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (↗ Übung). Offenbar konvergiert also die Taylorreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen 0. Es ist aber $f(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$. ■

Es gibt also beliebig oft differenzierbare Funktionen, deren Taylorreihe überall konvergiert, bei denen aber Taylorreihe und Funktion nur im Entwicklungspunkt übereinstimmen.

Definition 7.20 Die Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf (a, b) beliebig oft differenzierbar. Dann heißt f auf (a, b) reell analytisch, wenn für jedes $x_0 \in (a, b)$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in (a, b) \cap U_\delta(x_0)$ die Taylorreihe von f um x_0 konvergiert und mit der Funktion f übereinstimmt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \forall x \in (a, b) \cap U_\delta(x_0).$$

Die Exponentialfunktion aus Beispiel **C** ist auf ganz \mathbb{R} reell analytisch; die Funktion aus Beispiel **D** dagegen nur auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Später werden wir zeigen:

Satz 7.21 *Die Funktion f sei durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ definiert. Dann ist f auf $(-r, r)$ reell analytisch, und die Taylorreihe von f um den Punkt 0 stimmt auf diesem Intervall mit der definierenden Potenzreihe überein.*

7.5 Einige Anwendungen der Differentialrechnung

7.5.1 Kurvendiskussion

Unter Kurvendiskussion versteht man die Aufgabe, sich Informationen über den Verlauf des Graphen einer gegebenen Funktion zu verschaffen. Typische Fragen sind etwa

- Stetigkeit und Differenzierbarkeit,
- Verhalten an Häufungspunkten des Definitionsbereichs (Existenz einseitiger Grenzwerte, Polstellen),
- bei unbeschränktem Definitionsbereich: Verhalten im Unendlichen (Asymptoten),
- Periodizität,
- Monotonieverhalten (wachsend/fallend); Punkte, in denen sich das Monotonieverhalten ändert (lokale Maxima und Minima),
- Krümmungsverhalten (konvex/konkav); Punkte, in denen sich das Krümmungsverhalten ändert (Wendepunkte).

Besonders die beiden letzten Fragen lassen sich für differenzierbare Funktionen mit Hilfe der Differentialrechnung effektiv untersuchen. Für genügend oft differenzierbare Funktionen wissen wir bereits:

- f hat in x_0 lokales Extremum $\implies f'(x_0) = 0$ (Lemma 7.9).
- f ist monoton wachsend (fallend) $\iff f' \geq 0$ ($f' \leq 0$) (Folgerung 7.13).
- f ist konvex/konkav $\iff f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) (Folgerung 7.18).

Für lokale Extrema haben wir bislang nur eine notwendige Bedingung angegeben. Wir ergänzen dies durch eine hinreichende Bedingung.

Satz 7.22 Sei f differenzierbar auf (a, b) , $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0) = 0$, und f' wechsele in x_0 das Vorzeichen, d.h. es gibt eine Umgebung $U \subseteq (a, b)$ von x_0 so, dass

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{für } x \in U, x < x_0 \quad \text{und} \quad f'(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in U, x > x_0 \quad (7.24)$$

oder

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in U, x < x_0 \quad \text{und} \quad f'(x) \geq 0 \quad \text{für } x \in U, x > x_0. \quad (7.25)$$

Im Fall (7.24) besitzt f ein lokales Maximum in x_0 , und im Fall (7.25) ein lokales Minimum.

Den Beweis erhält man sofort aus Folgerung 7.13. Ist z.B. $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in U$ mit $x < x_0$, so ist f auf $\{x \in U : x \leq x_0\}$ monoton wachsend und folglich $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U$ mit $x \leq x_0$. ■

Hausaufgabe: Was kann man aussagen, falls in (7.24) bzw. (7.25) die Zeichen $>$ und $<$ statt \geq und \leq stehen?

Satz 7.23 Sei $n \geq 2$ und f in (a, b) n mal stetig differenzierbar, $x_0 \in (a, b)$, und es sei $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 1, 2, \dots, n-1$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ist n gerade, so besitzt f in x_0 einen lokalen Extremwert, und zwar ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$, und ein lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$. Ist n ungerade, liegt in x_0 kein lokaler Extremwert vor.

Beweis. Für $x \in (a, b)$ liefert der Taylorsche Satz die Existenz eines $\zeta \in (x_0, x)$ mit

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Sei n gerade und beispielsweise $f^{(n)}(x_0) > 0$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}$ eine Umgebung U von x_0 , auf der $f^{(n)}$ positiv ist. Für $x \in U$ ist auch $\zeta \in U$, und wir erhalten

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(x-x_0)^n > 0 \quad \text{für alle } x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Also besitzt f in x_0 ein (sogar echtes) lokales Minimum.

Den Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ behandelt man analog. Ist dagegen n ungerade, so wechselt $(x-x_0)^n$ und damit auch $\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(x-x_0)^n$ in x_0 sein Vorzeichen. In diesem Fall kann f kein lokales Extremum in x_0 besitzen. ■

Definition 7.24 Ein Punkt $x_0 \in (a, b)$ heißt ein Wendepunkt von $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, wenn es eine Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ von x_0 gibt, so dass f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex (bzw. konkav) und auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konkav (bzw. konvex) ist.

Satz 7.25 (a) Sei f in (a, b) zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt von f . Dann ist $f''(x_0) = 0$.

(b) Sei $n \geq 3$ und f in (a, b) n mal stetig differenzierbar, und für $x_0 \in (a, b)$ gelte $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 2, \dots, n-1$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann ist x_0 Wendepunkt von f , falls n ungerade ist, und kein Wendepunkt, falls n gerade ist.

Beweis. (a) Sei $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt von f , und sei f für ein $\varepsilon > 0$ auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex und auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konkav. Nach Folgerung 7.18 ist dann $f'' \geq 0$ auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ und $f'' \leq 0$ auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Die Stetigkeit von f'' an der Stelle x_0 impliziert $f''(x_0) = 0$.

(b) Der Taylorsche Satz, aufgeschrieben für die Funktion f'' an der Stelle x_0 , liefert

$$f''(x) = f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-3)!}(x-x_0)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(\zeta)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$$

bzw.

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} \quad \text{mit einem } \zeta \in (x_0, x). \quad (7.26)$$

Ist z.B. $f^{(n)}(x_0) < 0$, so ist $f^{(n)}(x) < 0$ für alle x aus einer Umgebung $U \subseteq (a, b)$ von x_0 . Liegt x in U , so liegt erst recht ζ in U . Ist nun n ungerade sowie $x \in U$ und $x < x_0$, so folgt aus (7.26), dass $f''(x) > 0$. Nach Folgerung 7.18 ist f konvex auf $\{x \in U : x \leq x_0\}$. Unter gleichen Voraussetzungen erhält man, dass f auf $\{x \in U : x \geq x_0\}$ konkav ist. In diesem Fall ist x_0 also ein Wendepunkt. Die übrigen Fälle diskutiert man analog. ■

7.5.2 Bestimmung von Grenzwerten

Die folgende *Regel von de l'Hospital* hilft bei der Bestimmung von Grenzwerten von Brüchen der Gestalt "0/0".

Satz 7.26 (de l'Hospital) Die Funktionen f und g seien auf (a, b) n mal stetig differenzierbar, und in $x_0 \in (a, b)$ gelte $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ sowie $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und ist gleich $\frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$.

Beweis. Der Satz von Taylor liefert für $x \neq x_0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0 + 0 + \dots + 0 + (x-x_0)^n f^{(n)}(\zeta_x)/n!}{0 + 0 + \dots + 0 + (x-x_0)^n g^{(n)}(\eta_x)/n!} = \frac{f^{(n)}(\zeta_x)}{g^{(n)}(\eta_x)}$$

mit gewissen Zahlen ζ_x und η_x zwischen x_0 und x (man beachte, dass wegen $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ und wegen der Stetigkeit von $g^{(n)}$ auch $g^{(n)}(\eta_x) \neq 0$ für alle η_x aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 ist). Für $x \rightarrow x_0$ konvergieren auch

ζ_x und η_x gegen x_0 . Aus der Stetigkeit von $f^{(n)}$ und $g^{(n)}$ sowie aus $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(\zeta_x)}{g^{(n)}(\eta_x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}. \quad \blacksquare$$

Beispiel. Für $a > 0$ und $\alpha, \beta > 0$ ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{\alpha a^{\alpha-1}}{\beta a^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta}. \quad \blacksquare$$

Die Regel von de l'Hospital gilt auch, wenn unbestimmte Ausdrücke der Gestalt " ∞/∞ " vorliegen (vgl. Barner/Flohr, S. 276 – 277). So ist z.B.

$$\lim_{x \searrow 0} x \ln x = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \searrow 0} -x = 0.$$

In diesem Beispiel haben wir einen unbestimmten Ausdruck $0 \cdot \infty$ in die Form ∞/∞ gebracht und darauf de l'Hospital angewandt. Ähnlich lassen sich zahlreiche weitere Grenzwerte, die auf unbestimmte Ausdrücke wie $\infty - \infty, 1^\infty$ o.ä. führen, berechnen.

7.6 Differentiation vektorwertiger Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion. Bezeichnen wir für $t \in D$ die i . Komponente des Vektors $f(t)$ mit $f_i(t)$, so können wir f schreiben als

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \quad \text{mit reellwertigen Funktionen} \quad f_i : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definition 7.27 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $t_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D . Die Funktion f heißt differenzierbar in t_0 , wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(f(t_0 + h) - f(t_0) \right)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt Ableitung von f an der Stelle t_0 und wird mit $\frac{df}{dt}(t_0)$ oder $f'(t_0)$ bezeichnet.

Satz 7.28 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, und $t_0 \in D$ sei Häufungspunkt von D . Die Funktion f ist genau dann differenzierbar in t_0 , wenn jede ihrer Koordinatenfunktionen in t_0 differenzierbar ist. In diesem Fall gilt

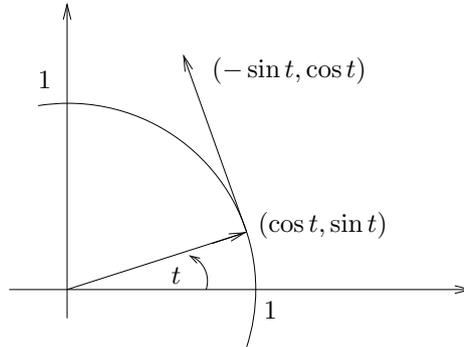
$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0)).$$

Beweis. Wegen

$$\frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0)) = \left(\frac{f_1(t_0 + h) - f_1(t_0)}{h}, \dots, \frac{f_n(t_0 + h) - f_n(t_0)}{h} \right)$$

folgt die Behauptung sofort aus dem entsprechenden Satz für Grenzwerte von Folgen von Vektoren (Satz 4.13). ■

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Dann ist f überall auf \mathbb{R} differenzierbar, und $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Man beachte: $f'(t)$ beschreibt die Richtung der Tangente an die Kurve $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ im Punkt $f(t)$. Wir kommen darauf noch zurück. ■



Mit Satz 7.28 lassen sich viele Eigenschaften reellwertiger Funktionen auf vektorwertige Funktionen übertragen. Zum Beispiel gilt:

- Ist f in t_0 differenzierbar, so ist f in t_0 stetig.
- Sind f, g in t_0 differenzierbar, so ist $f + g$ in t_0 differenzierbar, und es ist

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0).$$

- Ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in t_0 differenzierbar und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $g(t_0)$, so ist $f \circ g$ in t_0 differenzierbar, und es gilt

$$(f \circ g)'(t_0) = f'(g(t_0)) \cdot g'(t_0).$$

Dagegen gilt der Mittelwertsatz NICHT in seiner gewohnten Form.

Beispiel. Sei wieder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Dann gibt es KEINE Zahl $\zeta \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = f'(\zeta).$$

Einerseits ist nämlich $f(2\pi) - f(0) = (0, 0)$; andererseits ist

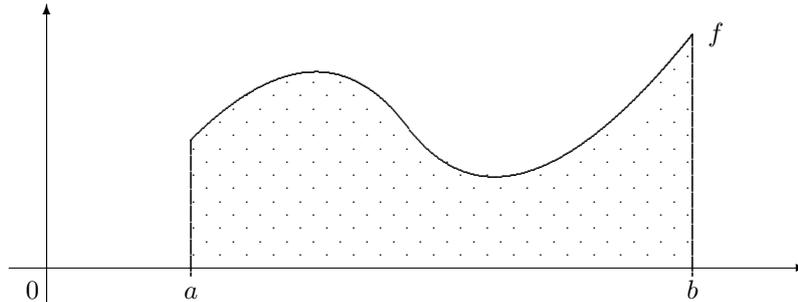
$$\|f'(\zeta)\| = \|(-\sin \zeta, \cos \zeta)\| = \sqrt{\sin^2 \zeta + \cos^2 \zeta} = 1$$

für jedes $\zeta \in \mathbb{R}$. ■

8 Das Riemann-Integral

Es sind wenigstens zwei Probleme, die zur Herausbildung der Integralrechnung geführt haben.

Flächenberechnungen. Gegeben ist eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist der Inhalt der von den Geraden $x = a$, $x = b$, $y = 0$ und vom Graphen der Funktion f begrenzten Fläche.

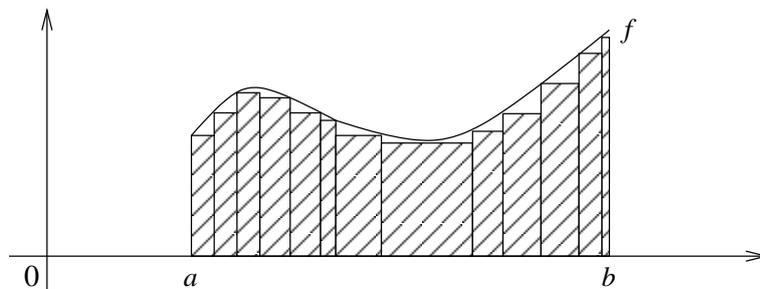


Umkehrung des Differenzierens. Kann man aus der Ableitung einer Funktion die Funktion selbst rekonstruieren? Gibt es für jede Funktion f eine Funktion g mit $g' = f$? Wenn ja, wieviele?

Zur Lösung dieser und anderer Fragen wurden verschiedene Integralbegriffe entwickelt, von denen wir einen der einfachsten – das Riemann-Integral – hier kennenlernen wollen. Eine in vielerlei Hinsicht zufriedenstellendere Integrationstheorie wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts von Lebesgue geschaffen. Wir kommen im 4. Semester darauf zurück.

8.1 Der Begriff des Riemann-Integrals

Eine naheliegende Idee zur Berechnung der Fläche eines komplizierten Gebietes (etwa des oben skizzierten) ist es, das Gebiet durch andere Gebiete “anzunähern”, deren Flächenberechnung einfacher ist, z.B. durch eine endliche Anzahl von Rechtecken. Wir hoffen, dass wir dem “wahren” Flächeninhalt näherkommen, wenn wir die “Approximation” verbessern, indem wir z.B. die Rechtecke schmäler machen. Diese vage Vorstellung wollen wir nun präzisieren.



Für jedes $i = 0, \dots, n$ sei x_i ein Punkt aus $[a, b]$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Die Menge $Z := \{x_0, \dots, x_n\}$ heißt eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$. Die Länge des i . Teilintervalls $I_i := [x_i, x_{i+1}]$ bezeichnen wir mit $\Delta x_i := x_{i+1} - x_i$ oder $|I_i|$. Die Zahl $|Z| := \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$ heißt das *Feinheitsmaß* oder die *Maschenweite* von Z . Ist Z eine Zerlegung von $[a, b]$ und geht eine Zerlegung Z' von $[a, b]$ aus Z durch Hinzufügen weiterer Punkte hervor, so heißt Z' eine *Verfeinerung* von Z . Offenbar ist dann $|Z'| \leq |Z|$.

Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi := (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ ein zugehöriger *Zwischenvektor*, d.h. es gelte $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ für jedes i . Dann heißt

$$S(Z, \xi, f) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

eine *Riemann-Summe* für f .

Sei schließlich $(Z_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ mit $|Z_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, und für jedes n sei $\xi^{(n)}$ ein Zwischenvektor für Z_n . Dann heißt die Folge $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f))_{n=1}^\infty$ der entsprechenden Riemann-Summen eine *Riemann-Folge* für f .

Definition 8.1 Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn jede Riemann-Folge $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f))_{n=1}^\infty$ für f konvergiert.

Lemma 8.2 Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so haben alle Riemann-Folgen für f den gleichen Grenzwert.

Beweis. Sind $(S_n^{(1)})$ und $(S_n^{(2)})$ Riemann-Folgen für f , so ist auch

$$(S_n) := (S_1^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(1)}, S_2^{(2)}, \dots)$$

eine Riemann-Folge für f . Nach Voraussetzung konvergiert die Folge (S_n) . Dann konvergieren auch ihre Teilfolgen $(S_n^{(1)})$ und $(S_n^{(2)})$, und diese haben den gleichen Grenzwert wie (S_n) . ■

Definition 8.3 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Der gemeinsame Grenzwert aller Riemann-Folgen für f heißt das Riemann-Integral von f . Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $\int_a^b f(x) dx$.

Satz 8.4 Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist f beschränkt.

Kurz: Riemann-integrierbare Funktionen sind beschränkt.

Beweis. Wir zeigen die Beschränktheit nach oben. Angenommen, f ist auf $[a, b]$ nach oben unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge (x_i) in $[a, b]$ mit $f(x_i) \rightarrow +\infty$. Aus der Folge (x_i) lässt sich eine konvergente Teilfolge auswählen (Bolzano/Weierstraß). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Folge (x_i) bereits konvergent ist. Ihr Grenzwert sei \hat{x} .

Sei Z_n die Zerlegung von $[a, b]$ in n gleichlange Teilintervalle. Dann gibt es sicher ein Teilintervall I_m von Z , welches \hat{x} und unendlich viele der Punkte x_i enthält. Für alle Teilintervalle $I_k \neq I_m$ von Z wählen wir beliebige Zwischenpunkte ξ_k und setzen

$$S'_n := \sum_{k \neq m} f(\xi_k) |I_k|.$$

Wegen $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = +\infty$ können wir als Zwischenpunkt $\xi_m \in I_m$ einen der Punkte x_i so wählen, dass $f(\xi_m) > (n - S'_n)/|I_m|$ bzw.

$$S(Z_n, \xi^{(n)}, f) = S'_n + f(\xi_m)|I_m| > n.$$

Es lässt sich also eine Riemann-Folge $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f))_{n=1}^\infty$ für f konstruieren, welche bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Dann kann f nicht Riemann-integrierbar sein. ■

8.2 Darbousche Integrale

Wir betrachten einen weiteren Zugang zum Riemann-Integral. Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ und jede *beschränkte* Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$m_i := \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_i := \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Wir nennen

$$U(Z, f) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \quad \text{bzw.} \quad O(Z, f) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

die zugehörige *Unter-* bzw. *Obersumme*.

Lemma 8.5 *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt*

(a) *für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ und jede Verfeinerung Z' von Z , dass*

$$U(Z, f) \leq U(Z', f) \quad \text{und} \quad O(Z', f) \leq O(Z, f),$$

(b) *für je zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, b]$, dass $U(Z_1, f) \leq O(Z_2, f)$.*

Beweis. (a) Wir zeigen nur die erste Behauptung, und diese nur für den Fall, dass Z' genau einen Punkt x^* mehr enthält als Z . Unterscheiden sich Z und Z' um $p > 1$ Punkte, muss diese Überlegung p mal angewandt werden.

Sei $Z = (x_0, \dots, x_n)$ und $x_j < x^* < x_{j+1}$. Für

$$m'_j := \inf_{x \in [x_j, x^*]} f(x) \quad \text{und} \quad m''_j := \inf_{x \in [x^*, x_{j+1}]} f(x)$$

ist $m_j \leq m'_j$ und $m_j \leq m''_j$. Wir können daher abschätzen

$$m_j \Delta x_j = m_j(x^* - x_j) + m_j(x_{j+1} - x^*) \leq m'_j(x^* - x_j) + m''_j(x_{j+1} - x^*).$$

Da beim Übergang von $U(Z, f)$ zu $U(Z', f)$ lediglich der Summand $m_j \Delta x_j$ durch $m'_j(x^* - x_j) + m''_j(x_{j+1} - x^*)$ ersetzt wird, folgt die Behauptung.

(b) Sei Z' eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2 . Dann ist $U(Z_1, f) \leq U(Z', f)$ und $O(Z', f) \leq O(Z_2, f)$ nach Teil (a). Die Ungleichung $U(Z', f) \leq O(Z', f)$ gilt offenbar. ■

Aus Lemma 8.5 (b) folgt, dass die Menge der Untersummen einer beschränkten Funktion nach oben und die Menge der Obersummen nach unten beschränkt ist. Damit existieren (als endliche Zahlen)

$$\inf_Z O(Z, f) =: \int_a^{*b} f(x) dx \quad \text{und} \quad \sup_Z U(Z, f) =: \int_{*a}^b f(x) dx.$$

Diese Zahlen heißen *oberes* und *unteres Darboux'sches Integral* von f . Aus Lemma 8.5 (b) folgt sofort

$$\int_{*a}^b f(x) dx \leq \int_a^{*b} f(x) dx.$$

Satz 8.6 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und (Z_n) eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |Z_n| = 0$. Dann existieren die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f)$, und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f) = \int_{*a}^b f(x) dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f) = \int_a^{*b} f(x) dx.$$

Beweis. Wir führen den Beweis für Untersummen. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Zerlegung Z' von $[a, b]$ so, dass

$$0 \leq \int_{*a}^b f(x) dx - U(Z', f) < \varepsilon/2.$$

Diese Zerlegung bestehe aus $r + 2$ Punkten mit $r \geq 1$. Weiter sei

$$M := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

und $N \in \mathbb{N}$ sei so gewählt, dass

$$|Z_n| \leq \frac{\varepsilon}{4rM} \quad \text{für alle } n \geq N$$

(was wegen $|Z_n| \rightarrow 0$ möglich ist). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei schließlich $Z'_n := Z_n \cup Z'$ gemeinsame Verfeinerung von Z_n und Z' . Nach Lemma 8.5 (a) gilt

$$\int_{*a}^b f(x) dx - U(Z'_n, f) \leq \int_{*a}^b f(x) dx - U(Z', f) < \varepsilon/2. \quad (8.1)$$

Da beim Übergang von Z_n zu Z'_n höchstens r neue Punkte hinzukommen, gilt

$$U(Z'_n, f) - U(Z_n, f) \leq 2rM|Z_n|. \quad (8.2)$$

Wir überlegen uns (8.2) zunächst für *einen* neu hinzukommenden Punkt t . Liegt t etwa in $[x_i, x_{i+1}]$, wobei die x_i Punkte der Zerlegung Z_n sind, so hat man

$$\begin{aligned} U(Z'_n, f) - U(Z_n, f) &= \inf_{x \in [x_i, t]} f(x)(t - x_i) + \inf_{x \in [t, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - t) \\ &\quad - \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)(x_{i+1} - x_i) \\ &\leq M(t - x_i) + M(x_{i+1} - t) + M(x_{i+1} - x_i) \\ &= 2M\Delta x_i \leq 2M|Z_n|. \end{aligned}$$

Damit ist (8.2) für einen hinzukommenden Punkt gezeigt. Der allgemeine Fall ergibt sich durch Wiederholung dieser Überlegungen.

Addition von (8.1) und (8.2) ergibt nun

$$0 \leq \int_{*a}^b f(x) dx - U(Z_n, f) < \varepsilon/2 + 2rM|Z_n| \leq \varepsilon/2 + \frac{2rM\varepsilon}{4rM} = \varepsilon$$

für alle $n \geq N$, woraus die behauptete Konvergenz folgt. ■

Definition 8.7 Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Darboux-integrierbar, wenn

$$\int_{*a}^b f(x) dx = \int_a^{*b} f(x) dx.$$

Satz 8.8 Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Darboux-integrierbar, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$ gibt.

Beweis. (\Leftarrow) Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine Zerlegung Z mit $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$. Wegen

$$U(Z, f) \leq \int_{*a}^b f(x) dx \leq \int_a^{*b} f(x) dx \leq O(Z, f)$$

ist dann erst recht

$$0 \leq \int_a^{*b} f(x) dx - \int_{*a}^b f(x) dx < \varepsilon.$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$. Also sind oberes und unteres Darboux-sches Integral gleich.

(\Rightarrow) Sei f Darboux-integrierbar und $J := \int_{*a}^b f(x) dx$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da J das Infimum von Ober- und das Supremum von Untersummen ist, gibt es Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, b]$ so, dass

$$J - U(Z_1, f) < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad O(Z_2, f) - J < \varepsilon/2.$$

Sei Z eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2 . Dann ist nach Lemma 8.5 (a) $U(Z_1, f) \leq U(Z, f)$ sowie $O(Z, f) \leq O(Z_2, f)$ und folglich

$$J - U(Z, f) < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad O(Z, f) - J < \varepsilon/2.$$

Addition dieser Ungleichungen ergibt $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$. ■

Der Zusammenhang zwischen Riemann- und Darboux-Integrierbarkeit wird durch folgenden Satz hergestellt.

Satz 8.9 *Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie Darboux-integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{*a}^b f(x) dx = \int_a^{*b} f(x) dx. \quad (8.3)$$

Beweis. Sei zunächst f Darboux-integrierbar und $(S(Z_n, \xi^{(n)}, f))$ eine Riemann-Folge für f . Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann

$$U(Z_n, f) \leq S(Z_n, \xi^{(n)}, f) \leq O(Z_n, f). \quad (8.4)$$

Nach Satz 8.6 konvergieren die linke Seite von (8.4) für $n \rightarrow \infty$ gegen $\int_a^b f(x) dx$ und die rechte Seite gegen $\int_a^{*b} f(x) dx$, und diese Grenzwerte sind gleich. Dann muss aber auch die Riemann-Folge konvergieren, und ihr Grenzwert stimmt mit $\int_{*a}^b f(x) dx$ überein (Satz 4.2). Insbesondere ist f Riemann-integrierbar, und es gilt (8.3).

Sei nun f Riemann-integrierbar und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir konstruieren zwei spezielle Riemann-Folgen für f wie folgt: Z_n sei die Zerlegung von $[a, b]$ in n Intervalle gleicher Länge, und $\xi'_i, \xi''_i \in [x_i, x_{i+1}]$ seien so gewählt, dass

$$\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) - f(\xi'_i) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad f(\xi''_i) - \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \quad (8.5)$$

Wir setzen noch $\xi_{\text{sup}}^{(n)} := (\xi'_0, \dots, \xi'_{n-1})$ und $\xi_{\text{inf}}^{(n)} := (\xi''_0, \dots, \xi''_{n-1})$ und erhalten zwei Riemann-Folgen $(S(Z_n, \xi_{\text{sup}}^{(n)}, f))$ und $(S(Z_n, \xi_{\text{inf}}^{(n)}, f))$, die beide gegen $J := \int_a^b f(x) dx$ konvergieren. Es gibt daher ein N so, dass

$$|S(Z_N, \xi_{\text{sup}}^{(N)}, f) - J| < \varepsilon/4 \quad \text{und} \quad |S(Z_N, \xi_{\text{inf}}^{(N)}, f) - J| < \varepsilon/4. \quad (8.6)$$

Zur Abkürzung sei noch $Z := Z_N$, $\xi_s := \xi_{\text{sup}}^{(N)}$ und $\xi_i := \xi_{\text{inf}}^{(N)}$. Wegen (8.5) ist

$$O(Z, f) \leq S(Z, \xi_s, f) + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad U(Z, f) \geq S(Z, \xi_i, f) - \frac{\varepsilon}{4},$$

woraus mit (8.6) schließlich

$$\begin{aligned} O(Z, f) - U(Z, f) &\leq S(Z, \xi_s, f) + \frac{\varepsilon}{4} - S(Z, \xi_i, f) + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |S(Z, \xi_s, f) - J| + |J - S(Z, \xi_i, f)| < \varepsilon \end{aligned}$$

folgt. Nach Satz 8.8 ist f Darboux-integrierbar. ■

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 8.8 und Satz 8.9 ist

Folgerung 8.10 (Riemannsches Integritätskriterium) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$ existiert.

Beispiel. Für die Dirichlet-Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

ist jede Obersumme gleich $b - a$ und jede Untersumme gleich 0. Diese Funktion ist also nicht Riemann-integrierbar. ■

8.3 Einige Klassen Riemann-integrierbarer Funktionen

Satz 8.11 Monotone Funktionen auf $[a, b]$ sind Riemann-integrierbar.

Beweis. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beispielsweise monoton wachsend. Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei Z_n die Zerlegung von $[a, b]$ in n Teilintervalle gleicher Länge. Dann ist

$$U(Z_n, f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

sowie

$$O(Z_n, f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}).$$

Also ist

$$O(Z_n, f) - U(Z_n, f) = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

Dies wird kleiner als jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$, wenn nur n groß genug ist. ■

Satz 8.12 Stetige Funktionen auf $[a, b]$ sind Riemann-integrierbar.

Beweis. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Da f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist (Satz 6.44), gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon/(b - a)$ für alle $t_1, t_2 \in [a, b]$ mit $|t_1 - t_2| < \delta$.

Sei $Z = (x_0, \dots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $|Z| < \delta$. Dann ist

$$O(Z, f) - U(Z, f) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i.$$

Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Supremum und Infimum annehmen, gibt es für jedes i Punkte $\xi'_i, \xi''_i \in [x_i, x_{i+1}]$ mit $f(\xi'_i) = M_i$ und $f(\xi''_i) = m_i$. Aus $x_i \leq \xi'_i$ und $\xi''_i \leq x_{i+1}$ folgt weiter $|\xi'_i - \xi''_i| < \delta$ und somit $f(\xi'_i) - f(\xi''_i) < \varepsilon/(b - a)$. Schließlich erhalten wir

$$O(Z, f) - U(Z, f) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi'_i) - f(\xi''_i)) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen beschränkt sind, folgt die Behauptung aus dem Riemannsches Integrabilitätskriterium (Folgerung 8.10). ■

8.4 Das Lebesguesche Integrabilitätskriterium

Dieses Kriterium stellt einen Zusammenhang zwischen der Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion und der Menge ihrer Unstetigkeiten her. Wir benötigen dafür den folgenden Begriff. Die Länge eines Intervalls I bezeichnen wir mit $|I|$.

Definition 8.13 Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele abgeschlossene Intervalle I_1, I_2, \dots gibt, die M überdecken (d.h. $M \subseteq \cup I_j$) und für die $\sum |I_j| < \varepsilon$ ist.

Man kann in dieser Definition “abgeschlossen” durch “offen” ersetzen.

Lemma 8.14 (a) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

(b) Abzählbare Teilmengen von \mathbb{R} sind Nullmengen.

(c) Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist eine Nullmenge.

(d) Eine kompakte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele abgeschlossene Intervalle I_j mit $M \subseteq \cup_j I_j$ und $\sum_j |I_j| < \varepsilon$ gibt.

Beweis. (a) ist klar.

(b) Sei $\{x_1, x_2, \dots\}$ eine abzählbare Teilmenge von \mathbb{R} und $\varepsilon > 0$. Offenbar liegt x_j im Intervall $I_j := [x_j - \varepsilon 2^{-j-2}, x_j + \varepsilon 2^{-j-2}]$. Die Vereinigung $\cup_j I_j$ überdeckt daher die Menge $\{x_1, x_2, \dots\}$, und für die Intervalllängen gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-j-1} = \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

(c) Seien M_1, M_2, \dots Nullmengen und $\varepsilon > 0$. Für jede Menge M_j gibt es Intervalle I_{j1}, I_{j2}, \dots mit $\sum_k |I_{jk}| < \varepsilon \cdot 2^{-j}$, welche M_j überdecken. Dann überdecken die (nach Satz 2.8 abzählbar vielen) Intervalle $I_{11}, I_{12}, \dots, I_{21}, I_{22}, \dots, I_{31}, I_{32}, \dots$ die Vereinigung $\cup_j M_j$, und für die Intervalllängen gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_{jk}| < \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-j} = \varepsilon.$$

(d) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Ist M Nullmenge, so gibt es abgeschlossene Intervalle I_1, I_2, \dots mit $M \subset \cup_j I_j$ und $\sum_j |I_j| =: \delta < \varepsilon$. Ist etwa $I_j = [a_j, b_j]$, so setzen wir $L_j := (a_j - (\varepsilon - \delta)2^{-j-2}, b_j + (\varepsilon - \delta)2^{-j-2})$. Die offenen Intervalle L_j überdecken M . Da M kompakt ist, überdecken bereits endlich viele dieser Intervalle die Menge M , etwa L_1, \dots, L_k . Dann überdecken auch die abgeschlossenen Intervalle $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_k$ die Menge M , und für die Intervalllängen gilt:

$$\sum_{j=1}^k |\overline{L}_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\overline{L}_j| = \sum_{j=1}^{\infty} (|I_j| + (\varepsilon - \delta)2^{-j-1}) = \delta + \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta) < \varepsilon.$$

Die umgekehrte Aussage ist klar. ■

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf M *fast überall stetig*, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist. Allgemein sagt man, dass eine Eigenschaft *fast überall* erfüllt ist, wenn die ‘Ausnahmepunkte’ eine Nullmenge bilden.

Satz 8.15 (Lebesguesches Integrierbarkeitskriterium) *Eine Funktion f von $[a, b]$ nach \mathbb{R} ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt und fast überall stetig ist.*

Für den Beweis benötigen wir genauere Aussagen über Unstetigkeitsstellen. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und T eine nichtleere Teilmenge von $[a, b]$. Die Zahl

$$\Omega_f(T) := \sup_{t \in T} f(t) - \inf_{t \in T} f(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in T\}$$

heißt *Oszillation* oder *Schwankung* von f auf T . Für jedes fixierte $x \in [a, b]$ ist die Funktion

$$(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta \mapsto \Omega_f(U_\delta(x) \cap [a, b])$$

monoton wachsend und nach unten durch 0 beschränkt. Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Omega_f(U_\delta(x) \cap [a, b]) =: \omega_f(x).$$

Die Zahl $\omega_f(x)$ heißt *Oszillation* von f im Punkt x .

Lemma 8.16 *Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x \in [a, b]$, wenn $\omega_f(x) = 0$.*

Der Beweis benutzt nur die Definition der Stetigkeit und ist HA. ■

Wir bezeichnen die Menge der Unstetigkeitsstellen von f mit $\Delta(f)$, und für jedes $\varepsilon > 0$ setzen wir $\Delta_\varepsilon(f) := \{x \in [a, b] : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$. Eine unmittelbare Konsequenz von Lemma 8.16 ist

Folgerung 8.17 *Für jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist*

$$\Delta(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{1/k}(f).$$

Man kann leicht zeigen, dass jede der Mengen $\Delta_\varepsilon(f)$ kompakt ist.

Folgerung 8.18 *$\Delta(f)$ ist eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.*

Beweis von Satz 8.15. (\Leftarrow) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt (es gibt also ein C so, dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in [a, b]$) und $\Delta(f)$ sei eine Nullmenge. Wir zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $O(Z, f) - U(Z, f) < (2C + b - a)\varepsilon$ gibt. Aus dem Riemannsches Integrabilitätskriterium folgt dann die Riemann-Integrierbarkeit von f .

Wie im Beweis von Lemma 8.14 (d) sieht man, dass $\Delta(f)$ durch abzählbar viele offene Intervalle J_1, J_2, \dots überdeckt werden kann, wobei für die Längen ihrer Abschließungen gilt:

$$\sum_j |\bar{J}_j| < \varepsilon. \tag{8.7}$$

Weiter: in jedem Punkt $x \in [a, b] \setminus \Delta(f)$ ist f stetig. Wir finden daher für jedes solche x ein offenes Intervall U_x mit

$$x \in U_x \quad \text{und} \quad \sup\{f(x) : x \in \bar{U}_x\} - \inf\{f(x) : x \in \bar{U}_x\} < \varepsilon. \tag{8.8}$$

Das System aller Intervalle J_j und U_x bildet eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz lassen sich endlich viele Intervalle J_{j_1}, \dots, J_{j_n} und U_{x_1}, \dots, U_{x_s} auswählen, die ebenfalls $[a, b]$ überdecken. Sei nun Z eine Zerlegung von $[a, b]$ derart, dass jedes ihrer Teilintervalle I_0, \dots, I_ℓ in einem der Intervalle $\bar{J}_{j_1}, \dots, \bar{J}_{j_n}, \bar{U}_{x_1}, \dots, \bar{U}_{x_s}$ liegt (man kann z.B. für Z die Menge aller Endpunkte der Intervalle $\bar{J}_{j_1}, \dots, \bar{U}_{x_s}$ wählen, die in $[a, b]$ liegen). Die Differenz

$$O(Z, f) - U(Z, f) = \sum_{k=0}^{\ell-1} (M_k - m_k) |I_k|$$

schreiben wir als $\Sigma_1 + \Sigma_2$, wobei Σ_1 die Summe aller $(M_k - m_k) |I_k|$ ist, für die I_k in einem der Intervalle \bar{J}_j liegt und Σ_2 die übrigen Summanden enthält. Aus (8.7) bzw. (8.8) folgt dann

$$\Sigma_1 \leq \sum_j 2C |\bar{J}_j| \stackrel{(8.7)}{<} 2C\varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \Sigma_2 \stackrel{(8.8)}{\leq} \varepsilon(b - a).$$

Also ist tatsächlich $O(Z, f) - U(Z, f) = \Sigma_1 + \Sigma_2 < (2C + b - a)\varepsilon$.

(\Rightarrow) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f beschränkt nach Satz 8.4. Wir zeigen, dass $\Delta(f)$ eine Nullmenge ist. Nach Folgerung 8.17 ist

$$\Delta(f) = \cup_{k=1}^{\infty} \Delta_{1/k}(f).$$

Da jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist (Lemma 8.9(c)) genügt es somit zu zeigen, dass jede der Mengen $\Delta_{1/k}(f)$ eine Nullmenge ist.

Falls $\Delta_{1/k}(f) = \emptyset$, ist nichts zu beweisen. Sei also $\Delta_{1/k}(f) \neq \emptyset$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach dem Riemannsches Integrierbarkeitskriterium gibt es eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit

$$O(Z, f) - U(Z, f) < \frac{\varepsilon}{2k}. \quad (8.9)$$

Wir bezeichnen mit \mathcal{M}^* die Menge aller Teilintervalle I_m von Z , die einen Punkt aus $\Delta_{1/k}(f)$ in ihrem Inneren enthalten (beachte: \mathcal{M}^* kann leer sein).

Sei zunächst $I_m \in \mathcal{M}^*$, und $x \in \Delta_{1/k}(f)$ liege im Inneren von I_m . Dann gibt es eine δ -Umgebung $U \subseteq I_m$ von x mit $\Omega_f(U) \geq 1/k$. Erst recht ist dann

$$M_m - m_m = \Omega_f(I_m) \geq \Omega_f(U) \geq 1/k.$$

Hieraus folgt mit (8.9) sofort

$$\frac{\varepsilon}{2k} > O(Z, f) - U(Z, f) \geq \sum_{I_m \in \mathcal{M}^*} (M_m - m_m)|I_m| \geq \frac{1}{k} \sum_{I_m \in \mathcal{M}^*} |I_m|,$$

d.h. es ist

$$\sum_{I_m \in \mathcal{M}^*} |I_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.10)$$

Schließlich bestimmen wir zu den Teilpunkten x_0, \dots, x_n von Z abgeschlossene Intervalle I'_0, \dots, I'_n mit

$$x_k \in I'_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^n |I'_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.11)$$

Die Menge $\Delta_{1/k}(f)$ wird vom endlichen Intervallsystem $\{I'_0, \dots, I'_n\} \cup \mathcal{M}^*$ überdeckt. Da wegen (8.10) und (8.11) die Summe der entsprechenden Intervalllängen kleiner als $\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ ist, ist $\Delta_{1/k}(f)$ eine Nullmenge. ■

Folgerung 8.19 *Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und die Menge der Unstetigkeitsstellen von f höchstens abzählbar, so ist f Riemann-integrierbar.*

Man erhält hieraus wieder die Riemann-Integrierbarkeit stetiger und auch die monotoner Funktionen (wie?). Auch ist beispielsweise die Funktion

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \text{ irrational,} \\ 1/q & \text{wenn } x = p/q \text{ mit } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, \text{ g.g.T. } (p, q) = 1 \end{cases}$$

auf jedem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar. Es ist nämlich $\Delta(f) = \mathbb{Q} \cap [a, b]$.

8.5 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz 8.20 Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und stimmen f und g auf einer in $[a, b]$ dichten Menge M überein, so ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Beweis. Sei (Z_n) eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ mit $|Z_n| \rightarrow 0$. Wegen der Dichtheit von M in $[a, b]$ findet man für jedes Z_n einen Zwischenvektor $\xi^{(n)} = (\xi_0^{(n)}, \dots, \xi_{n-1}^{(n)})$ mit $\xi_i^{(n)} \in M$ für alle i und n . Dann ist aber auch $f(\xi_i^{(n)}) = g(\xi_i^{(n)})$ für alle i und n , und die entsprechenden Riemann-Summen stimmen überein:

$$S(Z_n, \xi^{(n)}, f) = S(Z_n, \xi^{(n)}, g).$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Folgerung 8.21 Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und ist $N := \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge, so ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Der Beweis folgt sofort aus Satz 8.20. Da N Nullmenge ist, enthält N keine offenen Intervalle. Also ist $[a, b] \setminus N$ dicht in $[a, b]$, und auf dieser Menge stimmen f und g überein. ■

Satz 8.22 (a) Sei f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar und $a \leq a_1 < b_1 \leq b$. Dann ist f auch auf $[a_1, b_1]$ Riemann-integrierbar.

(b) Sei $a < c < b$, und f sei auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ Riemann-integrierbar. Dann ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (8.12)$$

Beweis. Beide Aussagen folgen leicht mit dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium. Ist etwa f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, so ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f auf $[a, b]$ eine Nullmenge. Dann ist erst recht die Menge der Unstetigkeitsstellen auf $[a_1, b_1]$ eine Nullmenge, d.h. f ist auf $[a_1, b_1]$ Riemann-integrierbar. Aussage (b) ist HA. ■

Die Regel (8.12) gilt bei beliebiger Lage der Punkte a, b, c , wenn man für $a < b$ die folgenden Vereinbarungen trifft:

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^a f(x) dx := 0.$$

Satz 8.23 Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen bildet also einen linearen Raum, und die Abbildung $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ ist linear.

Beweis. Für jede Zerlegung Z und jeden zugehörigen Zwischenvektor ξ gilt

$$S(Z, \xi, \alpha f + \beta g) = \alpha S(Z, \xi, f) + \beta S(Z, \xi, g).$$

Aus der Definition des Riemann-Integrals folgt die Behauptung. ■

8.6 Integralungleichungen und Mittelwertsätze

Satz 8.24 Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und ist $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist auch

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Für jede Riemannsumme gilt nämlich $S(Z, \xi, f) \geq S(Z, \xi, g)$. ■

Satz 8.25 (Dreiecksungleichung für Integrale) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist auch die Funktion $|f|$ Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (8.13)$$

Beachten Sie die Ähnlichkeit zur bekannten Dreiecksungleichung

$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2| \quad \text{bzw.} \quad \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Beweis. Die Riemann-Integrierbarkeit von $|f|$ folgt mit dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium: Ist f in x stetig, so ist auch $|f|$ in x stetig. Also kann $|f|$ nicht mehr Unstetigkeitsstellen als f besitzen. Die Ungleichung (8.13) erhält man aus der Dreiecksungleichung $|S(Z, \xi, f)| \leq S(Z, \xi, |f|)$ für Riemann-Summen oder mit Satz 8.24 aus $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$. ■

Satz 8.26 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $m := \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Dann gibt es ein $\eta \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = \eta(b - a).$$

Ist f stetig, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $\eta = f(\xi)$.

Die Zahl η ist für $a \neq b$ eindeutig bestimmt und heißt *Mittelwert* von f auf $[a, b]$ (in Analogie zum arithmetischen Mittel von Zahlen).

Beweis. Offenbar ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Aus Satz 8.24 folgt daher

$$m(b-a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx = M(b-a).$$

Jede Zahl aus $[m(b-a), M(b-a)]$ lässt sich als $\eta(b-a)$ mit einem $\eta \in [m, M]$ schreiben. Die Behauptung für stetiges f folgt aus dem Zwischenwertsatz und dem Satz von Weierstraß: Mit m und M wird auch jeder Wert $\eta \in [m, M]$ von f angenommen. ■

Satz 8.27 (Erweiterter Mittelwertsatz) *Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist auch $fg : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Ist zusätzlich $g \geq 0$ auf $[a, b]$, so gibt es ein $\eta \in [m, M]$ (mit m, M wie in Satz 8.26) so, dass*

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = \eta \int_a^b g(x) \, dx.$$

Ist f stetig auf $[a, b]$, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \eta$.

Beweis. Die Riemann-Integrierbarkeit von fg zeigen Sie im Tutorium. Weiter folgt wie im Beweis von Satz 8.26 aus $m \leq f \leq M$ bzw. $mg \leq fg \leq Mg$, dass

$$m \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x)g(x) \, dx \leq M \int_a^b g(x) \, dx.$$

Ist $\int_a^b g(x) \, dx = 0$, so folgt hieraus auch $\int_a^b f(x)g(x) \, dx = 0$, und für η kann eine beliebige Zahl aus $[m, M]$ genommen werden. Ist dagegen $\int_a^b g(x) \, dx \neq 0$, so ist

$$\eta := \left(\int_a^b f(x)g(x) \, dx \right) / \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \in [m, M]. \quad \blacksquare$$

Ohne Beweis (vgl. Heuser, Nr. 85.7) vermerken wir noch

Satz 8.28 (Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sei f monoton und g stetig auf $[a, b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(a) \int_a^\xi g(x) \, dx + f(b) \int_\xi^b g(x) \, dx.$$

8.7 Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

Diese Sätze stellen einen Zusammenhang zwischen den Begriffen “Ableitung” und “Integral” her, ermöglichen es, eine differenzierbare Funktion bis auf eine Konstante aus ihrer Ableitung zu rekonstruieren und bieten eine bequeme Möglichkeit zur Berechnung zahlreicher Riemann-Integrale.

8.7.1 Stammfunktionen

Definition 8.29 Sind $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und ist F differenzierbar auf $[a, b]$ und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so heißt F eine Stammfunktion von f .

Mit Folgerung 7.14 erhält man sofort:

Satz 8.30 (a) Ist F Stammfunktion von f und $C \in \mathbb{R}$, so ist auch $F + C$ Stammfunktion von f .

(b) Je zwei Stammfunktionen einer gegebenen Funktion auf einem Intervall unterscheiden sich nur um eine Konstante.

Eine Stammfunktion F von f wird oft als *unbestimmtes Integral* von f bezeichnet, und man schreibt $F = \int f(x) dx$. Dies ist nicht sehr konsequent. Mit f ist ja z.B. auch $F + 1$ Stammfunktion und demzufolge auch $F + 1 = \int f(x) dx$. Wir wollen $\int f(x) dx$ als Bezeichnung für die Menge alle Stammfunktionen betrachten. Anstelle der etwas schwerfälligen Schreibweise

$$\int f(x) dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$$

schreibt man meist (jedoch auch nicht sehr exakt) $\int f(x) dx = F + C$.

Aus den uns bekannten Ableitungen spezieller Funktionen erhalten wir die folgenden unbestimmten Integrale (die man zusammen mit einigen anderen als “Grundintegrale” bezeichnet).

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ auf $\begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } \alpha \in \mathbb{N}, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{falls } \alpha = -2, -3, -4, \dots \\ (0, \infty) & \text{falls } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \end{cases}$
- $\int x^{-1} dx = \ln |x| + C$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\int e^x dx = e^x + C$ auf \mathbb{R} .
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$ auf \mathbb{R} .
- $\int \sinh x dx = \cosh x + C$, $\int \cosh x dx = \sinh x + C$ auf \mathbb{R} .

8.7.2 Der (erste) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 8.31 Die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitze auf $[a, b]$ eine Riemann-integrierbare Ableitung $f = F'$. Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a). \quad (8.14)$$

Wir können dieses Resultat auch so formulieren.

Satz 8.32 Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar und besitze eine Stammfunktion F . Dann gilt (8.14) unabhängig von der Wahl von F .

Anmerkung 1. Es gibt differenzierbare Funktionen, deren Ableitung *nicht* Riemann-integrierbar ist. Beispielsweise ist für

$$F(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

die Ableitung

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

unbeschränkt auf $[0, 1]$. Auch gibt es Riemann-integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen (z.B. die Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $[-1, 0)$ gleich -1 und sonst gleich 1 ist).

Anmerkung 2. Statt $F(b) - F(a)$ schreibt man oft $F(x)\Big|_a^b$.

Beweis von Satz 8.31. Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f := F'$ Riemann-integrierbar. Für jede Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a, b]$ ist

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)).$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes $i = 0, \dots, n-1$ ein $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ so, dass

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Der Vektor $\xi_Z := (\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ ist ein spezieller Zwischenvektor zur Zerlegung Z , und für diesen gilt

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = S(Z, \xi_Z, f). \quad (8.15)$$

Ist nun (Z_n) eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ mit $|Z_n| \rightarrow 0$, so wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Zwischenvektor ξ_{Z_n} wie oben und erhalten aus (8.15)

$$F(b) - F(a) = S(Z_n, \xi_{Z_n}, f) \rightarrow \int_a^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Beispiel.

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2.$$

8.7.3 Der zweite Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 8.33 Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion f besitzt eine Stammfunktion auf $[a, b]$. Eine solche Stammfunktion ist gegeben durch

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (8.16)$$

Beweis. Jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar. Also existiert für jedes $x \in [a, b]$ das Integral (8.16), und die Funktion F ist wohldefiniert. Wir zeigen, dass F auf $[a, b]$ differenzierbar und $F' = f$ ist.

Seien $x, x+h \in [a, b]$ und $h \neq 0$. Dann ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Nach Satz 8.26 (Mittelwertsatz) gibt es ein $\xi \in [x, x+h]$ mit

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} f(\xi)(x+h-x) = f(\xi). \quad (8.17)$$

Halten wir x fest, so hängt ξ nur von h ab, und für $h \rightarrow 0$ strebt ξ gegen x . Da f stetig ist, strebt dann $f(\xi)$ gegen $f(x)$. Also existiert der Grenzwert von (8.17) für $h \rightarrow 0$, und es ist

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x). \quad \blacksquare$$

8.8 Integrationstechniken

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung reduziert die Berechnung eines Riemann-Integrals für eine Funktion f auf die Bestimmung einer Stammfunktion für f . Wir lernen nun einige Aussagen kennen, die diese Aufgabe erleichtern. Allerdings bleibt die Bestimmung einer Stammfunktion (im Gegensatz zur „umgekehrten“ Aufgabe, der Bestimmung einer Ableitung) ein schwieriges Problem. Bereits für so einfache Funktionen wie $x \mapsto 1/\ln x$ und $x \mapsto e^{-x^2}$ (die nach Satz 8.33 eine Stammfunktion auf $(0, \infty)$ bzw. \mathbb{R} besitzen) ist es *nicht* möglich,

diese Stammfunktion mit Hilfe endlicher Ausdrücke von „elementaren“ Funktionen (wie Potenzfunktionen oder trigonometrische Funktionen) darzustellen.

Wir gewinnen die Regeln für die Bestimmung von Stammfunktionen durch „Umkehrung“ der uns bekannten Differentiationsregeln.

8.8.1 Linearität

Sind F bzw. G Stammfunktionen von f bzw. g , so ist für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g.$$

Also besitzt auch $\alpha f + \beta g$ eine Stammfunktion, und es gilt (in Kurzfassung)

$$\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx. \quad (8.18)$$

Satz 8.34 *Besitzen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktionen und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so besitzt auch $\alpha f + \beta g$ eine Stammfunktion auf $[a, b]$, und es gilt (8.18).*

8.8.2 Partielle Integration

Nach der Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$ ist uv Stammfunktion von $u'v + uv'$. Besitzt nun eine der Funktionen $u'v$ und uv' eine Stammfunktion, dann auch die andere (Satz 8.34), und wir erhalten

$$uv = \int (u'v + uv') dx = \int u'v dx + \int uv' dx$$

bzw.

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx. \quad (8.19)$$

Satz 8.35 *Seien $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$, und uv' besitze eine Stammfunktion. Dann besitzt auch $u'v$ eine Stammfunktion auf $[a, b]$, und es gilt (8.19).*

Beispiel 1.

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = \sin x - x \cos x + C. \end{aligned}$$

(Hier haben wir (8.19) mit $v(x) = x$ und $u(x) = -\cos x$ benutzt.) ■

Beispiel 2.

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.\end{aligned}$$

(Hier benutzten wir (8.19) mit $u(x) = x$ und $v(x) = \ln x$.) ■

Für Riemann-Integrale erhält man mit (8.19):

Satz 8.36 Seien $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx. \quad (8.20)$$

Beweis. Aus der stetigen Differenzierbarkeit von u und v folgt die Stetigkeit von $u'v$ und uv' . Also besitzen beide Funktionen eine Stammfunktion, und die Riemann-Integrale in (8.20) existieren. Die Behauptung folgt nun aus (8.19) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. ■

8.8.3 Integration durch Substitution

Sei F eine Stammfunktion von f , und g sei differenzierbar. Ist die Verknüpfung $F \circ g$ definiert, so folgt aus der Kettenregel

$$\frac{dF(g(t))}{dt} = F'(g(t)) g'(t) = f(g(t)) g'(t).$$

Also ist $\Phi := F \circ g : t \mapsto F(g(t))$ eine Stammfunktion von $(f \circ g)g' : t \mapsto f(g(t)) g'(t)$, d.h.

$$\int f(g(t)) g'(t) \, dt = \int f(x) \, dx \Big|_{x=g(t)}. \quad (8.21)$$

Satz 8.37 Die Funktion f besitze auf dem Intervall I eine Stammfunktion F , die Funktion g sei auf einem Intervall I_1 differenzierbar, und es gelte $g(I_1) \subseteq I$. Dann besitzt die Funktion $(f \circ g)g'$ auf I_1 eine Stammfunktion Φ , und es gilt (8.21) oder kurz $\Phi = F \circ g$.

Besitzt g eine Umkehrfunktion, so ist natürlich $F = \Phi \circ g^{-1}$. Ist g^{-1} darüber hinaus differenzierbar, folgt hieraus: Ist Φ Stammfunktion von $(f \circ g)g'$, so besitzt f eine Stammfunktion F , und es gilt $F = \Phi \circ g^{-1}$.

Beispiel 3. Auf \mathbb{R} suchen wir $\int \cos t \sin^2 t \, dt$. Wählt man $f(x) = x^2$ und $g(t) = \sin t$, so ist $g'(t) = \cos t$ und

$$\int \cos t \sin^2 t \, dt = \int x^2 \, dx \Big|_{x=\sin t} = \frac{x^3}{3} \Big|_{x=\sin t} + C = \frac{\sin^3 t}{3} + C. \quad \blacksquare$$

Beispiel 4. Für $f(x) = 1/x$ erhält man aus (8.21)

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \ln |g(t)| + C. \quad \blacksquare$$

Beispiel 5. Ist F Stammfunktion von f und sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so gilt

$$\int f(at + b) dt = \frac{1}{a} \int f(at + b) \cdot a dt = \frac{1}{a} F(at + b) + C. \quad \blacksquare$$

Die Regel (8.21) führt ein Integral der Form $\int f(g(t)) g'(t) dt$ auf ein Integral der Form $\int f(x) dx$ zurück. Häufig möchte man den umgekehrten Weg gehen: Um $\int f(x) dx$ zu bestimmen, versucht man, die Integrationsvariable als $x = g(t)$ mit einer bijektiven differenzierbaren Funktion g zu schreiben und hofft, dass das Integral $\int f(g(t)) g'(t) dt$ ausgewertet werden kann.

Beispiel 6. Wir suchen $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ auf $(-a, a)$ mit $a > 0$. Dazu substituieren wir $x := a \sin t$ mit $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (beachten Sie: auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ verschwindet die Ableitung $t \mapsto a \cos t$ von x nach t nicht), und wir gelangen zu

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt \\ &= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos(2t)) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + C = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C \\ &= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}) + C. \end{aligned}$$

Mit der Rücksubstitution $t = \arcsin \frac{x}{a}$ erhalten wir

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) + C. \quad \blacksquare$$

Beispiel 7. Wir suchen $\int \frac{1}{\sin x} dx$ auf $(0, \pi)$. Die Substitution $x = 2 \arctan t$ führt wegen $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ und

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= 2 \tan \frac{x}{2} \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

auf das Integral

$$\int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C.$$

Die Rücksubstitution $t = \tan \frac{x}{2}$ liefert

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \quad \blacksquare$$

Für Riemann-Integrale kann man die Substitutionsregel wie folgt formulieren.

Satz 8.38 Sei f stetig und g stetig differenzierbar, und die Verkettung $f \circ g$ sei definiert. Dann ist

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t))g'(t) dt. \quad (8.22)$$

Beweis. Nach Voraussetzung sind f und $(f \circ g)g'$ stetig, so dass diese Funktionen entsprechend Stammfunktionen F und Φ besitzen und die Integrale in (8.22) definiert sind. Nach Satz 8.37 ist $\Phi = F \circ g + C$. Also ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a)$$

und

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)). \quad \blacksquare$$

Besitzt g eine Umkehrfunktion, so kann man (8.22) schreiben als

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) dt.$$

8.9 Stammfunktionen rationaler Funktionen

Eine Funktion $P : x \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ heißt *Polynom* vom Grad n , und n heißt der *Grad* des Polynoms. In Zeichen: $n = \deg P$. Sind P und $Q \neq 0$ Polynome, so ist der Quotient P/Q für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $Q(x) \neq 0$ definiert. Funktionen dieser Gestalt heißen *rational*. Für rationale Funktionen lässt sich stets eine Stammfunktion konstruktiv bestimmen. Dazu benötigen wir einige Resultate aus der Algebra, die wir ohne Beweis zitieren.

Seien P, Q Polynome mit $Q \neq 0$. Zur Bestimmung einer Stammfunktion der rationalen Funktion P/Q geht man wie folgt vor.

Schritt 1. Ist $\deg P \geq \deg Q$, so liefert eine Polynomdivision von P durch Q Polynome R und S mit

$$\frac{P}{Q} = R + \frac{S}{Q} \quad \text{mit } \deg S < \deg Q.$$

Für R kann man eine Stammfunktion angeben. Wir betrachten nur noch S/Q .

Schritt 2. Man zerlege das Nennerpolynom Q in Faktoren 1. und 2. Grades. Dass dies möglich ist, folgt aus nachstehendem Satz.

Satz 8.39 (Fundamentalsatz der Algebra) Sei $n \geq 1$. Für jedes Polynom $Q(x) = \sum_{i=0}^n q_i x^i$ mit $q_n \neq 0$ und $q_i \in \mathbb{R}$ gibt es reelle Zahlen b_i, c_i, d_i mit $b_i \neq b_j$ und $(c_i, d_i) \neq (c_j, d_j)$ für $i \neq j$ und positive natürliche Zahlen k_i, m_j, r und s so, dass

$$Q(x) = q_n \prod_{i=1}^r (x - b_i)^{k_i} \prod_{j=1}^s (x^2 + 2c_j x + d_j)^{m_j} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad (8.23)$$

mit $k_1 + \dots + k_r + 2(m_1 + \dots + m_s) = n$ und $d_j - c_j^2 > 0$ für alle j .

Zur Bestimmung der b_i, c_i, d_i ermittelt man die komplexen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von Q . Dann ist $Q(x) = q_n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$. Die Terme $(x - \lambda)(x - \bar{\lambda})$ mit $\lambda \notin \mathbb{R}$ werden zu $(x - \lambda)(x - \bar{\lambda}) = x^2 - (\lambda + \bar{\lambda})x + |\lambda|^2$ zusammengefasst.

Einen Beweis von Satz 8.39 finden Sie in Heuser, Analysis I, Satz 69.3 und in der Vorlesung zur Funktionentheorie. Die Bestimmung der Nullstellen von Q ist oft schwierig.

Schritt 3. Ist die Zerlegung (8.23) gefunden, wählt man den Ansatz

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{k_i} \frac{A_{ik}}{(x - b_i)^k} + \sum_{j=1}^s \sum_{m=1}^{m_j} \frac{B_{jm}x + C_{jm}}{(x^2 + 2c_j x + d_j)^m} \quad (8.24)$$

mit zu bestimmenden reellen Zahlen A_{ik}, B_{jm} und C_{jm} .

Satz 8.40 (Partialbruchzerlegung) Sei Q wie in (8.23) und S ein Polynom mit $\deg S < \deg Q$. Dann existieren Zahlen A_{ik}, B_{jm} und C_{jm} , so dass (8.24) gilt, und diese Zahlen sind eindeutig bestimmt.

Der Beweis ist in Heuser, Analysis I, Satz 69.5. ■

Die Zahlen A_{ik}, B_{jm} und C_{jm} können ermittelt werden, indem man (8.24) mit Q multipliziert und durch Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Größen aufstellt.

Schritt 4. Zu allen in (8.24) vorkommenden Brüchen lassen sich Stammfunktionen durch partielle Integration und Substitution effektiv bestimmen. Einige der folgenden Regeln müssen dazu wiederholt angewandt werden. Man beachte, dass $d > c^2$. Außerdem sei $m \geq 2$.

$$\int \frac{dx}{(x - b)^k} = \begin{cases} \frac{1}{1-k}(x - b)^{1-k} & \text{falls } k > 1, \\ \ln |x - b| & \text{falls } k = 1, \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2cx + d} = \frac{1}{\sqrt{d - c^2}} \arctan \frac{x + c}{\sqrt{d - c^2}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2cx + d)^m} = \frac{x + c}{2(m - 1)(d - c^2)(x^2 + 2cx + d)^{m-1}}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(2m-3)}{2(m-1)(d-c^2)} \int \frac{dx}{(x^2+2cx+d)^{m-1}}, \\
\int \frac{\alpha x + \beta}{x^2+2cx+d} dx &= \frac{\alpha}{2} \ln(x^2+2cx+d) + (\beta - \alpha c) \int \frac{dx}{x^2+2cx+d}, \\
\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2+2cx+d)^m} dx &= \frac{-\alpha}{2(m-1)(x^2+2cx+d)^{m-1}} \\
& + (\beta - \alpha c) \int \frac{dx}{(x^2+2cx+d)^{m-1}}.
\end{aligned}$$

Beispiel. Man bestimme $\int \frac{x^4+1}{x^4-x^3-x+1} dx$.

Schritt 1: Polynomdivision.

$$\frac{x^4+1}{x^4-x^3-x+1} = 1 + \frac{x^3+x}{x^4-x^3-x+1}.$$

Schritt 2: Faktorisierung des Nennerpolynoms.

$$x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)(x^3-1) = (x-1)^2(x^2+x+1).$$

Schritt 3: Partialbruchzerlegung. Der Ansatz

$$\frac{x^3+x}{x^4-x^3-x+1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

liefert nach Multiplikation mit x^4-x^3-x+1

$$x^3+x = A_1(x-1)(x^2+x+1) + A_2(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)^2$$

bzw.

$$x^3+x = (A_1+B)x^3 + (A_2-2B+C)x^2 + (A_2+B-2C)x + (A_2-A_1+C).$$

Ein Vergleich der Koeffizienten auf der linken bzw. rechten Seite ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\text{bei } x^3 : & \quad A_1 + B = 1 \\
\text{bei } x^2 : & \quad A_2 - 2B + C = 0 \\
\text{bei } x^1 : & \quad A_2 + B - 2C = 1 \\
\text{bei } x^0 : & \quad A_2 - A_1 + C = 0.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $A_1 = \frac{2}{3}$, $A_2 = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$. Die zu integrierende Funktion lautet also

$$\frac{x^4+1}{x^4-x^3-x+1} = 1 + \frac{2}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{3} \frac{x}{x^2+x+1}.$$

Schritt 4: Integration

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} dx &= \int 1 dx + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &\quad + \frac{1}{3} \int \frac{x dx}{x^2 + x + 1} \\ &= x + \frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{2}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) \\ &\quad - \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

8.10 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir ausschließlich beschränkte Funktionen auf kompakten Intervallen integriert. Durch naheliegende Grenzprozesse erweitern wir nun die Definition des Riemann-Integrals zu sogenannten uneigentlichen Integralen.

8.10.1 Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall

Die Funktion $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf jedem Intervall $[a, t]$ mit $t > a$ Riemann-integrierbar. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx \quad (8.25)$$

existiert und endlich ist, so bezeichnen wir ihn mit $\int_a^\infty f(x) dx$ und nennen ihn *uneigentliches Riemann-Integral* von f . Man sagt auch, dass f auf $[a, \infty)$ *Riemann-integrierbar* ist oder dass $\int_a^\infty f(x) dx$ *konvergiert*. Ist der Grenzwert (8.25) unendlich oder existiert er nicht, so heißt $\int_a^\infty f(x) dx$ *divergent*. Schließlich heißt $\int_a^\infty f(x) dx$ *absolut konvergent*, wenn $\int_a^\infty |f(x)| dx$ konvergiert. Wie bei Reihen folgt aus der absoluten Konvergenz die gewöhnliche (Cauchy-Kriterium).

Analoge Definitionen trifft man für

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^a f(x) dx$$

und für

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^a f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.\end{aligned}$$

Beispiel 1. Es ist

$$\begin{aligned} \int_1^\infty x^\alpha dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} & \text{falls } \alpha \neq -1 \\ \ln t & \text{falls } \alpha = -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha \geq -1 \quad (\text{Divergenz}), \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \text{falls } \alpha < -1 \quad (\text{Konvergenz}). \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 2. Wir berechnen $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$. Eine Stammfunktion des Integranden ist

$$F(x) = -e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} x^k.$$

Dies kann man einfach durch Differenzieren bestätigen (HA). Wir überlegen uns, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$. Hierfür genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 \quad \text{für jedes } k \geq 0. \quad (8.26)$$

Aus der Definition der Exponentialfunktion durch eine Potenzreihe folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $x > 0$

$$e^x \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq \frac{x^k}{e^x} \leq \frac{(k+1)!}{x}.$$

Der Grenzübergang $x \rightarrow \infty$ in der rechten Ungleichung liefert (8.26). Zusammengefasst erhalten wir

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^n e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) - F(0) = -F(0) = n!. \quad \blacksquare$$

Beispiel 3. Wir zeigen, dass $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert. An der Stelle 0 ist der Integrand nicht definiert. Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ lässt sich die Funktion $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ aber zu einer auf $[0, \infty)$ stetigen Funktion fortsetzen, wenn man ihren Wert an der Stelle 0 durch 1 festlegt. Insbesondere existiert $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ als gewöhnliches Riemann-Integral. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert.

Partielle Integration liefert für $t > 1$

$$\int_1^t \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^t - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Offenbar existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos t}{t} + \cos 1 \right) = \cos 1.$$

Es verbleibt, die Existenz des Grenzwertes $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\cos x}{x^2} dx$ zu beweisen. Wir benutzen das Cauchy-Kriterium und schätzen für $1 \leq t_1 < t_2$ ab:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} < \frac{1}{t_1}.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so gilt für alle $t_2 > t_1 > 1/\varepsilon$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| < \varepsilon.$$

Also existiert $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ und damit auch $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Was man auf diesem Wege nicht erhält ist, dass dieses Integrals den Wert $\pi/2$ hat. ■

Wir haben oben $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ definiert als $\lim_{s \rightarrow -\infty, t \rightarrow +\infty} \int_s^t f(x) dx$. In diesem Sinn existiert z.B. $\int_{-\infty}^\infty x dx$ *nicht* als uneigentliches Riemann-Integral. Es ist aber

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \Big|_{-t}^t = 0.$$

Wir nehmen dies als Anlass zu folgender Definition.

Definition 8.41 Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[-t, t]$ Riemann-integrierbar und existiert der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) dx$ im eigentlichen Sinn, so heißt dieser Grenzwert der Cauchyscher Hauptwert. Wir bezeichnen ihn mit

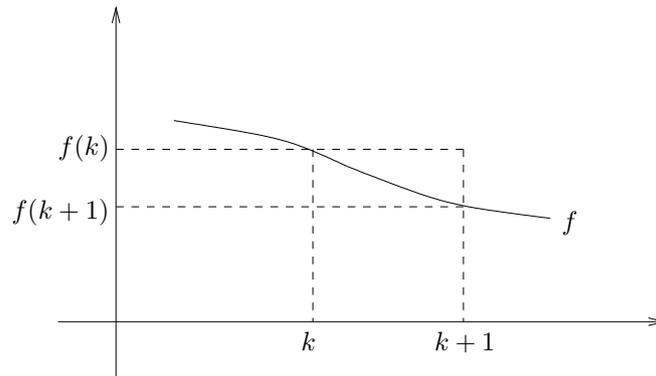
$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Beispielsweise ist $\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$.

Als eine Anwendung uneigentlicher Integrale vermerken wir das *Integralkriterium* für die Konvergenz von Reihen.

Satz 8.42 Sei $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ genau dann, wenn das Integral $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergiert.

Beweis. Für jedes $k \geq 1$ ist $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$.



Aufsummieren von $k = 1, \dots, n-1$ ergibt für jedes $n \geq 2$

$$f(2) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + \dots + f(n-1).$$

Für die Partialsumme $s_n := \sum_{k=1}^n f(k)$ gilt somit

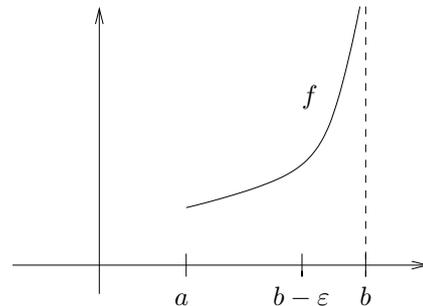
$$s_n - f(1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq s_{n-1}.$$

Aus der linken Ungleichung folgt: Ist $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergent, so bleiben die s_n beschränkt, also (da alle Reihenglieder nichtnegativ sind) konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$. Analog liefert die rechte Ungleichung die umgekehrte Behauptung. ■

Beispiel 4. Aus Beispiel 1 wissen wir, daß $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ für alle $\alpha > 1$ konvergiert. Nach dem Integralkriterium konvergiert dann auch $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ für alle $\alpha > 1$. ■

8.10.2 Integrale mit offenem Integrationsintervall

Sei $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $\varepsilon \in (0, b - a)$ auf $[a, b - \varepsilon]$ Riemann-integrierbar. Wenn der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ existiert, so bezeichnen wir ihn mit $\int_a^b f(x) dx$ und sagen, f sei auf $[a, b)$ uneigentlich integrierbar. Eine analoge Definition trifft man für links halb-offene Intervalle.



Ist $a < c < b$ und f auf $[a, b] \setminus \{c\}$ definiert, und existieren die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x) dx$ und $\int_c^b f(x) dx$, so definiert man

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \searrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx.$$

Schließlich definiert man in diesem Fall den Cauchyschen Hauptwert durch

$$\text{V.P.} \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

(falls dieser Grenzwert existiert und endlich ist).

Beispiel 5. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ ist für $\alpha \geq 1$ divergent und für $\alpha < 1$ konvergent. Im konvergenten Fall ist dieses Integral gleich $\frac{1}{1-\alpha}$.

Beispiel 6. $\int_0^1 \ln x dx$ konvergiert und hat den Wert -1 .

Beispiel 7. $\text{V.P.} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = 0$.

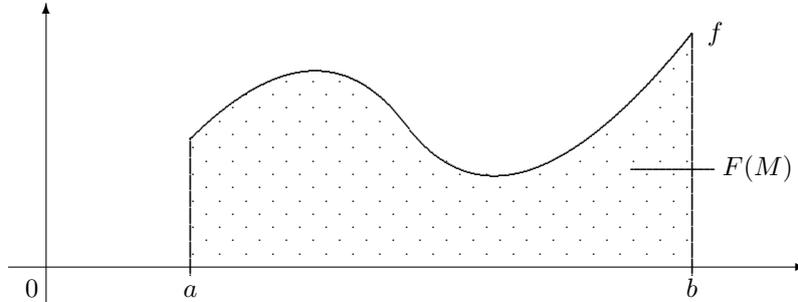
8.11 Flächeninhalte

Einer der Gründe zur Einführung des bestimmten Integrals war der Wunsch, Flächeninhalte zu definieren und zu berechnen. Ist $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ Riemann-

integrierbar, so *definieren* wir als Flächeninhalt der Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

die Zahl $F(M) := \int_a^b f(x) dx$.

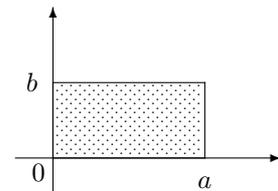


Mit dieser Definition lassen sich auch die Inhalte komplizierter Mengen definieren und berechnen, wenn man akzeptiert, dass der Flächeninhalt die folgenden (aus unserer Erfahrung heraus plausiblen) Eigenschaften aufweist:

- (a) Geht M' aus M durch Verschiebung, Drehung oder Spiegelung an einer Geraden hervor, so ist $F(M') = F(M)$.
- (b) Kann man M in zwei sich nicht überlappende Teilmengen A, B zerlegen, von denen jede einen Flächeninhalt besitzt, so ist $F(M) = F(A) + F(B)$.

Die zweite Forderung ist sehr ungenau (man sollte etwas über $A \cap B$ voraussetzen). Darauf kommen wir später zurück.

Beispiel 1. Für $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto b$ findet man $F(M) = \int_0^a b dx = ab$. Der von uns definierte Flächeninhalt stimmt also für Rechtecke mit dem „bekannten“ Flächeninhalt überein.



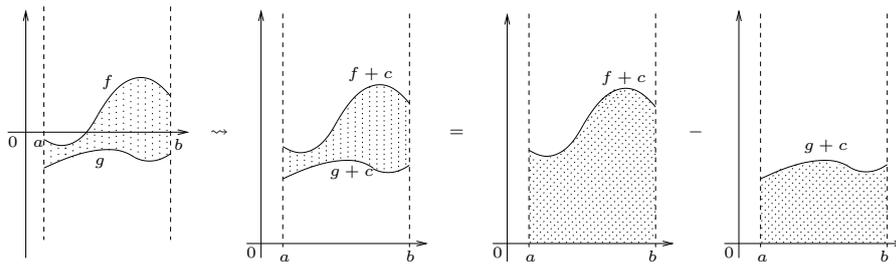
Beispiel 2. Die Dirichletfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational,} \end{cases}$$

ist auf keinem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ Riemann-integrierbar. Unsere Definition erlaubt es daher nicht, der Menge $M = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ einen Flächeninhalt zuzuschreiben. ■

Beispiel 3. Die Funktionen f, g seien auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es sei $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Gesucht ist der Flächeninhalt der Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$



Wir verschieben M um $c > 0$ in Richtung der positiven y -Achse, bis das Bild von M komplett oberhalb der x -Achse liegt. Mit den Eigenschaften (a), (b) folgt:

$$F(M) = \int_a^b (f(x) + c) dx - \int_a^b (g(x) + c) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad \blacksquare$$

Beispiel 4. Oft ist der Graph von f in Parameterdarstellung gegeben, etwa

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]\}$$

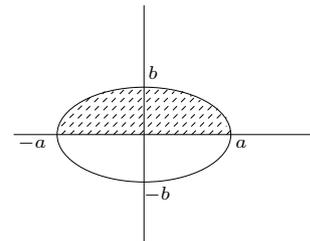
mit $x(\alpha) = a$ und $x(\beta) = b$. Unter entsprechenden Voraussetzungen an x und y (vgl. Satz 8.38) gilt dann

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) \dot{x}(t) dt = \int_\alpha^\beta y(t) \dot{x}(t) dt,$$

wobei $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$. Beispielsweise wird durch

$$x = a \cos t, y = b \sin t \quad \text{mit } t \in [0, 2\pi]$$

eine Ellipse beschrieben. Für ihren Flächeninhalt findet man

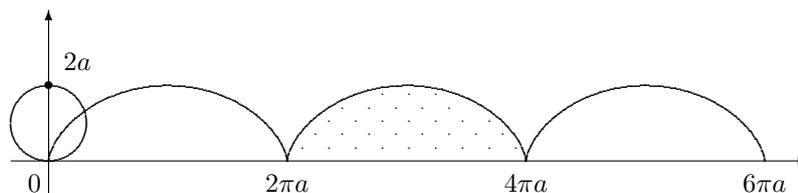


$$\begin{aligned} F(M) &= 2 \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_\pi^0 y(t) \dot{x}(t) dt = 2ab \int_\pi^0 \sin t (-\sin t) dt \\ &= 2ab \int_0^\pi \sin^2 t dt = 2ab \left(-\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{t}{2} \right) \Big|_0^\pi = \pi ab. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 5. Durch

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

wird eine *Zykloide* definiert. Diese Kurve beschreibt den Weg eines Punktes auf der Kreisperipherie beim Abrollen des Kreises.



Für die Fläche unter einem Zykloidenbogen findet man

$$\begin{aligned} F(M) &= \int_0^{2\pi} y(t) \dot{x}(t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \left(t - 2 \sin t + \frac{\cos t \sin t}{2} + \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 3a^2\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

9 Folgen und Reihen von Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir verschiedene Arten der Konvergenz einer Funktionenfolge. Besonders interessiert uns die Frage, ob sich Eigenschaften der einzelnen Glieder einer konvergenten Funktionenfolge (f_n) auf die Grenzfunktion f vererben, etwa

- ist f stetig, wenn alle f_n stetig sind?
- ist f differenzierbar (integrierbar), wenn alle f_n differenzierbar (integrierbar) sind, und gilt in diesem Fall

$$f' = (\lim f_n)' = \lim f_n' \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx = \lim \int_a^b f_n(x) dx?$$

In diesen Fragen geht es letztlich darum, ob zwei *Grenzprozesse vertauscht* werden können. Ein Beispiel, in dem dieses Vertauschen erlaubt ist, haben wir in Abschnitt 6.3 kennengelernt: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so gilt für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| < R$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lim_{z \rightarrow z_0} z)^n.$$

Wir gehen diese Probleme nun systematisch an und betrachten anschließend zwei spezielle Klassen von Funktionenreihen: Potenzreihen und Fourierreihen.

9.1 Punktweise Konvergenz

Sei X eine nichtleere Menge, N ein metrischer Raum mit einer Metrik d und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n : X \rightarrow N$ gegeben. Dann heißt $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine *Funktionenfolge* auf X (beachten Sie: alle Glieder einer Funktionenfolge sind auf der gleichen Menge definiert und bilden in eine gleiche Menge hinein ab).

Definition 9.1 Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf X punktweise gegen eine Funktion $f : X \rightarrow N$, wenn für jedes $x \in X$ gilt

$$d(f_n(x), f(x)) \rightarrow 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Der punktweise Grenzwert einer Funktionenfolge (f_n) ist eindeutig bestimmt.

Beispiel 1. Die Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ seien durch $f_n(x) = x^n$ gegeben. Für $0 \leq x < 1$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, während $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$ ist. Die stetigen (sogar differenzierbaren) Funktionen f_n konvergieren also punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

die im Punkt 1 *nicht* stetig ist. ■

Beispiel 2. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$f_n(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2k}$$

(der Grenzwert existiert, da $0 \leq (\cos(n! \pi x))^2 \leq 1$). Wir zeigen, dass die Folge (f_n) punktweise gegen die Dirichletfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

konvergiert. Sei zunächst x rational. Wir schreiben x als p/q mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q > 0$. Für beliebiges $n \geq q$ ist dann

$$(\cos(n! \pi p/q))^2 = 1.$$

Es ist also $f_n(x) = 1$ für alle $n \geq q$, woraus $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ für jedes rationale x folgt. Ist dagegen x irrational, so ist $n!x$ niemals ganzzahlig. Es ist daher in diesem Fall

$$0 \leq (\cos(n! \pi x))^2 < 1,$$

woraus für jedes n folgt

$$f_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2k} = 0.$$

Es ist daher $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ für jedes irrationale x .

Bildet man also von den (beliebig oft differenzierbaren!) Funktionen

$$x \mapsto (\cos(x! \pi x))^{2k}$$

erst den punktweisen Grenzwert bzgl. k und dann bzgl. n , so erhält man eine Funktion, die in keinem Punkt stetig ist! ■

Der durch die punktweise Konvergenz hergestellte Zusammenhang zwischen der Folge (f_n) und ihrer Grenzfunktion f ist offenbar zu schwach, um z.B. das Vererben der Stetigkeit zu garantieren. Im nächsten Abschnitt betrachten wir einen wesentlich stärkeren Konvergenzbegriff, der dieses Vererben garantiert.

9.2 Gleichmäßige Konvergenz

Sei wieder X eine nichtleere Menge, (N, d) ein metrischer Raum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : X \rightarrow N$.

Definition 9.2 Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf X gleichmäßig gegen die Funktion $f : X \rightarrow N$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in X.$$

Beachten Sie: Bei punktweiser Konvergenz darf n_0 von x abhängen, während bei gleichmäßiger Konvergenz n_0 *unabhängig* von x gefunden werden kann. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt offenbar die punktweise Konvergenz.

Beispiel 1. Die Funktionenfolgen in den Beispielen 1 und 2 aus Abschnitt 9.1 konvergieren *nicht* gleichmäßig. Wir überlegen uns dies für Beispiel 1. Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in (0, 1)$. Wegen

$$|x^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow x^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln x < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \ln \varepsilon / \ln x$$

kann es kein n_0 so geben, dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und $x \in M$. ■

Beispiel 2. Auf \mathbb{R} sei $f_n(x) := \frac{1}{n}[nx]$ ($[y]$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner als oder gleich y ist.) Aus $[nx] \leq nx < [nx] + 1$ folgt

$$\frac{1}{n}[nx] \leq x \leq \frac{1}{n}[nx] + \frac{1}{n} \quad \text{bzw.} \quad f_n(x) \leq x \leq f_n(x) + \frac{1}{n},$$

d.h. es ist

$$0 \leq x - f_n(x) < \frac{1}{n} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hieraus folgt sofort die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen f_n gegen die Funktion $f(x) = x$. ■

Im Weiteren sei $N = \mathbb{R}$, versehen mit dem üblichen Abstand. Alle Überlegungen dieses Abschnittes bleiben aber auch für $N = \mathbb{R}^k$ (z.B. mit der Euklidischen Norm) und insbesondere für $N = \mathbb{C}$ (mit dem üblichen Betragsabstand) richtig. Wir zeigen, dass man die gleichmäßige Konvergenz als Konvergenz in einem geeigneten metrischen Raum (dessen Elemente Funktionen sind) auffassen kann.

Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty. \tag{9.1}$$

Die Zahl $\|f\|_\infty$ heißt die *Supremumsnorm* von f . Es ist klar, dass die Menge $M(X)$ aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf X einen reellen linearen Raum bildet und dass (9.1) ein Norm auf $M(X)$ in folgendem Sinn definiert:

Definition 9.3 Sei L ein reeller linearer Raum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm auf L , wenn

- (a) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in L$, und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- (b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in L$.
- (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in L$ (Dreiecksungleichung).

Für die Norm (9.1) folgt die Eigenschaft (c) aus

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

indem man auf der linken Seite das Supremum über alle $x \in X$ bildet.

Lemma 9.4 Ist L ein linearer Raum und $\|\cdot\|$ eine Norm auf L , so wird durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf L definiert.

Beweis. Aus dem ersten Normaxiom folgt $d(x, y) \geq 0$ und dass $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$. Aus dem zweiten Normaxiom erhalten wir die Symmetrie von d :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|- (y - x)\| = |-1| \|y - x\| = d(y, x).$$

Die Dreiecksungleichung für d folgt unmittelbar aus dem dritten Normaxiom. ■

Man nennt $d(x, y) := \|x - y\|$ die durch die Norm $\|\cdot\|$ induzierte Metrik. Solange nichts anderes gesagt ist, verstehen wir normierte Räume immer mit den induzierten Metriken und machen sie so zu metrischen Räumen. Man überlegt sich leicht, dass die gleichmäßige Konvergenz einer Folge (f_n) beschränkter reellwertiger Funktionen nichts anderes ist als die Konvergenz dieser Folge im metrischen Raum $M(X)$ mit der durch die Supremumsnorm induzierten Metrik, d.h. $f_n \rightarrow f$ bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \|f - f_n\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Definition 9.5 Ein normierter linearer Raum heißt ein Banachraum, wenn er bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik vollständig ist.

Einige Beispiele für Banachräume kennen wir bereits: \mathbb{R} und \mathbb{C} mit den üblichen Beträgen als Norm und \mathbb{R}^k mit der $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ oder $\|\cdot\|_\infty$ -Norm.

Satz 9.6 Der lineare Raum $M(X)$ der beschränkten reellwertigen Funktionen auf X , versehen mit der Supremumsnorm, ist ein Banachraum.

Beweis. Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $M(X)$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : d(f_n, f_m) = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \quad (9.2)$$

Offenbar ist für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ die Folge $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} . Da \mathbb{R} vollständig ist, konvergiert die Folge $(f_n(x))$ gegen eine Zahl, die wir $f(x)$ nennen. Hierdurch wird eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ festgelegt. Wir zeigen: f ist beschränkt (d.h. $f \in M(X)$) und $d(f, f_n) = \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$.

Aus (9.2) wissen wir:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \quad \forall x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Vollziehen wir hierin den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$, folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (9.3)$$

Wir wählen z.B. $\varepsilon = 1$ und das zugehörige n_0 und erhalten

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \|f_{n_0}\|_\infty + 1 \quad \text{für alle } x \in X,$$

d.h. f ist beschränkt. Die Konvergenz von f_n gegen f bzgl. der Supremumsnorm folgt ebenfalls sofort aus (9.3). ■

Wir vermerken noch einige wichtige Konsequenzen der Vollständigkeit des Raumes $M(X)$. Diese gelten entsprechend für beliebige Banachräume.

Seien f_n Funktionen aus $M(X)$. Die *Funktionenreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ heißt *punktweise* bzw. *gleichmäßig konvergent*, wenn die Folge ihrer Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n f_k$ punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert. Aus der Vollständigkeit des Raumes $(M(X), \|\cdot\|_{\infty})$ folgt sofort das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz 9.7 (Cauchy-Kriterium) Sei (f_n) eine Folge in $M(X)$.

(a) Die Folge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn sie eine Cauchyfolge in $M(X)$ ist, d.h. wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon.$$

(b) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+r} f_k \right\|_{\infty} < \varepsilon.$$

In Analogie zu Zahlenfolgen definieren wir

Definition 9.8 Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ konvergiert.

Wie im Beweis von Satz 5.9 zeigt man:

Satz 9.9 Jede absolut konvergente Reihe in $M(X)$ konvergiert gleichmäßig.

Dieser Satz ist bemerkenswert, da man z.B. statt der gleichmäßigen Konvergenz einer *Funktionenreihe* nur die absolute Konvergenz einer *Zahlenreihe* untersuchen muß, für die wir zahlreiche Kriterien kennen.

Beispiel 3. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ konvergiert für jedes $x > 1$ (ist also auf $(1, \infty)$ punktweise konvergent), und sie ist gleichmäßig konvergent auf jedem Intervall $[c, \infty)$ mit $c > 1$. Die Funktionen $f_n(x) = n^{-x}$ sind nämlich auf $[c, \infty)$ streng monoton fallend. Also ist $\|f_n\|_{\infty} = n^{-c}$, und für $c > 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$. Die Funktion $\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ heißt *Riemannsches Zetafunktion*. ■

Beispiel 4. Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ ist auf der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ punktweise konvergent. Für $0 \leq r < R$ konvergiert sie auf jeder Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ sogar gleichmäßig. Für die Funktionen $f_n(z) = a_n z^n$ ist nämlich

$$\|f_n\|_{\infty} = \sup_{|z| \leq r} |a_n z^n| = |a_n| r^n,$$

und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konvergiert, da jede Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzbereichs absolut konvergiert (Satz 6.16). ■

9.3 Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit

In diesem Abschnitt sei (X, d) ein metrischer Raum, und wir betrachten Funktionen $X \rightarrow \mathbb{R}$. Die Sätze 9.10 und 9.11 lassen sich problemlos auf Funktionen $X \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $k > 1$ übertragen.

Satz 9.10 *Die Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ sollen gleichmäßig gegen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergieren. Ist jede der Funktionen f_n in einem Punkt $x_0 \in X$ stetig, so ist auch die Grenzfunktion f in x_0 stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f - f_N\|_\infty < \varepsilon/3$. Dann ist für alle $x \in X$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2\|f - f_N\|_\infty + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\ &< 2\varepsilon/3 + |f_N(x) - f_N(x_0)|. \end{aligned}$$

Da f_N in x_0 stetig ist, finden wir eine Umgebung U von x_0 so, dass $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in U$. Für alle $x \in U$ ist dann

$$|f(x) - f(x_0)| < 2\varepsilon/3 + |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon.$$

Also ist f in x_0 stetig. ■

Sind insbesondere alle Funktionen f_n auf ganz X stetig, so ist auch f auf ganz X stetig. Wir interpretieren dies wieder als eine Vollständigkeitsaussage. Sei $C_b(X)$ die Menge aller beschränkten stetigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Es ist $C_b(X) \subseteq M(X)$, und $C_b(X)$ ist ein normierter linearer Raum bzgl. der Supremumsnorm. Ist X kompakt, so ist *jede* stetige Funktion auf X beschränkt (Satz 6.40). Die Menge aller *beschränkten* stetigen Funktionen stimmt dann also überein mit der Menge $C(X)$ aller stetigen Funktionen auf X .

Satz 9.11 *Der lineare Raum $C_b(X)$, versehen mit der Supremumsnorm, ist ein Banachraum.*

Beweis. Ist (f_n) eine Cauchyfolge in $C_b(X)$, so ist (f_n) erst recht eine Cauchyfolge in $M(X)$. Da $M(X)$ vollständig ist, konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine beschränkte Grenzfunktion f . Aus Satz 9.10 wissen wir, dass f stetig ist, also zu $C_b(X)$ gehört. ■

Wir können das Bewiesene auch so formulieren: $C_b(X)$ ist abgeschlossen in $M(X)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Als eine Anwendung geben wir einen weiteren Beweis von Satz 6.19.

Beispiel. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, und sei $|z_0| < R$. Dann ist f in z_0 stetig. Um dies einzusehen, wählen wir ein r in $(|z_0|, R)$. Nach Beispiel 4 aus 9.2 konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $X :=$

$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ gleichmäßig. Da alle Partialsummen auf X stetig sind, ist f auf X und insbesondere in $z_0 \in X$ stetig. ■

Aus der Stetigkeit der Grenzfunktion folgt aber im Allgemeinen *nicht*, dass die Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert. Es gilt jedoch:

Satz 9.12 (Dini) *Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die punktweise und monoton (d.h. für jedes $x \in [a, b]$ ist die Folge $(f_n(x))$ monoton) gegen eine stetige Funktion f konvergieren. Dann ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.*

Einen Beweis finden Sie in Barner/Flohr, Analysis I, S. 321.

9.4 Gleichmäßige Konvergenz und Integrierbarkeit/Differenzierbarkeit

Sei $[a, b]$ ein endliches Intervall. Wir bezeichnen mit $R([a, b])$ die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$. Da Riemann-integrierbare Funktionen beschränkt sind (Satz 8.4), können wir $R([a, b])$ als Teilraum von $M([a, b])$ auffassen.

Satz 9.13 (a) *Die Funktionen $f_n \in R([a, b])$ sollen gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergieren. Dann ist $f \in R([a, b])$, und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

(b) *Der Raum $R([a, b])$, versehen mit der Supremumsnorm, ist ein Banachraum.*

Beweis. (a) Wir zeigen zuerst, dass f Riemann-integrierbar ist. Sei $\Delta(f_n)$ die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f_n und $U := \cup_{n \in \mathbb{N}} \Delta(f_n)$. In jedem Punkt x aus $[a, b] \setminus U$ ist jede der Funktionen f_n stetig. Nach Satz 9.10 ist dann auch f in allen diesen Punkten stetig. Also ist $\Delta(f) \subseteq U$. Nach dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium (Satz 8.15) ist jedes $\Delta(f_n)$ eine Nullmenge. Nach Lemma 8.14 sind auch U und $\Delta(f)$ Nullmengen. Wieder nach Satz 8.15 ist $f \in R([a, b])$. Damit ist klar, dass $\int_a^b f(x) dx$ existiert, und wir haben die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von f_n gegen f folgt nun Behauptung (a).

(b) Sei (f_n) eine Cauchyfolge Riemann-integrierbarer Funktionen. Dann ist (f_n) eine Cauchyfolge in $M([a, b])$ und folglich konvergent mit einer Grenzfunktion f . Aus Teil (a) wissen wir, dass $f \in R([a, b])$. Schließlich folgt aus Satz 8.23, dass $R([a, b])$ ein linearer Raum ist. ■

Es ist bemerkenswert, dass die gleichmäßige Konvergenz einer Folge differenzierbarer Funktionen *nicht* genügt, um die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion und die Vertauschbarkeit zu erzwingen.

Beispiel. Die Folge der Funktionen $f_n(x) := \frac{1}{n} \sin nx$ konvergiert auf \mathbb{R} gleichmäßig gegen die Funktion $f = 0$. Die Folge der Ableitungen $f'_n(x) = \cos nx$ konvergiert an der Stelle $x = 0$ gegen 1. Es ist aber

$$1 = \lim f'_n(0) \neq (\lim f_n)'(0) = f'(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Satz 9.14 Für die Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gelte

- (a) sie sind auf $[a, b]$ differenzierbar,
- (b) die Folge (f'_n) ihrer Ableitungen konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$,
- (c) es gibt ein $x_0 \in [a, b]$, für das die Folge $(f_n(x_0))$ konvergiert.

Dann konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion f , und die Folge (f'_n) konvergiert gleichmäßig gegen f' .

Unter den getroffenen Annahmen dürfen Funktionenfolgen also gliedweise differenziert werden, und es gilt (im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)'$$

Beweis. Wir zeigen, dass die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } m, n \geq n_0 \quad (9.4)$$

und

$$\|f'_m - f'_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{für alle } m, n \geq n_0. \quad (9.5)$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewandt auf die Funktion $f_m - f_n$, liefert die für alle $x, y \in [a, b]$ und $m, n \geq n_0$ gültige Abschätzung

$$\begin{aligned} |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(y) - f_n(y))| &= |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| |x - y| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - y| \end{aligned} \quad (9.6)$$

mit einem $\xi \in [x, y]$. Wir benutzen (9.6) mit $y = x_0$ und erhalten

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x \in [a, b]$ und $m, n \geq n_0$. Also ist (f_n) eine Cauchyfolge in $C([a, b])$ und nach Satz 9.6 gleichmäßig konvergent. Sei f ihr Grenzwert. Wir zeigen die

Differenzierbarkeit von f in jedem Punkt $y \in [a, b]$. Dazu betrachten wir auf $[a, b]$ die Funktionen

$$F_n(x) := \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}, & \text{falls } x \neq y, \\ f'_n(y), & \text{falls } x = y. \end{cases} \quad F(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{falls } x \neq y, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(y) & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Im Beweis von Satz 7.2 haben wir gesehen, dass die Funktionen F_n stetig auf $[a, b]$ sind. Weiter ist klar, dass die Funktionen F_n auf $[a, b]$ *punktweise* gegen F streben. Wir zeigen, dass diese Konvergenz sogar gleichmäßig ist. Für $x \neq y$ erhalten wir aus (9.6) nach Division durch $|x - y|$

$$|F_m(x) - F_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall m, n \geq n_0$$

und somit

$$\sup_{x \in [a, b] \setminus \{y\}} |F_m(x) - F_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Wir wählen n_0 so groß, dass auch noch

$$|F_m(y) - F_n(y)| = |f'_m(y) - f'_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

für alle $m, n \geq n_0$. Dann ist

$$\sup_{x \in [a, b]} |F_m(x) - F_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Also ist (F_n) eine Cauchyfolge in $M([a, b])$. Nach Satz 9.6 konvergiert diese Folge auf $[a, b]$ gleichmäßig. Da sie auf $[a, b]$ punktweise gegen F konvergiert, folgt, dass (F_n) auf ganz $[a, b]$ gleichmäßig gegen F konvergiert. Nach Satz 9.10 ist F auf $[a, b]$ und insbesondere in y stetig. Es existiert also der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow y} F(x)$ und stimmt mit $F(y)$ überein. Dann ist die Funktion f an der Stelle y differenzierbar, und es gilt

$$f'(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(y). \quad \blacksquare$$

9.5 Ergänzungen zu Potenzreihen

Wir wenden zunächst das Resultat aus Satz 9.14 auf Potenzreihen an. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Die Partialsummen $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ sind offenbar differenzierbar auf $(-R, R)$, und ihre Ableitung ist

$$s'_n(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}.$$

Die s'_n sind die Partialsummen der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Aus Folgerung 6.18 wissen wir, dass diese Potenzreihe den gleichen Konvergenzradius wie die

Ausgangsreihe besitzt. Also ist (Beispiel 4 aus 9.2) die Folge (s'_n) auf jeder kompakten Teilmenge von $\{x \in \mathbb{R} : |x| < R\}$ gleichmäßig konvergent. Aus Satz 9.14 folgt nun:

Satz 9.15 *Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist in jedem Punkt $x \in (-R, R)$ differenzierbar, und ihre Ableitung kann gliedweise bestimmt werden:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Im dritten Semester übertragen wir dieses Resultat auf Potenzreihen im Komplexen. Eine wiederholte Anwendung von Satz 9.15 zeigt, dass Potenzreihen unendlich oft differenzierbar sind. Damit haben wir auch Satz 7.11 bewiesen.

Wir vermerken noch, dass man wegen Satz 9.13 Potenzreihen auch gliedweise integrieren darf. Zum Beispiel ist

$$\int_0^y \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^y a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} y^{n+1}$$

für alle y im Konvergenzintervall $(-R, R)$.

Das nächste Resultat besagt, dass die Werte einer Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises eindeutig festgelegt sind, wenn man ihre Werte nur in einer Folge von Punkten z_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ kennt. Genauer:

Satz 9.16 (Identitätssatz für Potenzreihen) *Seien*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (z - z_0)^n$$

Potenzreihen, die auf einer Kreisscheibe $K := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ mit $R > 0$ konvergieren, und sei $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq K \setminus \{z_0\}$ eine Folge mit Grenzwert z_0 . Ist $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \geq 1$, so stimmen beide Funktionen bzw. beide Potenzreihen auf K überein, d.h. es ist

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in K \quad \text{und} \quad f_n = g_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Nach Satz 6.19 sind f und g stetig auf K . Also gilt

$$f_0 = f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = g(z_0) = g_0.$$

Wir nehmen dies als Induktionsanfang. In der Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, wir hätten für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ bereits gezeigt, dass

$$f_0 = g_0, \quad f_1 = g_1, \quad \dots, \quad f_n = g_n$$

und wollen zeigen, dass dann auch $f_{n+1} = g_{n+1}$. Dazu genügt es, die oben gemachten Überlegungen auf die Potenzreihen

$$\tilde{f}(z) := \frac{f(z) - \sum_{k=0}^n f_k(z - z_0)^k}{(z - z_0)^{n+1}} = f_{n+1} + f_{n+2}(z - z_0) + f_{n+3}(z - z_0)^2 + \dots$$

und

$$\tilde{g}(z) := \frac{g(z) - \sum_{k=0}^n g_k(z - z_0)^k}{(z - z_0)^{n+1}} = g_{n+1} + g_{n+2}(z - z_0) + g_{n+3}(z - z_0)^2 + \dots$$

anzuwenden. (Diese sind durch die Brüche nur für $z \neq z_0$, durch die rechten Seiten aber auch für $z = z_0$ definiert.) ■

Der Identitätssatz ist Grundlage des *Koeffizientenvergleichs*: Hat man ein und dieselbe Funktion in zwei Potenzreihen $\sum a_n(z - z_0)^n$ und $\sum b_n(z - z_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius entwickelt, so folgt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel. Ist

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine gerade Funktion, d.h. $f(z) = f(-z)$ für alle z , so folgt aus

$$f(z) = f(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n,$$

dass $a_n = (-1)^n a_n$ für alle n und daher $a_n = 0$ für alle ungeraden n ist. ■

Das dritte Resultat dieses Abschnittes betrifft die Division von Potenzreihen.

Satz 9.17 Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergiere für $|z - z_0| < R$, und es sei $a_0 \neq 0$. Dann lässt sich $1/f$ in einer gewissen Umgebung von z_0 in eine konvergente Potenzreihe entwickeln.

Sehen wir uns die Potenzreihenentwicklung von $1/f$ zunächst formal und für $z_0 = 0$ an. Aus $f \cdot f^{-1} = 1$ bzw. $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = 1$ folgt gemäß dem Cauchy-Produkt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = 1 = 1 + 0z^1 + 0z^2 + \dots$$

Durch Koeffizientenvergleich folgen hieraus die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1 && \text{(bei } z^0) \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 &= 0 && \text{(bei } z^1) \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 &= 0 && \text{(bei } z^2) \quad \text{u.s.w.} \end{aligned}$$

Wegen $a_0 \neq 0$ kann man aus der ersten Gleichung b_0 ermitteln, dann aus der zweiten b_1 , aus der dritten b_2 usw. Hierdurch wird eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ eindeutig festgelegt. Satz 9.17 sagt aus, dass diese Reihe einen positiven Konvergenzradius besitzt.

Beispiel 1. Nach Satz 9.17 läßt sich die Tangensfunktion in einer Umgebung des Punktes 0 in eine Potenzreihe entwickeln. Wir bestimmen die ersten Koeffizienten der Potenzreihe $\tan x := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit der Methode des Koeffizientenvergleichs aus $\tan x := \sin x / \cos x$ und den bekannten Potenzreihen für die Sinus- und Kosinusfunktion. Koeffizientenvergleich in

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots) \cdot (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots) \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned} \text{bei } x^0 : \quad 0 &= a_0 \\ \text{bei } x^1 : \quad 1 &= a_1 \\ \text{bei } x^2 : \quad 0 &= a_2 - \frac{1}{2}a_0 \\ \text{bei } x^3 : \quad -\frac{1}{6} &= a_3 - \frac{1}{2}a_1 \\ \text{bei } x^4 : \quad 0 &= a_4 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{24}a_0 \end{aligned}$$

und hieraus der Reihe nach $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{3}$ und $a_4 = 0$. Weitere Rechnungen liefern

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$$

Es gibt keine „einfache“ Formel für die Koeffizienten dieser Reihe. ■

Beispiel 2. Wir suchen eine explizite Formel für die Glieder der *Fibonacci-Folge*

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2. \quad (9.7)$$

Wir ordnen dieser Folge die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ zu und finden mit (9.7)

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} + a_{n-1}) x^n \\ &= 1 + x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= 1 + x + x^2 f(x) + x(f(x) - 1). \end{aligned}$$

Umstellen nach $f(x)$ liefert $f(x) = (1 - x - x^2)^{-1}$. Da die Potenzreihe $1 - x - x^2$ (die ein Polynom ist) überall konvergiert und an der Stelle 0 ungleich 0 ist, folgt mit Satz 9.17, dass auch die Reihe

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

einen positiven Konvergenzradius besitzt. Wir bestimmen die a_n , indem wir $f(x) = (1 - x - x^2)^{-1}$ geschickt in eine Potenzreihe entwickeln. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} && \text{(Partialbruchentwicklung)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} - x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}(-1 + \sqrt{5})} \frac{1}{1 - \frac{2x}{-1+\sqrt{5}}} - \frac{2}{\sqrt{5}(-1 - \sqrt{5})} \frac{1}{1 - \frac{2x}{-1-\sqrt{5}}}. \end{aligned}$$

Ist $|x|$ hinreichend klein, so ist dies gleich (geometrische Reihe!)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\sqrt{5}(-1 + \sqrt{5})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{-1 + \sqrt{5}} \right)^n - \frac{2}{\sqrt{5}(-1 - \sqrt{5})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{-1 - \sqrt{5}} \right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{-1 + \sqrt{5}} \right)^{n+1} - \left(\frac{2}{-1 - \sqrt{5}} \right)^{n+1} \right) x^n, \end{aligned}$$

woraus nach Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{2}{-1 + \sqrt{5}} \right)^{n+1} - \left(\frac{2}{-1 - \sqrt{5}} \right)^{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wir werden Satz 9.17 im 3. Semester beweisen. Für Interessenten folgt hier ein Beweis, der nur reelle Methoden benutzt. Dafür benötigen wir einige Vorbereitungen. Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt auch eine *Doppelfolge*. Wie bei gewöhnlichen Folgen identifiziert man f häufig mit ihren Werten $f(m, n) =: a_{mn}$ und schreibt $(a_{mn})_{m,n=0}^{\infty}$ für die Doppelfolge. Konvergenz der Doppelfolge $(a_{mn})_{m,n=0}^{\infty}$ gegen $a \in \mathbb{C}$ bedeutet nach Definition

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : |a_{mn} - a| < \varepsilon. \quad (9.8)$$

Beispiel 3. Für jede Folge (a_n) wird durch $a_{mn} := a_m - a_n$ eine Doppelfolge festgelegt. Die Folge (a_n) ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn die zugeordnete Doppelfolge (a_{mn}) gegen 0 konvergiert. ■

Beispiel 4. Die Doppelfolge (a_{mn}) mit $a_{mn} = (-1)^{m+n}(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})$ konvergiert gegen 0. Für $n_0 \geq 2/\varepsilon$ und $m, n \geq n_0$ ist nämlich

$$|a_{mn} - 0| = \left| \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right| \leq \frac{2}{n_0} \leq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Für den Grenzwert a einer konvergenten Doppelfolge (a_{mn}) bezeichnen wir mit $\lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mn} = a$. Wenn für jedes m die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$ bzw. für jedes n die Grenzwerte $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn}$ existieren, kann man auch die *iterierten* Grenzwerte

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn}) \quad (9.9)$$

betrachten. Man beachte, dass im Beispiel 4 zwar der Grenzwert $\lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mn}$ existiert, nicht aber die Grenzwerte $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$.

Satz 9.18 Die Doppelfolge (a_{mn}) sei konvergent, und für jedes m bzw. n sollen die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$ und $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn}$ existieren. Dann existieren auch die iterierten Grenzwerte (9.9), und es gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn}) = \lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mn}.$$

Beweis. Sei $a := \lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mn}$, und für jedes m existiere der Grenzwert $\alpha_m := \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$. Konvergenz der Doppelfolge (a_{mn}) bedeutet gerade (9.8). Lassen wir in (9.8) $n \rightarrow \infty$ streben, folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq n_0 : |\alpha_m - a| \leq \varepsilon.$$

Dies heißt aber nichts anderes als dass $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = a$. Die zweite Aussage folgt analog. \blacksquare

Jede Doppelfolge (a_{mn}) erzeugt eine Doppelfolge (s_{mn}) durch

$$s_{mn} = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{jk}.$$

Wenn die Doppelfolge (s_{mn}) gegen ein s konvergiert, so nennen wir die *Doppelreihe* $\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}$ konvergent und s ihre Summe, und wir schreiben $s = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}$. Durch Übertragung von Satz 9.18 erhält man sofort das folgende Resultat.

Satz 9.19 Die Doppelreihe $\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}$ sei konvergent, und für jedes j bzw. k sollen die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$ bzw. $\sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}$ konvergieren. Dann konvergieren auch die iterierten Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}$, und es gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk} = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}. \quad (9.10)$$

Hieraus erhält man leicht den folgenden wichtigen *Doppelreihensatz von Cauchy*.

Satz 9.20 *Ist eine der iterierten Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}$ absolut konvergent (d.h. konvergiert sie auch noch, wenn a_{jk} durch $|a_{jk}|$ ersetzt wird), dann sind auch die andere iterierte Reihe sowie die Doppelreihe $\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}$ absolut konvergent, und es gilt (9.10).*

Beweis. Sei z.B. $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|$ konvergent mit der Summe a . Dann ist jede Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}$ absolut konvergent. Wegen $\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n |a_{jk}| \leq a$ konvergiert auch die Doppelreihe absolut. Gleiches gilt wegen $\sum_{j=0}^m |a_{jk}| \leq a$ für jede Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{jk}|$. Aus Satz 9.19 folgt nun die Behauptung. ■

Beweis von Satz 9.17. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $a_0 = 1$. Nach Satz 6.19 gibt es ein $\delta \in (0, R)$, so dass $|a_1 z + a_2 z^2 + \dots| < 1$ für alle $|z| < \delta$. Für diese z ist (geometrische Reihe!)

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{1 - (-a_1 z - a_2 z^2 - \dots)} = \sum_{j=0}^{\infty} (-a_1 z - a_2 z^2 - \dots)^j.$$

Mit dem Cauchyprodukt schreiben wir für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$(-a_1 z - a_2 z^2 - \dots)^j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} z^k$$

mit gewissen Koeffizienten a_{jk} . Es ist also

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} z^k.$$

Dürften wir hier die Summationsreihenfolge vertauschen, wäre dies die Behauptung. Wenn die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}| |z|^k$ konvergiert, ist nach Satz 9.20 das Vertauschen möglich. Wir zeigen, dass dies für hinreichend kleine $|z|$ tatsächlich gilt.

Da jede Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises absolut konvergiert, gibt es ein $\rho \in (0, \delta)$ so, dass

$$|a_1| |z| + |a_2| |z|^2 + \dots < 1 \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| < \rho.$$

Für diese z konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} (|a_1| |z| + |a_2| |z|^2 + \dots)^j$, und diese lässt sich nach Cauchymultiplikation in der Form $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{jk} |z|^k$ schreiben. Offenbar gilt dabei $|a_{jk}| \leq \alpha_{jk}$. Folglich konvergiert die iterierte Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}| |z|^k$ für alle z mit $|z| < \rho$. Hieraus und aus dem Doppelreihensatz folgt die Behauptung. ■

9.6 Fourierreihen

Nach den Potenzreihen betrachten wir eine weitere Klasse von Funktionenreihen, die von großer Bedeutung in der Analysis sowie für ihre Anwendungen in Physik und Technik ist: die Fourierreihen. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzintervalls beliebig oft differenzierbar sind. Es können also nur „wenige“ Funktionen durch ihre Potenzreihe dargestellt werden: die reell-analytischen. Demgegenüber lassen sich durch Fourierreihen z.B. auch periodische Funktionen darstellen, die nur stückweise differenzierbar sind und deren Ableitungen Sprünge haben. Aus Zeitgründen können wir uns nur einen elementaren Überblick über Fourierreihen verschaffen, obwohl dies der Bedeutung dieser Reihen nicht angemessen ist. Auf weitere Aspekte wird z.B. in der Funktionalanalysis-Vorlesung eingegangen.

9.6.1 Periodische Funktionen

Eine auf \mathbb{R} definierte Funktion f heißt *periodisch mit der Periode L* , wenn

$$f(x + L) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispielsweise sind die Funktionen $x \mapsto \sin(kx)$ und $x \mapsto \cos(kx)$ 2π -periodisch, und für die Dirichletfunktion ist *jede* rationale Zahl eine Periode.

Durch eine Variablensubstitution kann man Funktionen mit der Periode L auf solche mit der Periode 2π zurückführen. Hat f die Periode L , so hat $F(x) := f(\frac{L}{2\pi}x)$ die Periode 2π :

$$F(x + 2\pi) = f\left(\frac{L}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = F(x).$$

Wir betrachten daher von nun an nur Funktionen der Periode 2π .

9.6.2 Trigonometrische Reihen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *trigonometrische Reihe*, wenn es Konstanten $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \geq 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ für $n \geq 1$ so gibt, dass

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (9.11)$$

Trigonometrische Reihen sind offenbar 2π -periodisch.

Satz 9.21 *Wenn die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergieren, so konvergiert die Reihe (9.11) auf \mathbb{R} absolut bezüglich der Supremumsnorm und gleichmäßig.*

Beweis. Die absolute Konvergenz der Reihe (9.11) folgt aus

$$\|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Nach Satz 9.9 folgt aus der absoluten die gleichmäßige Konvergenz. ■

Im Weiteren benötigen wir die für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gültigen Identitäten

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{für } m = n = 0, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n > 0, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= 0. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Diese kann man leicht mit Hilfe von Additionstheoremen wie

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

zeigen (Übung). Mit den Identitäten (9.12) erhält man einen Zusammenhang zwischen den Werten einer trigonometrischen Reihe f und ihren Koeffizienten a_n und b_n .

Satz 9.22 (Euler/Fourier) Die Reihe (9.11) sei auf \mathbb{R} gleichmäßig konvergent. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N}), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Beweis. Wir multiplizieren beide Seiten von (9.11) mit $\cos(nx)$

$$f(x) \cos(nx) = \frac{a_0}{2} \cos(nx) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) \cos(nx) + b_m \sin(mx) \cos(nx))$$

und integrieren über $[0, 2\pi]$. Da die Reihe (9.11) gleichmäßig konvergiert, konvergiert auch die Reihe $f(x) \cos(nx)$ gleichmäßig, und Integration und Summation dürfen vertauscht werden. Mit (9.12) erhält man sofort die erste Behauptung in (9.13). Die zweite bekommt man analog durch Multiplikation von f mit $\sin(nx)$. ■

9.6.3 Fourierreihen

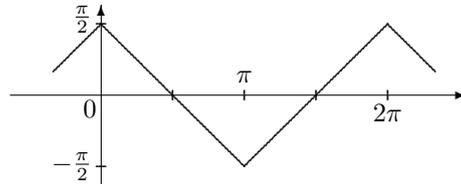
Die Formeln (9.13) erlauben die Bestimmung von Zahlen a_n, b_n auch dann, wenn f nicht als gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe vorausgesetzt wird, sondern nur als Riemann-integrierbar auf $[0, 2\pi]$ (es genügt sogar, dass $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ als uneigentliches Integral absolut konvergiert.) Ist f eine solche Funktion, so bestimmen wir gemäß (9.13) Zahlen a_n, b_n , die dann die *Fourierkoeffizienten* von f heißen, und ordnen f die trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (9.14)$$

zu, die sogenannte *Fourierreihe* von f .

Beispiel 1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die „Sägezahnfunktion“, die auf $[0, 2\pi]$ durch

$$f(x) = \begin{cases} -x + \frac{\pi}{2} & \text{für } x \in [0, \pi) \\ x - \frac{3}{2}\pi & \text{für } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$



definiert und 2π -periodisch ist.

Da f eine gerade Funktion ist (d.h. es ist $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), ist $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Für die a_n erhält man

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left(x - \frac{3}{2}\pi\right) \cos(nx) dx.$$

Für $n = 0$ erhält man sofort $a_0 = 0$. Für $n \geq 1$ folgt mit partieller Integration

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die durch f definierte Fourierreihe ist also

$$\frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right).$$

Da die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergiert, konvergiert diese Fourierreihe gleichmäßig (Satz 9.21). Es ist aber im Moment nicht klar, ob die Summe dieser trigonometrischen Reihe etwas mit den Werten von f zu tun hat. Der folgende Satz 9.23 wird zeigen, dass tatsächlich

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right) \quad (9.15)$$

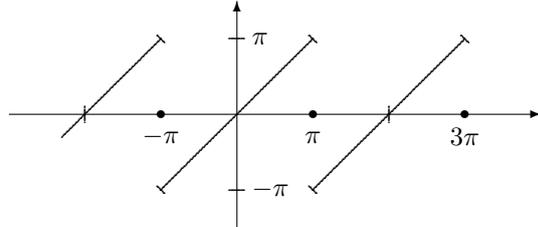
für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Hieraus folgt z.B. die bemerkenswerte Identität

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

indem man in (9.15) $x = 0$ setzt. ■

Beispiel 2. Die 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei erklärt durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in (-\pi, \pi), \\ 0 & \text{für } x = \pi. \end{cases}$$



Sie ist unstetig in allen Punkten $x = (2k + 1)\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da f ungerade ist, sind alle $a_n = 0$. Für die b_n erhalten wir

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

(wegen der 2π -Periodizität von f ist es egal, über welches Integral der Länge 2π man integriert). Die Fourierreihe von f lautet also

$$2 \left(\sin x - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \dots \right).$$

Es ist weder unmittelbar klar, ob diese Reihe für $x \neq 0$ überhaupt konvergiert, noch ob ihre Grenzfunktion mit f übereinstimmt. ■

9.6.4 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen

Die zentrale Frage ist also: konvergiert die Fourierreihe einer 2π -periodischen Funktion f in irgendeinem Sinn (punktweise, gleichmäßig, ...), und wenn ja, stimmt ihre Grenzfunktion dann mit f überein?

Einfache Überlegungen zeigen, dass in der Regel nicht einmal punktweise Konvergenz vorliegen kann: zwei Funktionen f und g , die sich nur in endlich vielen Punkten voneinander unterscheiden, besitzen die gleiche Fourierreihe. Selbst für *stetige* Funktionen kann man nicht garantieren, dass ihre Fourierreihe gegen die Ausgangsfunktion punktweise konvergiert. Jedoch gilt:

Satz 9.23 Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch und Riemann-integrierbar auf $[0, 2\pi]$, und die folgenden einseitigen Grenzwerte sollen an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ existieren:

$$\begin{aligned} f(x+0) &:= \lim_{h \searrow 0} f(x+h), & f(x-0) &:= \lim_{h \nearrow 0} f(x+h), \\ \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}, & & \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-0)}{h}. \end{aligned}$$

Dann konvergiert die Fourierreihe von f an der Stelle x gegen $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Die Funktion f soll also in x einseitige Grenzwerte und „einseitige Ableitungen“ besitzen. Dann konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte. In den Beispielen 1 und 2 sind diese Bedingungen in jedem Punkt erfüllt. Man hat also jeweils punktweise Konvergenz der Fourierreihe gegen f auf ganz \mathbb{R} . Einen Beweis dieses Satzes finden Sie in Heuser, Analysis II, Satz 136.4. ■

Ohne die Differenzierbarkeitsannahme gilt dieser Satz nicht. Man kann jedoch ohne solche Annahmen auskommen, wenn man den Begriff der Konvergenz selbst abschwächt.

Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ die Summe s besitzt, wenn also ihre Partialsummen $s_n = a_1 + \dots + a_n$ gegen s konvergieren, so konvergieren auch die arithmetischen Mittel $\sigma_n := \frac{1}{n}(s_1 + \dots + s_n)$ gegen s (Cauchyscher Grenzwertsatz, vgl. Heuser, Analysis I, Satz 27.1). Möglicherweise konvergiert die Folge (σ_n) aber auch dann noch gegen eine Zahl s , wenn die Folge (s_n) nicht konvergiert (Beispiel: $a_n = (-1)^n$). Man sagt dann, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ im Sinne von Cesaro konvergiert und dass ihre Summe gleich s ist.

Von Fejer wurde dieses Konzept auf Fourierreihen angewandt. Seien $s_0(x) := a_0/2$ und, für $n \geq 1$,

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

die Partialsummen der Fourierreihe und

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n+1}(s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)).$$

Satz 9.24 (Fejer) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und Riemann-integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ sollen die einseitigen Grenzwerte $f(x+0)$ und $f(x-0)$ existieren, und es sei $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$. Dann ist $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$, d.h. die Fourierreihe von f konvergiert im Sinne von Cesaro punktweise gegen f . Ist f stetig, so konvergieren die σ_n sogar gleichmäßig gegen f .

Ein Beweis steht in Heuser, Analysis II, Sätze 139.3 und 139.5. ■

Eine Anwendung findet die zweite Aussage dieses Satzes beim Beweis des wichtigen Weierstraßschen Approximationssatzes.

Satz 9.25 (Weierstraß) Sei f stetig auf $[a, b]$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein Polynom p mit

$$\|p - f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Stetige Funktionen auf Intervallen können also bezüglich der Supremumsnorm beliebig genau durch Polynome approximiert werden. Einen Beweis finden Sie in Heuser, Analysis II, Abschnitt 139, Aufgabe 3. ■

9.6.5 Konvergenz im quadratischen Mittel

Wir haben gesehen, dass die Untersuchung der punktweisen oder gar gleichmäßigen Konvergenz einer Fourierreihe erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Ein zu Fourierreihen „passender“ Konvergenzbegriff ist die Konvergenz im quadratischen Mittel.

Seien f, g Riemann-integrierbare Funktionen auf $[0, 2\pi]$. Für andere Intervalle definiert man die folgenden Begriffe analog. Das *Skalarprodukt* von f und g ist die Zahl

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt,$$

und die L^2 -Norm von f wird erklärt durch

$$\|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Dann gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \quad (9.16)$$

Man beachte die Analogie zum Skalarprodukt bzw. zur Euklidischen Norm von Vektoren im \mathbb{R}^n . Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (9.16) wird genauso bewiesen wie in diesem Fall.

Mit (9.16) erhält man leicht die Dreiecksungleichung

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \|f + g\|_2^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + 2\langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \\ &\leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2 \|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2. \end{aligned}$$

Dennoch ist $\|\cdot\|_2$ keine Norm auf $R([0, 2\pi])$! (Warum nicht?) Mögliche Auswege sind:

- (A) Wir betrachten nur stetige Funktionen. Auf $C([0, 2\pi])$ ist $\|\cdot\|_2$ eine Norm.
- (B) Man identifiziert zwei Funktionen, wenn $\|f - g\|_2 = 0$.

Wir werden hier beides nicht tun: (A) engt uns zu sehr ein, und (B) schauen wir uns im Rahmen der Lebesgueschen Integrationstheorie im vierten Semester an.

Definition 9.26 Seien $f, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und Riemann-integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Die Folge (f_n) konvergiert im quadratischen Mittel gegen f , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (f(x) - f_n(x))^2 dx = 0.$$

Noch einmal: die Tatsache, dass $\|\cdot\|_2$ keine Norm auf $R([0, 2\pi])$ ist, bringt einige Komplikationen mit sich (z.B. kann (f_n) gegen zwei verschiedene Funktionen f und g im quadratischen Mittel konvergieren), die wir erst im vierten Semester beheben.

Definition 9.27 Zwei Funktionen $f, g \in R([0, 2\pi])$ heißen orthogonal, wenn $\langle f, g \rangle = 0$. Eine Folge $(u_n)_{n \geq 0}$ von Funktionen heißt ein Orthogonalsystem, wenn $\langle u_m, u_n \rangle = 0$ für alle $m \neq n$, und ein Orthonormalsystem, wenn zusätzlich $\langle u_n, u_n \rangle = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Aus den Identitäten (9.12) wissen wir, dass die Funktionen

$$u_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad u_{2n}(x) := \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad u_{2n-1}(x) := \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \quad (n \geq 1) \quad (9.17)$$

ein Orthonormalsystem über dem Intervall $[0, 2\pi]$ bilden.

Ist f Riemann-integrierbar und $(u_n)_{n \geq 0}$ ein Orthonormalsystem auf $[0, 2\pi]$, so heißen die Zahlen $c_n := \langle f, u_n \rangle$ die *Fourierkoeffizienten* von f und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ die *Fourierreihe* von f . Man überlegt sich leicht, dass für das spezielle Orthonormalsystem (9.17) diese Begriffe mit den früher definierten übereinstimmen.

Wann konvergiert nun die Fourierreihe einer Funktion im quadratischen Mittel gegen diese Funktion? Zunächst eine Vorüberlegung.

Satz 9.28 (Besselsche Ungleichung) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und Riemann-integrierbar auf $[0, 2\pi]$, und sei $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem auf $[0, 2\pi]$. Dann gilt für die Fourierkoeffizienten $c_n = \langle f, u_n \rangle$ die Ungleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

Beweis. Wir überlegen uns zunächst für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\|f - \sum_{n=0}^k c_n u_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=0}^k |c_n|^2. \quad (9.18)$$

Sei $g = \sum_{n=0}^k c_n u_n$. Dann ist

$$\|f - \sum_{n=0}^k c_n u_n\|_2^2 = \|f - g\|_2^2 = \langle f - g, f - g \rangle = \|f\|_2^2 - 2\langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle.$$

Für die Skalarprodukte finden wir

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle f, \sum_{n=0}^k c_n u_n \rangle = \sum_{n=0}^k c_n \langle f, u_n \rangle = \sum_{n=0}^k |c_n|^2, \\ \langle g, g \rangle &= \langle \sum_{n=0}^k c_n u_n, \sum_{m=0}^k c_m u_m \rangle = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^k c_n c_m \langle u_n, u_m \rangle = \sum_{n=0}^k |c_n|^2, \end{aligned}$$

womit (9.18) sofort folgt. Da $\|f - g\|_2^2 \geq 0$, folgt aus (9.18) die Behauptung. ■

Folgerung 9.29 Die Fourierreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ von f konvergiert genau dann im quadratischen Mittel gegen f , wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|_2^2. \quad (9.19)$$

Dies folgt sofort aus (9.18). Die Beziehung (9.19) heißt die *Parsevalsche Gleichung*.

Satz 9.30 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und Riemann-integrierbar auf $[0, 2\pi]$, und sei (u_n) das spezielle Orthonormalsystem (9.17). Dann konvergiert die Fourierreihe von f im quadratischen Mittel gegen f .

Die Konvergenz der Fourierreihe gegen f im quadratischen Mittel gilt also ohne einschränkende Voraussetzungen an f und ist deshalb eine „sehr natürliche“ Art der Konvergenz für Fourierreihen. Dafür ist sie schwächer als die gleichmäßige Konvergenz.

Beweis. 1. Schritt. Sei $0 \leq a < 2\pi$. Wir zeigen die Aussage für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in [0, a]. \\ 0 & \text{wenn } x \in (a, 2\pi]. \end{cases}$$

Offenbar ist $\|f\|_2^2 = \int_0^a dx = a$, und für die Fourierkoeffizienten gilt

$$\begin{aligned} c_0 &= \langle f, u_0 \rangle = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}, \\ c_{2n} &= \langle f, u_{2n} \rangle = \langle f, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{\pi}} \Big|_0^a = \frac{\sin(na)}{n\sqrt{\pi}}, \\ c_{2n-1} &= \langle f, u_{2n-1} \rangle = \langle f, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \sin(nx) dx \\ &= \frac{-\cos(nx)}{n\sqrt{\pi}} \Big|_0^a = \frac{1 - \cos(na)}{n\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Somit ist (die absolute Konvergenz der betrachteten Reihen folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; vgl. Kapitel 5)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 &= \frac{a^2}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos(na))^2}{n^2\pi} \\ &= \frac{a^2}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2(na)}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{2\cos(na)}{n^2} + \frac{\cos^2(na)}{n^2} \right) \\ &= \frac{a^2}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{\cos(na)}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Mit der Identität

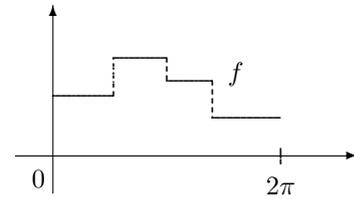
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{(\pi - x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

(Nachrechnen!) erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 &= \frac{a^2}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{(\pi - a)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right) \\ &= \frac{a^2}{2\pi} + \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi a}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right) = a. \end{aligned}$$

Für diese spezielle Funktion gilt also die Parsevalsche Gleichung (9.19). Aus Folgerung 9.29 folgt die Behauptung.

2. *Schritt.* Wir zeigen die Behauptung für stückweise konstante Funktionen f („Treppenfunktionen“). Für jede derartige Funktion gibt es Funktionen f_1, \dots, f_r von der im 1. Schritt beschriebenen Gestalt sowie Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ so, dass $f(x) = \sum_{j=1}^r \alpha_j f_j(x)$ für alle $x \in (0, 2\pi]$ mit Ausnahme endlich vieler.



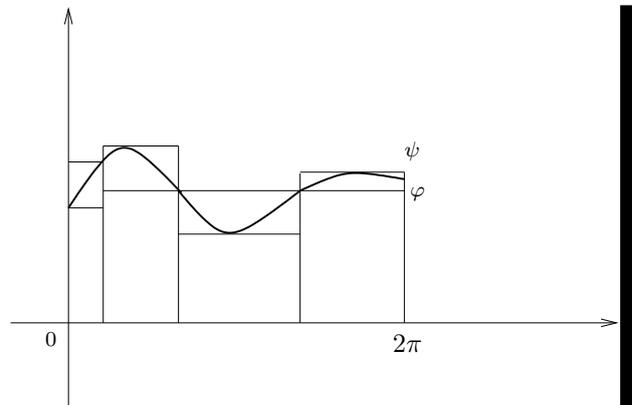
Seien s_n bzw. s_{nj} die n . Partialsummen der Fourierreihen der Funktionen f bzw. f_j . Dann ist offenbar $s_n = \sum_{j=1}^r \alpha_j s_{nj}$ und folglich

$$\|f - s_n\|_2 = \left\| \sum_{j=1}^r \alpha_j (f_j - s_{nj}) \right\|_2 \leq \sum_{j=1}^r |\alpha_j| \|f_j - s_{nj}\|_2.$$

Mit Schritt 1 folgt $\|f - s_n\|_2 \rightarrow 0$.

3. *Schritt.* Wir zeigen die Behauptung für eine beliebige Riemann-integrierbare Funktion f mit $\|f\|_{\infty} \leq 1$ (offenbar genügt es, solche Funktionen zu betrachten). Nach dem Riemannschemen Integrabilitätskriterium gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ 2π -periodische Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) φ, ψ sind Treppenfunktionen.
- (b) $-1 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$.
- (c) $\int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \frac{\varepsilon^2}{8}$.



Sei $g := f - \varphi$ und seien $s_{n,f}$, $s_{n,g}$ bzw. $s_{n,\varphi}$ die n -ten Partialsummen der Fourierreihen von f , g bzw. φ . Dann ist $s_{n,f} = s_{n,g} + s_{n,\varphi}$ und folglich

$$\|f - s_{n,f}\|_2 \leq \|\varphi - s_{n,\varphi}\|_2 + \|g - s_{n,g}\|_2. \quad (9.20)$$

Nach Schritt 2 gibt es ein N so, dass $\|\varphi - s_{n,\varphi}\|_2 < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \|g - s_{n,g}\|_2^2 &\stackrel{(9.18)}{\leq} \|g\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^{2\pi} |\psi(x) - \varphi(x)|^2 dx \leq 2 \int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x)) dx \stackrel{(c)}{\leq} \frac{\varepsilon^2}{4}. \end{aligned}$$

(Beachte: wegen $|\psi - \varphi| \leq 2$ ist $|\psi - \varphi|^2 \leq 2(\psi - \varphi)$.) Mit (9.20) folgt schließlich

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \|f - s_{n,f}\|_2 < \varepsilon,$$

d.h. die Partialsummen $s_{n,f}$ konvergieren in der L^2 -Norm gegen f . ■

10 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

Reale Vorgänge hängen in der Regel von mehreren Einflussgrößen ab. Wir befassen uns daher in diesem Abschnitt mit der Differentialrechnung für Funktionen, die auf einer Teilmenge des \mathbb{R}^n definiert sind und in einen Raum \mathbb{R}^m abbilden.

10.1 Lineare Abbildungen und Stetigkeit

Wir bezeichnen wieder mit \mathbb{R}^n den linearen Raum aller Vektoren (x_1, \dots, x_n) mit den Operationen

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &:= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha(x_1, \dots, x_n) &:= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),\end{aligned}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir kennen bereits mehrere Normen auf \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned}\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &:= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 &:= \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2}, \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 &:= \sum_{j=1}^n |x_j|.\end{aligned}$$

Allgemeiner wird für jedes $p \geq 1$ durch

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}$$

eine Norm auf \mathbb{R}^n definiert, die \mathbb{R}^n zu einem normierten linearen Raum macht (↗ Tutorium).

Zwei Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ auf einem linearen Raum X heißen *äquivalent*, wenn es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ so gibt, dass

$$C_1 \|x\|_A \leq \|x\|_B \leq C_2 \|x\|_A \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation.

Satz 10.1 *Alle Normen auf \mathbb{R}^n sind untereinander äquivalent.*

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Da die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist, genügt es zu zeigen, dass $\|\cdot\|$ zur Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent

ist. Dazu sei $e_j := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (mit der 1 an der j . Stelle) der j . Einheitsvektor im \mathbb{R}^n . Für $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ ist dann

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|e_j\| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n \|e_j\|,$$

woraus mit $C_2 := \sum_{j=1}^n \|e_j\|$ die Abschätzung

$$\|x\| \leq C_2 \|x\|_\infty \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \quad (10.1)$$

folgt. Aus (10.1) erhalten wir für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \|x_1\| - \|x_2\| \right| \leq \|x_1 - x_2\| \leq C_2 \|x_1 - x_2\|_\infty,$$

d.h. die Abbildung

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\| \quad (10.2)$$

ist stetig (sogar Lipschitzstetig). Da die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ kompakt ist, nimmt die Funktion (10.2) ihr Minimum C_1 auf dieser Menge an, und C_1 ist positiv, da die Null nicht in dieser Menge liegt. Es ist also $\|x\| \geq C_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_\infty = 1$ bzw. $\|x\| \geq C_1 \|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Folgerung 10.2 (a) \mathbb{R}^n ist bezüglich jeder Norm vollständig.

(b) Konvergiert eine Folge im \mathbb{R}^n bzgl. einer Norm, so konvergiert sie bzgl. jeder Norm.

(c) Alle Normen auf \mathbb{R}^n liefern die gleichen offenen Mengen.

(d) Die Stetigkeit von Abbildungen $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ oder $g : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$, wobei X und Y metrische Räume sind, hängt nicht von der Wahl der Norm auf \mathbb{R}^n ab.

Seien X, Y lineare Räume über \mathbb{R} . Eine Abbildung $A : X \rightarrow Y$ heißt *linear*, wenn

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad \text{für alle } x, y \in X \text{ und } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Sind X, Y normierte lineare Räume, so heißt eine lineare Abbildung $A : X \rightarrow Y$ *beschränkt*, wenn sie die Einheitskugel von X in eine beschränkte Menge in Y überführt. Die Zahl

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$$

heißt die durch die Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$ induzierte *Operatornorm* von A . Die Norm $\|A\|$ ist also gleich dem Radius der kleinsten Kugel um $0 \in Y$, die das Bild der Einheitskugel von X unter der Abbildung A enthält. Sind beispielsweise \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m mit der Maximumnorm versehen und ist (a_{ij}) die Matrixdarstellung von $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bezüglich der jeweiligen Standardbasen, so ist

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Die Menge der linearen beschränkten Abbildungen von X nach Y bezeichnen wir mit $L(X, Y)$. Versehen mit der Operatornorm wird $L(X, Y)$ zu einem normierten linearen Raum (↗ Übung).

Satz 10.3 Für eine lineare Abbildung $A : X \rightarrow Y$ zwischen normierten Räumen sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) A ist beschränkt.
- (b) Es gibt ein $C \geq 0$ so, dass $\|Ax\| \leq C\|x\|$ für alle $x \in X$.
- (c) A ist stetig.
- (d) A ist stetig in $0 \in X$.

Beweis. (a) \Rightarrow (b): Für $x \neq 0$ ist $\|x/\|x\|\| = 1$ und daher $\|A\frac{x}{\|x\|}\| \leq \|A\|$. Also ist $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ für alle $x \in X$.

(b) \Rightarrow (c): Da A linear ist, ist

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq C\|x - y\|$$

für beliebige $x, y \in X$. Also ist A sogar Lipschitzstetig.

(c) \Rightarrow (d): Dies ist klar.

(d) \Rightarrow (a): Sei $\delta > 0$ so, dass $\|Ax - A0\| = \|Ax\| \leq 1$ falls $\|x\| \leq \delta$. Dann ist $\|A(\delta x)\| \leq 1$ für alle $\|x\| \leq 1$, d.h. $\|A\| \leq 1/\delta$. ■

Satz 10.4 Jede lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m ist stetig.

Beweis. Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear. Wegen Folgerung 10.2 können wir annehmen, dass \mathbb{R}^n mit der Maximumnorm versehen ist. Für $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|Ax\| = \left\| \sum_{j=1}^n Ax_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|Ae_j\| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n \|Ae_j\|.$$

Nach Satz 10.3, Implikation (b) \Rightarrow (c), ist A stetig. ■

Da jeder endlichdimensionale lineare Raum über \mathbb{R} zu einem Raum \mathbb{R}^n isomorph ist, gelten die Sätze 10.1 und 10.4 entsprechend für beliebige endlichdimensionale lineare Räume über \mathbb{R} . Auch für endlichdimensionale Räume über \mathbb{C} bleiben diese Sätze richtig.

Als Ergänzung zum Thema Stetigkeit schauen wir uns noch die Vertauschbarkeit von Grenzübergängen an. Genauer: wir fragen, wann für $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

Beispiel 1. Auf $(0, 1] \times (0, 1]$ sei $f(x, y) = x^y$. Dann ist

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} x^y = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0, \quad \text{aber} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} x^y = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Beispiel 2. Auf $(0, 1] \times (0, 1]$ sei

$$f(x, y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}.$$

Dann ist $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1$ und $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \sin \frac{1}{x}$. Folglich ist

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1,$$

aber $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ existiert nicht. ■

Satz 10.5 Sei $f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$. Der Grenzwert

$$A := \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \tag{10.3}$$

soll existieren, und für jedes $y \in (c, d)$ existiere der Grenzwert

$$\varphi(y) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y). \tag{10.4}$$

Dann existiert auch der iterierte Grenzwert $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ und ist gleich A . Eine analoge Aussage gilt, wenn für jedes $x \in (a, b)$ der Grenzwert

$$\psi(x) := \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \tag{10.5}$$

existiert. Existieren also alle Grenzwerte (10.3) – (10.5), so ist

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = A.$$

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage. Existenz des Grenzwertes (10.3) bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, y) \neq (x_0, y_0) \text{ mit } \|(x, y) - (x_0, y_0)\|_\infty < \delta : |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Mit der Definition der Maximumnorm ist also

$$\forall (x, y) \neq (x_0, y_0) \text{ mit } |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta : |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Wir fixieren ein $y \neq y_0$ mit $|y - y_0| < \delta$ und lassen $x \rightarrow x_0$ streben. Dann folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \neq y_0 \text{ mit } |y - y_0| < \delta : |\varphi(y) - A| \leq \varepsilon.$$

Also existiert $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$ und ist gleich A . ■

10.2 Partielle Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, so schreiben wir statt $f(x)$ auch $f(x_1, \dots, x_n)$.

Definition 10.6 Die Funktion f heißt in $x \in U$ partiell differenzierbar bzgl. x_i , falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \quad (10.6)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt die partielle Ableitung von f bzgl. x_i an der Stelle x und wird mit $(D_i f)(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ oder $f_{x_i}(x)$ bezeichnet. Die Funktion f heißt partiell differenzierbar in x (auf U), wenn alle partiellen Ableitungen von f in x (in jedem Punkt von U) existieren. Ist außerdem jede dieser partiellen Ableitungen in x (bzw. auf U) stetig, so heißt f stetig partiell differenzierbar in x (bzw. auf U).

Ist e_i der i . Einheitsvektor von \mathbb{R}^n , so ist demnach

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}.$$

Beispiel 1. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad (= \|x\|_2). \quad (10.7)$$

Beim partiellen Differenzieren betrachten wir nur die i . der Variablen x_1, \dots, x_n als veränderlich und die übrigen als fixiert. Wir können daher die bekannten Differentiationsregeln für Funktionen einer reellen Veränderlichen anwenden und erhalten: Die Funktion (10.7) ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar, und

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

Offenbar ist diese Funktion sogar *stetig* partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. ■

Beispiel 2. Bei Funktionen auf \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 schreibt man oft $f(x, y)$ bzw. $f(x, y, z)$ statt $f(x_1, x_2)$ bzw. $f(x_1, x_2, x_3)$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch $f(0, 0) = 0$ und

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{falls } (x, y) \neq (0, 0).$$

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ finden wir die partiellen Ableitungen sofort:

$$f_x(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3}, \quad f_y(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^3}.$$

An der Stelle $(x, y) = (0, 0)$ arbeiten wir mit Definition 10.6 und finden

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

Analog ist $f_y(0, 0) = 0$. Also ist f auf ganz \mathbb{R}^2 partiell differenzierbar. Man beachte, dass f in $(0, 0)$ nicht stetig ist! Es ist nämlich

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{(1/n^2)}{(2/n^2)^2} = \frac{n^2}{4} \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass aus der partiellen Differenzierbarkeit *nicht* die Stetigkeit folgt. Später werden wir sehen, dass dagegen aus der *stetigen* partiellen Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgt. ■

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar, so heißt f *zweimal partiell differenzierbar*, und wir schreiben $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = D_j D_i f = f_{x_i x_j}$ für die partielle Ableitung von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nach x_j . Allgemein heißt f *k-mal partiell differenzierbar* ($k \geq 2$) wenn f $(k-1)$ -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $k-1$ partiell differenzierbar sind. Schließlich heißt f *k-mal stetig partiell differenzierbar*, wenn f k -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen bis zur k . Ordnung stetig sind.

Beispiel 3. Wir erklären $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(0, 0) = 0$ und

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Für alle Punkte $(x, y) \neq (0, 0)$ erhalten wir

$$f_x(x, y) = y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Für $(x, y) = (0, 0)$ folgt mit der Definition der Ableitung

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \quad \text{und} \quad f_y(0, 0) = 0.$$

Für die gemischten zweiten Ableitungen in $(0, 0)$ finden wir schließlich

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1, \\ f_{yx}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen darf also i. Allg. nicht vertauscht werden. Der folgende Satz gibt Bedingungen an, unter denen dieses Vertauschen erlaubt ist. ■

Satz 10.7 (H. A. Schwarz) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $x^* \in U$. Alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f sollen auf U existieren. Weiter existiere die zweite Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ auf U , und diese sei in x^* stetig. Dann existiert auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ in x^* , und es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^*).$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 2$, schreiben (x, y) statt (x_1, x_2) und setzen voraus, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ auf U existiert und in x^* stetig ist. Weiter nehmen wir an, dass $(0, 0) \in U$ und $x^* = (0, 0)$ (andernfalls verschieben wir U geeignet). Schließlich wählen wir $\delta > 0$ so, dass $(-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \subseteq U$ und arbeiten im weiteren ausschließlich auf diesem Quadrat.

Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Seien $h, k \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ fixiert. Der Mittelwertsatz, angewandt auf die Funktion

$$F : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto f(s, k) - f(s, 0)$$

liefert die Existenz eines $\xi = \xi(h, k)$ zwischen 0 und h so, dass

$$F(h) - F(0) = hF'(\xi) = h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, 0) \right).$$

Erneute Anwendung des Mittelwertsatzes, nun auf die Funktion

$$G : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, t),$$

liefert die Existenz eines $\eta = \eta(h, k)$ zwischen 0 und k so, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, 0) = G(k) - G(0) = k G'(\eta) = k \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta).$$

Es ist also

$$F(h) - F(0) = f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta)$$

mit gewissen $\xi = \xi(h, k)$ und $\eta = \eta(h, k)$. Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0)}{hk} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (10.9)$$

mit gewissen Zahlen ξ und η , die von h und k abhängen und für die $|\xi| \leq |h|$ und $|\eta| \leq |k|$ ist. Für jedes fixierte h existiert also der Grenzwert (10.9).

Außerdem existiert wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ in $(0, 0)$ und wegen $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$ für $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ der Grenzwert

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \quad \text{und ist gleich} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Nach Satz 10.5 existiert dann auch der iterierte Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \right) \quad \text{und ist gleich} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Wegen (10.9) bedeutet dies, dass der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \quad \text{existiert und gleich} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \text{ ist.}$$

Das ist die Behauptung. ■

Entsprechend gilt natürlich $f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx}$, falls nur eine dieser Ableitungen existiert und stetig ist.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^m$, gegeben durch

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \left(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \right),$$

heißt *partiell differenzierbar* bzw. *stetig partiell differenzierbar*, wenn jede ihrer Komponenten diese Eigenschaft besitzt.

Beispiel 4. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so heißt

$$(\text{grad } f)(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n$$

der *Gradient* von f in x . Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar, so heißt

$$(\text{div } f)(x) := \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \in \mathbb{R}$$

die *Divergenz* von f in x . Ist schließlich $n = 3$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ partiell differenzierbar, so heißt

$$(\text{rot } f)(x) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \in \mathbb{R}^3$$

die *Rotation* von f in x . Ist $n = 3$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$\text{rot grad } f = 0. \tag{10.10}$$

Die erste Komponente des Vektors $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f$ ist nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$$

nach dem Satz von Schwarz. Ebenso sind die übrigen Komponenten gleich 0. Ähnlich zeigt man, dass für jede zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0. \quad (10.11)$$

10.3 Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt sehen wir uns an, wie sich das Konzept der Differentiation auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen lässt. Dazu erinnern wir an die Zerlegungsformel für differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x+h) = f(x) + \alpha h + r(h) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Wir können diese Formel und damit die Grundidee der Differentiation wie folgt interpretieren: Die Funktion f wird im Punkt x lokal durch die lineare Funktion $h \mapsto \alpha h$ approximiert. Im Weiteren sei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm.

Definition 10.8 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt differenzierbar (oft auch Frechét-differenzierbar oder total differenzierbar) in $x \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie eine in einer Umgebung W von $0 \in \mathbb{R}^n$ definierte Funktion r mit Werten in \mathbb{R}^m und mit $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/\|h\| = 0$ so gibt, dass

$$f(x+h) = f(x) + Ah + r(h) \quad \text{für alle } h \in W. \quad (10.12)$$

Ist f in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf U .

Man beachte, dass A und r von x abhängen. Eine ganz analoge Definition, bei der man zusätzlich die Stetigkeit von A fordern muss, trifft man für beliebige Banachräume.

Wir überlegen uns die folgenden Beziehungen zwischen den eingeführten Differenzierbarkeitsbegriffen:

$$\begin{array}{ccccc} f \text{ stetig partiell} & \text{Satz 10.11} & f \text{ differen-} & \text{Satz 10.9} & f \text{ partiell} \\ \text{differenzierbar} & \implies & \text{zierbar} & \implies & \text{differenzierbar} \\ & & \Downarrow \text{Satz 10.10} & & \\ & & f \text{ stetig.} & & \end{array}$$

Satz 10.9 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m)^T : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ differenzierbar. Dann ist jede Funktion $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ in x partiell differenzierbar, und die Matrixdarstellung von $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ aus (10.12) bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m ist

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}. \quad (10.13)$$

Die Abbildung A in (10.12) ist also eindeutig bestimmt. Sie heißt die *Ableitung* von f in x und wird mit $(Df)(x)$ oder $f'(x)$ bezeichnet. Die Matrix (10.13) heißt die *Jacobi-Matrix* von f in x und wird oft mit $J_f(x)$ bezeichnet.

Beweis. Es gelte (10.12) mit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{mn}$, $r = (r_1, \dots, r_m)^T$, $h = (h_1, \dots, h_n)^T$. Mit diesen Bezeichnungen folgt für jedes $i = 1, \dots, m$

$$f_i(x+h) = f_i(x) + \sum_{j=1}^n a_{ij}h_j + r_i(h) \quad \text{für alle } h \in W, \quad (10.14)$$

wobei $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_i(h)}{\|h\|} = 0$, da $|r_i| \leq \|r\|_\infty$. Wir fixieren nun ein j zwischen 1 und n und wählen $h = (0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0) = h_j e_j$. Für hinreichend kleine h_j liegen diese Vektoren in W , und (10.14) reduziert sich auf

$$f_i(x + h_j e_j) = f_i(x) + a_{ij}h_j + r_i(h).$$

Hieraus folgt

$$\frac{f_i(x + h_j e_j) - f_i(x)}{h_j} = a_{ij} + \frac{r_i(h)}{h_j} \quad \text{für } h_j \neq 0.$$

Wegen $|h_j| = \|h\|$ können wir $h_j \rightarrow 0$ streben lassen und erhalten

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{f_i(x + h_j e_j) - f_i(x)}{h_j} = a_{ij}. \quad \blacksquare$$

Satz 10.10 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ differenzierbar. Dann ist f in x stetig.

Beweis. Da lineare Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m stetig sind (Satz 10.4) und $0 \in \mathbb{R}^n$ in $0 \in \mathbb{R}^m$ überführen, geht die rechte Seite von (10.12) für $h \rightarrow 0$ gegen $f(x)$. Also existiert $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$ und ist gleich $f(x)$. \blacksquare

Satz 10.11 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f in x differenzierbar.

Beweis. Es genügt, diese Aussage für jede Komponente von f zu zeigen, d.h. wir nehmen $m = 1$ an. Für $h = (h_1, \dots, h_n)$ nahe bei 0 definieren wir

$$x^{(0)} := x \quad \text{und} \quad x^{(i)} := x + \sum_{j=1}^i h_j e_j \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Insbesondere ist $x^{(n)} = x + h$. Da sich $x^{(i)}$ und $x^{(i-1)}$ nur in der i . Komponente unterscheiden, gibt es nach dem Mittelwertsatz für Funktionen *einer* Veränderlichen für jedes $i = 1, \dots, n$ ein $t_i \in [0, 1]$ so, dass

$$f(x^{(i)}) - f(x^{(i-1)}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(i-1)} + t_i h_i e_i) \cdot h_i.$$

Aufsummieren liefert

$$f(x + h) - f(x) = f(x^{(n)}) - f(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i + r(h)$$

(Teleskopsumme) mit

$$r(h) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(i-1)} + t_i h_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) h_i.$$

Da alle partiellen Ableitungen in x nach Voraussetzung stetig sind, ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(i-1)} + t_i h_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) = 0$$

für jedes $i = 1, \dots, n$. Folglich ist $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$. ■

Wir nennen stetig partiell differenzierbare Funktionen daher auch kurz *stetig differenzierbar*.

Keine der im Schema vor Satz 10.9 angegebenen Implikationen lässt sich umkehren: In Beispiel 2 aus Abschnitt 10.2 ist eine partiell differenzierbare, aber nicht differenzierbare Funktion angegeben. Ein Beispiel für eine differenzierbare, aber nicht stetig differenzierbare Funktion steht in Heuser, Ana II, Pkt. 164, Aufg. 7.

Die aus Kapitel 7 bekannten Differentiationsregeln übertragen sich ohne Änderung auf den allgemeinen Fall.

Satz 10.12 *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ differenzierbar. Dann ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ in x differenzierbar, und es gilt*

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

Die Produkt- und Quotientenregel vermerken wir nur für skalarwertige Funktionen.

Satz 10.13 Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in U$ differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen $fg : U \rightarrow \mathbb{R}$ und (falls $g(x) \neq 0$) $f/g : U \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar, und es ist

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= g(x)f'(x) + f(x)g'(x), \\ (f/g)'(x) &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

Die Beweise dieser beiden Sätze werden wie im Fall $n = 1$ geführt und sind HA.

Satz 10.14 (Kettenregel) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen, und seien $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ Funktionen mit $g(U) \subseteq V$. Ist g in $x_0 \in U$ und f in $g(x_0) \in V$ differenzierbar, so ist die zusammengesetzte Funktion $f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \circ g'(x_0).$$

Das \circ auf der rechten Seite steht für die Verkettung der linearen Abbildungen $g'(x_0)$ und $f'(g(x_0))$. In Matrixschreibweise bedeutet dies gerade das Bilden des Matrixprodukts der $k \times m$ -Matrix $f'(g(x_0))$ mit der $m \times n$ -Matrix $g'(x_0)$.

Beweis. Differenzierbarkeit von g in x_0 bzw. f in $g(x_0)$ bedeutet

$$g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + r(x - x_0), \quad (10.15)$$

$$f(y) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0))(y - g(x_0)) + s(y - g(x_0)), \quad (10.16)$$

wobei

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow g(x_0)} \frac{s(y - g(x_0))}{\|y - g(x_0)\|} = 0.$$

Wir setzen in (10.16) $y = g(x)$ und dann (10.16) in (10.15) ein und erhalten

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + t(x_0, x)$$

mit

$$t(x_0, x) = f'(g(x_0))r(x - x_0) + s(g(x) - g(x_0)).$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\frac{t(x_0, x)}{\|x - x_0\|} = f'(g(x_0)) \frac{r(x - x_0)}{\|x - x_0\|} + \frac{s(g(x) - g(x_0))}{\|x - x_0\|}$$

für $x \rightarrow x_0$ gegen 0 strebt. Für den ersten Summanden ist dies wegen der Stetigkeit der linearen Abbildung $f'(g(x_0))$ und wegen $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/\|h\| = 0$ klar. Für

den zweiten Summanden beachten wir, dass $s(0) = 0$. Für $g(x) = g(x_0)$ ist also $s(g(x) - g(x_0)) = 0$, und für $g(x) \neq g(x_0)$ haben wir

$$\frac{s(g(x) - g(x_0))}{\|x - x_0\|} = \frac{s(g(x) - g(x_0))}{\|g(x) - g(x_0)\|} \frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|}.$$

Wegen der Stetigkeit von g in x_0 und wegen $\lim_{h \rightarrow 0} s(h)/\|h\| = 0$ ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{s(g(x) - g(x_0))}{\|g(x) - g(x_0)\|} = 0.$$

Schließlich folgt aus der Zerlegungsformel für g

$$\frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \frac{\|g'(x_0)(x - x_0) + r(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq \|g'(x_0)\| + \frac{\|r(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|},$$

dass der Quotient $\|g(x) - g(x_0)\|/\|x - x_0\|$ in einer Umgebung von x_0 beschränkt bleibt. ■

Wir sehen uns die Kettenregel für einige Spezialfälle an.

Beispiel 1. Die reellwertigen Funktionen f bzw. x_1, \dots, x_n seien auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bzw. auf dem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert, und die verkettete Funktion $F(t) := f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ soll auf I erklärt sein. Sind alle Funktionen f und x_i auf I differenzierbar, so ist auch F auf I differenzierbar, und

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Genauer: für $t_0 \in I$ ist

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \frac{dx_i}{dt}(t_0).$$

Der Beweis folgt sofort aus der Kettenregel, angewandt auf die äußere Funktion f und die innere Funktion $g(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t))^T : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. ■

Beispiel 2. Die reellwertigen Funktionen f bzw. u_1, \dots, u_n seien auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bzw. der offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ definiert. Wir betrachten die verkettete Funktion

$$F : (x_1, \dots, x_m) \mapsto f(u_1(x_1, \dots, x_m), \dots, u_n(x_1, \dots, x_m))$$

auf V . Ist f auf U differenzierbar und jede Funktion u_i auf V partiell differenzierbar, so ist F auf V partiell differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

Dies folgt sofort aus Beispiel 1. Ist sogar jede der Funktionen u_i differenzierbar, so ist F auf V differenzierbar, und es ist

$$F' = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m} \right) \quad \text{auf } V.$$

Beispiel 3. Sei $x : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist die verkettete Funktion

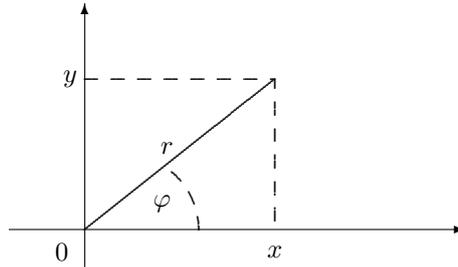
$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \|x(t)\|_2$$

nach Beispiel 1 aus Abschnitt 10.2 und nach Satz 10.14 differenzierbar, und die Kettenregel liefert wie in Beispiel 1

$$f'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i(t)}{\|x(t)\|_2} x'_i(t) = \frac{\langle x(t), x'(t) \rangle}{\|x(t)\|_2^2},$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das übliche Skalarprodukt im \mathbb{R}^n steht. ■

Beispiel 4. Wir sehen uns die Anwendung der Kettenregel bei der Transformation von Differentialausdrücken an. Durch Einführung von Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ wird aus einer Funktion $u = u(x, y)$ eine Funktion $v = v(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.



Wir zeigen, dass dabei beispielsweise der Ausdruck $x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}$ in $\frac{\partial v}{\partial r}$ übergeht. Aus $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ folgt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$. Differenzieren liefert

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos \varphi}{r} = \cos \varphi$$

und analog $\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi$ sowie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-r \sin \varphi}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}$$

und analog $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}$. Demzufolge ist nach Beispiel 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt schließlich

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} &= r \cos \varphi \left(\frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right) - r \sin \varphi \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial r} (r \sin \varphi \cos \varphi - r \sin \varphi \cos \varphi) + \frac{\partial v}{\partial \varphi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Es ist also beispielsweise genau dann $x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, wenn $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0$, d.h. genau dann, wenn v nur von r abhängt, also rotations-symmetrisch ist. ■

10.4 Richtungsableitungen

Definition 10.15 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor der Länge $\|v\|_2 = 1$. Man sagt, dass f eine Ableitung in Richtung des Vektors v besitzt, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

existiert. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sind spezielle Richtungsableitungen in Richtung der Einheitsvektoren $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ mit der 1 an i . Stelle.

Satz 10.16 Seien U, x, f wie in Definition 10.15, und f sei in x differenzierbar. Dann existiert für jeden Einheitsvektor $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ die Ableitung von f im Punkt x in Richtung v , und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = f'(x)v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)v_n. \quad (10.17)$$

Beweis. Für t hinreichend nahe bei 0 ist nach Definition von $f'(x)$

$$\frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \frac{f'(x) \cdot tv + r(tv)}{t} = f'(x)v + \frac{r(tv)}{t}.$$

Aus $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|r(tv)\|}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|r(tv)\|}{\|tv\|} = 0$ folgt die Behauptung. ■

Mit Hilfe des Gradienten $\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ können wir (10.17) auch als

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle (\text{grad} f)(x), v \rangle \quad (10.18)$$

schreiben, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das übliche Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist. Wie im \mathbb{R}^2 führt man den Winkel $\varphi \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ durch

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \varphi$$

ein. Ist also $(\text{grad } f)(x) \neq 0$, so folgt aus (10.18) für den Winkel φ zwischen v und $(\text{grad } f)(x)$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \|(\text{grad } f)(x)\| \cos \varphi.$$

Folgerung 10.17 *Seien U, f, x, v wie in Definition 10.15, und sei $(\text{grad } f)(x) \neq 0$. Dann ist die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ genau dann maximal, wenn $\cos \varphi = 1$ bzw. $\varphi = 0$, d.h. wenn $(\text{grad } f)(x)$ und v die gleiche Richtung haben. Der Gradient zeigt also in die Richtung des stärksten Anstieges von f in x . Diese Tatsache wird bei der numerischen Lösung von Extremalaufgaben benutzt.*

10.5 Der Mittelwertsatz

Am Ende von Abschnitt 7.6 haben wir gesehen, dass der Mittelwertsatz in seiner gewohnten Form für vektorwertige Funktionen nicht mehr gilt. Man hat jedoch für reellwertige Funktionen auf \mathbb{R}^n die folgende Version.

Satz 10.18 (Mittelwertsatz) *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Weiter sei $x + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann existiert ein $\tau \in (0, 1)$ mit*

$$f(x + h) - f(x) = f'(x + \tau h)h.$$

Beweis. Wir betrachten die differenzierbare Funktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(x + th).$$

Nach dem Mittelwertsatz 7.28 für Funktionen einer Veränderlichen gibt es ein $\tau \in (0, 1)$ mit

$$f(x + h) - f(x) = g(1) - g(0) = \frac{dg}{dt}(\tau).$$

Nach der Kettenregel (Beispiel 1 aus 10.3) ist weiter

$$\frac{dg}{dt}(\tau) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \tau h)h_i = f'(x + \tau h)h. \quad \blacksquare$$

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$ ist die folgende Version des Mittelwertsatzes die nächstbeste.

Satz 10.19 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $x + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann ist*

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 f'(x + \tau h)h \, d\tau.$$

Ist insbesondere $\|f'(x + th)\| \leq M$ für alle $t \in [0, 1]$, so folgt

$$\|f(x + h) - f(x)\| \leq M\|h\|.$$

Das Integral über die vektorwertige Funktion $f'(x + \tau h)h$ ist komponentenweise erklärt.

Beweis. Für $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g(t) := f(x + th)$ ist $g'(t) = f'(x + th)h$ und daher

$$f(x + h) - f(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(\tau) d\tau = \int_0^1 f'(x + \tau h)h d\tau,$$

womit die erste Aussage gezeigt ist. Die zweite folgt aus

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 f'(x + \tau h)h d\tau \right\| &\leq \int_0^1 \|f'(x + \tau h)h\| d\tau \\ &\leq \int_0^1 \|f'(x + \tau h)\| \|h\| d\tau \leq \int_0^1 M \|h\| d\tau = M \|h\|. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

10.6 Der Satz von Taylor

Wir lernen nun den Satz von Taylor für Funktionen mehrerer Veränderlicher kennen. Dabei beschränken wir uns auf reellwertige Funktionen. Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein, die helfen, die Übersicht über die zahlreichen Summanden in der Taylorentwicklung zu behalten.

Ein *Multiindex* ist ein n -Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sei $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ seine *Ordnung* und $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$ seine *Fakultät*. Für jede $|\alpha|$ -mal partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

und für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Als Vorbereitung für den Satz von Taylor zeigen wir:

Satz 10.20 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig partiell differenzierbar, und sei $x + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann ist die Funktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(x + th)$$

k -mal stetig differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(\tau) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f)(x + \tau h)h^\alpha \quad (10.19)$$

(die Summation erfolgt über alle Multiindizes der Ordnung k).

Beweis. Wir zeigen zuerst mit vollständiger Induktion, dass

$$\frac{d^k g}{dt^k}(\tau) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n (D_{i_k} \dots D_{i_1} f)(x + \tau h) h_{i_1} \cdot \dots \cdot h_{i_k}. \quad (10.20)$$

Für $k = 1$ haben wir dies bereits im Beweis von Satz 10.18 getan. Aus der Kettenregel folgt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(\tau) &= \frac{df(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)}{dt}(\tau) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n = \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x + \tau h) h_{i_1} \\ &= \sum_{i_1=1}^n (D_{i_1} f)(x + \tau h) h_{i_1}. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass (10.20) für ein $k - 1 \geq 1$ richtig ist, so folgt analog

$$\begin{aligned} \frac{d^k g}{dt^k}(\tau) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n (D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f)(x + th) h_{i_1} \dots h_{i_{k-1}} \right) (\tau) \\ &= \sum_{i_k=1}^n D_{i_k} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n (D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f)(x + \tau h) h_{i_1} \dots h_{i_{k-1}} \right) h_{i_k} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n (D_{i_k} \dots D_{i_1} f)(x + \tau h) h_{i_1} \dots h_{i_k}. \end{aligned}$$

Damit ist (10.20) gezeigt. Wir überlegen uns nun, dass die rechte Seite von (10.20) gleich der rechten Seite von (10.19) ist. Grundidee ist, dass es nach dem Satz von Schwarz auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen nicht ankommt und wir daher die partiellen Ableitungen umsortieren können. Kommt unter den Indizes i_1, \dots, i_k die Zahl $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ genau α_m -mal vor, so ergibt ein Umsortieren und Zusammenfassen gleicher Ableitungen

$$(D_{i_k} \dots D_{i_1} f)(x + \tau h) h_{i_1} \dots h_{i_k} = (D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f)(x + \tau h) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}.$$

Da es genau $\frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!}$ k -Tupel (i_1, \dots, i_k) gibt, in denen die Zahl m genau α_m -mal vorkommt (beachten Sie, dass $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$), gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^k g}{dt^k}(\tau) &= \sum_{i_1, \dots, i_k}^n (D_{i_k} \dots D_{i_1} f)(x + \tau h) h_{i_1} \dots h_{i_k} \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f)(x + \tau h) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f)(x + \tau h) h^\alpha. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Satz 10.21 (Taylor) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar, und $x + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gibt es ein $\tau \in (0, 1)$ so, dass

$$f(x+h) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(x) h^\alpha}_{\text{Taylorpolynom der Ordnung } k} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(D^\alpha f)(x+\tau h)}{\alpha!} h^\alpha}_{\text{Restglied}}.$$

Beispiel. Um das Taylorpolynom der Ordnung 2

$$\begin{aligned} f(0) &+ (D_1 f)(0)h_1 + (D_2 f)(0)h_2 + \frac{1}{2} (D_1^2 f)(0)h_1^2 \\ &+ \frac{1}{2} (D_2^2 f)(0)h_2^2 + (D_1 D_2 f)(0)h_1 h_2, \end{aligned}$$

der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto e^{x_1^2 + \cos x_2}$ im Punkt $x = (0, 0)$ aufzustellen, bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f bis zur 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} (D_1 f)(x_1, x_2) &= 2x_1 e^{x_1^2 + \cos x_2} &\Rightarrow (D_1 f)(0) &= 0, \\ (D_2 f)(x_1, x_2) &= -\sin x_2 e^{x_1^2 + \cos x_2} &\Rightarrow (D_2 f)(0) &= 0, \\ (D_1^2 f)(x_1, x_2) &= (2 + 4x_1^2) e^{x_1^2 + \cos x_2} &\Rightarrow (D_1^2 f)(0) &= 2e, \\ (D_2^2 f)(x_1, x_2) &= (-\cos x_2 + \sin^2 x_2) e^{x_1^2 + \cos x_2} &\Rightarrow (D_2^2 f)(0) &= -e, \\ (D_1 D_2 f)(x_1, x_2) &= -2x_1 \sin x_2 e^{x_1^2 + \cos x_2} &\Rightarrow (D_1 D_2 f)(0) &= 0. \end{aligned}$$

Das gesuchte Taylorpolynom ist somit $(h_1, h_2) \mapsto e + eh_1^2 - \frac{e}{2} h_2^2$. ■

Beweis von Satz 10.21. Die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x + th)$ ist nach Satz 10.20 $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar. Der Satz von Taylor für Funktionen einer Veränderlichen behauptet die Existenz eines $\tau \in (0, 1)$ so, dass

$$f(x+h) = g(1) = \sum_{m=0}^k \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}.$$

Wieder nach Satz 10.20 ist

$$\frac{g^{(m)}(0)}{m!} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{(D^\alpha f)(x)}{\alpha!} h^\alpha \quad \text{sowie} \quad \frac{g^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!} = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(D^\alpha f)(x+\tau h)}{\alpha!} h^\alpha,$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Anmerkung 1. Seien α, β Multiindizes gleicher Länge. Man rechnet leicht nach, dass für $f(x) := x^\beta$ gilt

$$(D^\alpha f)(x) = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} x^{\beta-\alpha} & \text{falls } \beta \geq \alpha, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($\beta - \alpha$ und $\beta \geq \alpha$ ist jeweils komponentenweise zu verstehen). Insbesondere ist

$$(D^\alpha f)(0) = \begin{cases} \beta! & \text{falls } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass wie bei Funktionen einer Veränderlichen alle partiellen Ableitungen in x bis zur k . Ordnung der Funktion f mit denen ihres Taylorpolynoms der Ordnung k übereinstimmen. ■

Anmerkung 2. Man kann den Satz von Taylor auch für vektorwertige Funktionen $f = (f_1, \dots, f_m)^T : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ formulieren und beweisen. Definieren wir für solche Funktionen $D_i f := (D_i f_1, \dots, D_i f_m)^T : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, so sieht das entsprechende Taylorpolynom (welches nun ein Vektor ist) formal genauso aus wie in Satz 10.21. Für $m > 1$ muss jedoch das Restglied modifiziert werden (vgl. Abschnitt 10.5 für den Mittelwertsatz). ■

Wir sehen uns die Polynome $P_m(h) := \sum_{|\alpha|=m} \frac{(D^\alpha f)(x)}{\alpha!} h^\alpha$ für $m = 0, 1, 2$ genauer an.

$m = 0$. Notwendigerweise ist $\alpha = (0, \dots, 0)$ und daher $P_0(h) = f(x)$.

$m = 1$. Die einzigen n -Tupel $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = 1$ sind die "Einheitsvektoren" $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ mit der 1 an der j . Stelle. Wegen $D^{e_j} f = D_j f$, $e_j! = 1$ und $h^{e_j} = h_j$ ist

$$P_1(h) = \sum_{j=1}^n (D_j f)(x) h_j = \langle (\text{grad } f)(x), h \rangle.$$

$m = 2$. Wir haben im Beweis von Satz 10.20 gesehen, dass

$$P_2(h) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{(D^\alpha f)(x)}{\alpha!} h^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (D_i D_j f)(x) h_i h_j.$$

Um dies kompakter zu schreiben, bezeichnen wir für jede zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ die Matrix

$$\left((D_i D_j f)(x) \right)_{i,j=1}^n = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1}^n$$

mit $(\text{Hess } f)(x)$ und nennen sie die *Hesse-Matrix* oder den *Hessian* von f in x . Nach dem Satz von Schwarz ist die Matrix $(\text{Hess } f)(x)$ symmetrisch. Mit der Hesse-Matrix können wir $P_2(h)$ schreiben als

$$P_2(h) = \frac{1}{2} \langle (\text{Hess } f)(x) h, h \rangle.$$

Folgerung 10.22 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dreimal stetig partiell differenzierbar und $x + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$, so ist

$$f(x + h) = c + \langle a, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle + R_2(x, h)$$

mit $c = f(x)$, $a = (\text{grad } f)(x)$, $A = (\text{Hess } f)(x)$ und einem Restglied R_2 wie im Satz 10.21.

10.7 Lokale Extrema

Wir benutzen nun Folgerung 10.22 zur Untersuchung des lokalen Verhaltens von Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$. Für offenes $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $C^k(U)$ die Menge aller k -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in U$ ein *lokales Minimum* (bzw. ein *lokales Maximum*), wenn für alle x aus einer Umgebung $V \subseteq U$ von x_0 gilt

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (\text{bzw.} \quad f(x_0) \geq f(x)).$$

Tritt die Gleichheit nur für $x = x_0$ ein, nennen wir x_0 ein *isoliertes* lokales Minimum (bzw. Maximum).

Satz 10.23 (Notwendige Bedingung) Sei U offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Besitzt f in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum), so ist $(\text{grad } f)(x_0) = 0$.

Beweis. Für $i = 1, \dots, n$ betrachten wir die Funktionen $g_i : t \mapsto f(x_0 + te_i)$. Diese sind auf einem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ definiert und differenzierbar, und sie besitzen in $t = 0$ ein lokales Extremum. Nach Lemma 7.9 ist $g_i'(0) = 0$. Nun ist aber $g_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Also ist $(\text{grad } f)(x_0) = 0$. ■

Das Verschwinden aller partiellen Ableitungen in x_0 ist also eine *notwendige* Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums. Wie bei Funktionen einer Veränderlichen erhält man hinreichende Bedingungen durch Betrachten der zweiten Ableitungen. Wir treffen dazu einige Vorbereitungen.

Definition 10.24 Sei A eine symmetrische ($A = A^T$) reelle $n \times n$ Matrix. A heißt

- (a) positiv definit, wenn $\langle Ax, x \rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- (b) positiv semidefinit, wenn $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- (c) negativ definit (semidefinit), wenn $-A$ positiv definit (semidefinit) ist.
- (d) indefinit, wenn es $x, y \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\langle Ax, x \rangle > 0$ und $\langle Ay, y \rangle < 0$.

Aus der linearen Algebra kennen wir Kriterien für die Definitheit. So gilt:

Satz 10.25 Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$ - Matrix. Dann ist A

- (a) positiv definit \Leftrightarrow alle Eigenwerte von A sind positiv.
- (b) positiv semidefinit \Leftrightarrow alle Eigenwerte von A sind nichtnegativ.
- (c) indefinit \Leftrightarrow A hat sowohl positive als auch negative Eigenwerte.

Satz 10.26 (Hurwitz-Kriterium) Eine symmetrische reelle $n \times n$ - Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ist genau dann positiv definit, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n.$$

Wir formulieren nun hinreichende Kriterien für das Vorliegen von Extremwerten.

Satz 10.27 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U)$, $x_0 \in U$ und $(\text{grad } f)(x_0) = 0$. Dann gilt: Ist $(\text{Hess } f)(x_0)$

- (a) positiv definit, so hat f in x_0 ein isoliertes Minimum,
- (b) negativ definit, so hat f in x_0 ein isoliertes Maximum,
- (c) indefinit, so besitzt f in x_0 kein lokales Extremum.

Ist $(\text{Hess } f)(x_0)$ nur semidefinit, so ist keine Entscheidung möglich.

Beweis. Wir zeigen nur Aussage (a) und nehmen der Einfachheit halber $f \in C^3(U)$ an. Nach Folgerung 10.22 gilt für alle $x_0 + x$ aus einer Umgebung von x_0

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + R(x) \quad (10.21)$$

mit $A := (\text{Hess } f)(x_0)$. Da $S := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| = 1\}$ kompakt ist, nimmt die stetige Funktion

$$S \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \langle Ay, y \rangle$$

auf S ihr Minimum α an. Da $\langle Ay, y \rangle > 0$ für alle $y \in S$, ist insbesondere $\alpha > 0$. Ist nun $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so ist $x/\|x\| \in S$ und folglich

$$\left\langle A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \geq \alpha > 0 \quad \text{bzw.} \quad \langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2. \quad (10.22)$$

Die letztere Abschätzung gilt offenbar auch für $x = 0$ und damit für alle $x \in \mathbb{R}$. (Umgekehrt folgt aus dieser Abschätzung natürlich die positive Definitheit von A ; beide Aussagen sind also äquivalent.)

Weiter: für das Restglied $R(x)$ in (10.21) haben wir wegen $|x_i| \leq \|x\|$ offenbar die Abschätzung

$$|R(x)| = \left| \sum_{|\alpha|=3} \frac{(D^\alpha f)(x_0 + \tau x)}{\alpha!} x^\alpha \right| \leq C \|x\|^3$$

für alle x aus einer hinreichend kleinen Umgebung von 0. Wählen wir diese Umgebung so klein, dass auch $C\|x\| \leq \alpha/4$, so wird

$$|R(x)| \leq C\|x\|^3 = C\|x\| \|x\|^2 \leq \frac{\alpha}{4}\|x\|^2.$$

Hieraus und aus (10.21) und (10.22) folgt schließlich

$$f(x_0 + x) \geq f(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|x\|^2 = f(x_0) + \frac{\alpha}{4}\|x\|^2$$

für alle x aus einer (hinreichend kleinen) Umgebung von 0. Also besitzt f in x_0 ein isoliertes lokales Minimum. ■

Beispiel. Für $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + 10$ ist $(\text{grad } f)(0, 0) = 0$, und die Matrix

$$(\text{Hess } f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit (Hurwitz-Kriterium). Also besitzt f in $(0, 0)$ ein lokales isoliertes Minimum. ■

10.8 Parameterabhängige Integrale

In diesem Abschnitt betrachten wir folgendes Problem: Wird eine Funktion f zweier Veränderlicher bzgl. einer der Veränderlichen integriert, so hängt das Ergebnis von der zweiten Veränderlichen ab. So ist für $f(x, y) = x^y$ mit $x, y > 0$

$$\int_1^2 f(x, y) dx = \int_1^2 x^y dx = \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_1^2 = \frac{2^{y+1} - 1}{y+1}.$$

Die Frage ist, unter welchen Voraussetzungen an f diese Abhängigkeit stetig oder sogar differenzierbar ist.

Satz 10.28 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Die Funktion $f : D \times U \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist auch die Funktion

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$$

stetig. Hat f außerdem stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, so ist auch F stetig partiell differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b f(t, x) dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt.$$

Unter den getroffenen Voraussetzungen dürfen Integration und Differentiation also vertauscht werden.

Beweis. Wir überlegen uns zuerst die Stetigkeit von F . Sei $x \in U$. Da U offen ist, gibt es ein $r > 0$ so, dass $U_{2r}(x) \subseteq U$. Dann liegt aber erst recht die abgeschlossene Kugel $\overline{U_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}$ in U . Weiter: die Menge

$$D \times \overline{U_r(x)} = [a, b] \times \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}$$

ist abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$, also kompakt. Daher ist f auf dieser Menge sogar gleichmäßig stetig (Satz 6.41). Insbesondere gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, r)$ so, dass

$$|f(t, x + h) - f(t, x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

für alle $t \in [a, b]$ und alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < \delta$. Integration liefert

$$|F(x + h) - F(x)| \leq \int_a^b |f(t, x + h) - f(t, x)| dt \leq \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon$$

für alle h mit $\|h\| < \delta$. Also ist F in x stetig.

Für den Beweis der zweiten Aussage sei wieder $x \in U$ beliebig. Wir wählen $r \in \mathbb{R}$ so, dass $x + he_i \in U$ für alle $h \in (-r, r)$. Wir zeigen, dass die Funktion

$$g(t, x, h) := \begin{cases} \frac{f(t, x + he_i) - f(t, x)}{h} & \text{falls } h \neq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) & \text{falls } h = 0 \end{cases}$$

auf der Menge

$$\tilde{U} := \{(t, x, h) \in [a, b] \times U \times (-r, r)\}$$

stetig ist. In allen Punkten $(t, x, h) \in \tilde{U}$ mit $h \neq 0$ ist dies klar. Wir zeigen noch die Stetigkeit in allen Punkten $(t, x, 0) \in \tilde{U}$. Seien (t_n, x_n, h_n) Punkte aus \tilde{U} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, x_n, h_n) = (t, x, 0)$ und $h_n \neq 0$ (für $h_n = 0$ ist die Aussage wieder offensichtlich). Nach dem Mittelwertsatz für Funktionen einer Veränderlichen, angewandt auf die Funktion

$$a : s \mapsto f(t_n, x_n + sh_n e_i),$$

gibt es ein $\xi_n \in [0, 1]$ mit

$$\frac{a(1) - a(0)}{h_n} = \frac{f(t_n, x_n + h_n e_i) - f(t_n, x_n)}{h_n} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_n, x_n + \xi_n h_n e_i).$$

Für $n \rightarrow \infty$ ist $h_n \rightarrow 0$ und folglich auch $\xi_n h_n \rightarrow 0$. Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ist daher

$$\begin{aligned} g(t_n, x_n, h_n) &= \frac{f(t_n, x_n + h_n e_i) - f(t_n, x_n)}{h_n} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_n, x_n + \xi_n h_n e_i) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) = g(t, x, 0). \end{aligned}$$

Somit ist g stetig. Wenden wir die Aussage des ersten Teils des Satzes an, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b f(t, x) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b g(t, x, h) dt \\ &= \int_a^b g(t, x, 0) dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt. \end{aligned}$$

Schließlich hängt diese Funktion – wieder nach dem ersten Teil des Satzes – stetig von x ab. ■

Beispiel. Für $|t| < 1$ berechnen wir das Integral

$$F(t) := \int_0^\pi \ln(1 - 2t \cos x + t^2) dx.$$

Um Satz 10.28 benutzen zu können, wählen wir ein $a \in (|t|, 1)$ und betrachten F auf dem kompakten Intervall $[-a, a]$. (Man beachte, dass $1 - 2t \cos x + t^2 > 0$ für $|t| < 1$.) Die Funktion

$$f(x, t) := \ln(1 - 2t \cos x + t^2)$$

ist nach t stetig partiell differenzierbar und hat die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{2t - 2 \cos x}{1 - 2t \cos x + t^2} \quad \text{auf } [0, \pi] \times [-a, a].$$

Aus der zweiten Aussage von Satz 10.28 folgt

$$F'(t) = \int_0^\pi \frac{2t - 2 \cos x}{1 - 2t \cos x + t^2} dx.$$

Offenbar ist $F'(0) = 0$. Für $t \neq 0$ substituieren wir

$$s := \tan \frac{x}{2} \quad \text{bzw.} \quad x = 2 \arctan s.$$

Dann ist $\frac{dx}{ds} = \frac{2}{1+s^2}$ bzw. $dx = \frac{2ds}{1+s^2}$ sowie

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - s^2}{1 + s^2}.$$

Das gesuchte Integral geht damit über in

$$\int_0^\infty \frac{2t - 2\frac{1-s^2}{1+s^2}}{1 - 2t\frac{1-s^2}{1+s^2} + t^2} \cdot \frac{2}{1+s^2} ds = 4 \int_0^\infty \frac{s^2(1+t) - (1-t)}{(1+t)^2 s^4 + 2(1+t^2)s^2 + (1-t)^2} ds.$$

Partialbruchzerlegung liefert

$$4 \frac{s^2(1+t) - (1-t)}{(1+t)^2 s^4 + 2(1+t^2)s^2 + (1-t)^2} = \frac{2}{t} \left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{t^2-1}{(1+t)^2 s^2 + (1-t)^2} \right).$$

Mit dem bekannten Integral

$$\int \frac{1}{ax^2+c} dx = \frac{1}{\sqrt{ac}} \arctan \sqrt{\frac{a}{c}} x \quad \text{für } ac > 0$$

erhalten wir

$$F'(t) = \frac{2}{t} \left(\arctan s - \arctan\left(\frac{1+t}{1-t}s\right) \right) \Big|_0^\infty = 0$$

(beachten Sie: $\arctan 0 = 0$ und $\lim_{s \rightarrow \infty} \arctan s = \pi/2$). Also ist $F'(t) = 0$ für alle $t \in (-1, 1)$, d.h. F eine konstante Funktion. Wir bestimmen ihren (einzigsten) Wert, indem wir im Ausgangsintegral $t = 0$ setzen:

$$F(t) = F(0) = \int_0^\pi \ln 1 dx = 0. \quad \blacksquare$$

Als weitere Anwendung von Satz 10.28 betrachten wir iterierte Integrale und ihre Berechnung. Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Nach Satz 10.28 ist die Funktion

$$F(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

auf $[c, d]$ stetig und kann folglich integriert werden. Man bezeichnet

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

als *iteriertes Integral*. Der folgende Satz sagt, dass es auf die Reihenfolge der Integrationen nicht ankommt.

Satz 10.29 Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Beweis. Wir erklären $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(y) := \int_a^b \int_c^y f(x, t) dt dx.$$

Dann ist $\varphi(c) = 0$, φ ist nach Satz 10.28 differenzierbar, und es gilt

$$\varphi'(y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \int_c^y f(x, t) dt dx = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Hieraus folgt

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \varphi'(y) dy = \varphi(d) - \varphi(c) = \varphi(d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx,$$

was wir zeigen wollten. ■

Ein analoger Satz gilt für n -fache Integrale einer stetigen Funktion auf einem Quader im \mathbb{R}^n .

Abschließend betrachten wir noch uneigentliche Parameterintegrale der Gestalt

$$\int_a^\infty f(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

Da das Integrationsintervall nicht mehr kompakt ist, lässt sich der Beweis von Satz 10.28 nicht unmittelbar übertragen, und wir benötigen stärkere Voraussetzungen.

Definition 10.30 *Das Integral $\int_a^\infty f(x, y) dx$ heißt auf $[c, d]$ gleichmäßig konvergent, wenn es für jedes $y \in [c, d]$ konvergiert und wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $b_0 \geq a$ existiert, so dass*

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } b \geq b_0 \text{ und alle } y \in [c, d].$$

Man beachte, dass b_0 unabhängig von y ist.

Satz 10.31 (a) *Sei $f : [a, \infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, und das Integral $\int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergiere gleichmäßig auf $[c, d]$. Dann ist die Funktion*

$$\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \int_a^\infty f(x, y) dx \tag{10.23}$$

stetig. Außerdem konvergiert das Integral $\int_a^\infty \int_c^d f(x, y) dy dx$, und es gilt

$$\int_c^d \int_a^\infty f(x, y) dx dy = \int_a^\infty \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

(b) *Sei $f : [a, \infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, beschränkt und nach y partiell differenzierbar, die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ sei auf $[a, \infty) \times [c, d]$ stetig und beschränkt, das Integral $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ konvergiere gleichmäßig, und das Integral $\int_a^\infty f(x, c) dx$ sei konvergent. Dann konvergiert das Integral $\int_a^\infty f(x, y) dx$ für jedes $y \in [c, d]$, die Funktion (10.23) ist differenzierbar, und*

$$\varphi'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Beweis. (a) Für alle $y, y + h \in [c, d]$ und $b \geq a$ ist

$$\begin{aligned}\varphi(y + h) - \varphi(y) &= \int_a^\infty (f(x, y + h) - f(x, y)) dx \\ &= \int_a^b (f(x, y + h) - f(x, y)) dx + \int_b^\infty f(x, y + h) dx - \int_b^\infty f(x, y) dx.\end{aligned}\tag{10.24}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen b so groß, dass der Betrag der letzten beiden Integrale in (10.24) jeweils kleiner als $\varepsilon/3$ wird (gleichmäßige Konvergenz!). Weiter wissen wir aus Satz 10.28, dass $y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$ eine stetige Funktion ist. Daher wird auch das erste Integral in (10.24) kleiner als $\varepsilon/3$, wenn nur h hinreichend klein ist, etwa für $h \leq h_0$. Für alle $h \leq h_0$ ist also

$$|\varphi(y + h) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Für die zweite Aussage von (a) sei wieder $\varepsilon > 0$. Wir wählen $b_0 \geq a$ so, dass

$$\left| \int_a^\infty f(x, y) dx - \int_a^{b_0} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in [c, d] \text{ und } b \geq b_0$$

(gleichmäßige Konvergenz!). Integrieren liefert

$$\left| \int_c^d \int_a^\infty f(x, y) dx dy - \int_c^d \int_a^{b_0} f(x, y) dx dy \right| < \varepsilon(d - c).$$

Mit Satz 10.29 vertauschen wir die Integrationsreihenfolge im 2. Integral und erhalten

$$\left| \int_c^d \int_a^\infty f(x, y) dx dy - \int_a^{b_0} \int_c^d f(x, y) dy dx \right| < \varepsilon(d - c).$$

Da dies für jedes $b \geq b_0$ gilt, folgt die Behauptung.

(b) Nach Teil (a) konvergiert für jedes $t \in [c, d]$ das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty \int_c^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy dx,$$

und es gilt

$$\int_c^t \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_a^\infty \int_c^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy dx.\tag{10.25}$$

Da $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig ist, folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_c^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy = f(x, t) - f(x, c).$$

Integration bzgl. x über $[a, \infty)$ liefert wegen (10.25) (und wegen der Konvergenz von $\int_a^\infty f(x, c) dx$ nach Voraussetzung) für $t \in [c, d]$

$$\varphi(t) = \int_a^\infty f(x, t) dx = \int_a^\infty f(x, c) dx + \int_c^t \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

Nun ist $y \mapsto \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ stetig nach Teil (a). Wieder nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist φ differenzierbar, und

$$\varphi'(t) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dx. \quad \blacksquare$$

Aufgabe. Zeigen Sie mit Hilfe dieses Satzes, dass die Eulersche Gammafunktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x \geq 1$$

stetig und sogar unendlich oft differenzierbar ist. (Für $x \in (0, 1)$ ist der Integrand unbeschränkt und Satz 10.31 nicht mehr unmittelbar anwendbar.)

11 Kurvenintegrale

Wir haben bisher ausschließlich Integrale über Intervallen betrachtet. Ein Ziel dieses Kapitels ist es, Integrale über Kurven zu erklären. Besonders interessiert uns die Frage, wann ein solches Integral nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve abhängt.

11.1 Wege und Kurven

Unter einem *Weg* im \mathbb{R}^n verstehen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Punkte $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ heißen *Anfangs-* bzw. *Endpunkt* des Weges. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg, so heißt sein Wertebereich

$$\Gamma := \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [a, b]\}$$

die zugehörige *Kurve*. Man beachte: ein Weg γ ist eine Abbildung, die zugehörige Kurve eine Punktmenge. Man sagt auch, dass durch γ eine Parametrisierung der Kurve Γ gegeben ist.

Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))^T$ heißt (*stetig*) *differenzierbar*, wenn jede seiner Komponenten $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))^T$$

die *Ableitung* (oder der Geschwindigkeitsvektor) von γ in t , und die Zahl

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2}$$

die *Geschwindigkeit* von γ in t . Falls $\gamma'(t_0) \neq 0$, so beschreibt

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)t$$

die *Tangente* an γ im Punkt t_0 .

Beispiele. (a) Für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist

$$\gamma_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(nt), \sin(nt))^T$$

ein Weg. Alle Wege γ_n beschreiben die gleiche Kurve im \mathbb{R}^2 , nämlich die Einheitskreislinie.

(b) Eine Ellipse um den Ursprung mit den Hauptachsen a, b wird durch den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a \cos t, b \sin t)^T$ parametrisiert.

(c) Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ wird durch $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto a + t(b - a)$ ein Weg definiert. Die zugehörige Kurve ist die Strecke $[a, b]$.

(d) Die *Neilsche Parabel* $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^3)$ ist überall differenzierbar, obwohl die zugehörige Kurve eine Spitze in 0 hat.

(e) Eine Schraubenlinie im \mathbb{R}^3 lässt sich durch den Weg $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, \sin t, t)^T$ beschreiben.

(f) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$. Die zugehörige Kurve ist der Graph der Funktion. ■

Wie das erste dieser Beispiele zeigt, kann ein Weg Teile einer Kurve mehrfach durchlaufen. Will man dies ausschließen, muss man verlangen, dass je zwei Punkten $t_1, t_2 \in [a, b]$ mit $t_1 \neq t_2$ unterschiedliche Punkte $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$ entsprechen. Da wir auch geschlossene Wege betrachten wollen (d.h. solche mit $\gamma(a) = \gamma(b)$), nehmen wir den Anfangs- und Endpunkt von dieser Forderung aus.

Definition 11.1 Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt ein *Jordanweg*, wenn für beliebige Punkte $s, t \in [a, b]$ mit $s < t$ und $\gamma(s) = \gamma(t)$ folgt: $s = a$ und $t = b$. Eine Kurve heißt *Jordankurve*, wenn sie durch einen Jordanweg beschrieben werden kann.

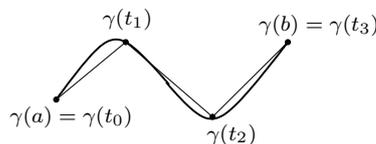
Mit möglicher Ausnahme ihrer Endpunkte sind Jordankurven also *doppelpunktfrei*. Die oben betrachteten Beispiele haben diese Eigenschaft.

Kurven (oder Wege) sind wesentlich kompliziertere Objekte als es unsere Anschauung erwarten lässt. So gibt es Kurven, die ein Quadrat im \mathbb{R}^2 komplett ausfüllen (Peano-Kurve), und Kurven, die in keinem Punkt eine Tangente besitzen (Koch'sche Schneeflocke). Umso bemerkenswerter ist der folgende Satz, der unserer Anschauung perfekt entspricht, dessen Beweis jedoch außerordentlich schwierig ist.

Satz 11.2 (Jordanscher Kurvensatz) Jede geschlossene Jordankurve $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ zerlegt den \mathbb{R}^2 in zwei Gebiete G_1, G_2 , die von ihr berandet werden (d.h. es ist $\mathbb{R}^2 = G_1 \cup \Gamma \cup G_2$ und $\partial G_1 = \partial G_2 = \Gamma$). Genau eines dieser Gebiete – es heißt das Innengebiet von Γ – ist beschränkt.

11.2 Rektifizierbare Wege und Bogenlänge

Wir wollen nun die Länge eines Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren und berechnen. Sei $Z := \{t_0, \dots, t_m\}$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Wir verbinden für jedes i die Punkte $\gamma(t_i)$ und $\gamma(t_{i+1})$ durch eine Strecke und erhalten einen Polygonzug der Länge



$$L(Z, \gamma) := \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|_2.$$

Wir erwarten, dass sich bei Verfeinerung von Z die Länge des Polygonzuges der „Länge von γ annähert“. Da sich bei Verfeinerung von Z die Zahl $L(Z, \gamma)$ niemals verkleinert, definieren wir:

Definition 11.3 Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt rektifizierbar, wenn $\sup L(Z, \gamma)$ endlich ist, wobei das Supremum über alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ genommen wird. In diesem Fall heißt $L(\gamma) := \sup L(Z, \gamma)$ die Weglänge von γ .

Beispiel. Der durch die stetige Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0, \\ t \cos \frac{\pi}{t} & \text{für } t \in (0, 1] \end{cases}$$

definierte Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$ ist nicht rektifizierbar. Für die Punkte $t_n := 1/n$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_{n+1}) - \gamma(t_n)\|_2 &\geq |f(t_{n+1}) - f(t_n)| = \left| \frac{\cos((n+1)\pi)}{n+1} - \frac{\cos(n\pi)}{n} \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

und die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergiert. ■

Für jeden Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und jedes $c \in (a, b)$ sind auch $\gamma_1 := \gamma|_{[a,c]}$ und $\gamma_2 := \gamma|_{[c,b]}$ Wege. Man sieht leicht, dass γ genau dann rektifizierbar ist, wenn γ_1 und γ_2 rektifizierbar sind und dass in diesem Fall $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ gilt.

Schließlich definieren wir die *Weglängenfunktion*

$$s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t = a, \\ L(\gamma|_{[a,t]}) & \text{für } t \in (a, b]. \end{cases}$$

Satz 11.4 Für jeden rektifizierbaren Weg ist seine Weglängenfunktion stetig.

Einen Beweis finden Sie in Heuser, Analysis II, Satz 177.3. Unter stärkeren Voraussetzungen an γ wollen wir nun Weglängen berechnen.

Satz 11.5 Der Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Dann ist γ rektifizierbar, die Weglängenfunktion s von γ ist stetig differenzierbar, und für alle $t \in [a, b]$ gilt $s'(t) = \|\gamma'(t)\|_2$. Die Länge $L(\gamma)$ von γ ist gleich

$$L(\gamma) = \int_a^b s'(t) dt = \int_a^b \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \dots + \gamma'_n(t)^2} dt, \quad (11.1)$$

wobei $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))^T$.

Beweis. Wir benutzen im Beweis Integrale von vektorwertigen Funktionen, die wir komponentenweise erklären.

Sei $Z = \{t_0, \dots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, d.h. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$. Mit der Dreiecksungleichung für Integrale ist

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|_2 = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\|_2 \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\|_2 dt,$$

und Aufsummieren liefert

$$L(Z, \gamma) = \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|_2 \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt.$$

Alle Polygonzuglängen sind also durch eine von Z unabhängige Konstante nach oben beschränkt. Folglich ist γ rektifizierbar, und

$$L(\gamma) = \sup_Z L(Z, \gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt. \quad (11.2)$$

Sei nun $t \in [a, b]$ und $h > 0$ so, dass $t + h \leq b$. Dann ist die Länge der Strecke von $\gamma(t)$ bis $\gamma(t+h)$ nicht größer als die Länge des Weges von $\gamma(t)$ bis $\gamma(t+h)$:

$$\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|_2 \leq s(t+h) - s(t).$$

Wenden wir (11.2) speziell auf den Weg $\gamma|_{[t, t+h]}$ an, folgt

$$\left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\|_2 \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(r)\|_2 dr.$$

Für $h \searrow 0$ strebt die linke Seite dieser Abschätzung gegen $\|\gamma'(t)\|_2$. Die rechte Seite konvergiert nach dem Mittelwertsatz für Integrale gegen den gleichen Wert:

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(r)\|_2 dr = \|\gamma'(\xi_h)\|_2 \quad \text{mit } t \leq \xi_h \leq t+h.$$

Also existiert die rechtsseitige Ableitung von s in t und ist gleich $\|\gamma'(t)\|$. Analog zeigt man die Differenzierbarkeit von links. Aus $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ folgt die Behauptung (11.1). ■

Beispiel 1 (Kreise und Ellipsen). Für den Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (a \cos t, a \sin t) \quad \text{mit } a > 0$$

finden wir

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^{2\pi} a dt = 2\pi a.$$

Die durch γ beschriebene Kurve ist eine Kreislinie vom Radius a . Analog führt die Berechnung der Länge des Weges

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (a \cos t, b \sin t) \quad \text{mit } a > b > 0$$

(dessen zugehörige Kurve eine Ellipse ist) auf das Integral

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt \quad (11.3)$$

mit $\varepsilon := \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ (die sog. *numerische Exzentrizität* der Ellipse). Das Integral in (11.3) ist (für $\varepsilon > 0$) ein sog. *elliptisches Integral*. Es lässt sich nicht mit Hilfe elementarer Funktionen geschlossen darstellen. ■

Beispiel 2 (Funktionsgraphen). Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$ der durch f induzierte Weg, so reduziert sich (11.1) auf

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt. \quad \blacksquare$$

Haben wir in Beispiel 1 mit $L(\gamma) = 2\pi a$ tatsächlich den Kreisumfang (d.h. die Länge einer *Kurve*) berechnet? Was wir berechnet haben, ist die Länge eines *Weges*. Um hieraus zu einem vernünftigen Begriff einer *Kurvenlänge* zu gelangen, müssen wir zunächst dafür sorgen, dass der Weg jeden Teil der Kurve nur einmal durchläuft, d.h. wir betrachten ausschließlich Jordanwege bzw. Jordankurven. Selbst für Jordankurven ist damit die Kurvenlänge noch nicht eindeutig festgelegt. Es könnte ja sein, dass ein- und dieselbe Jordankurve durch verschiedene Jordanwege mit verschiedenen Weglängen parametrisiert werden kann. Der folgende Satz klärt dieses Problem.

Satz 11.6 *Sei γ eine Jordankurve, die eine Darstellung durch einen rektifizierbaren Jordanweg besitzt. Dann sind alle Jordandarstellungen rektifizierbar und haben ein- und dieselbe Weglänge.*

Die gemeinsame Weglänge nennen wir die *Länge einer Kurve* Γ . Erst mit diesem Satz können wir sagen, dass ein Kreis mit Radius a einen Umfang $2\pi a$ besitzt (und dass auch Ellipsen einen Umfang besitzen, auch wenn wir ihn nicht elementar angeben können).

Beweisidee. Wir zeigen die Aussage nur für stetig differenzierbare Wege. Einen Beweis für den allgemeinen Fall finden Sie in Heuser, Analysis II, Satz 178.3.

Zunächst eine Vorbemerkung. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg mit zugehöriger Kurve Γ und ist $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetige Bijektion, so ist $\gamma \circ \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ebenfalls ein Weg, der auf die Kurve Γ führt. Da φ stetig und bijektiv ist, tritt einer der folgenden Fälle ein (Satz 6.42) :

(a) φ wächst streng monoton. Dann heißt φ *orientierungserhaltend*.

(b) φ fällt streng monoton. Dann heißt φ *orientierungsumkehrend*.

Sind insbesondere φ und $\varphi^{(-1)}$ stetig differenzierbar, so folgt aus $\varphi^{(-1)}(\varphi(t)) = t$ mit der Kettenregel $\varphi^{(-1)'(\varphi(t))} \cdot \varphi'(t) = 1$, d.h. es ist $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Es ist klar, dass φ genau dann orientierungserhaltend (bzw. -umkehrend) ist, wenn $\varphi'(t) > 0$ (bzw. < 0) für alle $t \in [\alpha, \beta]$ ist.

Sei nun $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg und $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare und orientierungserhaltende Bijektion. Dann ist

$$\begin{aligned} L(\gamma \circ \varphi) &= \int_{\alpha}^{\beta} \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\|_2 dt = \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t)\|_2 dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(\varphi(t))\|_2 \varphi'(t) dt = \int_a^b \|\gamma'(x)\|_2 dx = L(\gamma). \end{aligned}$$

Ein ähnlicher Beweis erfolgt für orientierungsumkehrendes φ . ■

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann kann – wie wir gesehen haben – die Länge des Weges γ durch $\int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$ berechnet werden. Ist Γ die durch γ definierte Kurve und $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, für die $f \circ \gamma$ Riemann-integrierbar ist, so definiert man allgemeiner das *Integral von f entlang γ* durch

$$\int_{\gamma} f := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 dt \quad (11.4)$$

(für $m > 1$ berechnen wir das Integral auf der rechten Seite komponentenweise). Insbesondere ist also $\int_{\gamma} 1 = L(\gamma)$, und ist $\gamma : [a, b] \rightarrow [a, b]$ die identische Abbildung, so ist

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(t) dt$$

das übliche Riemann-Integral. Man kann – ähnlich wie im Beweis von Satz 11.6 – zeigen, dass $\int_{\gamma} f$ von der Parametrisierung von Γ unabhängig ist.

11.3 Wegintegrale

In die Definition des Kurvenintegrals (11.4) geht nur die Länge des Geschwindigkeitsvektors $\gamma'(t)$ ein, nicht seine Richtung. Dies ist für Anwendungen oft nicht ausreichend (man denke etwa an einen Körper, der sich entlang eines Weges γ in einem Kraftfeld bewegt und bei dem die verrichtete Arbeit berechnet werden soll). In diesem Abschnitt werden wir uns einen angemessenen Begriff eines Kurvenintegrals erarbeiten. Das folgende Beispiel soll die einzuführenden Begriffe motivieren.

Beispiel. Auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sei ein Vektorfeld $F = (F_1, F_2, F_3) :$

$U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben, das wir uns als zeitlich konstantes Kraftfeld denken. Ist $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) : [a, b] \rightarrow U$ ein stetig differenzierbarer Weg, so interpretieren wir das Integral

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^3 F_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt \quad (11.5)$$

als Arbeit, die man aufwenden muss, um sich vom Punkt $\gamma(a)$ zum Punkt $\gamma(b)$ entlang des Weges γ zu bewegen. Dies ist gerechtfertigt, da man für ein kleines Wegstück näherungsweise annehmen kann, dass F konstant ist und

$$\gamma(t) = \gamma(t_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$$

gilt. Dann ist

$$\langle F(\gamma(t_i)), \dot{\gamma}(t_i) \rangle (t_{i+1} - t_i) = \langle F(\gamma(t_i)), \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) \rangle,$$

und dieser Ausdruck ist proportional zur Weglänge, zur Größe des Kraftfeldes und zum Kosinus des Winkels α zwischen Weg- und Kraftvektor:

$$\langle F(\gamma(t_i)), \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) \rangle = \cos \alpha \|F(\gamma(t_i))\| \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$

Steht insbesondere das Kraftfeld senkrecht zur Wegrichtung, so wird keine Arbeit verrichtet. ■

Wir werden uns also mit Integralen der Gestalt (11.5) befassen müssen. Dazu treffen wir folgende Definition.

Definition 11.7 Seien $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg mit zugehöriger Kurve Γ und $f = (f_1, \dots, f_n) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann definieren wir das Wegintegral von f entlang γ durch

$$\int_{\gamma} f \cdot dx := \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt. \quad (11.6)$$

Anstelle von (11.6) findet man auch die Schreibweise

$$\int_{\gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n,$$

die man im Rahmen der Theorie der Pfaffschen Formen verstehen kann (vgl. Barner/Flohr, Analysis II, Abschnitt 17.1). Unter Verwendung von Riemann-Stieltjes-Integralen kann man $\int_{\gamma} f \cdot dx$ für beliebige rektifizierbare Wege γ und stetige Vektorfelder f auf Γ definieren und berechnen (vgl. Heuser, Analysis 2, Abschnitt 180).

Der Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ des Intervalles $[a, b]$ so gibt, dass die Wege

$$\gamma^{(i)} := \gamma|_{[x_i, x_{i+1}]} : [x_i, x_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 0, \dots, m-1$$

stetig differenzierbar sind. Für stückweise stetig differenzierbare Wege γ und stetige Vektorfelder f definieren wir das Wegintegral durch

$$\int_{\gamma} f \cdot dx := \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\gamma^{(i)}} f \cdot dx.$$

Die folgenden Eigenschaften von Wegintegralen sind leicht zu sehen. Dabei ist γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, und f und g sind stetige Vektorfelder.

$$(a) \quad \int_{\gamma} (f + g) \cdot dx = \int_{\gamma} f \cdot dx + \int_{\gamma} g \cdot dx, \quad \int_{\gamma} (cf) \cdot dx = c \int_{\gamma} f \cdot dx.$$

(b) Für jeden Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ bezeichne $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(a + b - t)$ den *entgegengesetzten Weg*. Offenbar beschreiben γ und γ^- die gleiche Kurve, die in unterschiedlicher Richtung durchlaufen wird. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f \cdot dx = - \int_{\gamma^-} f \cdot dx.$$

(c) Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg und $c \in (a, b)$, so sind auch $\gamma_1 := \gamma|_{[a, c]}$ und $\gamma_2 := \gamma|_{[c, b]}$ stückweise stetig differenzierbare Wege, und es gilt

$$\int_{\gamma} f \cdot dx = \int_{\gamma_1} f \cdot dx + \int_{\gamma_2} f \cdot dx.$$

$$(d) \quad \left| \int_{\gamma} f \cdot dx \right| \leq \max_{t \in \Gamma} \|f(t)\|_2 \cdot L(\gamma).$$

Wir untersuchen nun, inwieweit $\int_{\gamma} f \cdot dx$ tatsächlich vom Weg γ oder nur von der durch γ definierten Kurve abhängt.

Satz 11.8 Seien $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg, $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$. Dann ist $\gamma \circ \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg mit der gleichen Bildkurve und den gleichen Anfangs- und Endpunkten wie γ , und es gilt

$$\int_{\gamma} f \cdot dx = \int_{\gamma \circ \varphi} f \cdot dx.$$

Beweis. Mit Ketten- und Substitutionsregel finden wir

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma \circ \varphi} f \cdot dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle f((\gamma \circ \varphi)(t)), (\gamma \circ \varphi)'(t) \rangle dt \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle f((\gamma \circ \varphi)(t)), \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t) \rangle dt \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle f((\gamma \circ \varphi)(t)), \gamma'(\varphi(t)) \rangle \varphi'(t) dt \\
 &= \int_a^b \langle f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds = \int_{\gamma} f \cdot dx. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass für jede stetig differenzierbare Bijektion $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ mit $\varphi(\alpha) = b$ und $\varphi(\beta) = a$ gilt:

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f \cdot dx = - \int_{\gamma} f \cdot dx.$$

Bei Umkehrung der Orientierung ändert das Kurvenintegral also sein Vorzeichen.

Beispiel 1. Ein Punkt P bewege sich auf dem Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (a \cos t, a \sin t, \frac{h}{2\pi} t)$$

von $\gamma(0) = (a, 0, 0)$ nach $\gamma(2\pi) = (a, 0, h)$. Dabei wirke eine Kraft $F(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3) = -\alpha(x, y, z)$ mit $\alpha > 0$. Für die geleistete Arbeit finden wir

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} F \cdot dx &= \int_0^{2\pi} (F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + F_3(\gamma(t))\gamma_3'(t)) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \left((-\alpha a \cos t)(-a \sin t) + (-\alpha a \sin t)(a \cos t) + \left(-\alpha \frac{h}{2\pi} t\right)\left(\frac{h}{2\pi}\right) \right) dt \\
 &= -\alpha \frac{h^2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} t dt = -\frac{\alpha h^2}{(2\pi)^2} \frac{(2\pi)^2}{2} = -\frac{\alpha h^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Bewegt sich P unter Einfluss der gleichen Kraft entlang des Weges

$$\gamma : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (a, 0, t)$$

von $(a, 0, 0)$ nach $(a, 0, h)$, so ergibt sich wegen

$$\int_{\gamma} F \cdot dx = \int_0^h F_3(\gamma(t))\gamma_3'(t) dt = \int_0^h (-\alpha t) dt = -\frac{\alpha h^2}{2}$$

die gleiche geleistete Arbeit. ■

Dieses Resultat ist kein Zufall. Verantwortlich für die beobachtete Wegunabhängigkeit des Integrals ist eine spezielle Eigenschaft der Funktion F .

Definition 11.9 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Gradientenfeld (oder vollständiges Differential), wenn es eine differenzierbare Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = (\text{grad } \varphi)(x) \quad \text{für alle } x \in U. \quad (11.7)$$

Die Funktion φ heißt eine Stammfunktion von f (und in der Physik heißt $-\varphi$ ein Potential von f).

Beispiel 2. Die Funktion $f(x, y, z) = -\alpha(x, y, z)$ aus Beispiel 1 ist ein Gradientenfeld, da z.B. für $\varphi(x, y, z) = -\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ die Beziehung (11.7) gilt. Physikalisch interessanter ist folgendes Beispiel. Ist eine Masse m im Nullpunkt eines Koordinatensystems konzentriert, so übt sie auf einen Punkt mit der Masse 1, der sich in $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ befindet, eine Kraft f der Stärke

$$\|f\| = G \frac{m}{\|(x, y, z)\|_2^2} = \frac{Gm}{x^2 + y^2 + z^2}$$

aus (Newtonsches Gravitationsgesetz). Diese Kraft weist zum Nullpunkt, hat also die Richtung $\frac{-(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|_2}$. Daher ist

$$f(x, y, z) = -\frac{Gm}{\|(x, y, z)\|_2^3} (x, y, z) = -\frac{Gm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z).$$

Auch diese Funktion ist ein Gradientenfeld; für die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{Gm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ist nämlich $\text{grad } \varphi = f$. ■

Satz 11.10 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Sind $a, b \in U$ und ist γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg mit Anfangspunkt a und Endpunkt b , der komplett in U verläuft, so ist

$$\int_{\gamma} \text{grad } F \cdot dx = F(b) - F(a). \quad (11.8)$$

Das Wegintegral über ein stetiges Gradientenfeld längs eines stückweise glatten Weges hängt also nur von Anfangs- und Endpunkt, nicht vom konkreten Verlauf des Weges ab. Man kann Satz 11.10 als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung betrachten.

Beweis. Sei zunächst γ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_{\gamma} (\text{grad } F)(x) \cdot dx = \int_{\alpha}^{\beta} \langle (\text{grad } F)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Nach der Kettenregel ist $\langle (\text{grad } F)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ gerade die Ableitung der Funktion $\phi(t) := F(\gamma(t)) = (F \circ \gamma)(t)$. Wir erhalten daher mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_{\gamma} (\text{grad } F)(x) \cdot dx = \int_{\alpha}^{\beta} \phi'(t) dt = \phi(\beta) - \phi(\alpha).$$

Schließlich ist $\phi(\beta) - \phi(\alpha) = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = F(b) - F(a)$. Der allgemeine Fall eines stückweise stetig differenzierbaren Weges ergibt sich durch Zusammensetzen der einzelnen Integrale. ■

Ist γ ein geschlossener Weg (d.h. ist $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$) so erhalten wir insbesondere

$$\int_{\gamma} \text{grad } F \cdot dx = 0.$$

Beispiel 3. Auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachten wir das Vektorfeld

$$f(x, y) := \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

und den geschlossenen Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Wegen $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ ist

$$\int_{\gamma} f \cdot dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t} (\cos t) \right) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Die stetige Funktion f ist also kein Gradientenfeld, da das Integral über die geschlossene Kurve γ nicht verschwindet. Dies ist ein wichtiger Unterschied zu Funktionen einer Veränderlichen. Im \mathbb{R}^1 besitzt *jede* auf einem Intervall stetige Funktion eine Stammfunktion. ■

11.4 Ergänzungen zu zusammenhängenden Mengen

Dem in Abschnitt 6.8 entwickelten Zusammenhangsbegriff stellen wir einen zweiten gegenüber.

Definition 11.11 *Wir nennen einen metrischer Raum (X, d) wegzusammenhängend, wenn es für je zwei Punkte $x, y \in X$ einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ gibt.*

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten x, y auch deren Verbindungsstrecke $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$ enthält, und U heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $z \in U$ so gibt, dass $[z, x] \subseteq U$ für jedes $x \in U$. Der Punkt z heißt dann ein *Zentrum* von U . Offenbar sind konvexe Mengen sternförmig, und jeder ihrer Punkte ist ein Zentrum. Sternförmige und insbesondere konvexe Mengen sind wegzusammenhängend.

Satz 11.12 *Wegzusammenhängende metrische Räume sind zusammenhängend.*

Beweis. Sei (X, d) ein wegzusammenhängender metrischer Raum, und seien U_1, U_2 nichtleere offene Teilmengen von X mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = X$. Dann gibt es Punkte $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ und einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a) = u_1$ und $\gamma(b) = u_2$. Sei Γ die durch γ definierte Kurve. Nach Satz 6.48 ist Γ zusammenhängend. Andererseits gilt

$$U_1 \cap \Gamma \neq \emptyset, \quad U_2 \cap \Gamma \neq \emptyset, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset \quad \text{und} \quad \Gamma \subseteq U_1 \cup U_2,$$

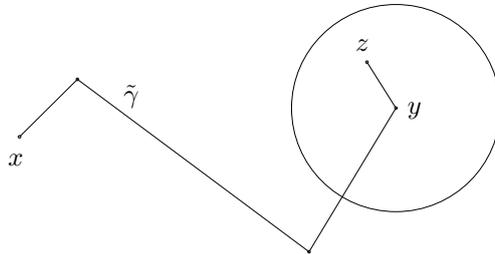
ein Widerspruch. ■

Die Umkehrung von Satz 11.12 gilt im Allgemeinen nicht. Die Menge

$$\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1], y = \sin \frac{1}{x}\}$$

ist zwar zusammenhängend, jedoch nicht wegzusammenhängend (HA). Die Umkehrung von Satz 11.12 gilt aber für offene Mengen. Eine zusammenhängende offene Menge heißt ein *Gebiet*.

Satz 11.13 *Gebiete im \mathbb{R}^n sind wegzusammenhängend. Genauer: ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sind $x, y \in U$, dann gibt es einen Polygonzug $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.*



Beweis. Sei $x \in U$. Wir bezeichnen mit U_x die Menge aller Punkte $y \in U$, für die es einen Polygonzug $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt. Wir zeigen zuerst, dass U_x offen ist.

Sei $y \in U_x$. Da U offen ist, gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon(y)$, die ganz in U liegt. Sei $z \in U_\varepsilon(y)$, und sei $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$ ein Polygonzug mit $\tilde{\gamma}(0) = x$ und $\tilde{\gamma}(1) = y$. Wir verlängern $\tilde{\gamma}$ um die Strecke $[y, z]$:

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow U, \quad t \mapsto \begin{cases} \tilde{\gamma}(2t) & \text{für } t \in [0, 1/2], \\ y + (2t - 1)(z - y) & \text{für } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Dann ist γ ein Polygonzug in U , der x mit z verbindet. Da $z \in U_\varepsilon(y)$ beliebig war, folgt $U_\varepsilon(y) \subseteq U_x$, d.h. U_x ist offen.

Wir zeigen nun, dass auch $U \setminus U_x$ offen ist. Ist $y \in U \setminus U_x$, so gibt es wie oben eine Umgebung $U_\varepsilon(y)$, die in U liegt. Läge ein Punkt $z \in U_\varepsilon(y)$ in U_x , so könnten

wir wie oben den Polygonzug von x nach z zu einem Polygonzug von x nach y verlängern, d.h. es wäre $y \in U_x$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $U_\varepsilon(y) \subseteq U \setminus U_x$, d.h. $U \setminus U_x$ ist offen.

Für die offenen Mengen U_x und $U \setminus U_x$ gilt nun

$$U_x \cap (U \setminus U_x) = \emptyset \quad \text{und} \quad U_x \cup (U \setminus U_x) = U.$$

Da U zusammenhängend ist, muss eine der Mengen U_x und $U \setminus U_x$ leer sein. Wegen $x \in U_x$ ist $U \setminus U_x$ leer. Somit ist $U_x = U$. ■

11.5 Stammfunktionen und Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen

Lemma 11.14 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, und $c \in \mathbb{R}$.

(a) Ist F Stammfunktion von f , so ist auch $F + c$ Stammfunktion von f .

(b) Ist U ein Gebiet, und sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f , so ist $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion.

Beweis. Aussage (a) ist klar, da F und $F + c$ den gleichen Gradienten besitzen. Zu (b): Da F_1 und F_2 Stammfunktionen von f sind, gilt $\text{grad}(F_1 - F_2) = 0$. Wir zeigen: Ist $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf dem Gebiet U und ist $\text{grad} F = 0$, so ist F eine Konstante. Seien $x, y \in U$. Nach Satz 11.13 gibt es einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Aus Satz 11.10 wissen wir, dass

$$F(y) - F(x) = \int_{\gamma} \text{grad} F \cdot dx = \int_{\gamma} 0 \cdot dx = 0.$$

Also ist F konstant. ■

Am Ende von Abschnitt 11.3 haben wir gesehen, dass nicht jedes stetige Vektorfeld eine Stammfunktion besitzt. Der folgende Satz stellt einen Zusammenhang her zwischen der Existenz einer Stammfunktion und der Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen.

Satz 11.15 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und f ein stetiges Vektorfeld auf U . Dann besitzt f genau dann eine Stammfunktion auf U , wenn für jeden geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in U das Integral $\int_{\gamma} f \cdot dx$ verschwindet.

Beweis. Die Implikation \Rightarrow haben wir uns bereits im Anschluss an Satz 11.10 überlegt. Nehmen wir nun also an, dass $\int_{\gamma} f \cdot dx = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U .

Wir fixieren einen Punkt $x_0 \in U$. Für jeden Punkt $y \in U$ gibt es nach Satz 11.13 einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(0) = x_0$

und $\gamma(1) = y$. Wir möchten definieren

$$F(y) := \int_{\gamma} f \cdot dx. \quad (11.9)$$

Um auf diese Weise eine Funktion F festlegen zu können, müssen wir uns vergewissern, dass $\int_{\gamma} f \cdot dx$ nicht von der Wahl des Weges von x_0 nach y abhängt. Sei also $\eta : [0, 1] \rightarrow U$ ein weiterer stückweise stetig differenzierbarer Weg mit $\eta(0) = x_0$ und $\eta(1) = y$. Wir betrachten den Weg

$$\alpha : [0, 2] \rightarrow U, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in [0, 1], \\ \eta(2-t) & \text{für } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Offenbar ist α wieder stückweise stetig differenzierbar, und es gilt $\alpha(0) = \alpha(2) = x_0$, d.h. der Weg α ist geschlossen. Nach Voraussetzung ist daher

$$0 = \int_{\alpha} f \cdot dx = \int_{\alpha|_{[0,1]}} f \cdot dx + \int_{\alpha|_{[1,2]}} f \cdot dx = \int_{\gamma} f \cdot dx - \int_{\eta} f \cdot dx,$$

da im zweiten Teilstück von α der Weg η rückwärts durchlaufen wird. Somit ist tatsächlich $\int_{\gamma} f \cdot dx$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ abhängig. Wir schreiben daher auch $\int_{x_0}^y f \cdot dx$ statt $\int_{\gamma} f \cdot dx$.

Wir zeigen nun, dass F eine Stammfunktion von f ist. Ist $f = (f_1, \dots, f_n)$, so haben wir zu zeigen, dass F stetig differenzierbar in jedem Punkt $y \in U$ ist und dass $\frac{\partial F}{\partial x_i}(y) = f_i(y)$ für alle i ist.

Sei $y \in U$. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so liegt mit y auch die komplette Umgebung $U_{\varepsilon}(y)$ in U . Für alle $z \in U_{\varepsilon}(y)$ ist dann

$$F(z) = \int_{x_0}^z f \cdot dx = \int_{x_0}^y f \cdot dx + \int_y^z f \cdot dx = F(y) + \int_y^z f \cdot dx.$$

Wir betrachten den Weg

$$\gamma_z : [0, 1] \rightarrow U_{\varepsilon}(y), \quad t \mapsto y + t(z - y),$$

der y mit z verbindet. Mit $z - y := h$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F(y+h) - F(y) &= \int_y^{y+h} f \cdot dx = \int_{\gamma_z} f \cdot dx \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(y+th) h_i dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 f_i(y+th) dt \cdot h_i. \end{aligned}$$

Wählen wir speziell h so, dass alle Komponenten bis auf die i -te verschwinden, so folgt

$$F(y + h_i e_i) - F(y) = \int_0^1 f_i(y + th_i e_i) dt \cdot h_i,$$

woraus wir mit dem ersten Teil von Satz 10.28 erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_i}(y) &= \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{F(y + h_i e_i) - F(y)}{h_i} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \int_0^1 f_i(y + th_i e_i) dt \\ &= \int_0^1 \lim_{h_i \rightarrow 0} f_i(y + th_i e_i) dt = \int_0^1 f_i(y) dt = f_i(y).\end{aligned}\quad \blacksquare$$

Die Bedingung, dass die Integrale über alle geschlossenen Wege verschwinden, ist oft schwierig zu überprüfen. Unser nächstes Ziel ist ein Kriterium, bei dem nicht Integrations-, sondern Differentiationseigenschaften eine Rolle spielen und welches meist leichter zu überprüfen ist.

Definition 11.16 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_n)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt f geschlossen, wenn

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Besitzt das stetig differenzierbare Vektorfeld f eine Stammfunktion F , so ist f geschlossen. Aus $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ folgt nämlich mit dem Satz von Schwarz (Satz 10.7)

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Die Geschlossenheit von f ist also *notwendig* für die Existenz einer Stammfunktion; sie ist im Allgemeinen jedoch nicht *hinreichend*, wie das Beispiel

$$f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{auf } U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad (11.10)$$

zeigt. Für $f_1(x, y) := -\frac{y}{x^2 + y^2}$ und $f_2(x, y) := \frac{x}{x^2 + y^2}$ ist nämlich

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Das Vektorfeld f ist also geschlossen, besitzt aber – wie wir bereits wissen – keine Stammfunktion. ■

Ob die Geschlossenheit eines Vektorfeldes hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion ist, hängt von den Eigenschaften des Gebietes U ab. Wir sehen uns eine einfache Version eines solchen Resultates an.

Satz 11.17 Ist das Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig, so besitzt jedes geschlossene Vektorfeld f auf U eine Stammfunktion.

Beweis. Wir können o.E.d.A. annehmen, dass 0 zu U gehört und ein Zentrum von U ist (andernfalls verschieben wir U geeignet). Für $x \in U$ sei

$$\gamma_x : [0, 1] \rightarrow U, \quad t \mapsto tx$$

und

$$F(x) := \int_{\gamma_x} f \cdot dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(tx) x_i dt.$$

(Man beachte, dass wegen der Sternförmigkeit von U der Weg γ_x komplett in U verläuft). Mit dem zweiten Teil von Satz 10.28 erhalten wir, dass F differenzierbar ist und dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} (f_i(tx) x_i) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f_i(tx)}{\partial x_j} t x_i dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 f_i(tx) \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j(tx)}{\partial x_i} t x_i dt + \int_0^1 f_j(tx) dt. \end{aligned}$$

Für $L(t) := f_j(tx)$ finden wir mit der Kettenregel

$$L'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j(tx)}{\partial x_i} x_i,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 L'(t) t dt + \int_0^1 L(t) dt = \int_0^1 (tL(t))' dt \\ &= tL(t)|_0^1 = L(1) = f_j(x). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Wir kommen noch einmal auf Beispiel (11.10) zurück. Natürlich ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht sternförmig. Nehmen wir allerdings aus \mathbb{R}^2 die negative Halbachse $(-\infty, 0]$ heraus, so ist $\mathbb{R} \setminus (-\infty, 0]$ sternförmig, und f besitzt auf diesem kleineren Gebiet nach Satz 11.17 eine Stammfunktion.

Das folgende Vorgehen zum Auffinden einer Stammfunktion eines geschlossenen Vektorfeldes $f = (f_1, f_2)$ auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ist praktikabel. Wir machen den Ansatz

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f_2$$

mit einer Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ (von der wir ohne weitere Voraussetzungen nicht wissen, ob sie existiert). Aus $\frac{\partial F}{\partial x} = f_1$ folgt

$$F(x, y) = \int f_1(x, y) dx + g(y)$$

mit einer von y abhängenden Integrationskonstanten g . Wir leiten dies formal nach y ab und erhalten mit $\frac{\partial F}{\partial y} = f_2$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int f_1(x, y) dx + g'(y) = f_2(x, y),$$

also

$$g'(y) = f_2(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int f_1(x, y) dx.$$

Durch Integration bezüglich y gewinnt man g und damit F .

Beispiel. Für $x \neq 0$, $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ und $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$f_1(x, y) = -\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2, \quad f_2(x, y) = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2.$$

Dann ist $f = (f_1, f_2)$ geschlossen, und der Ansatz $\frac{\partial F}{\partial x} = f_1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = f_2$ liefert

$$F(x, y) = \int \left(-\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2 \right) dx = \frac{\tan y}{x} + x^2 y + \frac{x^3}{3} + g(y).$$

Wir differenzieren nach y und setzen die Ableitung gleich f_2 :

$$\frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + g'(y) \stackrel{!}{=} f_2(x, y) = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2.$$

Dann folgt $g(y) = \frac{y^3}{3} + C$ und $F(x, y) = \frac{\tan y}{x} + x^2 y + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + C$. ■

12 Gleichungen und Mannigfaltigkeiten

Wir wenden uns nun einer der typischen Aufgaben der Mathematik zu, dem Lösen von Gleichungen. Sind X, Y geeignete Mengen und ist $F : X \rightarrow Y$ eine entsprechende Abbildung, so sind in Verbindung mit der Gleichung $F(x) = y$ folgende Fragen von Interesse:

- Für welche $y \in Y$ hat die Gleichung $F(x) = y$ eine Lösung $x \in X$?
- Wenn die Gleichung $F(x) = y$ für ein $y \in Y$ lösbar ist, wieviele Lösungen hat sie dann?
- Falls die Gleichung $F(x) = y$ für alle $y \in Y$ eindeutig lösbar ist, wie hängen dann die Lösungen x von den rechten Seiten y ab? Ist diese Abhängigkeit stetig oder gar differenzierbar?
- Falls die Gleichung $F(x) = y$ mehrere Lösungen besitzt, wie kann man dann die Menge aller Lösungen geeignet darstellen?
- Wie findet man Lösungen?

Die erste Frage ist eng mit der Surjektivität von F verknüpft und die zweite mit der Injektivität. Ist F surjektiv und injektiv (also bijektiv), so besitzt F eine Umkehrabbildung F^{-1} , und der dritte Punkt fragt nach der Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit von F^{-1} . Schließlich wird uns die vierte Frage auf den Begriff einer Mannigfaltigkeit führen.

Wir wollen insbesondere sehen, inwieweit die uns zugänglichen Mittel der Analysis bei der Beantwortung dieser Fragen helfen. Wir betrachten deshalb meist differenzierbare Funktionen $F : U \rightarrow V$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen sind. Beginnen werden wir aber mit einem Resultat, das nicht auf diesen Rahmen beschränkt ist.

12.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ heißt *Kontraktion*, wenn es eine Zahl $L < 1$ (die *Kontraktionskonstante*) so gibt, dass

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Kontraktionen sind Lipschitzstetig und insbesondere stetig.

Ein Punkt $x \in X$ heißt *Fixpunkt* von $f : X \rightarrow X$, wenn $f(x) = x$. Für die identische Abbildung von X ist jeder Punkt ein Fixpunkt.

Satz 12.1 (Banachscher Fixpunktsatz) *Sei (X, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ eine Kontraktion mit einer Kontraktionskonstanten L . Dann gilt*

- (a) die Abbildung f besitzt genau einen Fixpunkt x^* .
 (b) für jeden Startvektor $x_0 \in X$ konvergiert die für $n \geq 1$ durch $x_n := f(x_{n-1})$ definierte Folge (x_n) gegen x^* .
 (c) $d(x_n, x^*) \leq \frac{1}{1-L} d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$.

Beweis. Sei $x_0 \in X$ beliebig gewählt und $x_n := f(x_{n-1})$ für $n \geq 1$. Wir zeigen, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Für $m \geq 1$ haben wir

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq (1 + L + \dots + L^{m-1}) d(x_n, x_{n+1}) \\ &= \frac{1 - L^m}{1 - L} d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{1 - L} d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \frac{L^n}{1 - L} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq L < 1$ wird die rechte Seite kleiner als jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$, wenn nur n hinreichend groß ist. Also ist (x_n) eine Cauchyfolge.

Da X vollständig ist, konvergiert (x_n) gegen ein $x^* \in X$. Aus der Stetigkeit von f folgt schließlich

$$f(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*;$$

x^* ist also Fixpunkt von f . Die Abbildung f kann keine weiteren Fixpunkte besitzen. Aus $x^* = f(x^*)$ und $y^* = f(y^*)$ folgt nämlich

$$d(x^*, y^*) = d(f(x^*), f(y^*)) \leq L d(x^*, y^*),$$

also $d(x^*, y^*) = 0$. Die in (c) angegebenen Abschätzungen folgen sofort aus

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \frac{1}{1-L} d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1),$$

wenn man $m \rightarrow \infty$ streben lässt. ■

Der Banachsche Fixpunktsatz ist ein wichtiges Werkzeug der Analysis, das Ihnen auch in anderen Situationen wiederbegegnen wird (z.B. in der Vorlesung über Differentialgleichungen im 3. Semester). In der numerischen Mathematik ist der Banachsche Fixpunktsatz ein Instrument, um die Konvergenz von Näherungsverfahren zu beweisen und Lösungen von Fixpunktgleichungen näherungsweise zu berechnen.

Beispiel 1. Sei X das Stadtgebiet von Darmstadt (das wir als abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^2 auffassen und das deshalb vollständig ist). Irgendwo in Darmstadt breiten wir einen Stadtplan von Darmstadt aus und erklären eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ wie folgt. Jedem Punkt $x \in X$ wird derjenige Punkt $f(x) \in X$ zugeordnet, über dem das Bild von x auf dem Stadtplan liegt. Ist $1 : n$ der Maßstab des

Stadtplans, so ist f eine Kontraktion mit der Kontraktionskonstanten $L = 1/n$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es genau einen Punkt x in Darmstadt mit $f(x) = x$, d.h. x liegt genau unter demjenigen Punkt des Stadtplanes, der x abbildet.

Beispiel 2. Sei $A \in L(\mathbb{R}^n)$ eine lineare Abbildung mit $\|A\| < 1$. Wir wollen die lineare Gleichung

$$(I - A)x = y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (12.1)$$

lösen. Dazu betrachten wir die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $z \mapsto Az + y$, mit der wir (12.1) als Fixpunktgleichung $f(x) = x$ schreiben können. Wegen

$$\|f(z_1) - f(z_2)\| = \|(Az_1 + y) - (Az_2 + y)\| = \|A(z_1 - z_2)\| \leq \|A\| \|z_1 - z_2\|$$

ist f eine Kontraktion mit der Kontraktionskonstanten $\|A\| < 1$. Nach Satz 12.1 hat f genau einen Fixpunkt, d.h. die Gleichung (12.1) hat genau eine Lösung in \mathbb{R}^n . Diese können wir näherungsweise berechnen. Wir wählen z.B. $x_0 = y$ als Startvektor. Dann ist $x_1 = f(x_0) = Ay + y$,

$$x_2 = f(x_1) = Ax_1 + y = A(Ay + y) + y = A^2y + Ay + y$$

und allgemein, mit $A^0 := I$,

$$x_n = \sum_{k=0}^n A^k y \quad \text{für } n \geq 1.$$

Folglich ist

$$(I - A)^{-1}y = x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} A^k y.$$

Man kann auch leicht direkt beweisen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ in $L(\mathbb{R}^n)$ konvergiert (die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$ ist eine konvergente Majorante) und dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1} \quad \text{für } \|A\| < 1.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ heißt die *Neumann-Reihe* von A . ■

12.2 Der Satz über die Umkehrfunktion

Wir sehen uns nun an, wie man den Satz über die Umkehrfunktion auf Funktionen mehrerer Veränderlicher verallgemeinert.

Definition 12.2 Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Eine Bijektion $f : U \rightarrow V$ heißt Diffeomorphismus, wenn sowohl f als auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \rightarrow U$ stetig differenzierbar sind.

Lemma 12.3 Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow V$ eine stetig differenzierbare Funktion mit differenzierbarer Umkehrfunktion. Dann gilt:

(a) für jedes $x \in U$ ist $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ invertierbar, und

$$(f'(x))^{-1} = (f^{-1})'(f(x)), \quad (12.2)$$

(b) $m = n$,

(c) $f : U \rightarrow V$ ist ein Diffeomorphismus.

Beweis. Sei $x \in U$ und $y = f(x)$. Mit der Kettenregel folgt aus $f^{-1} \circ f = id_U$ und $f \circ f^{-1} = id_V$, dass

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}^n}(x) &= (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x), \\ id_{\mathbb{R}^m}(y) &= (f \circ f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x)). \end{aligned}$$

Also ist $f'(x)$ invertierbar, und es gilt (12.2). Aus der Invertierbarkeit von $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ folgt weiter $m = n$ (lineare Algebra). Schließlich ist

$$(f^{-1})' : V \rightarrow L(\mathbb{R}^n), \quad y \mapsto (f'(f^{-1}(y)))^{-1}. \quad (12.3)$$

Für (c) müssen wir noch die Stetigkeit dieser Funktion zeigen. Nach Voraussetzung sind f^{-1} und f' stetig. Damit ist auch ihre Verkettung $f' \circ f^{-1}$ stetig, und wir müssen noch die Stetigkeit der Abbildung

$$GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL(\mathbb{R}^n), \quad A \mapsto A^{-1} \quad (12.4)$$

zeigen, wobei $GL(\mathbb{R}^n)$ für die Gruppe der invertierbaren Abbildungen aus $L(\mathbb{R}^n)$ steht. Dies folgt leicht aus der expliziten Formel zur Berechnung der inversen Matrix von A , wonach $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$ mit

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^n \quad \text{und} \quad \tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}.$$

Hier ist A_{ji} diejenige Untermatrix von A , die durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte von A entsteht. Es ist klar, dass jeder Eintrag von \tilde{A} (und damit \tilde{A} selbst) sowie $\det A$ stetig von (den Einträgen von) A abhängen. Also ist die Abbildung (12.4) stetig. Damit ist die Stetigkeit von $(f^{-1})'$ in (12.3) gezeigt. Die Funktion f^{-1} ist also *stetig* differenzierbar, d.h. f ist ein Diffeomorphismus. ■

Anmerkung. Sei $C^k(U, \mathbb{R}^m)$ die Menge der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Verlangt man in Lemma 12.3 zusätzlich $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$, so kann man $f^{-1} \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$ zeigen. Dies geschieht wieder mit Hilfe der Darstellung (12.3). Man kann sich überlegen, dass die Abbildung (12.4) sogar beliebig oft differenzierbar ist. ■

Beispiel. Dieses Beispiel soll noch einmal auf Unterschiede zwischen Funktionen

einer bzw. mehrerer Veränderlicher aufmerksam machen. Sei $f : U \rightarrow V$ eine stetig differenzierbare und surjektive Funktion, deren Ableitung $f'(x)$ in jedem Punkt $x \in U$ invertierbar ist. Sind U, V offene Intervalle in \mathbb{R} , so folgt hieraus, dass f bijektiv ist. Die Invertierbarkeit von $f'(x)$ bedeutet im Eindimensionalen nämlich gerade, dass $f'(x) \neq 0$ ist. Ist dies für alle $x \in U$ der Fall, so ist f streng monoton, also injektiv. Im Mehrdimensionalen trifft dies jedoch nicht mehr zu, wie folgendes Beispiel zeigt. Sei

$$f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Die Jacobimatrix

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

hat die Determinante $r \neq 0$ und ist folglich immer invertierbar. Die Funktion f ist offenbar auch surjektiv, wegen $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$ jedoch nicht injektiv. ■

Die Funktion f aus diesem Beispiel besitzt jedoch eine „lokale Umkehrfunktion“. Ist etwa $U := (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$, so ist $f|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektiv, und $V := f(U) = \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0]$ ist offen in \mathbb{R}^2 . Man kann also eine Umkehrfunktion $f^{-1} : V \rightarrow U$ definieren. Wir wollen uns nun die Differenzierbarkeitseigenschaften solcher „lokaler Umkehrfunktionen“ ansehen.

Definition 12.4 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt lokal um $x \in U$ invertierbar, wenn es offene Umgebungen $U_1 \subseteq U$ von x und V_1 von $f(x)$ so gibt, dass $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$ ein Diffeomorphismus ist. Die Abbildung $(f|_{U_1})^{-1} : V_1 \rightarrow U_1$ heißt dann eine lokale Umkehrfunktion von f . Schließlich heißt f ein lokaler Diffeomorphismus, wenn f um jeden Punkt $x \in U$ lokal invertierbar ist.

Satz 12.5 (Satz über die Umkehrfunktion) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$, und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Die Funktion f ist genau dann um x_0 lokal invertierbar, wenn $f'(x_0)$ invertierbar ist.

Verlangt man $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, so folgt aus der Anmerkung nach Lemma 12.3, dass die lokale Umkehrfunktion ebenfalls zu C^k gehört.

Beweis. Ist f um x_0 lokal invertierbar, so folgt die Invertierbarkeit von $f'(x_0)$ aus Lemma 12.3. Sei umgekehrt $f'(x_0)$ invertierbar. Wir zeigen, dass dann f um x_0 lokal invertierbar ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir dabei annehmen, dass

$$x_0 = 0, \quad f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(0) = I \tag{12.5}$$

ist. Andernfalls ersetzen wir U durch $\tilde{U} = U - x_0$ und f durch

$$\tilde{f}(x) := (f'(x_0))^{-1} \cdot (f(x_0 + x) - f(x_0)).$$

Hat man dann eine lokale Umkehrfunktion von \tilde{f} um $0 \in \tilde{U}$ gefunden, so ist

$$f^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(f'(x_0)^{-1}(y - f(x_0))) + x_0 \quad (12.6)$$

die lokale Umkehrfunktion von f um x_0 . Aus der Definition von \tilde{f} folgt nämlich

$$x + x_0 = \tilde{f}^{-1}((f'(x_0))^{-1}(f(x_0 + x) - f(x_0))) + x_0,$$

und die Substitution $f(x_0 + x) = y$ liefert (12.6).

Wir zeigen, dass man unter den Voraussetzungen (12.5) die Gleichung $f(x) = y$ für kleine y nach x auflösen kann. Wie möchten dabei den Banachschen Fixpunktsatz benutzen und schreiben $f(x) = y$ als Fixpunktgleichung. Dazu definieren wir

$$g_y : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto y + (x - f(x)).$$

Offenbar ist $f(x) = y$ genau dann, wenn $g_y(x) = x$.

Wir suchen einen geeigneten vollständigen metrischen Raum X , auf dem g_y kontraktiv wirkt. Sei zunächst $y = 0$ und $g := g_0$. Mit f ist auch g stetig differenzierbar. Da $g'(0) = I - I = 0$ ist, gibt es ein $r > 0$ so, dass

$$U_{2r}(0) \subseteq U \quad \text{und} \quad \|g'(x)\| \leq 1/2 \quad \text{für alle } x \text{ mit } \|x\| \leq r.$$

Sei $X := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$. Da X im vollständigen metrischen Raum \mathbb{R}^n abgeschlossen ist, ist X selbst vollständig. Nach Satz 10.19 gilt weiter

$$\|g(x) - g(x')\| \leq \frac{1}{2} \|x - x'\| \quad \text{für alle } x, x' \in X. \quad (12.7)$$

Mit $x' = 0$ folgt hieraus insbesondere $\|g(x)\| = \frac{1}{2} \|x\| \leq r/2$ für $x \in X$.

Sei nun $\|y\| \leq r/2$. Dann ist g_y wegen $\|g_y(x)\| \leq \|g(x)\| + \|y\| \leq r$ für alle $x \in X$ eine Abbildung von X in X , die wegen $g_y(x) - g_y(x') = g(x) - g(x')$ und (12.7) eine Kontraktion mit der Kontraktionskonstanten $1/2$ ist. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es also für jedes y mit $\|y\| \leq r/2$ genau ein x mit $\|x\| \leq r$ so, dass $g_y(x) = x$ bzw. $f(x) = y$.

Sei $U_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r, \|f(x)\| < r/2\}$ und $V_1 := f(U_1)$. Wie wir soeben gesehen haben, ist $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$ bijektiv. Es existiert also die Umkehrabbildung $\varphi := (f|_{U_1})^{-1} : V_1 \rightarrow U_1$. Wir zeigen, dass U_1 und V_1 offen sind und φ stetig ist. Für U_1 ist dies klar (Urbilder offener Mengen bzgl. stetiger Abbildungen sind offen). Für V_1 zeigen wir $V_1 = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < r/2\}$, woraus die Offenheit von V_1 folgt. Die Inklusion \subseteq ist klar. Für die umgekehrte Inklusion sei $\|y\| < r/2$. Dann existiert genau ein x mit $\|x\| \leq r$ und $f(x) = y$. Zu zeigen ist, dass sogar $\|x\| < r$. Für beliebige Punkte $x_1, x_2 \in \overline{U_r(0)}$ ist

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &= \|g(x_1) + f(x_1) - g(x_2) - f(x_2)\| \\ &\leq \|g(x_1) - g(x_2)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| + \|f(x_1) - f(x_2)\|, \end{aligned}$$

also

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|. \quad (12.8)$$

Wir setzen hierin $x_2 = 0$ und $x_1 = x$ mit $f(x) = y$ und $\|y\| < r/2$. Dann folgt $\|x\| \leq 2\|y\| < r$, also $x \in U_1$ und $y \in V_1$. Schreiben wir noch in (12.8) $x_1 = \varphi(y_1)$ und $x_2 = \varphi(y_2)$, so erhalten wir

$$\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\| \quad \text{für alle } y_1, y_2 \in V_1, \quad (12.9)$$

also die Stetigkeit von φ .

Weiter ist $f'(x)$ für alle $x \in U_1$ invertierbar. Für $x \in U_1$ ist nämlich

$$\|f'(x) - I\| = \|g'(x)\| \leq 1/2,$$

und die Invertierbarkeit von $f'(x)$ folgt wie in Abschnitt 12.1 (Neumann-Reihe).

Es verbleibt zu zeigen, dass φ stetig differenzierbar ist. Wir zeigen zunächst die Differenzierbarkeit von φ . Sei $y \in V_1$ und ℓ so, dass $y + \ell \in V_1$. Wir setzen $x = \varphi(y)$ und $x + h = \varphi(y + \ell)$, wobei $h = \varphi(y + \ell) - \varphi(y)$ von ℓ abhängt. Da f in x differenzierbar ist, haben wir

$$f(x + h) - f(x) = f'(x)h + r(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi(y + \ell) - \varphi(y) &= (x + h) - x = h \\ &= (f'(x))^{-1}(f(x + h) - f(x) - r(h)) \\ &= (f'(\varphi(y)))^{-1}\ell - (f'(x))^{-1}r(h), \end{aligned}$$

und die Differenzierbarkeit von φ in y folgt, wenn wir gezeigt haben, dass $\lim_{\ell \rightarrow 0} r(h(\ell))/\|\ell\| = 0$. Nun ist

$$\frac{r(h(\ell))}{\|\ell\|} = \frac{r(h(\ell))}{\|h(\ell)\|} \frac{\|h(\ell)\|}{\|\ell\|} \quad (12.10)$$

(wegen der Bijektivität von φ ist $h \neq 0$ für $\ell \neq 0$). Wegen $h = \varphi(y + \ell) - \varphi(y)$ und der Stetigkeit von φ folgt aus $\ell \rightarrow 0$ auch $h \rightarrow 0$. Also ist

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{r(h(\ell))}{\|h(\ell)\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0,$$

und der zweite Faktor in (12.10) bleibt wegen (12.9) beschränkt:

$$\|h(\ell)\| = \|\varphi(y + \ell) - \varphi(y)\| \leq 2\|(y + \ell) - y\| = 2\|\ell\|.$$

Also ist φ in $y \in V_1$ differenzierbar. Die Stetigkeit von φ' folgt aus Lemma 12.3 (c). ■

Der Satz über die Umkehrfunktion ist ein wichtiges Werkzeug der Analysis. In vielen Situationen dient er beispielsweise dazu, geeignete „Koordinaten“ einzuführen, wobei wir uns die lokal invertierbaren Funktionen als „Koordinatenwechsel“ denken (in Analogie zu den Basistransformationen der linearen Algebra).

Der Satz über die Umkehrfunktion ist eine lokale Aussage. Eine globale Variante dieses Satzes erhält man, wenn man von vornherein die Existenz einer (globalen) Umkehrfunktion fordert.

Folgerung 12.6 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei injektiv und stetig differenzierbar, und $f'(x)$ sei invertierbar für alle $x \in U$. Dann ist $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ ist stetig differenzierbar.*

Ist sogar $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, so folgt auch $f^{-1} \in C^k(f(U), \mathbb{R}^n)$.

Beweis. Sei $y \in f(U)$ und $f(x) = y$. Nach Satz 12.5 gibt es offene Umgebungen $U_1 \subseteq U$ und $V_1 \subseteq f(U)$ von x bzw. y so, dass $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$ ein Diffeomorphismus ist. Also ist $f(U)$ offen und $f^{-1}|_{V_1} = (f|_{U_1})^{-1}$ ist stetig differenzierbar. ■

12.3 Der Satz über implizite Funktionen

Dieser Satz ist eine wichtige Folgerung aus dem Satz über die Umkehrfunktion. Er eröffnet die Möglichkeit, die Lösungsmenge einer Gleichung wie $f(x, y) = 0$ geeignet zu parametrisieren. Um den Satz über implizite Funktionen besser zu verstehen, betrachten wir zunächst das folgende lineare Problem.

Sei $A : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung. Wir schreiben die Elemente von \mathbb{R}^{n+k} als Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Da A linear ist, gibt es lineare Abbildungen $A_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $A_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ so, dass

$$A(x, y) = A_1x + A_2y \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k.$$

In dieser Darstellung ist klar, dass sich die Gleichung $A(x, y) = 0$ genau dann nach y auflösen lässt, wenn die lineare Abbildung A_2 invertierbar ist, und dass in diesem Fall

$$A(x, y) = 0 \quad \iff \quad y = -A_2^{-1}A_1x.$$

Die Lösungsmenge ist also der Graph einer linearen Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^k . Der Satz über implizite Funktionen ist eine Verallgemeinerung dieser Beobachtung auf nichtlineare Abbildungen. Wegen der Nichtlinearität erhält man nur eine lokale Aussage.

Satz 12.7 (Satz über implizite Funktionen) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar. Für $(x, y) \in U \times V$ spalten wir die Ableitung $f'(x, y)$ von f auf in

$$f'(x, y) = (d_1f(x, y), d_2f(x, y)),$$

wobei

$$\begin{aligned} d_1f(x, y) &= f'(x, y)|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k), \\ d_2f(x, y) &= f'(x, y)|_{\{0\} \times \mathbb{R}^k} \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k). \end{aligned}$$

Ist $(x_0, y_0) \in U \times V$ ein Punkt mit $f(x_0, y_0) = 0$ und ist $d_2f(x_0, y_0)$ invertierbar, so existieren offene Umgebungen $U_1 \subseteq U$ von x_0 und $V_1 \subseteq V$ von y_0 sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $\eta : U_1 \rightarrow V_1$ mit $\eta(x_0) = y_0$ und

$$\{(x, y) \in U_1 \times V_1 : f(x, y) = 0\} = \{(x, \eta(x)) : x \in U_1\}. \quad (12.11)$$

Insbesondere ist $f(x, \eta(x)) = 0$ für alle $x \in U_1$. Ist auch noch $d_2f(x, \eta(x))$ invertierbar, so folgt

$$\eta'(x) = -(d_2f(x, \eta(x)))^{-1} d_1f(x, \eta(x)). \quad (12.12)$$

Speziell ist für $n = k = 1$

$$\eta'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \eta(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta(x))}.$$

Die Funktion η wird also *implizit* durch die Gleichung $f(x, \eta(x)) = 0$ definiert. Wir können diese Funktion auffassen als lokale Parametrisierung der Lösungsmenge der Gleichung $f(x, y) = 0$, da diese durch (12.11) lokal als Graph der Funktion η dargestellt wird. Ist $f \in C^m$, so kann man wieder $\eta \in C^m$ zeigen.

Beweis. Wir identifizieren lineare Abbildungen mit ihren Matrixdarstellungen bezüglich der Standardbasis von \mathbb{R}^m . In diesem Sinn hat die Abbildung

$$\varphi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \quad (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$$

die Ableitung (= Jacobimatrix)

$$\varphi'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y)\right)_{i,j=1}^{k,n} & \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_\ell}(x, y)\right)_{i,\ell=1}^{k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ d_1f(x, y) & d_2f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Aus der Invertierbarkeit von $d_2f(x_0, y_0)$ folgt daher die von $\varphi'(x_0, y_0)$. Da φ stetig differenzierbar ist, existiert nach dem Satz über die Umkehrfunktion eine Umgebung $W \subseteq U \times V$ von (x_0, y_0) so, dass $\varphi|_W : W \rightarrow \varphi(W) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ ein

Diffeomorphismus ist. Die Umkehrfunktion $\psi := (\varphi|_W)^{-1} : \varphi(W) \rightarrow W$ hat dann die Gestalt

$$\psi(x, y) = (x, g(x, y)) \quad \text{mit } g : \varphi(W) \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Wir definieren

$$\eta : \{x \in \mathbb{R}^n : (x, 0) \in \varphi(W)\} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad x \mapsto g(x, 0).$$

Dann ist $\psi(x, 0) = (x, g(x, 0)) = (x, \eta(x))$ und daher

$$(x, 0) = \varphi(\psi(x, 0)) = \varphi(x, \eta(x)) = (x, f(x, \eta(x))),$$

also $f(x, \eta(x)) = 0$. Ist umgekehrt $f(x, y) = 0$ für $(x, y) \in W$, so ist $\varphi(x, y) = (x, 0)$ und daher $(x, y) = \psi(x, 0) = (x, g(x, 0)) = (x, \eta(x))$, also $y = \eta(x)$. Dann ist klar, dass

$$\{(x, y) \in W : f(x, y) = 0\} = \{(x, \eta(x)) \in W : (x, 0) \in \varphi(W)\}. \quad (12.13)$$

Wir wählen nun offene Umgebungen U'_1 von x_0 und V_1 von y_0 so klein, dass $U'_1 \times V_1 \subseteq W$ und dann eine Umgebung U_1 von x_0 mit $\eta(U_1) \subseteq V_1$ (diese lässt sich finden, da η stetig ist). Dann folgt (12.11) aus (12.13), und η ist stetig differenzierbar nach dem Satz über die Umkehrfunktion.

Wir zeigen noch (12.12). Aus $f(x, \eta(x)) = 0$ für alle $x \in U_1$ und

$$f'(x, y) = (d_1 f(x, y), d_2 f(x, y))$$

folgt mit der Kettenregel (wir leiten $f(x, \eta(x)) = 0$ nach x ab):

$$0 = f'(x, \eta(x)) \circ (id, \eta'(x)) = d_1 f(x, \eta(x)) + d_2 (f(x, \eta(x))) \circ \eta'(x).$$

Ist $d_2(f(x, \eta(x)))$ invertierbar, folgt hieraus (12.12). ■

Beispiel 1. Wir betrachten den Einheitskreis, d.h. die Nullstellenmenge von

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1.$$

Die lokale Auflösbarkeitsbedingung nach y lautet

$$0 \neq \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0.$$

Für $y_0 \neq 0$ existieren also Funktionen η so, dass der Einheitskreis lokal als Graph von η darstellbar ist. Für $y_0 > 0$ ist $\eta(x) = \sqrt{1 - x^2}$, und für $y_0 < 0$ haben wir $\eta(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Für $y_0 = 0$ ist der Einheitskreis nicht lokal als Graph einer Funktion von x darstellbar. Dafür kann man um die Punkte $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ den Einheitskreis lokal als Graph einer Funktion von y darstellen. Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 \neq 0$$

ist in diesen Punkten nämlich die lokale Auflösbarkeitsbedingung nach x erfüllt. (Beachten Sie: es spielt keine Rolle, wie man den \mathbb{R}^{n+k} in zwei Unterräume E_1 und E_2 aufteilt. Wichtig ist nur, dass $d_2f(x_0, y_0) : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ invertierbar ist.) Entsprechend erhalten wir Funktionen $\eta(y) = \sqrt{1 - y^2}$ für $x_0 > 0$ und $\eta(y) = -\sqrt{1 - y^2}$ für $x < x_0$. ■

Beispiel 2. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x^2 - z^2 \end{pmatrix}$$

hat die Jacobimatrix

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 2x & 0 & -2z \end{pmatrix}.$$

Die Auflösbarkeitsbedingung nach (y, z) ist erfüllt, wenn

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial (y, z)}(x_0, y_0, z_0) \right) = \det \begin{pmatrix} -2y_0 & 0 \\ 0 & -2z_0 \end{pmatrix} = 4y_0z_0 \neq 0.$$

Ist dagegen

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial (x, z)}(x_0, y_0, z_0) \right) = \det \begin{pmatrix} 2x_0 & 0 \\ 2x_0 & -2z_0 \end{pmatrix} = -4x_0z_0 \neq 0,$$

so erhalten wir die lokale Auflösbarkeit nach dem Variablenpaar (x, z) . Hier steht $\frac{\partial f}{\partial (y, z)}$ für die Jacobimatrix von f , betrachtet als Funktion von y und z . ■

Beispiel 3. Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, t) = t^n + \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k.$$

Offenbar ist $f(x, t) = 0$ genau dann, wenn t eine Nullstelle des Polynoms $P_x(t) := f(x, t)$ ist. Sei t_0 eine einfache Nullstelle von P_{x_0} , d.h. sei $P_{x_0}(t_0) = 0$ und $P'_{x_0}(t_0) \neq 0$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_0, t_0) = P'_{x_0}(t_0) \neq 0.$$

Also ist $f(x, t)$ lokal nach t auflösbar. ■

Wir haben damit die folgende bemerkenswerte Aussage bewiesen:

Die einfachen Nullstellen eines Polynoms hängen lokal beliebig oft differenzierbar von den Koeffizienten des Polynoms ab.

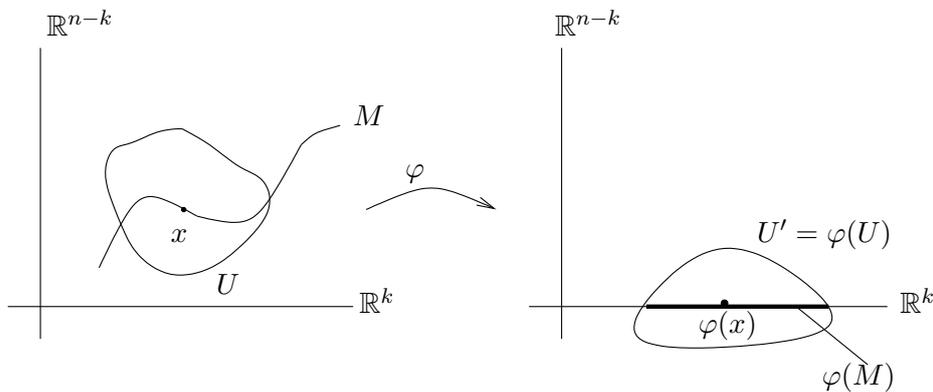
12.4 Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Wir haben im vorigen Abschnitt Lösungsmengen von Gleichungen lokal als Funktionsgraphen dargestellt. Der folgende Begriff beschreibt allgemein Teilmengen des \mathbb{R}^n , die sich so darstellen lassen (unabhängig davon, ob sie Lösungsmenge einer Gleichung sind).

Definition 12.8 Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k -dimensionale C^m -Untermannigfaltigkeit, wenn gilt: Für jedes $x \in M$ gibt es offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ sowie einen C^m -Diffeomorphismus

$$\varphi : U \rightarrow U' \quad \text{mit } \varphi(U \cap M) = U' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Eine solche Abbildung heißt Umgebungskarte. Eine Familie $(\varphi_j)_{j \in J}$ von Umgebungskarten $\varphi_j : U_j \rightarrow U'_j$ von M heißt Umgebungsatlas von M , wenn $M \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$.



Eine Mannigfaltigkeit ist also eine Menge, die in geeigneten krummlinigen Koordinaten (beschrieben durch φ) lokal wie der \mathbb{R}^k im \mathbb{R}^n aussieht.

Beispiel 1: Funktionsgraphen. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Wir zeigen, dass der Graph von f , d.h. die Menge

$$M := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{k+n} : x \in V\}$$

eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{k+n} ist. Dazu sei $U := V \times \mathbb{R}^n$. Diese Menge ist offen und enthält M (ist also eine offene Umgebung jedes Punktes von M). Die Abbildung

$$\varphi : U \rightarrow U, \quad (x, y) \mapsto (x, y - f(x))$$

ist ein Diffeomorphismus von U mit der Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : U \rightarrow U, \quad (x, y) \mapsto (x, y + f(x)).$$

Weiter ist

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(M) = V \times \{0\} = U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Die Abbildung φ liefert also einen einelementigen Umgebungsatlas von M . ■

Beispiel 2. Wir zeigen, dass die n -Sphäre

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|^2 = 1\}$$

eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} ist. Dazu betrachten wir für jedes $j = 1, \dots, n+1$ die Mengen

$$U_j^\pm := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i \neq j} x_i^2 < 1, \pm x_j > 0\}.$$

Jede dieser Mengen ist offen, und diese Mengen überdecken \mathbb{S}^n . Weiter: die Abbildungen $\varphi_j^\pm : U_j^\pm \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$,

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}, x_j \mp (1 - \sum_{i \neq j} x_i^2)^{1/2})$$

sind Diffeomorphismen von U_j^\pm auf $\varphi_j^\pm(U_j^\pm)$ (warum?), und es gilt

$$\varphi_j^\pm(U_j^\pm \cap \mathbb{S}^n) = \varphi_j^\pm(U_j^\pm) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Die $2(n+1)$ Umgebungskarten φ_j^\pm , $j = 1, \dots, n+1$, bilden also einen Umgebungsatlas von \mathbb{S}^n . ■

Beispiel 3. Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung. Dann ist $\ker A$ eine lineare Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim \ker A = n - \text{rang } A$ im Sinne der linearen Algebra. Der Kern von A ist auch eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n der Dimension $n - \text{rang } A$ im Sinne von Definition 12.8. Dazu schreiben wir \mathbb{R}^n als direkte Summe $\ker A \dot{+} N$, wählen lineare Isomorphismen

$$J_1 : \ker A \rightarrow \mathbb{R}^{n-\text{rang } A}, \quad J_2 : N \rightarrow \mathbb{R}^{\text{rang } A}$$

und definieren

$$\varphi : \mathbb{R}^n = \ker A \dot{+} N \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-\text{rang } A} \times \mathbb{R}^{\text{rang } A}, \quad x \dot{+} y \mapsto (J_1 x, J_2 y). \quad \blacksquare$$

Den folgenden Satz kann man als eine globale Version des Satzes über implizite Funktionen auffassen. Er gibt nicht nur Auskunft über die *lokale* Struktur der Lösungsmenge einer Gleichung, sondern über deren *globale* Struktur. Vorab noch eine Definition.

Definition 12.9 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Funktion. Wir nennen $x \in U$ einen kritischen Punkt und $f(x) \in \mathbb{R}^k$ einen kritischen Wert, wenn

$$\text{rang } f'(x) < k.$$

Ein Punkt $y \in \mathbb{R}^k$ heißt regulärer Wert, wenn sein Urbild $f^{-1}(y)$ keine kritischen Punkte enthält.

Satz 12.10 (Rangsatz) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^m -Abbildung. Ist $w \in f(U)$ ein regulärer Wert, so ist das Urbild $f^{-1}(w)$ eine $n-k$ -dimensionale C^m -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .

Im Spezialfall $n = 2, k = 1$ heißen die Mengen $f^{-1}(w)$ Höhenlinien von f . Allgemeiner spricht man für $n \geq 2$ von Niveauflächen.

Beweis. Wir können davon ausgehen, dass $w = 0$ ist (andernfalls wenden wir die folgenden Überlegungen auf die Funktion $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^k, x \mapsto f(x) - w$ an). Sei also $u \in U$ ein Punkt mit $f(u) = 0$. Nach Voraussetzung ist

$$\text{rang } f'(u) = \text{rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{k,n} = k.$$

O.B.d.A. können wir weiter annehmen, dass die ersten k Spalten der Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ linear unabhängig sind (andernfalls nummerieren wir die Koordinaten x_j um). Sei nun

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (f_1(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Dann ist

$$\varphi'(u) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1,j=1}^{k,k} & \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1,j=k+1}^{k,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von u so, dass $\varphi|_W : W \rightarrow \varphi(W)$ ein Diffeomorphismus ist. Dann ist

$$\varphi(f^{-1}(0) \cap W) = (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap \varphi(W).$$

Also ist φ eine Umgebungskarte von $f^{-1}(0)$ um u . Da $u \in f^{-1}(0)$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. ■

Beispiel 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 - y^4$. Dann ist $f'(x, y) = (4x^3, -4y^3)$. Folglich ist $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ der einzige kritische Punkt und $w = 0 \in \mathbb{R}$ der einzige kritische Wert von f . Für $w \neq 0$ sind also alle Höhenlinien von f glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^2 . Für $w = 0$ ist die zugehörige Höhenlinie

keine Untermannigfaltigkeit (sie besteht aus zwei Geraden, die sich in der Null schneiden). ■

Beispiel 5. Sei $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ symmetrisch und invertierbar und

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle Ax, x \rangle.$$

Aus

$$\langle A(x+h), x+h \rangle - \langle Ax, x \rangle = \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle + \langle Ah, h \rangle$$

folgt sofort

$$f'(x)h = 2\langle Ax, h \rangle = 2x^T Ah,$$

also $f'(x) = 2x^T A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Da A invertierbar ist, ist $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann kritisch, wenn $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, und $w = 0 \in \mathbb{R}$ ist der einzige kritische Wert von f . Ist beispielsweise $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i > 0$ und $t > 0$, so erhalten wir, dass die Ellipsoide

$$f^{-1}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = t\}$$

glatte $n-1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n sind. Insbesondere ist \mathbb{S}^{n-1} eine $n-1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n (vgl. Beispiel 2). ■

12.5 Extrema unter Nebenbedingungen

In Kapitel 10 haben wir Extrema von Funktionen studiert, die auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n definiert sind. Wir betrachten nun eine Situation, die in praktischen Problemen viel häufiger ist: wir suchen Extrema von Funktionen unter Nebenbedingungen, d.h. Extrema von Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n . Wir wollen dabei *vermeiden*, durch eine geeignete Parametrisierung der Untermannigfaltigkeit das Problem auf die in Kapitel 10 betrachtete Situation zurückführen, da dies in der Regel recht schwierig ist.

Wir präzisieren zunächst die Problemstellung. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ eine offene Menge, und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Weiter sei $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, für die $0 \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert ist. Dann ist

$$M := \{x \in U : g(x) = 0\}$$

eine m -dimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{m+n} . Wir sagen, dass $u \in U$ ein *lokales Minimum* (bzw. *Maximum*) von f unter der Nebenbedingung M oder $g = 0$ ist, wenn $u \in M$ und wenn es eine Umgebung V von u so gibt, dass $f(x) \geq f(u)$ (bzw. $f(x) \leq f(u)$) für alle $x \in V \cap M$.

Satz 12.11 *Unter den soeben getroffenen Voraussetzungen gilt: Ist $u \in U$ ein lokales Extremum von f unter der Nebenbedingung $g = 0$, so gibt es reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ so, dass*

$$f'(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g'_i(u). \quad (12.14)$$

Diese Zahlen λ_i heißen auch *Lagrange-Multiplikatoren*.

Beweis. Nach Satz 12.10 ist M eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{m+n} . Wir finden also eine Umgebung $W \subseteq U$ von u und einen Diffeomorphismus $\varphi : W \rightarrow \varphi(W) \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ mit

$$\varphi(W \cap M) = \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Wir schreiben $\varphi(W) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ als

$$\{(y, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : y \in V\}$$

mit einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und definieren

$$\psi : V \rightarrow U, \quad y \mapsto \varphi^{-1}(y, 0). \quad (12.15)$$

Offenbar ist ψ eine Bijektion von V auf $W \cap M$. Die Abbildung ψ ist auch stetig differenzierbar. Mit der linearen Abbildung

$$E : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto (y, 0)$$

können wir nämlich ψ auffassen als Einschränkung von $\varphi^{-1} \circ E$ auf V . Die Einschränkung $E|_V$ ist aber differenzierbar, und ihre Ableitung ist in jedem Punkt gleich E . Aus $\varphi \circ \psi = E|_V$ folgt außerdem mit der Kettenregel $\varphi'(\psi(y)) \cdot \psi'(y) = E$. Für $v := \varphi(u)$ ist also insbesondere $\text{rang } \psi'(v) = \text{rang } E = m$.

Nach diesen Vorüberlegungen nun zum eigentlichen Beweis. Die Funktion $f \circ \psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ hat in v ein lokales Extremum (ohne Nebenbedingungen!). Es ist also

$$(f \circ \psi)'(v) = f'(\psi(v)) \circ \psi'(v) = f'(u) \circ \psi'(v) = 0. \quad (12.16)$$

Außerdem gilt für jedes $i = 1, \dots, n$, dass $g_i(\psi(y)) = 0$ für $y \in V$. Differenzieren liefert $g'_i(\psi(y)) \cdot \psi'(y) = 0$ und insbesondere

$$g'_i(u) \circ \psi'(v) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (12.17)$$

Damit ist klar, dass $\text{im } \psi'(v) \subseteq \ker g'(u)$. Nun ist aber

$$\dim \ker g'(u) + \text{rang } g'(u) = \dim \ker g'(u) + n = m + n,$$

also $\dim \ker g'(u) = m$. Hieraus folgt wegen $\text{rang } \psi'(v) = m$ sogar

$$\text{im } \psi'(v) = \ker g'(u).$$

Ist nun $w \in \text{im } \psi'(v)$, so folgt aus (12.16) und (12.17), dass

$$f'(u)w - \lambda_1 g'_1(u)w - \dots - \lambda_n g'_n(u)w = 0 \quad (12.18)$$

für beliebige $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Um die Behauptung zu zeigen, müssen wir noch die Vektoren aus dem orthogonalen Komplement W von $\text{im } \psi'(v)$ betrachten. Sei w_1, \dots, w_n eine Basis von W . Wir bestimmen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f'(u)w_1 &- \lambda_1 g'_1(u)w_1 - \dots - \lambda_n g'_n(u)w_1 = 0 \\ &\vdots \\ f'(u)w_n &- \lambda_1 g'_1(u)w_n - \dots - \lambda_n g'_n(u)w_n = 0. \end{aligned}$$

Dazu müssen wir uns lediglich klarmachen, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} g'_1(u)w_1 & \dots & g'_n(u)w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ g'_1(u)w_n & \dots & g'_n(u)w_n \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Wäre sie das nicht, so wären ihre Zeilen linear abhängig. Es gäbe also Zahlen μ_1, \dots, μ_n , die nicht alle gleich Null sind, so dass

$$\mu_1(g'_1(u)w_1, \dots, g'_n(u)w_1) + \dots + \mu_n(g'_1(u)w_n, \dots, g'_n(u)w_n) = 0$$

bzw.

$$g'_1(u)w = \dots = g'_n(u)w = 0$$

mit $w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n$. Der Vektor w liegt also im Kern von $g'(u)$. Da $w \in W$, und da W senkrecht zu diesem Kern steht, folgt $w = 0$. Da aber die w_i linear unabhängig sind, folgt $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$, ein Widerspruch.

Wir können also die λ_i aus dem Gleichungssystem eindeutig bestimmen. Da die w_i den Raum W aufspannen, folgt

$$f'(u)w - \lambda_1 g'_1(u)w - \dots - \lambda_n g'_n(u)w = 0$$

für alle $w \in W$ und folglich für alle $w \in \mathbb{R}^{m+n}$. ■

Zur praktischen Bestimmung lokaler Extrema unter Nebenbedingungen muss man also das System

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_k}(x) + \dots + \lambda_n \frac{\partial g_n}{\partial x_k}(x), & k &= 1, \dots, m+n, \\ g_\ell(x) &= 0, & \ell &= 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{12.19}$$

bestehend aus $m+2n$ Gleichungen für die $m+2n$ Unbekannten $x = (x_1, \dots, x_{n+m})$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ lösen und die erhaltenen extremwertverdächtigen Punkte auf ihre Extremaleigenschaften untersuchen. Es ist hilfreich, sich die Funktion

$$G(x_1, \dots, x_{n+m}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_n g_n(x)$$

zu merken. Sucht man nämlich die extremwertverdächtigen Punkte von G durch partielles Ableiten nach jeder der Variablen x_i, λ_j und anschließendes Nullsetzen, so gelangt man gerade zum System (12.19).

Beispiel 1. Gesucht sind Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$, d.h. auf der Einheitskreislinie. Die Matrix $g'(x, y) = (2x, 2y)$ hat offenbar in jedem Punkt der Einheitskreislinie den Rang 1, so dass Satz 12.11 anwendbar ist. Wir betrachten die Funktion

$$G(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

und setzen ihre partiellen Ableitungen Null:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow y - 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial y} = 0 &\Leftrightarrow x - 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit y und die zweite mit x und finden $x^2 = y^2$, weshalb zusammen mit der dritten Gleichung für (x, y) die Paare

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

in Frage kommen. Diese lösen tatsächlich das System (die ersten beiden Paare mit $\lambda = 1/2$, die anderen mit $\lambda = -1/2$). Als Funktionswert ergibt sich für die ersten beiden Paare $1/2$, für die anderen $-1/2$. Da die Funktion f Maximum und Minimum auf der Einheitskreislinie besitzen *muss*, ist $1/2$ das Maximum und $-1/2$ das Minimum von f . ■

Beispiel 2. Sei A eine symmetrische $k \times k$ Matrix. Wir suchen die extremwertverdächtigen Punkte von $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ auf der Sphäre $\mathbb{S}^{k-1} \subseteq \mathbb{R}^k$, d.h. unter der Nebenbedingung $g(x) = \|x\|^2 - 1 = 0$. Hier ist $n = 1$ und $m = k - 1$, also $m + 2n = k + 1$.

Die Ableitung von $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ ist $f'(x) = 2x^T A$ (vgl. Beispiel 5 in Abschnitt 12.4) und die von $g(x) = \|x\|^2 - 1 = \langle x, x \rangle - 1$ ist $g'(x) = 2x^T$. Damit ist klar, dass die Rangbedingung erfüllt ist. Das zu lösende Gleichungssystem ist also

$$\begin{aligned} f'(x) - \lambda g'(x) = 2x^T A - 2\lambda x^T &= 0, \\ g(x) = \|x\|^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

bzw. nach Transponieren

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|^2 = 1.$$

Ein Punkt $x \in \mathbb{S}^{k-1}$ ist also genau dann extremwertverdächtig, wenn er Eigenvektor zum Eigenwert λ ist. Wegen $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ ergibt sich für die zugehörigen Funktionswerte

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda.$$

Folglich wird f in x genau dann minimal (bzw. maximal), wenn x ein Eigenvektor zum kleinsten (bzw. größten) Eigenwert von A ist. Man beachte: die stetige Funktion f nimmt auf der kompakten Menge \mathbb{S}^{k-1} ihr Maximum an, woraus folgt, dass A mindestens einen reellen Eigenwert besitzen muss. Es ist also

$$\begin{aligned} \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} &= \text{größter Eigenwert von } A, \\ \min_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} &= \text{kleinster Eigenwert von } A. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

13 Das Riemann-Integral für Funktionen mehrerer Veränderlicher

In diesem Kapitel kommen wir zur Definition und wesentlichen Eigenschaften des Riemann-Integrals für Funktionen mehrerer Veränderlicher. So wie das Problem der Flächenberechnung eine Motivation für die Einführung des Integrals für Funktionen einer Veränderlichen war, kann nun das Problem der Volumendefinition- und berechnung (oder allgemeiner etwa das Problem der Massebestimmung eines Körpers mit ortsabhängiger Dichte) als Motivation dienen.

In diesem und im folgenden Kapitel kann es lediglich darum gehen, einen ersten Eindruck von der Integration im \mathbb{R}^n zu gewinnen und einige Rechentechniken zu vermitteln. Im vierten Semester wenden wir uns diesem Thema ausführlicher zu.

13.1 Das Riemann-Integral über Intervallen im \mathbb{R}^n

Wir beginnen mit der Integration über den „einfachsten“ Mengen im \mathbb{R}^n , nämlich über achsenparallele Intervalle, Rechtecke, Quader u.s.w., die wir kurz unter dem Namen *Intervall im \mathbb{R}^n* zusammenfassen. Im Unterschied zum \mathbb{R}^1 gibt es natürlich im \mathbb{R}^n weitaus mehr Mengen, über die man integrieren möchte, etwa Kugeln oder Kegel. Wir werden daher später die in diesem Abschnitt angestellten Überlegungen auf allgemeinere Mengen übertragen.

Unter einem *abgeschlossenen Intervall* im \mathbb{R}^n verstehen wir ein Produkt

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für alle } i\}.$$

Ein *offenes Intervall* im \mathbb{R}^n ist ein Produkt

$$(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \text{ für alle } i\}.$$

Ist I ein offenes oder abgeschlossenes Intervall wie oben, so erklären wir seinen *Inhalt* durch

$$|I| := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Wir erhalten also für

- $n = 1$ gewöhnliche Intervalle, und $|I|$ ist die Intervalllänge,
- $n = 2$ Rechtecke, und $|I|$ ist der Flächeninhalt,
- $n = 3$ Quader, und $|I|$ ist das Volumen.

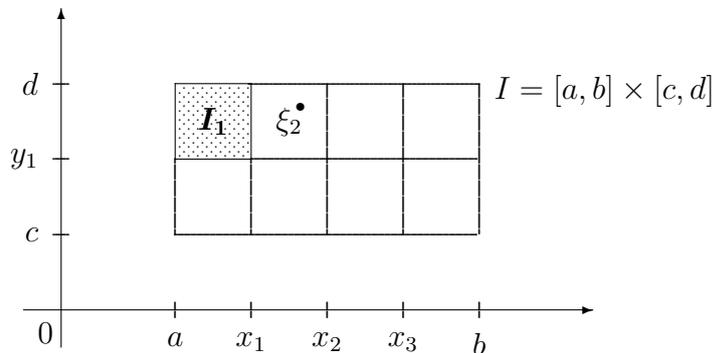
Eine *Zerlegung* Z eines Intervalles $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Produkt $Z_1 \times \dots \times Z_n$, wobei Z_i eine Zerlegung von $[a_i, b_i]$ ist. Die *Teilintervalle* von Z erhält man, indem man im Produkt $T_1 \times \dots \times T_n$ die T_i alle Teilintervalle der Zerlegung Z_i von $[a_i, b_i]$

durchlaufen lässt. Eine Zerlegung Z' heißt *Verfeinerung* von Z , wenn $Z \subseteq Z'$. Ist insbesondere $Z = Z_1 \times \dots \times Z_n$ und $Z' = Z'_1 \times \dots \times Z'_n$, so ist Z' genau dann eine Verfeinerung von Z , wenn jedes Z'_i eine Verfeinerung von Z_i ist.

Unter dem *Feinheitsmaß* (Maschenweite) von $Z = Z_1 \times \dots \times Z_n$ versteht man die Zahl

$$|Z| := \max_{1 \leq i \leq n} |Z_i|,$$

wobei $|Z_i|$ das Feinheitsmaß der Zerlegung Z_i von $[a_i, b_i]$ ist. Man beachte, dass in diese Definition nicht der Inhalt der Teilintervalle von Z eingeht, sondern deren Kantenlänge.



Hat Z die Teilintervalle I_1, \dots, I_r , so heißt jeder Vektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ mit $\xi_i \in I_i$ ein *Zwischenvektor* zu Z . Ist schließlich f eine reellwertige Funktion auf I , Z eine Zerlegung von I mit den Teilintervallen I_1, \dots, I_r und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ ein Zwischenvektor zu Z , so heißt

$$S(Z, \xi, f) := \sum_{i=1}^r f(\xi_i) |I_i|$$

eine *Riemannsumme* für f .

Definition 13.1 Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn für jede Folge $(Z^{(m)})$ von Zerlegungen von I mit $|Z^{(m)}| \rightarrow 0$ und für jede zugehörige Folge von Zwischenvektoren $(\xi^{(m)})$ die Folge $(S(Z^{(m)}, \xi^{(m)}, f))$ der entsprechenden Riemannsummen konvergiert.

Wenn f Riemann-integrierbar ist, dann sieht man wie im Beweis von Satz 8.11, dass alle Folgen $(S(Z^{(m)}, \xi^{(m)}, f))$ gegen den gleichen Wert konvergieren. Dieser heißt das *Riemann-Integral* von f über I , und wir schreiben dafür

$$\int_I f dx, \quad \int_I f(x) dx, \quad \int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \quad \text{oder} \quad \int_I f dV.$$

Die folgenden Aussagen beweist man wie für $n = 1$ (Sätze 8.4, 8.23, 8.24, 8.25 und 8.20).

Satz 13.2 Jede auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}^n$ Riemann-integrierbare Funktion ist beschränkt.

Satz 13.3 Sind f, g Riemann-integrierbar auf I und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar auf I , und es gilt

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx.$$

Satz 13.4 Sind f, g Riemann-integrierbar auf I und ist $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in I$, dann ist auch

$$\int_I f dx \geq \int_I g dx.$$

Folgerung 13.5 Für Riemann-integrierbares $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\left| \int_I f dx \right| \leq \sup_{x \in I} |f(x)| \cdot |I|.$$

Satz 13.6 Sind f, g Riemann-integrierbar auf I und stimmen f und g auf einer in I dichten Menge überein, so ist bereits

$$\int_I f dx = \int_I g dx.$$

13.2 Integrabilitätskriterien

13.2.1 Charakterisierung über Darboux'sche Integrale

Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Weiter sei Z eine Zerlegung von I in Teilintervalle I_1, \dots, I_r . Mit den Zahlen

$$m_k := \inf_{x \in I_k} f(x) \quad \text{und} \quad M_k := \sup_{x \in I_k} f(x)$$

definieren wir die Unter- bzw. Obersummen von f bzgl. Z durch

$$U(Z, f) := \sum_{k=1}^r m_k |I_k| \quad \text{bzw.} \quad O(Z, f) := \sum_{k=1}^r M_k |I_k|$$

und nennen

$$\int_{I^*} f dx := \sup_Z U(Z, f) \quad \text{bzw.} \quad \int_I^* f dx := \inf_Z O(Z, f)$$

das untere bzw. obere Darboux'sche Integral von f . Für einen kurzen Moment wollen wir eine Funktion f *Darboux-integrierbar* nennen, wenn

$$\int_{*I} f dx = \int_I^* f dx.$$

Wie Satz 8.8 beweist man:

Satz 13.7 Die beschränkte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Darboux-integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von I mit $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$ existiert.

Durch Übertragung des Beweises von Satz 8.9 (Details siehe Heuser, Analysis II, Satz 199.1) erhält man weiter:

Satz 13.8 Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt und Darboux-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_I f dx = \int_{I^*} f dx = \int_I^* f dx.$$

Hieaus erhält man wir für $n = 1$ das *Riemannsches Integrabilitätskriterium*:

Folgerung 13.9 Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt ist und wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von I mit $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$ existiert.

13.2.2 Charakterisierung über Nullmengen

Wie im \mathbb{R}^1 nennen wir eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine *Nullmenge*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele (offene oder abgeschlossene) Intervalle I_1, I_2, \dots gibt, welche M überdecken (d.h. $M \subseteq \bigcup_{k \geq 1} I_k$) und für die $\sum_{k \geq 1} |I_k| < \varepsilon$ ist.

Beispiel. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ und jedes $j = 1, \dots, n$ ist die Hyperebene

$$H := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = c\}$$

eine Nullmenge. Um dies einzusehen, bilden wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ das Intervall $I_k := (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ mit

$$a_i := \begin{cases} -k & \text{für } i \neq j \\ c - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}(2k)^{n-1}} & \text{für } i = j, \end{cases} \quad b_i := \begin{cases} k & \text{für } i \neq j \\ c + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}(2k)^{n-1}} & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Dann ist $H \subseteq \bigcup_k I_k$ (die Intervalle I_k werden immer „breiter“ und „flacher“) und

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{n-1} \cdot \frac{2\varepsilon}{2^{k+1}(2k)^{n-1}} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Es lassen sich die Beweise von Lemma 8.14 (Eigenschaften von Nullmengen) und Satz 8.15 auf den \mathbb{R}^n mit $n > 1$ übertragen. Auch die in diesen Beweisen benutzte *Schwankung* einer Funktion f auf einem Intervall I definiert man wie im \mathbb{R}^1 :

$$\Omega_f(I) := \sup_{t \in I} f(t) - \inf_{t \in I} f(t) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in I\}.$$

Satz 13.10 (Lebesguesches Integrabilitätskriterium) Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar auf I , wenn sie beschränkt ist und wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bildet, d.h. wenn f fast überall stetig ist.

Folgerung 13.11 Jede auf I stetige Funktion ist Riemann-integrierbar.

Folgerung 13.12 Mit f und g sind auch die Funktionen $|f|$, fg , $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ Riemann-integrierbar auf I .

Folgerung 13.13 Sei g Riemann-integrierbar auf I , $g(I) \subseteq [a, b]$ und f stetig auf $[a, b]$. Dann ist auch $f \circ g$ Riemann-integrierbar auf I .

Beweis. Ist $f \circ g$ in $x \in I$ unstetig, so muss auch g in x unstetig sein. Also ist $\Delta(f \circ g) \subseteq \Delta(g)$. Damit ist $\Delta(f \circ g)$ eine Nullmenge. ■

Für Riemann-integrierbares f ist also z.B. auch die Funktion $\sqrt{|f(x)|}$ Riemann-integrierbar.

Folgerung 13.14 Sind f, g Riemann-integrierbar auf I , und sind f, g fast überall gleich, so ist

$$\int_I f \, dx = \int_I g \, dx.$$

13.3 Der Satz von Fubini

Der nachfolgende Satz gibt uns in vielen Fällen ein bequemes Verfahren in die Hand, Riemann-Integrale auf mehrdimensionalen Intervallen zu berechnen.

Satz 13.15 (Fubini) Seien $I_k \subseteq \mathbb{R}^k$ und $I_l \subseteq \mathbb{R}^l$ abgeschlossene Intervalle und $I := I_k \times I_l \subseteq \mathbb{R}^{k+l} := \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$. Weiter sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf I , und für jedes $y \in I_l$ existiere das Riemann-Integral

$$g(y) := \int_{I_k} f(x, y) \, dx.$$

Dann ist die Funktion g auf I_l Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_I f(x, y) \, d(x, y) = \int_{I_l} \left(\int_{I_k} f(x, y) \, dx \right) dy. \quad (13.1)$$

Beweis. Die Existenz des iterierten Integrals sowie die Identität (13.1) folgen aus dem Satz über iterierte Grenzwerte von Doppelfolgen (Satz 9.18). Wir sehen uns einige Details des Beweises an.

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $Z_k^{(m)}$ eine Zerlegung des Intervalls I_k und $\xi_k^{(m)} = (\xi_{k,i}^{(m)})_{i=1}^k$ ein zugehöriger Zwischenvektor, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $Z_l^{(n)}$ eine Zerlegung von I_l

mit Zwischenvektor $\xi_l^{(n)} = (\xi_{l,j}^{(n)})_{j=1}^l$. Dann definiert $Z^{(m,n)} := Z_k^{(m)} \times Z_l^{(n)}$ eine Zerlegung von I , und $\xi^{(m,n)} := (\xi_k^{(m)}, \xi_l^{(n)})$ ist ein zugehöriger Zwischenvektor. Wir erhalten

$$\begin{aligned} S(Z^{(m,n)}, \xi^{(m,n)}, f) &:= \sum_{(i,j)} f(\xi_{k,i}^{(m)}, \xi_{l,j}^{(n)}) |I_{k,i}^{(m)}| |I_{l,i}^{(n)}| \\ &= \sum_{j=1}^l \left(\sum_{i=1}^k f(\xi_{k,i}^{(m)}, \xi_{l,j}^{(n)}) |I_{k,i}^{(m)}| \right) |I_{l,i}^{(n)}|. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Seien nun die Zerlegungsfolgen $(Z_k^{(m)})_{m \geq 0}$, $(Z_l^{(n)})_{n \geq 0}$ so beschaffen, dass $|Z_k^{(m)}| \rightarrow 0$ und $|Z_l^{(n)}| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ bzw. $n \rightarrow \infty$. Für die Produktzerlegung $Z^{(m,n)}$ gilt dann offenbar $|Z^{(m,n)}| \rightarrow 0$ für $(m,n) \rightarrow \infty$. Da f auf I Riemann-integrierbar ist, konvergiert die linke Seite von (13.2) für $(m,n) \rightarrow \infty$ gegen $\int_I f(x,y) d(x,y)$. Außerdem wissen wir aus der Voraussetzung, dass für $m \rightarrow \infty$ für jedes feste $\xi_{l,j}^{(n)}$ der Klammerterm auf der rechten Seite von (13.2) konvergiert:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_i f(\xi_{k,i}^{(m)}, \xi_{l,j}^{(n)}) |I_{k,i}^{(m)}| = \int_{I_k} f(x, \xi_{l,j}^{(n)}) dx = g(\xi_{l,j}^{(n)}).$$

Nach dem erwähnten Satz 9.18 existiert dann auch der iterierte Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j g(\xi_{l,j}^{(n)}) |I_{l,j}^{(n)}| = \int_{I_l} g(y) dy = \int_{I_l} \left(\int_{I_k} g(x,y) dx \right) dy$$

und stimmt mit

$$\lim_{(m,n) \rightarrow \infty} S(Z^{(m,n)}, \xi^{(m,n)}, f) = \int_I f(x,y) d(x,y)$$

überein. ■

Folgerung 13.16 (Vertauschen der Integrationsreihenfolge) *Mit den Bezeichnungen aus Satz 13.15 gilt: Ist f auf $I = I_k \times I_l$ Riemann-integrierbar, und existieren die Integrale*

$$\int_{I_k} f(x,y) dx \text{ für jedes } y \in I_l \quad \text{und} \quad \int_{I_l} f(x,y) dy \text{ für jedes } x \in I_k,$$

so existieren alle iterierten Integrale, und es gilt

$$\int_{I_k} \left(\int_{I_l} f(x,y) dy \right) dx = \int_{I_l} \left(\int_{I_k} f(x,y) dx \right) dy = \int_I f(x,y) d(x,y).$$

Für stetiges f wissen wir dies bereits aus Satz 10.29.

Durch wiederholtes Anwenden des Satzes von Fubini und von Folgerung 13.16 erhalten wir:

Folgerung 13.17 Ist f stetig auf $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, so ist

$$\int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} (\dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots) dx_1.$$

Dabei darf die Reihenfolge der Integrationen beliebig vertauscht werden.

Beispiel. Auf $I = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ sei $f(x, y, z) := xyz$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xyz \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 yz \, dy \, dz = \frac{1}{4} \int_0^1 z \, dz = \frac{1}{8}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

13.4 Integration über Jordan-messbaren Mengen

In diesem Abschnitt geht es um die Integration auf komplizierteren Mengen als Intervallen. Für jede nichtleere Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und jede Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir

$$f_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_B(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in B, \\ 0 & \text{falls } x \notin B, \end{cases}$$

d.h. f_B setzt die Funktion f durch 0 auf ganz \mathbb{R}^n fort.

Definition 13.18 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und beschränkt und $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall mit $B \subseteq I$. Die Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf B , wenn die Funktion f_B Riemann-integrierbar auf I ist. In diesem Fall heißt

$$\int_B f \, dx := \int_I f_B \, dx$$

das Riemannintegral von f über B .

Man kann zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von I ist. Man beachte auch, dass diese Definition auch im \mathbb{R}^1 etwas Neues bietet, da B kein Intervall sein muss.

Ob eine Funktion f auf einer Menge B integrierbar ist, hängt sowohl von f als auch von B ab. Insbesondere erwartet man von B , dass wenigstens so einfache Funktionen wie $\chi : B \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$ Riemann-integrierbar sind. Die entsprechende Funktion

$$\chi_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in B \\ 0 & \text{wenn } x \notin B \end{cases}$$

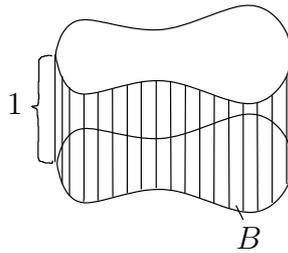
heißt die *charakteristische Funktion* von B .

Definition 13.19 Eine nichtleere beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Jordanmessbar, wenn ihre charakteristische Funktion χ_B Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$|B| := \int_I \chi_B dx = \int_B 1 dx = \int_B dx$$

der (n -dimensionale) Jordan-Inhalt von B .

Geometrische Deutung:

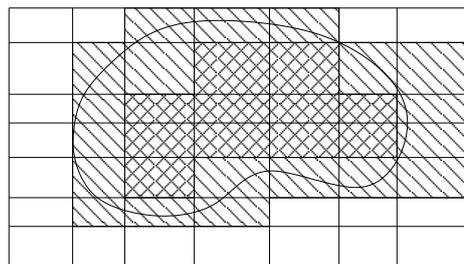


$\int_B 1 dx$ beschreibt das Volumen eines Zylinders über B mit der Höhe 1. Dieses ist gleich Grundfläche \times Höhe, also gleich $|B|$. ■

Deutung über Ober- und Untersummen: Seien $B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und beschränkt, $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall mit $B \subseteq I$ und Z eine Zerlegung von I in Teilintervalle I_1, \dots, I_r . Dann ist

$$\inf_{x \in I_k} \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I_k \subseteq B, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\sup_{x \in I_k} \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I_k \cap B \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



$$\begin{array}{cc} \text{[Schraffur]} & O(Z, \chi_B) \quad \text{[Schraffur]} & U(Z, \chi_B) \end{array}$$

Für die zugehörigen Unter- bzw. Obersummen gilt

$$U(Z, \chi_B) = \sum'_k |I_k|, \quad O(Z, \chi_B) = \sum''_k |I_k|,$$

wobei \sum' bzw. \sum'' über alle k mit $I_k \subseteq B$ bzw. mit $I_k \cap B \neq \emptyset$ erstreckt wird. Die Darboux'schen Integrale

$$\int_{*I} \chi_B dx, \quad \int_I^* \chi_B dx$$

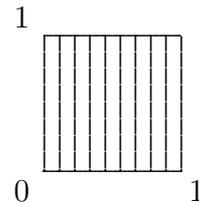
heißen *innerer* bzw. *äußerer Inhalt* von B . Aus dem Riemannsches Integrabilitätskriterium folgt sofort:

Folgerung 13.20 *Eine nichtleere beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr innerer und ihr äußerer Inhalt übereinstimmen. In diesem Fall ist*

$$|B| = \int_{*I} \chi_B dx = \int_I^* \chi_B dx.$$

Beispiel. Sei $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \text{ rational}\}$. Als umgebendes Intervall wählen wir das Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$.

Dann gilt für jede Zerlegung Z von $[0, 1] \times [0, 1]$ $U(Z, \chi_B) = 0$ und $O(Z, \chi_B) = 1$. Also ist der innere Inhalt von B gleich 0 und der äußere gleich 1. B ist somit *nicht* Jordan-messbar, und wir schreiben B *keinen* Flächeninhalt zu.



Eine Anwendung des Lebesgueschen Integrabilitätskriteriums liefert sofort

Satz 13.21 *Eine nichtleere beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂B eine Nullmenge ist.*

Beweis. Nach Definition und dem Lebesgueschen Kriterium ist B genau dann Jordan-messbar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von χ_B eine Nullmenge ist. Man macht sich leicht klar, dass χ_B genau dann in $x \in \mathbb{R}^n$ unstetig ist, wenn x ein Randpunkt von B ist. ■

Satz 13.22 (Allgemeines Lebesguesches Integrabilitätskriterium) *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und beschränkt, und B sei Jordan-messbar. Eine Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann auf B Riemann-integrierbar, wenn sie auf B beschränkt und fast überall stetig ist.*

Beweis. Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall mit $B \subseteq I$. Sei f auf B Riemann-integrierbar. Dann ist f_B auf I Riemann-integrierbar. Nach Satz 13.10 ist f_B beschränkt und fast überall stetig auf I . Dann ist f auch beschränkt und fast überall stetig auf B . Ist umgekehrt f beschränkt und fast überall stetig auf B , so ist f_B beschränkt auf I , und für die Menge der Unstetigkeitsstellen gilt: $\Delta(f_B) \subseteq \Delta(f) \cup \partial B$. Nach Satz 13.21 ist ∂B eine Nullmenge. Also ist $\Delta(f_B)$ Nullmenge, d.h. f_B ist auf I Riemann-integrierbar, und f ist auf B Riemann-integrierbar. ■

Es ist nun klar, dass auch die Folgerungen 13.11 – 13.14 entsprechend für Integrale über Jordan-messbare Mengen gelten. Beispielsweise hat man:

Folgerung 13.23 *Stetige Funktionen auf kompakten Jordan-messbaren Mengen sind Riemann-integrierbar.*

Wir überlegen uns nun, wie das Integral bei fester Funktion f vom Integrationsbereich abhängt. Dazu vereinbaren wir:

$$\int_{\emptyset} f \, dx := 0.$$

Aus Satz 13.21 bzw. dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium folgt sofort: Sind A und B Jordan-messbar, so sind auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ Jordan-messbar (die Ränder dieser Mengen liegen in $\partial A \cup \partial B$ und sind folglich Nullmengen). Weiter: Ist f auf einer Jordan-messbaren Menge B integrierbar, so ist f auch auf jeder Jordan-messbaren Teilmenge von B integrierbar.

Satz 13.24 *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und f auf A und B Riemann-integrierbar. Dann gilt:*

$$\int_{A \cup B} f \, dx + \int_{A \cap B} f \, dx = \int_A f \, dx + \int_B f \, dx.$$

Beweis. Die Existenz aller Integrale folgt aus den Vorbemerkungen. Wir zeigen die Behauptung zuerst im Fall $A \cap B = \emptyset$. Dazu wählen wir ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A \cup B \subseteq I$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_A f \, dx + \int_B f \, dx &= \int_I f_A \, dx + \int_I f_B \, dx = \int_I (f_A + f_B) \, dx \\ &= \int_I f_{A \cup B} \, dx = \int_{A \cup B} f \, dx. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Im Fall $A \cap B \neq \emptyset$ schreiben wir A , B und $A \cup B$ als Vereinigung paarweise disjunkter Mengen

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B), \quad B = (A \cap B) \cup (B \setminus A), \quad A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

und erhalten durch wiederholte Anwendung von (13.3)

$$\begin{aligned} \int_A f \, dx + \int_B f \, dx &= \int_{A \cap B} f \, dx + \int_{A \setminus B} f \, dx + \int_{B \setminus A} f \, dx + \int_{A \cap B} f \, dx \\ &= \int_{A \cup B} f \, dx + \int_{A \cap B} f \, dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Folgerung 13.25 *Für Jordan-messbare Mengen A , B gilt*

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

Folgerung 13.26 Für Jordan-messbare Mengen A, B mit $A \subseteq B$ gilt $|A| \leq |B|$.

Beweis. Auf jedem Intervall I mit $B \subseteq I$ gilt $\chi_A \leq \chi_B$ und daher

$$|A| = \int_A dx = \int_I \chi_A dx \leq \int_I \chi_B dx = \int_B dx = |B|. \quad \blacksquare$$

Wir sagen, dass sich zwei Mengen A, B *nicht überlappen*, wenn sie nur Randpunkte gemeinsam haben, d.h. wenn $A \cap B \subseteq \partial A \cup \partial B$.

Satz 13.27 Seien A, B sich nicht überlappende Jordan-messbare Mengen, und sei f auf A und B Riemann-integrierbar. Dann ist

$$\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx.$$

Beweis. Nach Satz 13.24 genügt es zu zeigen, dass $\int_{A \cap B} f dx = 0$. Da außerdem

$$\left| \int_{A \cap B} f dx \right| \leq \|f\|_\infty |A \cap B|$$

ist, genügt es zu zeigen, dass $|A \cap B| = 0$. Da $A \cap B \subseteq \partial A \cup \partial B$, und da ∂A und ∂B kompakte Nullmengen sind, folgt diese Aussage aus der folgenden Behauptung:

Kompakte Nullmengen sind Jordan-messbar und besitzen den Jordan-Inhalt 0.

Wir beweisen diese Behauptung. Sei N eine kompakte Nullmenge. Da N Nullmenge ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung von N durch abzählbar viele offene Intervalle I_1, I_2, \dots mit $|I_1| + |I_2| + \dots < \varepsilon$. Da N kompakt ist, überdecken bereits endlich viele dieser Intervalle, etwa I_1, \dots, I_n , die Menge N , und es gilt $|I_1| + \dots + |I_n| < \varepsilon$. Da auch ∂N von diesen Intervallen überdeckt wird, ist ∂N Nullmenge und daher N Jordan-messbar. Für den Inhalt von N erhalten wir mit Folgerung 13.25 und Folgerung 13.26:

$$|N| \leq \left| \bigcup_{i=1}^n I_n \right| \leq \sum_{i=1}^n |I_n| < \varepsilon.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist $|N| = 0$. ■

Folgerung 13.28 Für sich nicht überlappende Jordan-messbare Mengen A, B gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Man kann auch leicht die Umkehrung zur im Beweis von Satz 13.27 formulierten Behauptung beweisen: Jede Jordan-messbare Menge mit Inhalt 0 ist Nullmenge.

Folgerung 13.29 Eine beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand Jordan-messbar ist und den Inhalt 0 hat.

Beweis. Der Rand ∂B ist kompakt, und kompakte Mengen sind genau dann Nullmengen, wenn sie Jordan-messbar sind und den Inhalt 0 besitzen. ■

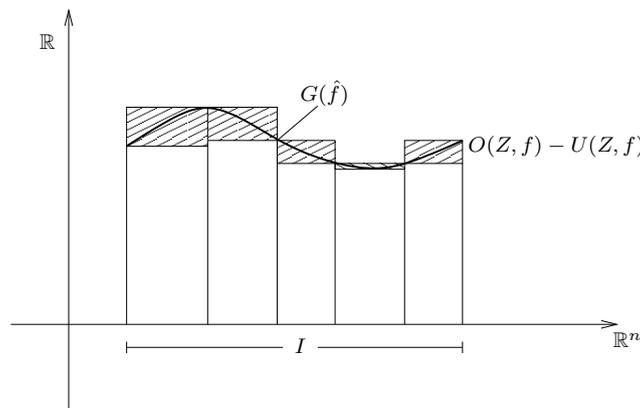
Wir haben nun schon viel über Jordan-messbare Mengen erfahren, wissen aber immer noch nicht, ob so einfache Mengen wie ein Kreis im \mathbb{R}^2 oder eine Kugel im \mathbb{R}^3 Jordan-messbar sind. Auf Grund von Folgerung 13.29 benötigen wir noch Kriterien dafür, dass eine beschränkte Menge Jordan-messbar ist und den Jordan-Inhalt 0 besitzt. Solche Mengen nennen wir auch *Jordansche Nullmengen*. Wir geben zwei solcher Kriterien an.

Satz 13.30 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist der Graph von f , d.h. die Menge

$$G(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in B, y = f(x)\},$$

eine Jordansche Nullmenge im \mathbb{R}^{n+1} .

Beweis. Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall, welches B umfaßt, und sei \hat{f} die Einschränkung von f_B auf I . Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von I mit $O(Z, \hat{f}) - U(Z, \hat{f}) < \varepsilon$. Damit haben wir sofort eine Überdeckung von $G(\hat{f})$ durch endlich viele abgeschlossene Intervalle mit einer Inhaltssumme $< \varepsilon$. Wegen $G(f) \subseteq G(\hat{f})$ gilt dies erst recht für $G(f)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■



Beispiel. Nun können wir auch zeigen, dass Kreise und Kugeln Jordan-messbar sind. Zunächst ist $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^1$ Jordan-messbar (Intervall). Auf $[-1, 1]$ sind die Funktionen $f^+(x) := \sqrt{1-x^2}$ und $f^-(x) := -\sqrt{1-x^2}$ stetig und folglich Riemann-integrierbar. Nach Satz 13.30 sind die Graphen

$$G(f^\pm) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], y = \pm\sqrt{1-x^2}\}$$

Jordansche Nullmengen. Wegen $G(f^+) \cup G(f^-) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ ist die Einheitskreislinie im \mathbb{R}^2 eine Jordansche Nullmenge. Folgerung 13.29 zeigt dann, dass die Einheitskreisscheibe $B_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ Jordan-messbar ist.

Analog betrachten wir auf der (nun als Jordan-messbar erkannten) Menge B_2 die Funktionen

$$g^\pm(x, y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2} : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

und erhalten wie oben, dass die Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 eine Jordansche Nullmenge und damit die Einheitskugel selbst Jordan-messbar ist. Durch vollständige Induktion überträgt man dieses Resultat auf Kugeln im \mathbb{R}^n . ■

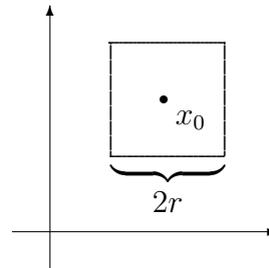
Satz 13.31 Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge und $f : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Falls $m \geq n$, so ist $f(N)$ eine Jordansche Nullmenge in \mathbb{R}^m .

Im folgenden Beweis dieses Satzes ist es bequem, mit Würfeln statt mit Intervallen zu arbeiten. Ein Intervall $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Würfel*, wenn $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \dots = b_n - a_n$. Die Zahl $b_1 - a_1$ heißt die *Kantenlänge des Würfels*. Man kann Würfel im \mathbb{R}^n als Kugeln bezüglich der Maximumnorm

$$\|(x_1, \dots, x_n)^T\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

betrachten: Für jeden Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und jedes $r > 0$ ist

$$I := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_\infty \leq r\}$$



der Würfel mit Mittelpunkt x_0 und achsenparallelen Kanten der Länge $2r$. Man überlegt sich leicht, dass sich jede Jordansche Nullmenge im \mathbb{R}^n für jedes $\varepsilon > 0$ durch endlich viele Würfel I_1, \dots, I_n mit *gleicher* Kantenlänge und mit $\sum |I_i| < \varepsilon$ überdecken lässt (genauer: Heuser, Analysis II, S. 462).

Beweis von Satz 13.31. Da sich Würfel bequem mit der Maximumnorm beschreiben lassen, arbeiten wir sowohl in \mathbb{R}^n als auch in \mathbb{R}^m mit Norm $\|\cdot\|_\infty$.

Nach Voraussetzung gibt es ein $L > 0$, so dass

$$\|g(x) - g(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty \quad \text{für alle } x, y \in N.$$

(Die Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion ist unabhängig von der gewählten Norm. Die Lipschitz-Konstante L hängt dagegen sehr wohl von der Norm ab.) Für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ überdecken wir N durch die k Würfel

$$I_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \xi_i\|_\infty \leq r\}, \quad i = 1, \dots, k$$

mit den Mittelpunkten ξ_i und der Kantenlänge $2r < 1$ so, dass $\sum_{i=1}^k |I_i| = k(2r)^n < \varepsilon$. Da $N = \bigcup_{i=1}^k (N \cap I_i)$, ist $g(N) = \bigcup_{i=1}^k g(N \cap I_i)$ (↗ Übung).

Aus jeder Menge $N \cap I_i$ wählen wir einen Punkt η_i . Für jedes $x \in N \cap I_i$ ist dann

$$\|x - \eta_i\|_\infty \leq \|x - \xi_i\|_\infty + \|\xi_i - \eta_i\|_\infty \leq 2r,$$

woraus mit der Lipschitz-Stetigkeit von g folgt:

$$\|g(x) - g(\eta_i)\|_\infty \leq L\|x - \eta_i\|_\infty \leq 2rL.$$

Folglich ist $g(N \cap I_i)$ enthalten im Würfel mit Mittelpunkt $g(\eta_i)$ und mit der Kantenlänge $4rL$. Die Menge $g(N)$ kann also durch k Würfel überdeckt werden, für deren Inhaltssumme gilt:

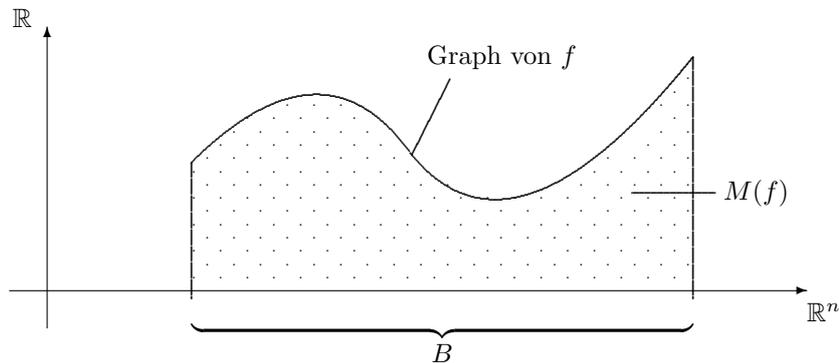
$$k(4rL)^m = k \cdot (2r)^n (2r)^{-n} (4rL)^m = L^m (2r)^{m-n} 2^m \cdot k(2r)^n < (2L)^m \varepsilon$$

(beachte: $2r < 1$, $m - n \geq 0$). Also ist $g(N)$ eine Jordansche Nullmenge. ■

13.5 Inhalt von Ordinatenmengen

Nachdem wir nun wissen, dass Kreise Jordan-messbar sind, möchten wir nun auch ihren Flächeninhalt berechnen. Allgemeiner geht es darum, Jordan-Inhalte so genannter Ordinatenmengen zu bestimmen. Die *Ordinatenmenge* $M(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist die Menge

$$M(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in B, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



Im Fall $B = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^1$ haben wir als Flächeninhalt von $M(f)$ definiert:

$$\text{Inhalt von } M(f) := \int_a^b f(x) dx.$$

Wir zeigen nun, dass der so definierte Flächeninhalt mit dem Jordanschen Inhalt von $M(f)$ übereinstimmt.

Satz 13.32 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $f \geq 0$. Dann ist die Menge $M(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Jordan-messbar, und es gilt

$$|M(f)| = \int_B f dx.$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die Jordan-Messbarkeit von $M(f)$. Dazu müssen wir zeigen, dass $\partial M(f)$ eine Nullmenge im \mathbb{R}^{n+1} ist.

Sei $S := \sup_{x \in B} f(x)$. Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ liegt sicher im Inneren von $M(f)$, wenn x im Inneren von B liegt, $0 < y < f(x)$ ist, und f in x stetig ist. Also ist $\partial M(f)$ sicher in der Vereinigung der folgenden Mengen enthalten:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{(x, 0) : x \in B\}, \\ A_2 &:= \{(x, f(x)) : x \in B\}, \\ A_3 &:= \{(x, y) : x \in \partial B, 0 \leq y \leq S\}, \\ A_4 &:= \{(x, y) : x \in B, f \text{ in } x \text{ unstetig}, 0 \leq y \leq S\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass jede dieser Mengen eine Nullmenge ist. A_1 ist Teil der Hyperebene $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^n\}$ und hat daher den Jordan-Inhalt 0 (vgl. das Beispiel aus Abschnitt 13.2.2). A_2 ist der Graph von f und hat nach Satz 13.30 den Jordan-Inhalt 0. Für A_3 geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor und überdecken ∂B durch n -dimensionale Intervalle I_1, I_2, \dots mit der Inhaltssumme $\sum |I_i| < \varepsilon/S$. Dann überdecken die $(n+1)$ -dimensionalen Intervalle $I_1 \times [0, S], I_2 \times [0, S], \dots$ die Menge A_3 , und für deren Inhaltssumme gilt: $\sum |I_i \times [0, S]| < \varepsilon/S \cdot S = \varepsilon$. Da die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist, können wir auf analoge Weise zeigen, dass auch A_4 Nullmenge ist. Damit ist die Jordan-Messbarkeit von $M(f)$ klar.

Für die Inhaltsformel sei I ein Intervall, welches B umfasst. Dann liegt $M(f)$ im Intervall $I \times [0, S]$, und es gilt nach Fubini:

$$\begin{aligned} |M(f)| &= \int_{I \times [0, S]} \chi_{M(f)} d(x, y) = \int_I \left(\int_0^S \chi_{M(f)}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_I \left(\int_0^{f_B(x)} 1 dy \right) dx = \int_I f_B(x) dx = \int_B f dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Offenbar gilt auch die folgende Verallgemeinerung von Satz 13.32.

Satz 13.33 Seien $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f_1, f_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und sei $f_1(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in B$. Dann ist die Menge

$$M(f_1, f_2) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in B, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

Jordan-messbar und

$$|M(f_1, f_2)| = \int_B (f_2 - f_1) dx.$$

Beispiel. Seien $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ sowie $B = [x_0 - r, x_0 + r]$, und sei

$$f_1(x) := y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}, \quad f_2(x) := y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}.$$

Dann ist $M(f_1, f_2)$ die Kreisscheibe mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius r . Für ihren Inhalt finden wir

$$\begin{aligned}
|M(f_1, f_2)| &= 2 \int_{x_0-r}^{x_0+r} \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - t^2} dt \\
&= 2 \left[\frac{1}{2} t + \sqrt{r^2 - t^2} + \frac{1}{2} r^2 \arcsin \frac{t}{r} \right]_{-r}^r = \pi r^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

13.6 Integration über Normalbereiche

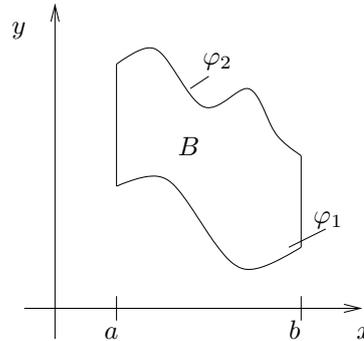
Unter einem *Normalbereich bzgl. der x-Achse* versteht man eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der Gestalt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}, \quad (13.4)$$

wobei φ_1, φ_2 stetige Funktionen auf $[a, b]$ mit $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ für alle $x \in [a, b]$ sind.

Satz 13.34 Sei B wie in (13.4) und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$\int_B f d(x, y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx.$$



Beweis. Sei $I := [a, b] \times [m, M]$ ein Rechteck, welches B umfasst. Nach Fubini ist

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_m^M f_B(x, y) dy dx.$$

Für jedes feste $x \in [a, b]$ ist offenbar

$$\int_m^M f_B(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad \blacksquare$$

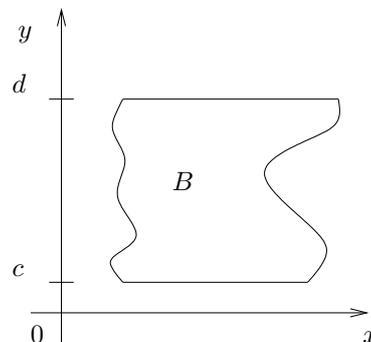
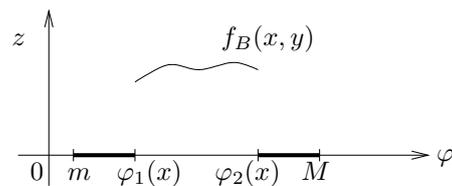
Analog heißt $B :=$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

ein *Normalbereich bezüglich der y-Achse*. Es gilt

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Ähnlich erklärt man Normalbereiche im \mathbb{R}^3 .



Sei $B_1 := [a, b]$. Auf B_1 sind stetige Funktionen φ_1, ψ_1 gegeben mit $\varphi_1(x) \leq \psi_1(x)$ für alle $x \in B_1$. Dann sei

$$B_2 := \{(x, y) : x \in B_1, \varphi_1(x) \leq y \leq \psi_1(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Auf B_2 sind stetige Funktionen φ_2, ψ_2 gegeben mit $\varphi_2(x, y) \leq \psi_2(x, y)$ für alle $(x, y) \in B_2$. Dann ist

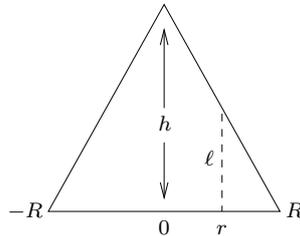
$$B_3 := \{(x, y, z) : (x, y) \in B_2, \varphi_2(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ein Normalbereich in \mathbb{R}^3 , und es gilt

$$\int_{B_3} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \int_{\varphi_2(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Beispiel. Ein Kreiskegel mit Radius R und Höhe h ist ein Normalbereich im \mathbb{R}^3 . Wir haben etwa

$$\begin{aligned} B_1 &= [-R, R], \\ B_2 &= \{(x, y) : x \in [-R, R], -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\} \\ &\quad (= \text{Grundfläche des Kegels}), \\ B_3 &= \{(x, y, z) : (x, y) \in B_2, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}\}. \end{aligned}$$



(Beachte: (x, y) hat von $(0, 0)$ den Abstand $r := \sqrt{x^2 + y^2}$.) Die Länge ℓ der gestrichelten Strecke ist nach dem Strahlensatz

$$h : R = \ell : (R - r) \quad \text{bzw.} \quad \ell = \frac{hR - hr}{R} = h - \frac{h}{R}r.$$

Für das Volumen dieses Kegels finden wir daher

$$\begin{aligned} V &= \int_{B_3} d(x, y, z) = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{h-\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}} dz dy dx \\ &= \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \right) dy dx \\ &= \int_{-R}^R \left(hy - \frac{h}{R} \left(\frac{y}{2}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{2} \ln(y + \sqrt{x^2+y^2}) \right) \right) \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-R}^R \left(2h\sqrt{R^2 - x^2} - h\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^2 h}{2R} \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - x^2}}{R - \sqrt{R^2 - x^2}} \right) dx \\
&= 2h \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^2}{2R} \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - x^2}}{R - \sqrt{R^2 - x^2}} \right) dx.
\end{aligned}$$

Wir substituieren $x = R \sin t$, $dx = R \cos t dt$ und erhalten

$$\begin{aligned}
V &= 2h \int_0^{\pi/2} \left(R \cos t - \frac{R}{2} \sin^2 t \ln \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \right) R \cos t dt \\
&= 2hR^2 \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t - \frac{1}{2} \sin^2 t \cos t \ln \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \right) dt.
\end{aligned}$$

Das Integral $\sin^2 t \cos t \ln \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t}$ kann durch partielle Integration bestimmt werden (der Faktor $\sin^2 t \cos t$ wird integriert und liefert $\frac{1}{3} \sin^3 t$; der Faktor $\ln \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t}$ wird differenziert und ergibt $\frac{-2}{\sin t}$). Eingesetzt findet man schließlich

$$V = 2hR^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \sin^3 \varphi \ln \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \right),$$

also

$$V = \frac{1}{3} \pi h R^2. \quad \blacksquare$$

13.7 Die Substitutionsregel

Nach dieser aufwändigen Rechnung für ein elementares Resultat fragt man sich, ob man nicht von vornherein die Rechnung hätte vereinfachen können durch eine andere Beschreibung des Kegels, etwa in Zylinderkoordinaten (die Substitutionsregel mussten wir ja ohnehin verwenden). Beschreiben wir die Grundfläche in Polarkoordinaten, so wird der Kegel offenbar beschrieben durch

$$\{(r, \varphi, z) : r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, h - hr/R]\},$$

was eine wesentlich einfachere Integration erwarten lässt. *Frage:* Wie haben wir im Integral $\int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$ den Ausdruck $d(x, y, z)$ zu transformieren, wenn wir von (x, y, z) zu neuen Koordinaten, etwa r, φ und z , übergehen?

A Motivation. Zu berechnen ist das Integral

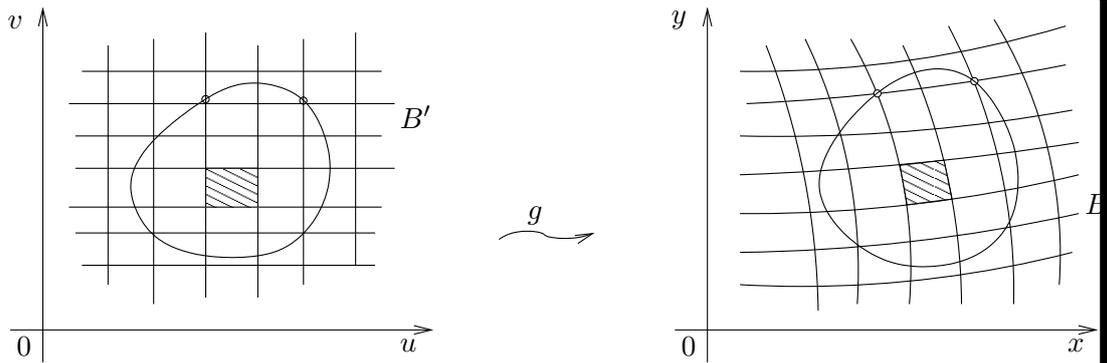
$$\int_B f(x, y) d(x, y)$$

über einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$, versehen mit x, y -Koordinaten. Die Substitution $x := \varphi(u, v)$, $y := \psi(u, v)$ führt neue Veränderliche ein. Durch diese Substitution

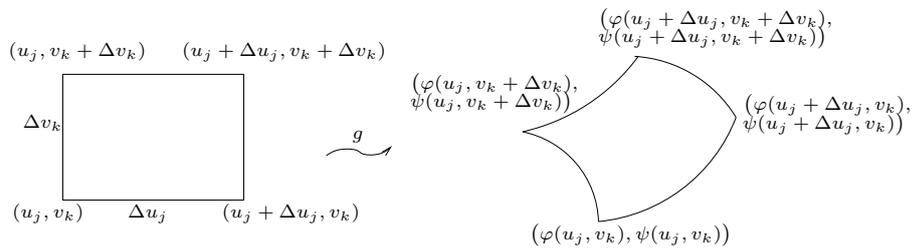
werde ein Bereich $B' \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Koordinaten u, v (wir sagen auch: ein Bereich der uv -Ebene) injektiv auf B abgebildet; genauer: die Abbildung

$$g : B' \rightarrow B, \quad (u, v) \mapsto g(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

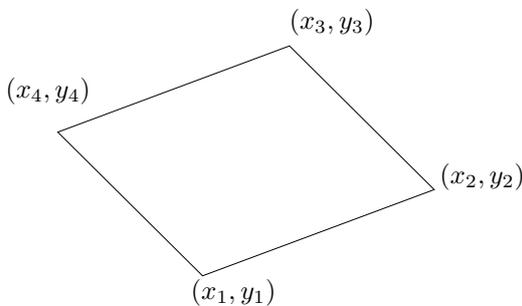
ist eine Bijektion von B' auf B . Diese Abbildung übersetzt ein Rechtecknetz über B' in ein „krummliniges Netz“ über B :



Wir sehen uns genauer an, wie das schraffierte Rechteck in der uv -Ebene auf das „krummlinige“ schraffierte Parallelogramm in der xy -Ebene abgebildet wird:

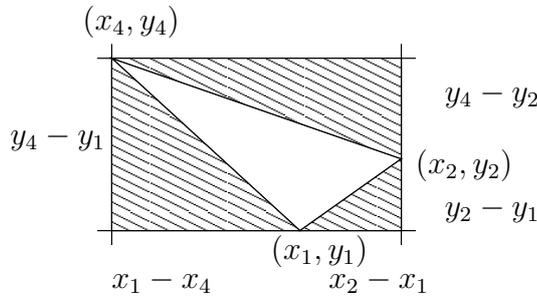


Der Flächeninhalt dieses Rechtecks (vgl. die Definition des Riemann-Integrals über B') beträgt $\Delta u_j \Delta v_k$. Um den Flächeninhalt des „krummlinigen“ Parallelogramms zu berechnen, nehmen wir an, dass Δu_j und Δv_k so klein sind, dass das „krumme“ Parallelogramm fast ein echtes Parallelogramm ist. Für den Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Eckpunkten $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$ gilt



$$\text{Fläche} = |(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)|. \quad (13.5)$$

Dies läßt sich leicht ableiten, indem man z.B. von der unten gezeichneten Rechteckfläche die schraffierten Dreiecksflächen subtrahiert:



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{ Parallelogrammfläche} &= \text{Fläche des weißen Dreiecks} \\ &= (y_4 - y_1)((x_2 - x_1) + (x_1 - x_4)) - \frac{1}{2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) \\ &\quad - \frac{1}{2}(x_1 - x_4)(y_4 - y_1) - \frac{1}{2}(y_4 - y_2)(x_2 - x_4). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Determinanten läßt sich (13.5) schreiben als

$$\text{Fläche} = \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix} \right|.$$

Die Fläche des „krummen“ Parallelogramms ist also ungefähr gleich

$$\left| \det \begin{pmatrix} \varphi(u_j + \Delta u_j, v_k) - \varphi(u_j, v_k) & \varphi(u_j, v_k + \Delta v_k) - \varphi(u_j, v_k) \\ \psi(u_j + \Delta u_j, v_k) - \psi(u_j, v_k) & \psi(u_j, v_k + \Delta v_k) - \psi(u_j, v_k) \end{pmatrix} \right|.$$

Wir nehmen nun an, dass φ und ψ differenzierbar sind. Für kleines Δu_j ist dann

$$\varphi(u_j + \Delta u_j, v_k) - \varphi(u_j, v_k) \approx \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_j, v_k) \cdot \Delta u_j.$$

Der Ausdruck (13.4) ist daher ungefähr gleich

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_j, v_k) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_j, v_k) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_j, v_k) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_j, v_k) \end{pmatrix} \right| \Delta u_j \Delta v_k.$$

Diese Matrix ist aber nichts anderes als die Jacobi-Matrix von g an der Stelle (u_j, v_k) . Mit anderen Worten: (13.4) ist etwa gleich

$$|\det g'(u_j, v_k)| \cdot \Delta u_j \Delta v_k.$$

Wir erwarten daher näherungsweise

$$\int_B f(x, y) d(x, y) \approx \sum_{j,k} f(\varphi(u_j, v_k), \psi(u_j, v_k)) |\det g'(u_j, v_k)| \Delta u_j \Delta v_k$$

und somit die Substitutionsregel

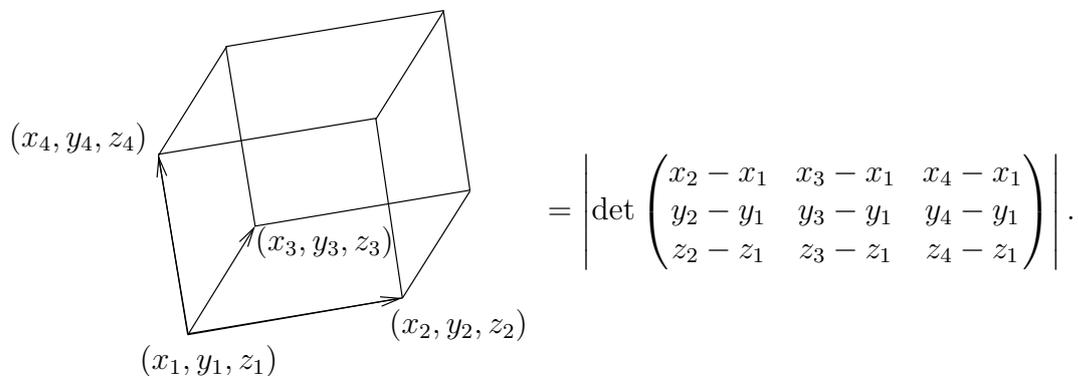
$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{B'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |\det g'(u, v)| d(u, v).$$

Es zeigt sich, dass die hier „abgeleitete“ Formel unter entsprechenden Voraussetzungen tatsächlich gilt und dass sie auf Funktionen mehrerer Veränderlicher verallgemeinert werden kann.

B Determinanten und Volumina von Parallelepipeden. Mit Hilfe der Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

kann man das Volumen eines Parallelepipeds im \mathbb{R}^3 beschreiben:



$$= \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix} \right|.$$

Zur Erinnerung: Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine $n \times n$ -Matrix, und A_{ij} sei die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die aus A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht. Dann definiert man:

$$\det A := a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} + \dots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det A_{1n}.$$

Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix steht in engem Zusammenhang zum Volumen eines Parallelepipeds im \mathbb{R}^n .

C Der allgemeine Substitutionssatz.

Satz 13.35 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei injektiv und stetig differenzierbar. Die Determinante $\det g'(t)$ sei auf G entweder überall positiv oder überall negativ. Weiter sei T eine kompakte und Jordan-messbare Teilmenge von G , und f sei eine auf $g(T)$ stetige reellwertige Funktion. Dann ist $g(T)$ kompakt und Jordan-messbar, f ist auf $g(T)$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{g(T)} f(x) dx = \int_T f(g(t)) |\det g'(t)| dt. \quad (13.6)$$

Die Formel (13.6) gilt auch dann noch, wenn – entgegen den obigen Voraussetzungen – die Determinante $\det g'(t)$ auf einer Teilmenge N von T verschwindet oder wenn $g|_N$ auf einer Teilmenge N von T nicht injektiv ist, sofern N den Jordan-Inhalt 0 hat.

Der Beweis kann z.B. mit vollständiger Induktion nach n erfolgen, ist aber recht aufwändig (vgl. Heuser, S. 475–485). Wir werden in der Vorlesung zur „Maß- und Integrationstheorie“ einen Beweis kennenlernen.

D Beispiele: Transformation auf Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten. Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten (x, y) und den Polarkoordinaten (r, φ) eines Punktes im \mathbb{R}^2 ist gegeben durch

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Ein Integral gemäß Satz 13.35 auf Polarkoordinaten zu transformieren heißt, die Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

vorzunehmen. Es ist

$$g'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und

$$\det g'(r, \varphi) = \cos \varphi \cdot r \cos \varphi - (-r \sin \varphi) \sin \varphi = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

Für $r > 0$ ist also $\det g'(r, \varphi)$ stets positiv. Weiter ist klar, dass g den Bereich

$$\{(r, \varphi) : r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

injektiv auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ abbildet und dass g insbesondere auf dem Gebiet

$$G := \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

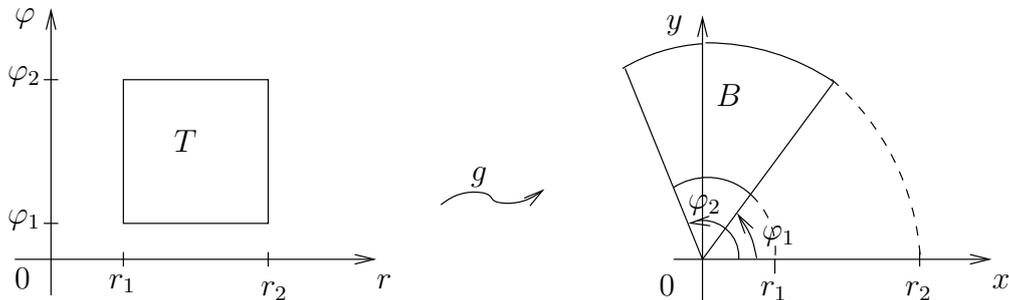
injektiv ist. Auf diesem Gebiet können wir somit Satz 13.35 anwenden und erhalten:

Folgerung 13.36 Ist $B = g(T)$, wobei $T \subseteq G$ kompakt und Jordan-messbar ist, so kann $\int_B f(x, y) d(x, y)$ auf Polarkoordinaten transformiert werden. Dabei gilt

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi). \quad (13.7)$$

Ist beispielsweise T ein achsenparalleles Rechteck, so ist $B = g(T)$ ein Kreisring, und wir haben nach Fubini

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (13.8)$$



In der Praxis ist T häufig ein Rechteck, welches im Streifen

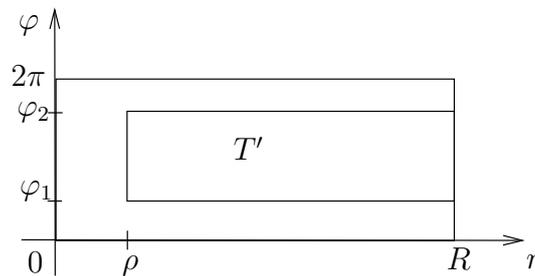
$$\{(r, \varphi) : r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

liegt und Teile des Randes dieses Streifens enthält. Wir überlegen uns, dass die Formel (13.8) auch in diesem Fall noch gilt. Dazu sei

$$T = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

und $T' \subseteq T$ sei ein Rechteck der Gestalt

$$T' = \{(r, \varphi) : \varrho \leq r \leq R, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\} \quad \text{mit } \varrho > 0 \text{ und } 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi.$$



Auf T' gilt (13.8), d.h. es ist

$$\int_{g(T')} f(x, y) d(x, y) = \int_{T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi),$$

und aus

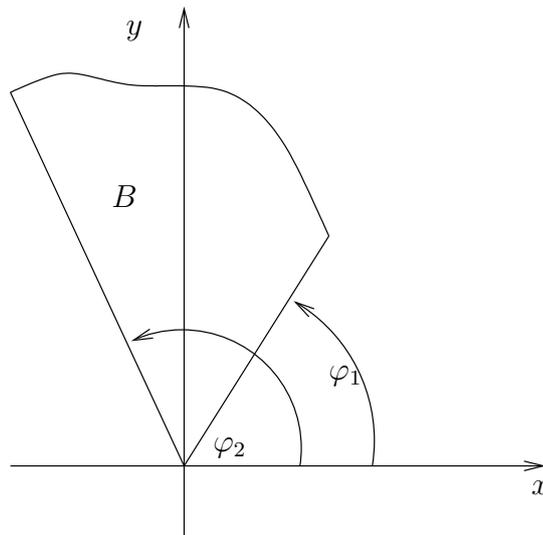
$$\begin{aligned} & \left| \int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) - \int_{T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) \right| \\ &= \left| \int_{T \setminus T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) \right| \\ &\leq \sup_{r, \varphi} |f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r| \cdot |T \setminus T'| \end{aligned}$$

folgt, dass $\int_{T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi)$ gegen $\int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi)$ strebt, wenn $\varrho \rightarrow 0$, $\varphi_1 \rightarrow 0$ und $\varphi_2 \rightarrow 2\pi$.

Ähnlich erhält man, dass auch $\int_{g(T')} f(x, y) d(x, y)$ gegen $\int_{g(T)} f(x, y) d(x, y)$ strebt. Zusammengefasst:

Folgerung 13.37 Ist T ein Rechteck $[r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ mit $0 \leq r_1 < r_2$ und $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$, und ist f auf $g(T) = B$ stetig, so gilt (13.8).

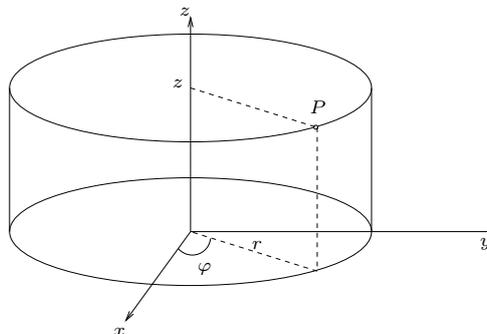
Anwendung: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte (r, φ) mit $0 \leq r \leq \varrho(\varphi)$ und $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, wobei ϱ auf $[\varphi_1, \varphi_2]$ stetig und positiv sei. Dann ist der Inhalt von B gleich



$$|B| = \int_B 1 d(x, y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{\varrho(\varphi)} r dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r(\varphi)^2}{2} d\varphi. \quad \blacksquare$$

Zylinderkoordinaten. Die Zylinderkoordinaten (r, φ, z) eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten (x, y, z) sind

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$



Für die Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

gilt

$$\det g'(r, \varphi, z) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Ähnlich wie bei Polarkoordinaten sieht man, dass die Substitutionsformel

$$\int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z) \quad (13.9)$$

sicher immer dann gilt, wenn T eine kompakte und Jordan-messbare Teilmenge des Gebietes

$$G = \{(r, \varphi, z) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty\}$$

und $B = g(T)$ ist. Die Formel (13.9) gilt aber auch dann noch, wenn T ein Quader

$$T = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [z_1, z_2] \quad \text{mit } 0 \leq r_1 < r_2, 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$$

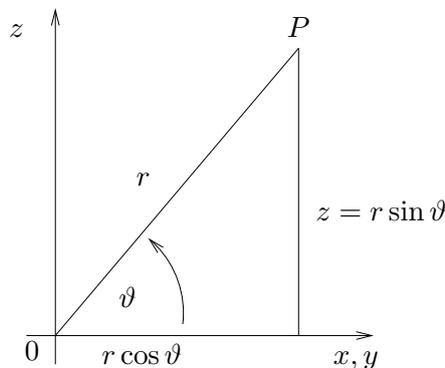
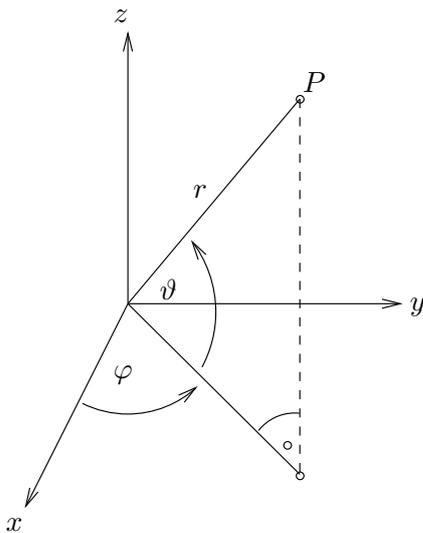
ist. In diesem speziellen Fall geht (13.9) über in

$$\int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Kugelkoordinaten. Der Zusammenhang zwischen Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) und kartesischen Koordinaten (x, y, z) eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$ wird hergestellt durch

$$x = r \cos \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \cos \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \sin \vartheta;$$

dabei ist $r \geq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.



Für die Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

findet man

$$\det g'(r, \vartheta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \cos \varphi & -r \cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix} = -r^2 \cos \vartheta.$$

Diese Determinante ist negativ, wenn $r > 0$ und $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$. Wie oben gilt für stetiges f die Transformationsformel

$$\int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_T f(r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta) r^2 \cos \vartheta d(r, \vartheta, \varphi),$$

wenn $B = g(T)$ und T eine kompakte und Jordan-messbare Teilmenge von

$$G = \{(r, \vartheta, \varphi) : r > 0, -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

ist. Diese Formel gilt auch dann noch, wenn

$$T = [r_1, r_2] \times [\vartheta_1, \vartheta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$$

mit $0 \leq r_1 < r_2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ ist. Insbesondere ist dann nach Fubini

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta) r^2 \cos \vartheta dr d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

Beispiel: Volumen einer Kugel. Die Kugel B mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Radius R ist das Bild des Quaders

$$T = [0, R] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$$

unter der oben beschriebenen Transformation. Wir finden daher

$$\begin{aligned} V = \int_B d(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^R r^2 \cos \vartheta dr d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R^3}{3} \cos \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3} \sin \vartheta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \frac{2}{3} R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Man vergleiche diese Rechnung mit der mühsamen Herleitung der Formel für das Kugelvolumen in Abschnitt 13.6.

14 Oberflächenintegrale und Integralsätze

Nachdem wir im vergangenen Kapitel gesehen haben, wie man das Volumen eines dreidimensionalen Körpers (z.B. das Volumen einer Kugel) mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen kann, wenden wir uns nun den Flächeninhalten gekrümmter Flächen zu (wie z.B. der Oberfläche einer Kugel), für die wir einen geeigneten Integralbegriff entwickeln.

14.1 Flächen, Tangenten und Normalen

Wir haben früher Kurven als Bilder von Intervallen bzgl. stetiger Abbildungen beschrieben. Ganz analog definieren wir nun Flächenstücke als Bilder ebener Bereiche bzgl. geeigneter Abbildungen.

Definition 14.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beschränkte offene Menge, und ihre Abschließung \bar{D} sei Jordan-messbar. Weiter sei $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$\text{rang } F'(x_1, x_2) = 2 \quad \text{für alle } (x_1, x_2) \in D. \quad (14.1)$$

Dann heißt das Bild von \bar{D} unter F , d.h. die Menge

$$\mathcal{F} := \{F(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \bar{D}\} \quad (14.2)$$

ein Flächenstück im \mathbb{R}^3 und die Abbildung $F : \bar{D} \rightarrow \mathcal{F}$ heißt eine Parameterdarstellung des Flächenstücks \mathcal{F} oder kurz eine Fläche.

Genau wie bei Wegen und Kurven unterscheiden wir sorgfältig zwischen der Abbildung F und ihrem Bild \mathcal{F} . Offenbar kann es für ein- und dasselbe Flächenstück \mathcal{F} verschiedene Parametrisierungen geben.

Wichtige Vereinbarung. Wir haben früher die Differenzierbarkeit einer Abbildung $F : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ nur für offene Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^2$ erklärt. Die stetige Differenzierbarkeit von $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ haben wir wie folgt zu verstehen: Die Funktion F läßt sich zu einer stetig differenzierbaren Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf eine offene Menge $G \supset \bar{D}$ fortsetzen. Diese Menge G ist für die Definition des Flächenstücks offenbar unerheblich. Wir möchten jedoch auch in den Randpunkten von D die partiellen Ableitungen F_{x_1} und F_{x_2} bilden können und verlangen daher, dass sich F auf eine offene Umgebung G von \bar{D} stetig differenzierbar fortsetzen läßt. ■

Die Rangbedingung (14.1) wird nur für Punkte aus D gefordert; auf dem Rand $\partial D = \bar{D} \setminus D$ muss sie nicht erfüllt sein. Mit

$$F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2), F_3(x_1, x_2))^T$$

lautet die Rangbedingung (14.1)

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 2 \quad (14.3)$$

in allen Punkten von D .

Beispiel 1: Kugeloberfläche. Sei $D = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ und $r > 0$. Dann ist \bar{D} das Rechteck $[0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Sei weiter

$$F(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)$$

für $(u, v) \in \bar{D}$. Dann ist F stetig differenzierbar auf \bar{D} (und sogar auf ganz \mathbb{R}^2), und die Funktionalmatrix

$$F'(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v & -r \cos u \sin v \\ r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ 0 & r \cos v \end{pmatrix}$$

hat für alle $(u, v) \in D$ den Rang 2. Das zugehörige Flächenstück \mathcal{F} ist die Oberfläche einer Kugel um den Nullpunkt mit dem Radius r . ■

Beispiel 2: Funktionsgraphen. Sei $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) := (u, v, f(u, v))^T.$$

Dann ist auch F stetig differenzierbar auf \bar{D} , und die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

von F hat offenbar den Rang 2. Das durch F definierte Flächenstück ist gerade der Graph von f . Mit $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$ und $f(u, v) = uv$ erhält man beispielsweise eine Sattelfläche (hyperbolisches Paraboloid). ■

Beispiel 3: Ebenen. Seien $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ und $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ linear unabhängige Vektoren und $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Auf $\bar{D} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ hat die Funktion $F(u, v) = ua + vb + x_0$ die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix},$$

die wegen der linearen Unabhängigkeit von a und b den Rang 2 hat. Das zugehörige Flächenstück ist ein Teil der durch a und b aufgespannten und durch x_0

verlaufenden Ebene. ■

Sei $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung eines Flächenstücks \mathcal{F} . Ist durch $X = (X_1, X_2)^T : [a, b] \rightarrow \overline{D}$ ein stetig differenzierbarer Weg in \overline{D} gegeben, so ist

$$Y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad Y(t) = F(X(t))$$

ein stetig differenzierbarer Weg, der komplett in \mathcal{F} verläuft. Für $t_0 \in [a, b]$ wird die Richtung der Tangente an den Weg Y im Punkt $Y(t_0) = F(X(t_0))$ beschrieben durch den Vektor

$$\dot{Y}(t_0) = F_u(X(t_0))\dot{X}_1(t_0) + F_v(X(t_0))\dot{X}_2(t_0) \quad (14.4)$$

(Kettenregel!) mit

$$F_u(X(t_0)) = \frac{\partial F}{\partial u}(X(t_0)) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial u}(X(t_0)), \frac{\partial F_2}{\partial u}(X(t_0)), \frac{\partial F_3}{\partial u}(X(t_0)) \right)$$

und

$$F_v(X(t_0)) = \frac{\partial F}{\partial v}(X(t_0)) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}(X(t_0)), \frac{\partial F_2}{\partial v}(X(t_0)), \frac{\partial F_3}{\partial v}(X(t_0)) \right).$$

Die Rangbedingung (14.1) ist äquivalent zur linearen Unabhängigkeit der beiden Vektoren $F_u(X(t_0))$ und $F_v(X(t_0))$ für alle $X(t_0) \in D$. Wir schreiben $X(t_0) = (u_0, v_0)$. Betrachten wir alle Wege X durch den Punkt (u_0, v_0) , so können in (14.4) die Ableitungen $\dot{X}_1(t_0)$ und $\dot{X}_2(t_0)$ beliebige Werte annehmen. Die Vektoren $F_u(u_0, v_0)$ und $F_v(u_0, v_0)$ spannen also die komplette *Tangentialebene an die Fläche F im Punkt $F(u_0, v_0)$* auf. Eine Beschreibung der Tangentialebene in Parameterform lautet daher

$$\{F(u_0, v_0) + \lambda F_u(u_0, v_0) + \mu F_v(u_0, v_0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \quad (14.5)$$

Den *Normalenvektor an die Fläche $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ im Punkt $F(u, v)$* mit $(u, v) \in D$ erklären wir durch das Vektorprodukt

$$N(u, v) := \frac{F_u(u, v) \times F_v(u, v)}{\|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\|}. \quad (14.6)$$

(Man beachte, dass $F_u(u, v) \times F_v(u, v) \neq 0$, da beide Vektoren linear unabhängig sind.) Aus den Eigenschaften des Vektorprodukts wissen wir, dass der Vektor $N(u, v)$ senkrecht auf $F_u(u, v)$ und $F_v(u, v)$ und damit auf der gesamten Tangentialebene (14.5) steht. Außerdem hat er die Länge 1, so dass man auch vom *Normaleneinheitsvektor* spricht.

Es stellt sich die Frage, inwieweit die eingeführten Begriffe (Tangential- und Normalenvektoren) von der Parametrisierung F oder nur vom Flächenstück \mathcal{F} abhängen. Dazu zunächst eine Definition.

Definition 14.2 (a) Seien D, E offen in \mathbb{R}^2 . Eine bijektive Abbildung $\varphi : \overline{D} \rightarrow \overline{E}$ heißt ein Diffeomorphismus, wenn φ und die Umkehrabbildung φ^{-1} stetig differenzierbar sind.

(b) Zwei Parameterdarstellungen $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $G : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißen äquivalent, wenn es einen Diffeomorphismus $\varphi : \overline{D} \rightarrow \overline{E}$ gibt mit $F = G \circ \varphi$ und $\det \varphi' > 0$ auf \overline{D} .

Sind F und G äquivalent, so sagt man auch, dass sie durch eine Parametertransformation φ auseinander hervorgehen. Es gilt nun:

Bei äquivalenten Parametertransformationen bleiben die wesentlichen Flächengrößen und Flächeneigenschaften (wie Tangentialebenen und Normalenvektoren) unverändert.

Anschaulich ist klar, dass jedes Flächenstück in jedem Punkt genau einen Tangentialraum, aber zwei Normaleneinheitsvektoren (nach „oben“ und nach „unten“) besitzt. Ist $F = G \circ \varphi$, so liefern F und G den gleichen Normalenvektor, wenn $\det \varphi' > 0$, und sie liefern entgegengesetzte Normalenvektoren, wenn $\det \varphi' < 0$. In letzterem Fall sagt man auch, dass die *Orientierung* von F gewechselt wird.

Beispiel 4. Seien D und F wie in Beispiel 1 (Kugeloberfläche). Dann ist

$$\begin{aligned} F_u(u, v) &= (-r \sin u \cos v, r \cos u \cos v, 0)^T, \\ F_v(u, v) &= (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r \cos v)^T, \\ F_u(u, v) \times F_v(u, v) &= (r^2 \cos u \cos^2 v, r^2 \sin u \cos^2 v, r^2 \sin v \cos v), \\ \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| &= r^2 \cos v \end{aligned}$$

und damit

$$N(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

für alle $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$. ■

Beispiel 5. Sind D , f und F wie in Beispiel 2 (Funktionsgraphen), so ist

$$\begin{aligned} F_u &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right)^T, & F_v &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)^T, \\ F_u \times F_v &= \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right), & \|F_u \times F_v\| &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

und damit schließlich

$$N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right). \quad \blacksquare$$

Beispiel 6. Sei $D = E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$. Die Parametrisierungen

$$F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) = (u, v, uv)^T$$

und

$$G : \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G(u, v) = (u, -v, -uv)^T$$

liefern das gleiche Flächenstück. Wir bestimmen die Normalenvektoren im Punkt $F(0, 0) = G(0, 0) = (0, 0, 0)^T$. Zunächst ist

$$F_u(u, v) = (1, 0, v)^T, \quad F_v(u, v) = (0, 1, u)^T,$$

also

$$F_u(u, v) \times F_v(u, v) = (-v, -u, 1)^T \quad \text{und} \quad F_u(0, 0) \times F_v(0, 0) = (0, 0, 1)^T.$$

Andererseits ist

$$G_u(u, v) = (1, 0, -v)^T, \quad G_v(u, v) = (0, -1, -u)^T$$

und damit

$$G_u(u, v) \times G_v(u, v) = (-v, u, -1)^T \quad \text{und} \quad G_u(0, 0) \times G_v(0, 0) = (0, 0, -1)^T.$$

Bei Verwendung von F erhalten wir also $(0, 0, 1)^T$ als Normaleneinheitsvektor im Punkt $(0, 0, 0)^T$ an die Sattelfläche, und bei Verwendung von G den Vektor $(0, 0, -1)^T$. Man beachte, dass zwar F und G durch den Diffeomorphismus

$$\varphi : \bar{D} \rightarrow \bar{E}, \quad (u, v)^T \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u, -v)^T$$

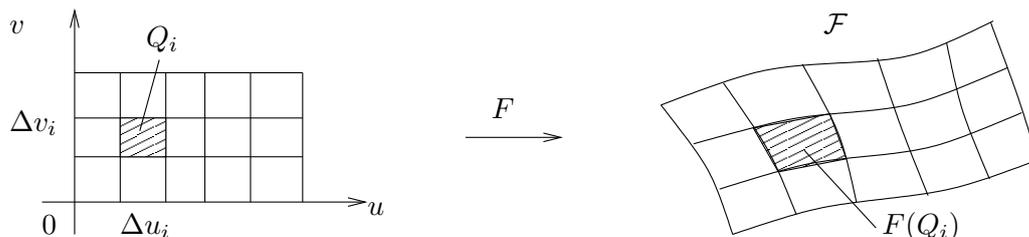
auseinander hervorgehen, dass aber

$$\det \varphi'(u, v) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

ist. Also sind F und G nicht zueinander äquivalent. ■

14.2 Flächenintegrale

Wir wollen nun Flächenintegrale definieren. Als Motivation gehen wir ähnlich vor wie bei der „Herleitung“ der Substitutionsregel in Abschnitt 13.7. Sei $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung eines Flächenstückes \mathcal{F} , wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass \bar{D} ein achsenparalleles Rechteck in der uv -Ebene ist. Das Rechteck \bar{D} sei in Teilrechtecke Q_1, \dots, Q_m zerlegt. Ihre Bilder $F(Q_1), \dots, F(Q_m)$ nennen wir *Maschen*. Aus diesen Maschen setzt sich das Flächenstück \mathcal{F} zusammen.



Ist die Rechteckzerlegung von \overline{D} fein genug, so haben die Maschen nahezu die Gestalt eines Parallelogramms. Ist Q_i ein Teilrechteck in \overline{D} mit den Seitenlängen Δu_i und Δv_i und ist (u_i, v_i) der linke untere Eckpunkt von Q_i , so ist die Masche $F(Q_i)$ ungefähr gleich dem Parallelogramm, das von den Vektoren

$$F(u_i + \Delta u_i, v_i) - F(u_i, v_i) \quad \text{und} \quad F(u_i, v_i + \Delta v_i) - F(u_i, v_i)$$

aufgespannt wird. Diese Vektoren sind nach Definition der partiellen Ableitungen in etwa gleich

$$F_u(u_i, v_i)\Delta u_i \quad \text{und} \quad F_v(u_i, v_i)\Delta v_i.$$

Diese beiden Vektoren spannen ein Parallelogramm auf, dessen Flächeninhalt gleich der Länge des Vektorprodukts dieser Vektoren ist, also gleich der Länge von

$$\Delta\sigma_i := (F_u(u_i, v_i) \times F_v(u_i, v_i)) \Delta u_i \Delta v_i.$$

Man kann daher $\|\Delta\sigma_i\|$ als ungefähren Flächeninhalt der Masche $F(Q_i)$ ansehen und

$$\sum_{i=1}^m \|\Delta\sigma_i\| = \sum_{i=1}^m \|F_u(u_i, v_i) \times F_v(u_i, v_i)\| \Delta u_i \Delta v_i \quad (14.7)$$

als Näherung für den Flächeninhalt des Flächenstückes \mathcal{F} . Ist D kein Rechteck, so schöpfen wir \overline{D} von innen durch rechteckzerlegte Bereiche aus. Lassen wir auf der rechten Seite von (14.7) die Zerlegung immer feiner werden, d.h. lassen wir $\max_i\{\Delta u_i, \Delta v_i\}$ gegen 0 streben, so gelangen wir zum Integral

$$\iint_{\overline{D}} \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| d(u, v).$$

Um sicherzustellen, dass dies tatsächlich dem Flächeninhalt von \mathcal{F} entspricht, müssen wir noch (ähnlich wie bei Kurven) garantieren, dass nicht Teile des Flächenstücks mehrfach durchlaufen werden.

Definition 14.3 Die Parameterdarstellung $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ und das durch sie definierte Flächenstück heißen doppelpunktfrei, wenn F auf D eineindeutig ist.

Definition 14.4 Ist $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine doppelpunktfreie Parameterdarstellung eines Flächenstückes \mathcal{F} , so ist der Flächeninhalt von \mathcal{F} die Zahl

$$I(\mathcal{F}) := \iint_{\overline{D}} \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| d(u, v). \quad (14.8)$$

Das Integral in (14.8) schreibt man auch als $\int_{\mathcal{F}} d\sigma$, wobei $d\sigma$ symbolisch für

$$\|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| d(u, v)$$

steht und *Flächenelement* heißt. Definition 14.4 wird wie folgt verallgemeinert:

Definition 14.5 Durch $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei ein Flächenstück \mathcal{F} gegeben, und $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig auf \mathcal{F} . Dann heißt das Integral

$$\iint_{\overline{D}} H(F(u, v)) \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| d(u, v) =: \int_{\mathcal{F}} H d\sigma \quad (14.9)$$

das Flächenintegral von H über \mathcal{F} (oder auch Flächenintegral erster Art).

Als Motivation kann man sich ein elektrostatisch geladenes Flächenstück \mathcal{F} vorstellen, wobei die Ladungsdichte H in jedem Punkt von \mathcal{F} bekannt und die Gesamtladung gesucht ist.

Man kann (und muss) sich überlegen, dass die Integrale in (14.8) und (14.9) bei äquivalenten Parametertransformationen und Orientierungswechsel invariant bleiben. Im Falle der Doppelpunktfreiheit ist die Schreibweise rechts in (14.9) völlig eindeutig, da je zwei zugehörige Parameterdarstellungen entweder äquivalent oder entgegengesetzt orientiert sind.

Beispiel 7. Seien D und F wie in Beispiel 1 (Kugeloberfläche). Mit Beispiel 4 erhalten wir

$$I(\mathcal{F}) = \iint_{\overline{D}} r^2 \cos v d(u, v) = r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v dv du = 4\pi r^2$$

als Flächeninhalt der Kugeloberfläche. ■

Beispiel 8. Sind D , f und F wie in Beispiel 2 (Funktionsgraphen), so ist

$$I(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} d\sigma = \iint_{\overline{D}} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} d(u, v)$$

der Flächeninhalt des Funktionsgraphen. Vergleichen Sie dieses Resultat mit der entsprechenden Formel für die Kurvenlänge des Graphen einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 2 in Abschnitt 11.2). ■

Definition 14.6 Durch $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei ein Flächenstück \mathcal{F} gegeben, und $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei ein stetiges Vektorfeld auf \mathcal{F} . Dann heißt

$$\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma} := \iint_{\overline{D}} H(F(u, v)) \cdot (F_u(u, v) \times F_v(u, v)) d(u, v) \quad (14.10)$$

das Flächenintegral von H über \mathcal{F} (auch Flächenintegral zweiter Art). (Der Punkt steht für das Skalarprodukt.)

Schreiben wir

$$\begin{aligned} F_u(u, v) \times F_v(u, v) &= \frac{F_u(u, v) \times F_v(u, v)}{\|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\|} \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| \\ &= N(u, v) \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\|, \end{aligned}$$

so geht das Integral auf der rechten Seite von (14.10) über in

$$\iint_{\overline{D}} H(F(u, v)) \cdot N(u, v) \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| d(u, v), \quad (14.11)$$

so dass man das Integral $\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma}$ zweiter Art auch als das Integral $\int_{\mathcal{F}} H \cdot N d\sigma$ erster Art auffassen kann. Flächenintegrale zweiter Art sind ebenfalls invariant bezüglich äquivalenter Parametertransformationen. Bei einem Orientierungswechsel ändern sie jedoch ihr Vorzeichen, da die Normalenvektoren ihre Richtung ändern.

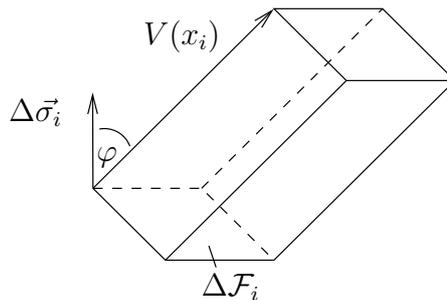
Zur *Motivation* der Flächenintegrale zweiter Art stellen wir uns ein stationäres (zeitunabhängiges) Geschwindigkeitsfeld $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ einer strömenden Flüssigkeit vor und fragen nach der Flüssigkeitsmenge, die ein gegebenes Flächenstück \mathcal{F} pro Zeiteinheit durchfließt. Sinnvollerweise soll \mathcal{F} orientiert sein, d.h. wir können uns etwa vorstellen, dass \mathcal{F} eine „Unterseite“ und eine „Oberseite“ hat und dass die Normalenvektoren in Richtung der Oberseite zeigen.

Wie bei der Motivation zum Flächeninhalt denken wir uns \mathcal{F} in Maschen unterteilt, die näherungsweise Parallelogrammform haben. Es sei $\Delta\vec{\sigma}_i$ der *Flächenvektor* eines solchen Parallelogramms $\Delta\mathcal{F}_i$, d.h. $\Delta\vec{\sigma}_i$ steht senkrecht auf $\Delta\mathcal{F}_i$ und zeigt in Normalenrichtung, und $\|\Delta\vec{\sigma}_i\|$ ist gleich dem Flächeninhalt von $\Delta\mathcal{F}_i$.

Dann ist $|V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i|$ (mit einem $x_i \in \Delta\mathcal{F}_i$) das Flüssigkeitsvolumen, das näherungsweise pro Zeiteinheit durch $\Delta\mathcal{F}_i$ fließt. Pro Zeiteinheit schiebt sich nämlich ein Parallelepiped mit dem Grundflächeninhalt $\|\Delta\vec{\sigma}_i\|$ und der Höhe $\|V(x_i)\| \cos \varphi$ (vgl. die folgende Skizze), d.h. mit dem Volumen

$$\|V(x_i)\| \|\Delta\vec{\sigma}_i\| \cos \varphi = V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i$$

durch $\Delta\mathcal{F}_i$. (In erster Näherung nehmen wir V als konstant auf $\Delta\mathcal{F}_i$ an.)



Fließt die Flüssigkeit aus der Seite von $\Delta\mathcal{F}_i$ heraus, in die der Flächenvektor $\Delta\vec{\sigma}_i$ zeigt, so ist $V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i \geq 0$ und andernfalls ≤ 0 . Das Vorzeichen von $V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i$ gibt also an, in welche Richtung $\Delta\mathcal{F}_i$ durchflossen wird.

Die Summation der Durchflüsse über alle Maschen

$$\sum_i V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i$$

und der Übergang zu beliebig kleinen Maschenweiten führen zum Flächenintegral 2. Art

$$U = \int_{\mathcal{F}} V(x) \cdot d\vec{\sigma}.$$

Die Größe $|U|$ gibt also das Gesamtvolumen an, welches pro Zeiteinheit das Flächenstück \mathcal{F} durchströmt, wobei die Anteile der beiden Strömungsrichtungen durch \mathcal{F} gegeneinander aufgerechnet sind. Das Vorzeichen von U gibt an, an welcher Seite des Flächenstücks mehr herausfließt: Ist $U > 0$, so strömt mehr Flüssigkeit in Richtung der Normalenvektoren von \mathcal{F} , ist $U < 0$, so in entgegengesetzter Richtung. Man nennt U auch den *Fluss* von V durch \mathcal{F} . ■

Beispiel 9. Seien D und F wieder wie in Beispiel 1 (Kugeloberfläche), und sei $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die identische Abbildung, d.h. $H(x, y, z) = (x, y, z)$. Dann ist nach Beispiel 4

$$N(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v),$$

und mit

$$H(F(u, v)) = F(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)$$

erhalten wir mit (14.11) für das Flächenintegral 2. Art

$$\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{F}} H \cdot N d\sigma = \int_{\mathcal{F}} r d\sigma = r \int_{\mathcal{F}} d\sigma.$$

Das Flächenintegral $\int_{\mathcal{F}} d\sigma$ ist gleich dem Flächeninhalt der Kugeloberfläche. Wir haben es in Beispiel 7 berechnet und erhalten damit

$$\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma} = 4\pi r^3. \quad \blacksquare$$

14.3 Die Divergenz eines Vektorfeldes

Unsere letzten Ziele in diesem Kapitel sind die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) = f(x)|_a^b$$

und der Formel der partiellen Integration

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = - \int_a^b u(x)v'(x) dx + u(x)v(x)|_a^b$$

auf mehrdimensionale Integrale. Es stellt sich die Frage, wodurch die Ableitungen f', u', v' und die Randterme $f|_a^b$ und $uv|_a^b$ zu ersetzen sind.

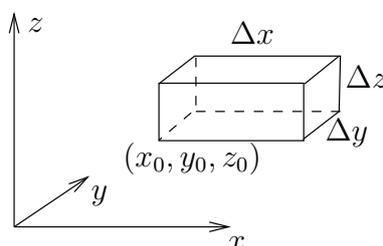
Unser erstes Ziel ist der *Gaußsche Integralsatz* im \mathbb{R}^3 . Seine anschauliche Bedeutung ist völlig einleuchtend:

Die Flüssigkeitsmenge, die durch die Oberfläche eines räumlichen Gebietes herausströmt, ist gleich der Flüssigkeitsmenge, die die Quellen in diesem Gebiet hervorbringen.

Wie kann man die Flüssigkeitsmenge, die eine Quelle im Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ hervorbringt, mathematisch beschreiben? Wir betrachten eine stationäre (zeitunabhängige) Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit (d.h. mit konstanter Dichte), die im Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit

$$V(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$$

hat. Im Punkt (x_0, y_0, z_0) heften wir einen kleinen achsenparallelen Quader Q mit den Seitenlängen Δx , Δy und Δz an.



Dann ist das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit in Richtung der positiven x -Achse durch die linke bzw. rechte Seitenwand des Quaders fließt, näherungsweise gleich

$$V_1(x_0, y_0, z_0)\Delta y\Delta z \quad \text{bzw.} \quad V_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)\Delta y\Delta z.$$

Das Volumen, das pro Zeiteinheit aus dem Quader Q in der positiven x -Richtung austritt, ist also etwa gleich

$$\begin{aligned} & (V_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V_1(x_0, y_0, z_0))\Delta y\Delta z \\ &= \frac{V_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V_1(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \Delta x\Delta y\Delta z \\ &\approx \frac{\partial V_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta x\Delta y\Delta z. \end{aligned}$$

Wir stellen in ähnlicher Weise die Massenbilanz für den Fluß in positiver y - und z -Richtung auf und erhalten als Endresultat, dass das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit aus Q austritt, ungefähr gleich

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) \Delta x\Delta y\Delta z \quad (14.12)$$

ist. Mit der in Abschnitt 10.2 eingeführten *Divergenz*

$$(\operatorname{div} F)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x), \quad x \in D$$

eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $F = (F_1, \dots, F_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ können wir (14.12) schreiben als

$$(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Dividieren wir diesen Wert durch das Volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ von Q und ziehen wir Q auf den Punkt (x_0, y_0, z_0) zusammen, so können wir $(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0)$ als *Quelldichte* der Strömung im Punkt (x_0, y_0, z_0) interpretieren. Ist $(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0) > 0$, so ist (x_0, y_0, z_0) eine *Quelle* im eigentlichen Sinn (ihr entströmt Flüssigkeit). Im Fall $(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0) < 0$ heißt (x_0, y_0, z_0) eine *Senke* (da in diesem Punkt Flüssigkeit verschwindet).

Einige Rechenregeln für die Divergenz. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und seien $F, G : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F + G) &= \operatorname{div} F + \operatorname{div} G, \\ \operatorname{div}(\mu F) &= \mu \operatorname{div} F, \\ \operatorname{div}(\varphi F) &= \varphi \operatorname{div} F + \operatorname{grad} \varphi \cdot F. \end{aligned}$$

14.4 Der Gaußsche Integralsatz im Raum

Wir können nun die anschauliche Aussage des Gaußschen Integralsatzes in Formeln fassen. Es sei G ein geeigneter räumlicher Bereich und ∂G sein Rand (seine Oberfläche). Die genauen Voraussetzungen geben wir später an. In jedem Randpunkt haben wir zwei Normaleneinheitsvektoren: einen, der in den Körper hineinzeigt (die sogenannte *innere Normale*) und einen, der von G weg zeigt (die *äußere Normale*). Es sei $N : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld der äußeren Einheitsnormalen. Weiter sei V das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit. Nach Abschnitt 14.2 (Interpretation des Flächeninhalts 2. Art) ist der Durchfluß durch ∂G in Richtung der äußeren Normalen (also das, was aus G *herausfließt*), gleich

$$\iint_{\partial G} V \cdot N \, d\sigma. \quad (14.13)$$

Die durch Quellen und Senken in G hervorgebrachte Flüssigkeitsmenge erhalten wir dagegen durch Aufintegrieren der Quelldichte über G :

$$\iiint_G (\operatorname{div} V)(x) \, dx. \quad (14.14)$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz sind die Integrale (14.13) und (14.14) gleich. Nun zur exakten Formulierung.

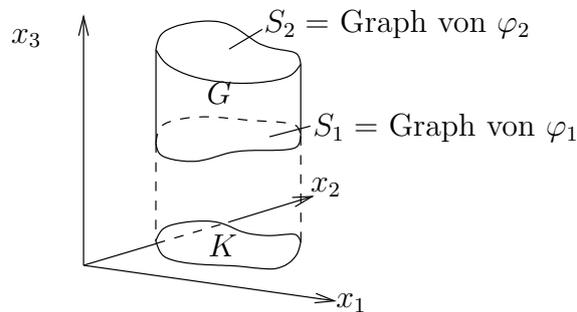
Definition 14.7 Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt C^1 -Normalbereich bzgl. der x_1x_2 -Ebene, wenn es eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ und stetig differenzierbare Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$ so gibt, dass

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in K, \varphi_1(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \varphi_2(x_1, x_2)\}$$

gilt und dass der Rand ∂K durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg darstellbar ist. Analog erklärt man C^1 -Normalbereiche bezüglich der x_2x_3 - und x_1x_3 -Ebene. Die Menge G heißt ein C^1 -Normalbereich, wenn sie ein C^1 -Normalbereich bezüglich der x_1x_2 -, der x_2x_3 - und der x_1x_3 -Ebene ist.

(Es sei noch einmal an unsere Vereinbarung erinnert: Eine Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge K heißt stetig differenzierbar, wenn sie zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf einer offenen Menge $G \supseteq K$ fortgesetzt werden kann.)

Einen C^1 -Normalbereich bzgl. der x_1x_2 -Ebene kann man sich so vorstellen:



Der obere Deckel S_2 ist ein Flächenstück im \mathbb{R}^3 mit der Parameterdarstellung

$$F_2 : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, \varphi_2(x_1, x_2)).$$

Der durch F_2 bestimmte Normaleneinheitsvektor (vgl. Beispiel 5 aus 14.1)

$$N_2(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, 1 \right)$$

ist der *äußere* Normaleneinheitsvektor für G (da die z -Komponente positiv ist). Der untere Deckel S_1 wird beschrieben durch

$$F_1 : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2)),$$

und der zugehörigen Normaleneinheitsvektor ist

$$N_1(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, 1 \right).$$

Dieser zeigt ebenfalls in Richtung der positiven z -Achse (also in G hinein), so dass der *äußere* Normalenvektor an G auf S_1 gleich $-N_1(u, v)$ ist.

Satz 14.8 (Gaußscher Integralsatz im \mathbb{R}^3) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Normalbereich und $H : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiter bezeichne $N : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^3$ das äußere Normalenfeld von G . Dann ist

$$\iiint_G (\operatorname{div} H)(x) dx = \iint_{\partial G} H \cdot N d\sigma. \quad (14.15)$$

Beweis. Es genügt, die Aussage zu beweisen, wenn H die Gestalt $H = (0, 0, H_3)^T$ hat (man kann ja H als Summe dreier derartiger Ausdrücke schreiben, und die Divergenz sowie die Integrale in (14.15) sind linear in H). Mit Satz 13.34 erhalten wir dann wegen $\operatorname{div} H = \frac{\partial H_3}{\partial x_3}$

$$\begin{aligned} \iiint_G (\operatorname{div} H)(x) dx &= \iint_K \left(\int_{\varphi_1(x_1, x_2)}^{\varphi_2(x_1, x_2)} \frac{\partial H_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) d(x_1, x_2) \\ &= \iint_K \left(H_3(x_1, x_2, \varphi_2(x_1, x_2)) - H_3(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2)) \right) d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Auf dem oberen Deckel S_2 ist

$$H \cdot N = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} H_3$$

und damit

$$\begin{aligned} &\iint_K H_3(x_1, x_2, \varphi_2(x_1, x_2)) d(x_1, x_2) \\ &= \iint_K (H \cdot N) \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + 1} d(x_1, x_2) = \iint_{S_2} H \cdot N d\sigma. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass

$$- \iint_K H_3(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2)) d(x_1, x_2) = \iint_{S_1} H \cdot N d\sigma.$$

Auf dem noch fehlenden Randstück $\partial G \setminus (S_1 \cup S_2)$ von G , also auf

$$S_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \partial K, \varphi_1(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \varphi_2(x_1, x_2)\},$$

existiert der äußere Normalenvektor N ebenfalls (bis auf endlich viele Geradenstücke $\{y\} \times [\varphi_1(y), \varphi_2(y)]$ mit $y \in \partial K$, in denen die Parametrisierung von ∂K nicht differenzierbar ist), und die Komponente von N in x_3 -Richtung ist 0. Daher ist $H \cdot N = 0$ auf S_3 . Zusammengefasst erhalten wir

$$\iiint_G (\operatorname{div} H)(x) dx = \sum_{j=1}^3 \iint_{S_j} H \cdot N d\sigma = \iint_{\partial G} H \cdot N d\sigma. \quad \blacksquare$$

Beispiel 1. Wir kommen noch einmal zurück auf Beispiel 9 aus Abschnitt 14.2. Dort waren D und F wie in Beispiel 1 aus Abschnitt 14.1 (Kugeloberfläche) und $H(x, y, z) = (x, y, z)$, und wir haben erhalten, dass

$$\iint_{\partial G} H \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\partial G} H \cdot N \, d\sigma = 4\pi r^3.$$

Andererseits ist $\operatorname{div} H = 3$, so dass mit dem Volumen V der Kugel G gilt

$$\iiint_G (\operatorname{div} H)(x) \, dx = 3 \iiint_G dx = 3V.$$

Der Gaußsche Satz liefert nach Gleichsetzen

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3. \quad \blacksquare$$

Folgerung 14.9 (Partielle Integration in \mathbb{R}^3) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Normalbereich und $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen. Weiter sei $N = (N_1, N_2, N_3) : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ das äußere Normalenfeld an G . Dann gilt für $i = 1, 2, 3$

$$\iiint_G f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx = - \iiint_G \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx + \iint_{\partial G} f g N_i \, d\sigma. \quad (14.16)$$

Beweis. Sei z.B. $i = 1$. Für die stetig differenzierbare Funktion

$$F : G \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x) = (f(x)g(x), 0, 0) \quad (14.17)$$

ist

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial(fg)}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} g + f \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

und $F \cdot N = fg N_1$. Die Behauptung folgt sofort, wenn man die Funktion (14.17) in den Gaußschen Integralsatz (14.15) einsetzt. \blacksquare

Anmerkung 1. Wir haben in Satz 14.8 und Folgerung 14.9 statt \int_G und $\int_{\partial G}$ die Schreibweisen \iiint_G und $\iint_{\partial G}$ benutzt, um deutlich zu machen, dass (dreidimensionale) Volumenintegrale und (zweidimensionale) Oberflächenintegrale auftreten.

Anmerkung 2. Sind F_1, \dots, F_n Flächenstücke, die sich nicht überlappen, so definiert man das Flächenintegral über $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$ durch

$$\int_F = \int_{F_1} + \dots + \int_{F_n}.$$

Dies haben wir im Beweis des Gaußschen Satzes benutzt ($\partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_3$).

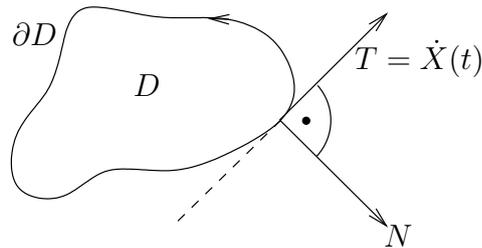
Anmerkung 3. Satz 14.8 und Folgerung 14.9 gelten auch unter schwächeren Voraussetzungen. Z.B. genügt es, dass sich G als endliche Vereinigung sich nicht überlappender C^1 -Normalbereiche schreiben läßt. Man beachte auch, dass der Normalenvektor nicht in jedem Randpunkt definiert ist (z.B. nicht entlang der Kanten eines Quaders).

14.5 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene

Der Gaußsche Integralsatz und seine Folgerung gelten (bei geeigneter Definition des Flächenintegrals) für jede Raumdimension. Den Gaußschen Integralsatz im \mathbb{R}^2 kann man durch geeignete Reduzierung um eine Koordinate wie folgt aus dem Gaußschen Integralsatz im \mathbb{R}^3 gewinnen.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich der x_1 - und der x_2 -Achse (vgl. Definition 14.8). In diesem Fall nennen wir D einfach einen *Normalbereich*. Der Rand ∂D sei eine geschlossene Kurve, die durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisiert werde. Durchläuft t das Intervall $[a, b]$ von a nach b , so wandert $X(t)$ entlang ∂D in einer bestimmten Richtung. Wir wollen annehmen, dass dabei G stets links des Weges liegt. Man sagt auch, dass D vom Weg X *positiv umlaufen* wird oder dass der Rand ∂D *positiv orientiert* ist (anschaulich: im Gegenuhrzeigersinn).

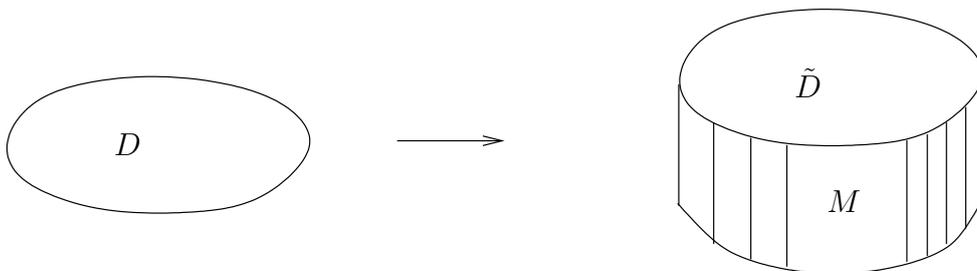
Der Tangentialvektor an ∂D im Punkt $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ ist gegeben durch $T := (\dot{X}_1(t), \dot{X}_2(t))$, und $N := (\dot{X}_2(t), -\dot{X}_1(t))$ ist ein auf T senkrecht stehender Vektor, der nach außen zeigt. Man beachte, dass diese Vektoren nur in Punkten definiert sind, in denen X stetig differenzierbar ist.



Auf D sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $V = (V_1, V_2)^T : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben. Wir bilden aus D den räumlichen Bereich

$$\tilde{D} := D \times [0, 1] = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in D, x_3 \in [0, 1]\},$$

d.h. \tilde{D} ist eine Scheibe (= ein Zylinder) der Dicke 1, bei dem Boden und Deckel die Form von D haben. Offenbar ist \tilde{D} ein Normalbereich im \mathbb{R}^3 .



Außerdem erweitern wir V um eine Komponente:

$$\tilde{V} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (V_1(x_1, x_2), V_2(x_1, x_2), 0)^T.$$

Der Gaußsche Integralsatz (14.15), angewandt auf \tilde{D} und \tilde{V} , liefert

$$\iint_{\partial \tilde{D}} \tilde{V} \cdot N \, d\sigma = \iiint_{\tilde{D}} \operatorname{div} \tilde{V} \, dx. \quad (14.18)$$

Beim Flächenintegral auf der linken Seite heben sich die Anteile des Bodens und des Deckels weg, da die zugehörigen Normalenvektoren entgegengesetzt sind, sonst jedoch alles gleich ist. Es ist insbesondere $\tilde{V}(x_1, x_2, 0) = \tilde{V}(x_1, x_2, 1)$. Also verbleibt nur das Integral über die Mantelfläche $M := \partial D \times [0, 1]$. Aus (14.18) folgt somit

$$\iint_M \tilde{V} \cdot N \, d\sigma = \iiint_{\tilde{D}} \operatorname{div} \tilde{V} \, dx. \quad (14.19)$$

Die Mantelfläche hat eine Parameterdarstellung

$$F : M =: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, z) \mapsto (X_1(t), X_2(t), z)^T,$$

woraus man den äußeren (noch unnormierten!) Normalenvektor im Punkt $F(t, z)$

$$n(F(t, z)) = (\dot{X}_2(t), -\dot{X}_1(t), 0)^T$$

erhält. Mit (14.11) bekommen wir für die linke Seite von (14.19)

$$\begin{aligned} \iint_M \tilde{V} \cdot N \, d\sigma &= \iint_M \tilde{V} \cdot \frac{n}{\|n\|} \, d\sigma \\ &\stackrel{(14.11)}{=} \iint_{[a,b] \times [0,1]} \tilde{V}(F(t, z)) \cdot n(F(t, z)) \, d(t, z) \\ &= \int_0^1 \int_a^b (V_1(X(t)), V_2(X(t)), 0) \cdot (\dot{X}_2(t), -\dot{X}_1(t), 0) \, dt \, dz \\ &= \int_a^b (V_1(X(t))\dot{X}_2(t) - V_2(X(t))\dot{X}_1(t)) \, dt, \end{aligned}$$

während auf der rechten Seite von (14.19)

$$\operatorname{div} \tilde{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \operatorname{div} V$$

ist. Daher ist

$$\iiint_{\tilde{D}} \operatorname{div} \tilde{V} \, d(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 \iint_D \operatorname{div} V \, d(x_1, x_2) \, dx_3 = \iint_D \operatorname{div} V \, d(x_1, x_2).$$

Zusammengefaßt erhalten wir

Satz 14.10 (Gaußscher Integralsatz im \mathbb{R}^2) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich (bzgl. der x_1 - und der x_2 -Achse), dessen Rand ∂D durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $X = (X_1, X_2)^T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisiert wird, der D positiv umläuft. Weiter sei $V = (V_1, V_2)^T : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_a^b (V_1(X(t))\dot{X}_2(t) - V_2(X(t))\dot{X}_1(t)) dt = \iint_D (\operatorname{div} V)(x) dx. \quad (14.20)$$

Man beachte, dass auf der linken Seite von (14.20) ein Wegintegral entlang des Weges X steht. Nehmen wir die Umbenennung

$$W_1 := V_2, \quad W_2 := -V_1, \quad W := (W_1, W_2)^T$$

vor, so geht nach Multiplikation mit -1 die linke Seite von (14.20) über in

$$\int_a^b (W_1(X(t))\dot{X}_1(t) + W_2(X(t))\dot{X}_2(t)) dt,$$

d.h. in das Wegintegral $\int_{\partial D} W \cdot dX$ über den durch X parametrisierten Rand von D , während auf der rechten Seite von (14.20) $-\operatorname{div} V = -\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2}$ zu ersetzen ist durch $\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2}$. Man schreibt oft

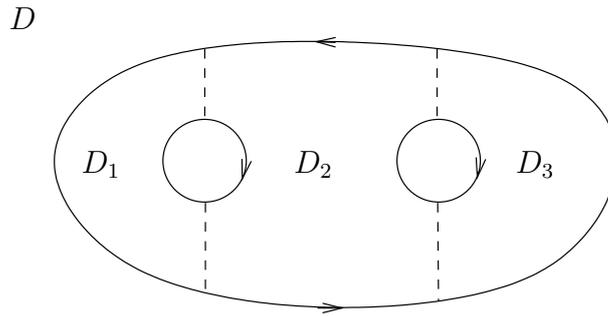
$$\operatorname{rot} W := \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \quad (14.21)$$

und nennt $\operatorname{rot} W$ die (skalarwertige) *Rotation* des Vektorfeldes $W = (W_1, W_2)^T$. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir die folgende Version des Gaußschen Satzes im \mathbb{R}^2 .

Satz 14.11 (Greenscher Integralsatz) Seien D und X wie in Satz 14.10, und $W = (W_1, W_2)^T : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist

$$\int_{\partial D} W \cdot dX = \int_D \left(\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2) = \int_D (\operatorname{rot} W)(x) dx.$$

Die Sätze 14.10 und 14.11 gelten auch unter allgemeineren Bedingungen an die Menge D . So darf D die Abschließung eines beschränkten einfach zusammenhängenden Gebietes sein, dessen Rand sich durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg parametrisieren läßt. Es genügt sogar, dass D sich in endlich viele derartige Mengen zerlegen läßt.



Man beachte die Orientierung des (aus mehreren Stücken bestehenden) Randes.

14.6 Der Stokessche Integralsatz

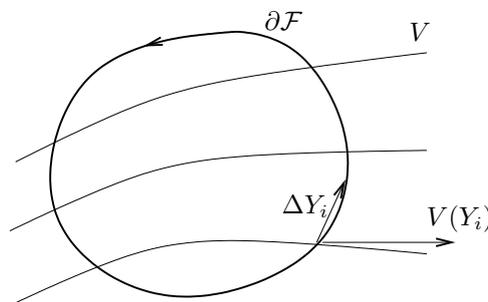
Wir beginnen wieder mit einer kurzen Motivation. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $V : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das wir als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit deuten. In M sei ein Flächenstück \mathcal{F} gegeben, dessen Rand durch einen stückweise stetig differenzierbaren und doppelpunktfreien Weg $Y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisiert wird. Unter der *Zirkulation von V entlang $\partial\mathcal{F}$* versteht man das Kurvenintegral

$$\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY = \int_a^b \sum_{i=1}^3 V_i(Y(t)) \dot{Y}_i(t) dt. \quad (14.22)$$

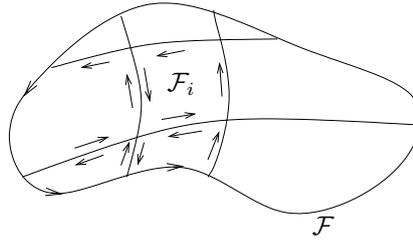
Denkt man sich dieses Integral durch Riemann-Summen

$$\sum_j V(Y_j) \cdot \Delta Y_j$$

approximiert, so entspricht jeder Summand $V(Y_i) \cdot \Delta Y_i$ einer Geschwindigkeitskomponenten in der Durchlaufrichtung der Kurve. Die Summation dieser Komponenten ist ein Maß dafür, wie stark die Kurve $\partial\mathcal{F}$ umströmt wird, d.h. wie stark die Flüssigkeit längs der Kurve zirkuliert.



Wir zerlegen das Flächenstück \mathcal{F} in endlich viele kleine Maschen \mathcal{F}_i .



Bei entsprechender Orientierung der Ränder der \mathcal{F}_i erhalten wir für die Zirkulation

$$\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY = \sum_i \int_{\partial\mathcal{F}_i} V \cdot dY = \sum_i \frac{1}{I(\mathcal{F}_i)} \int_{\partial\mathcal{F}_i} V \cdot dY I(\mathcal{F}_i), \quad (14.23)$$

wobei $I(\mathcal{F}_i)$ für den Flächeninhalt von \mathcal{F}_i steht. Nun verfeinern wir die Maschen. Man kann zeigen (vgl. etwa Burg/Haf/Wille IV, S. 156-158): Wenn man eine Masche \mathcal{F}_i auf einen Punkt $x_i \in \mathcal{F}$ zusammenzieht, dann strebt der Quotient

$$\frac{1}{I(\mathcal{F}_i)} \int_{\partial\mathcal{F}_i} V \cdot dY \quad (14.24)$$

gegen einen festen Wert, nämlich gegen $(\text{rot } V)(x_i) \cdot N(x_i)$. Dieser Ausdruck heißt auch die *Wirbelstärke* von V in x_i . Hierbei ist $N(x_i)$ die gemeinsame Flächennormale der zu x_i zusammengezogenen Maschen, und die Rotation $\text{rot } V$ ist wie in Abschnitt 10.2 durch

$$(\text{rot } F)(x) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \right)^T$$

erklärt. Man beachte, dass man für ein Vektorfeld der Gestalt

$$F(x_1, x_2, x_3) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2), 0)$$

als Rotation gerade das Vektorfeld $(0, 0, \text{rot } (F_1, F_2))$ mit der in (14.21) eingeführten Rotation eines zweidimensionalen Vektorfeldes erhält.

Für kleine $\Delta\mathcal{F}_i$ können wir also (14.24) näherungsweise durch

$$(\text{rot } V)(x_i) \cdot N(x_i)$$

ersetzen, und aus (14.23) wird

$$\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY \approx \sum_i (\text{rot } V)(x_i) \cdot N(x_i) I(\mathcal{F}_i). \quad (14.25)$$

Die rechte Seite ist eine Riemannsumme für das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} \text{rot } V \cdot N \, d\sigma.$$

Der folgende Satz von Stokes sagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen an \mathcal{F} die Zirkulation $\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY$ tatsächlich gleich diesem Flächenintegral über die Wirbelstärken ist.

Satz 14.12 (Stokes'scher Integralsatz) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich, dessen Rand ∂D durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisiert wird, der D einmal positiv umläuft. Weiter sei $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung, die ein Flächenstück $\mathcal{F} = F(D)$ parametrisiert. Der Weg $Y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $Y(t) = F(X(t))$ definiert eine orientierte Kurve in \mathcal{F} , die wir den Rand $\partial \mathcal{F}$ von \mathcal{F} nennen. Schließlich sei $N : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$ das durch F wie in (14.6) festgelegte Normalenfeld. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial \mathcal{F}} H \cdot dY. \quad (14.26)$$

Beweis. Es genügt, Vektorfelder H der Form $(P, 0, 0)^T$ zu betrachten. Der Beweis für $H = (0, Q, 0)^T$ und $H = (0, 0, R)^T$ verläuft analog.

Zuerst schreiben wir das Kurvenintegral $\int_{\partial \mathcal{F}} H \cdot dY$ über der Kurve $\partial \mathcal{F}$ in ein Kurvenintegral über ∂D um:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{F}} (P, 0, 0)^T \cdot dY &= \int_a^b P(Y(t)) \dot{Y}_1(t) \, dt \\ &= \int_a^b P(F(X(t))) (F_1 \circ X)'(t) \, dt \\ &= \int_a^b P(F(X(t))) \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \dot{X}_1(t) + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \dot{X}_2(t) \right) dt \\ &= \int_{\partial D} \left((P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \cdot dX, \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile die Kettenregel benutzt haben. Nach Satz 14.11 (Greenscher Integralsatz) ist dieses Integral gleich

$$\int_D \operatorname{rot} \left((P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) (x) \, dx. \quad (14.27)$$

Wir berechnen die skalare (zweidimensionale) Rotation nach (14.21):

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \left((P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left((P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left((P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right) \\ &= \frac{\partial(P \circ F)}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial(P \circ F)}{\partial x_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + (P \circ F) \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \end{aligned}$$

wobei wir die Produktregel benutzt haben. Der letzte Summand ist nach dem Satz von Schwarz gleich 0. Mit der Kettenregel erhalten wir für die ersten beiden

Summanden

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \\ & - \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right) \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \\ & = \frac{\partial P}{\partial x_3} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial P}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Sei $n = (n_1, n_2, n_3) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) \times \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right)$, d.h. $N = n/\|n\|$ ist der Normaleneinheitsvektor zu \mathcal{F} (vgl. (14.6)). Nach Definition des Vektorprodukts ist

$$n_2 = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \quad \text{und} \quad n_3 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$$

und damit zusammengefasst

$$\text{rot} \left((P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial P}{\partial x_3} n_2 - \frac{\partial P}{\partial x_2} n_3. \quad (14.28)$$

Wegen $\text{rot } H = \text{rot} (P, 0, 0)^T = \left(0, \frac{\partial P}{\partial x_3}, -\frac{\partial P}{\partial x_2} \right)^T$ können wir (14.28) schreiben als

$$\text{rot} \left((P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = ((\text{rot } H) \circ F) \cdot n.$$

Wir setzen dies in (14.27) ein und erhalten schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} H \cdot dY &= \int_D \text{rot} \left((P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx \\ &= \int_D ((\text{rot } H) \circ F)(x) \cdot n \, dx \\ &= \int_{\mathcal{F}} \text{rot } H \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{F}} \text{rot } H \cdot N \, d\sigma \end{aligned}$$

nach der Definition 14.6 des Flächenintegrals. ■

Beispiel 2. Sei $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi/2]\}$, $r > 0$ und

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v).$$

Das Flächenstück $F(D)$ ist die obere Halbkugelfläche um den Ursprung mit dem Radius r . Ein Vektorfeld H sei durch

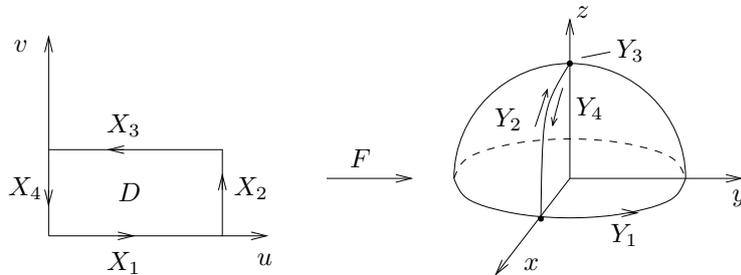
$$H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad H(x, y, z) = (-y, x, 1)$$

gegeben. Der Rand ∂D des Rechtecks D lässt sich durch vier 4 Wege beschreiben:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= (t, 0) && \text{mit } t \in [0, 2\pi], \\ X_2(t) &= (2\pi, t) && \text{mit } t \in [0, \pi/2], \\ X_3(t) &= (-t, \pi/2) && \text{mit } t \in [-2\pi, 0], \\ X_4(t) &= (0, -t) && \text{mit } t \in [-\pi/2, 0]. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Parameterdarstellungen $Y_k(t) = F(X_k(t))$ für die Kurve $\partial F(D)$ sind

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= (r \cos t, r \sin t, 0) && \text{mit } t \in [0, 2\pi], \\ Y_2(t) &= (r \cos t, 0, r \sin t) && \text{mit } t \in [0, \pi/2], \\ Y_3(t) &= (0, 0, r) && \text{mit } t \in [-2\pi, 0], \\ Y_4(t) &= (r \cos t, 0, -r \sin t) && \text{mit } t \in [-\pi/2, 0]. \end{aligned}$$



(Man beachte, dass $F(\partial D)$ *nicht* mit der Kreislinie in der xy -Ebene zusammenfällt!) Nun ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial F(D)} H \cdot dY &= \int_0^{2\pi} H(Y_1(t)) \cdot \dot{Y}_1(t) dt + \int_0^{\pi/2} H(Y_2(t)) \cdot \dot{Y}_2(t) dt \\ &\quad + \int_{-2\pi}^0 H(Y_3(t)) \cdot \dot{Y}_3(t) dt + \int_{-\pi/2}^0 H(Y_4(t)) \cdot \dot{Y}_4(t) dt. \end{aligned}$$

Wir berechnen das erste Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H(Y_1(t)) \cdot \dot{Y}_1(t) dt &= \int_0^{2\pi} (-r \sin t, r \cos t, 1) \cdot (-r \sin t, r \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t) dt = 2\pi r^2. \end{aligned}$$

Das dritte Integral ist wegen $\dot{Y}_3 = 0$ gleich 0, und das zweite und vierte Integral heben sich gegenseitig auf (dies ist sofort klar, wenn man sich die Wege Y_2, Y_3 und Y_4 ansieht). Also ist

$$\int_{\partial F(D)} H \cdot dY = 2\pi r^2.$$

Nach dem Satz von Stokes ist dann auch $\iint_{F(D)} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = 2\pi r^2$, was wir zur Übung nachrechnen. Zunächst ist $\operatorname{rot} H = (0, 0, 2)$ und

$$N = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \quad \text{sowie} \quad \|F_u \times F_v\| = r^2 \cos v$$

nach Beispiel 4 aus Abschnitt 14.1. Damit wird

$$\begin{aligned} \iint_{F(D)} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma &= \iint_D (\operatorname{rot} H)(F(u, v)) \cdot N(u, v) \|F_u \times F_v\| \, d(u, v) \\ &= \iint_D 2 \sin v \cdot r^2 \cos v \, d(u, v) \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2v) \, dv \, du = 2\pi r^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Auch der Satz von Stokes läßt sich unter schwächeren Voraussetzungen zeigen. Wir vermerken noch eine interessante Konsequenz des Stokes'schen Satzes.

Folgerung 14.13 *Sei B ein stückweise glatt berandeter Bereich im \mathbb{R}^3 und $H : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann ist*

$$\iint_{\partial B} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = 0.$$

Kurz gesagt: *Der Wirbelfluß durch eine geschlossene Fläche ist Null.*

Zum Beweis schneidet man aus ∂B ein geeignetes kleines Flächenstück \mathcal{F} heraus. Auf der verbleibenden Fläche ist nach Stokes

$$\iint_{\partial B \setminus \mathcal{F}} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial \mathcal{F}} H \cdot dX.$$

Zieht man \mathcal{F} auf einen Punkt zusammen, so geht das Integral auf der rechten Seite gegen Null, da die Weglänge von $\partial \mathcal{F}$ gegen Null strebt. \blacksquare

14.7 Einige weitere Differential- und Integralformeln

14.7.1 Der Nabla-Operator

Der *symbolische* Vektor $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ heißt *Nabla-Operator*. Formal rechnet man mit ihm wie mit einem Vektor aus \mathbb{R}^3 . In diesem Sinne ist also für stetig differenzierbare Vektorfelder V und Skalarfelder φ

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \operatorname{grad} \varphi, \\ \nabla \cdot F &= \operatorname{div} F, \\ \nabla \times F &= \operatorname{rot} F. \end{aligned}$$

Ist das Skalarfeld φ zweimal stetig differenzierbar, so erhält man

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi = \nabla \cdot \operatorname{grad} \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}.$$

Der Operator

$$\Delta := \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

heißt *Laplace-Operator*.

14.7.2 Mehrfache Anwendungen der Differentialoperatoren

Das Vektorfeld F und das Skalarfeld φ seien zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0, \quad (14.29)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad (14.30)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi. \quad (14.31)$$

Man rechnet dies mit dem Satz von Schwarz leicht nach. Die ersten beiden Formeln besagen: *Wirbelfelder sind divergenzfrei* und *Gradientenfelder sind wirbelfrei*.

14.7.3 Produktregeln

Die Vektorfelder F, G und die Skalarfelder φ, ψ seien stetig differenzierbar. Dann gelten z.B. die folgenden Produktregeln, die man leicht nachrechnet:

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi, \quad (14.32)$$

$$\operatorname{div}(\varphi F) = \varphi \operatorname{div} F + F \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad (14.33)$$

$$\operatorname{rot}(\varphi F) = \varphi \operatorname{rot} F + \operatorname{grad} \varphi \times F, \quad (14.34)$$

$$\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G. \quad (14.35)$$

Weitere Beziehungen finden Sie in der Literatur.

14.7.4 Die Greenschen Formeln

Es sei G wie im Gaußschen Integralsatz im Raum (Satz 14.8), und $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ seien so oft stetig differenzierbar, wie es die folgenden Formeln verlangen. Aus Formel (14.33) (mit $F = \operatorname{grad} g$) erhalten wir

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f \Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g,$$

wobei wir noch (14.31) benutzt haben. Integration über G und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf der linken Seite liefern

$$\iint_{\partial G} f \operatorname{grad} g \cdot N \, d\sigma = \iiint_G (f \Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) \, dx$$

mit dem äußeren Normalenvektor N an ∂G . Mit der Richtungsableitung

$$\frac{\partial g}{\partial N} = \text{grad } g \cdot N$$

(vgl. Abschnitt 10.4) erhalten wir die *erste Greensche Integralformel*

$$\iint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial N} d\sigma = \iiint_G (f \Delta g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g) dx. \quad (14.36)$$

Vertauscht man hierin f mit g und subtrahiert die erhaltene Formel von (14.36), so erhält man die *zweite Greensche Integralformel*

$$\iint_{\partial G} \left(f \frac{\partial g}{\partial N} - g \frac{\partial f}{\partial N} \right) d\sigma = \iiint_G (f \Delta g - g \Delta f) dx. \quad (14.37)$$

Im Spezialfall $g = 1$ folgt hieraus

$$\iint_{\partial G} \frac{\partial f}{\partial N} d\sigma = \iiint_G \Delta f dx. \quad (14.38)$$

Man kann somit Volumenintegrale über Laplacesche Differentialausdrücke Δf in Flächenintegrale umschreiben. Die Greenschen Formeln sind außerordentlich nützlich beim Studium von partiellen Differentialgleichungen.