Skript zur Vorlesung

Funktionalanalysis

Wintersemester 2014

Matthias Hieber, Mads Kyed, Martin Saal

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Stand: 10. Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

1. Mengen, topologische und metrische Räume

a) Das Lemma von Zorn

In dieser Vorlesung werden wir die Gültigkeit des Auswahlaxioms annehmen. Es ist äquivalent zu einigen bedeutenden Aussagen, von denen wir im weiteren Verlauf das „anwendungsfreundlichere“ Lemma von Zorn benötigen.
Zur Formulierung brauchen wir zunächst einige Begriffe der Ordnungstheorie.

1.1 Definition. (i) Sei $\mathcal{M}$ eine Menge. Eine Relation $\prec$ auf $\mathcal{M}$ heißt Halbordnung, falls für A, B, $C \in \mathcal{M}$ gilt:

a) $A \prec A$,

b) $A \prec B,\ B \prec A \Longrightarrow A = B$,

c) $A \prec B,\ B \prec C \Longrightarrow A \prec C$.

(ii) Eine Menge $Q \subset \mathcal{M}$ heißt eine Kette (oder total geordnet) , falls gilt: $\forall A, B \in Q : A \prec B$ oder $B \prec A$.

(iii) Ein Element $A \in \mathcal{M}$ heißt obere Schranke für $S \subset \mathcal{M}$, falls gilt: $\forall B \in S : B \prec A$.

(iv) Ein Element $M \in \mathcal{M}$ heißt maximal, falls gilt: $\forall A \in M : M \prec A \Rightarrow M = A$.

1.2 Beispiel. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $\mathcal{M}$ eine nichtleere Teilmenge der Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$.
Dann definiert $A \prec B :\Leftrightarrow A,\ B \in \mathcal{M}, A \subset B$ eine Halbordnung auf $\mathcal{M}$.

1.3 Lemma (von Zorn)**.** *Sei $\mathcal{M}$ eine nichtleere Menge mit Halbordnung. Wenn jede Kette eine obere Schranke in $\mathcal{M}$ besitzt, so existiert ein maximales Element $M \in \mathcal{M}$.*

b) Topologische und metrische Räume

Der Begriff des topologischen Raums stellt eine Verallgemeinerung des metrischen Raums dar, in dem aber weiterhin Eigenschaften wie die Stetigkeit von Funktionen oder die Existenz von Grenzwerten sinnvoll definiert werden können.

1.4 Definition. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge; $\mathscr{P}(X)$ bezeichne die Potenzmenge von X.

a) Ein Mengensystem $\mathcal{T} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt eine Topologie auf X, falls gilt:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$,

(iii) $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist.

In diesem Fall heißt $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

b) Sei $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann heißt die kleinste Topologie, die $\mathscr{U}$ enthält, die von $\mathscr{U}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}(\mathscr{U})$.

1.5 Bemerkung. a) Die kleinste (gröbste Topologie) auf einer Menge X ist gegeben durch $\mathcal{T}_1 := \{\emptyset, X\}$. Die größte (feinste Topologie) ist gegeben durch $\mathcal{T}_2 := \mathcal{P}(X)$.

b) Die von $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(X)$ erzeugte Topologie lautet

$$\mathcal{T}(\mathscr{U}) = \left\{ \bigcup_{i\in I} \bigcap_{n=1}^{N_i} U_{in} \,\middle|\, U_{in} \in \mathscr{U}, N_i \in \mathbb{N}_0, I \text{ eine Indexmenge} \right\}.$$

Dabei ist $\bigcap_{n=1}^{0} U_{in} = \bigcap_{n\in\emptyset} U_{in} = X$.

[[Jede Menge dieser Form muss nach Definition einer Topologie in $\mathcal{T}(\mathscr{U})$ enthalten sein. Zu zeigen ist daher, dass das System all dieser Mengen eine Topologie ist. Sei $\mathscr{B} := \{\bigcap_{n=1}^{N} U_n : U_n \in \mathscr{U}, N \in \mathbb{N}_0\}$. Dann gilt $X \in \mathscr{B}$ und zu $V_1, V_2 \in \mathscr{B}$ und $x \in V_1 \cap V_2$ existiert ein $V \in \mathscr{B}$ mit $x \in V \subset V_1 \cap V_2$ (denn man kann $V := V_1 \cap V_2$ wählen). $\mathscr{B}$ ist Basis einer Topologie, und (nach Definition einer Basis) das oben angegebene System ist gleich $\mathcal{T}(\mathscr{B})$, also insbesondere eine Topologie.]]

1.6 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.

a) Eine Menge $U \subset X$ heißt genau dann offen, wenn $U \in \mathcal{T}$, und genau dann abgeschlossen, wenn $X \setminus U \in \mathcal{T}$.
Das Innere einer Menge $A \subset X$ ist definiert als $\mathring{A} := \bigcup_{U\subset A, U\in\mathcal{T}} U$.
Der Abschluss ist definiert als $\overline{A} := \bigcap_{A\subset U, U^c\in\mathcal{T}} U$.

b) Seien $A \subset B \subset X$. Dann heißt A dicht in B, falls gilt: $\overline{A} \supset B$.

c) Der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt separabel, falls gilt: $\exists A \subset X$ abzählbar: $\overline{A} = X$.

d) Ein Mengensystem $\mathscr{U} \subset \mathcal{T}$ heißt eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, falls gilt: $\forall A \in \mathcal{T}\ \exists (U_i)_{i\in I} \subset \mathscr{U} : A = \bigcup_{i\in I} U_i$.
Ein Mengensystem $\mathscr{U}$ heißt eine Subbasis von $\mathcal{T}$, falls $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathscr{U})$ ist.

e) Eine (nicht notwendig offene) Menge $V \subset X$ heißt eine Umgebung eines Punktes $x \in X$, falls gilt: $\exists U \in \mathcal{T} : x \in U, U \subset V$.
Eine Familie $\mathscr{N} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt eine Umgebungsbasis des Punktes $x \in X$, wenn gilt

(i) $\forall N \in \mathscr{N} : N$ ist eine Umgebung von x.

(ii) $\forall M \subset X, M$ ist eine Umgebung von $x \, \exists N \in \mathscr{N} : N \subset M$.

f) $(X, \mathcal{T})$ heißt Hausdorff-Raum (oder T_2-Raum), falls gilt:

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \; \exists U_x, U_y \in \mathcal{T} : x \in U_x, \; y \in U_y, U_x \cap U_y = \emptyset.$$

g) $(X, \mathcal{T})$ heißt normal (oder T_4-Raum), falls gilt

(i) $(X, \mathcal{T})$ ist Hausdorffsch.

(ii) $\forall A_1, A_2 \subset X$ abgschlossen , $A_1 \cap A_2 = \emptyset \; \exists U_1, U_2 \in \mathcal{T} : U_1 \supset A_1, U_2 \supset A_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

1.7 Definition. a) Seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $f \colon X_1 \to X_2$ eine Abbildung. Dann heißt f

(i) stetig, wenn gilt: $\forall A \in \mathcal{T}_2 : f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$.

(ii) offen, wenn gilt: $\forall U \in \mathcal{T}_1 : f(U) \in \mathcal{T}_2$. ,

(iii) ein Homöomorphismus, wenn f bijektiv ist und f sowie f^{-1} stetig sind.

b) Sei I eine Menge und $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ topologischer Raum für $i \in I$. Sei $F = \{f_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen. Dann heißt die kleinste (gröbste) Topologie auf X, für die alle $f \in F$ stetig sind, die F-schwache Topologie $\mathcal{T}(F)$ auf X.

c) Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ das kartesische Produkt, wobei $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ein topologischer Raum für $i \in I$ ist. Sei $\mathrm{pr}_i \colon X \to X_i$ die Projektion auf die i-te Komponente. Dann heißt $\mathcal{T}(\{\mathrm{pr}_i \colon i \in I\})$ die Produkttopologie auf X.

d) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine nichtleere Teilmenge. Das Mengensystem $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \colon U \in \mathcal{T}\} \subset \mathscr{P}(Y)$ heißt Spurtopologie auf Y (auch Teilraumtopologie oder relative Topologie oder induzierte Topologie genannt). Dies ist die gröbste Topologie auf Y, für die die Inklusionsabbildung $Y \to X$, $y \mapsto y$, stetig ist.

1.8 Bemerkung. In der Situation von 1.7 b) gilt

$$\mathcal{T}(F) = \mathcal{T}\Big(\big\{f_i^{-1}(U_i) \colon U_i \in \mathcal{T}_i, \; i \in I\big\}\Big).$$

[[Sei $\mathscr{U} := \{f_i^{-1}(U_i) \colon U_i \in \mathcal{T}_i, \; i \in I\}$.

$\mathcal{T}(F) \supset \mathcal{T}(\mathscr{U})$: Da jedes f_i stetig ist, gilt $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}(F)$ $(U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I)$, d.h. $\mathscr{U} \subset \mathcal{T}(F)$. Da $\mathcal{T}(F)$ eine Topologie ist, welche $\mathscr{U}$ enthält, gilt $\mathcal{T}(F) \supset \mathcal{T}(\mathscr{U})$.

$\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{T}(\mathscr{U})$: Wegen $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}(\mathscr{U})$ ist jedes f_i stetig. Damit ist $\mathcal{T}(\mathscr{U})$ eine Obermenge der kleinsten Topologie, in welcher jedes f_i stetig ist.]]

Die beiden folgenden Sätze werden hier nicht bewiesen. im Laufe der Vorlesung werden wir jedoch analoge Aussagen in Banachräumen zeigen.

1.9 Satz (Lemma von Urysohn). *Sei $(X, \mathcal{T})$ normaler topologischer Raum, und seien $A_1, A_2 \subset X$ abgeschlossen mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dann existiert ein $f \in C^0(X; \mathbb{R})$ mit $0 \le f \le 1$ und $f|_{A_1} = 0$, $f|_{A_2} = 1$.*

1.10 Satz (Erweiterungslemma von Tietze). *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein normaler topologischer Raum. Sei $M \subset X$ abgeschlossen, $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ und $f \in C^0(M, [a, b])$. Dann existiert ein $F \in C^0(X, [a, b])$ mit von $F|_M = f$.*

Um hierbei die Stetigkeit der Abbildung f erklären zu können, wird M mit der Spurtopologie ausgestattet.

Der ε–δ–Zugang zur Stetigkeit wird durch das folgende Lemma in topologische Begriffe gefasst.

1.11 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Dann ist eine Abbildung $f : X \to Y$ stetig genau dann, wenn gilt: $\forall x_0 \in X, V_Y$ Umgebung von $y_0 := f(x_0)$ $\exists U_X$ Umgebung von $x_0 : f(U_X) \subset V_Y$.*

[[(i) Sei f stetig. Wähle $W \subset Y$ offen mit $y_0 \in W \subset V_Y$ (Definition Umgebung). Dann ist $U_X := f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_X$ mit $f(U_X) \subset W \subset V_Y$.

(ii) Es gelte die Bedingung des Lemmas, und sei $B \subset Y$ offen. Für jedes $x \in f^{-1}(B)$ ist B eine Umgebung von $f(x)$, und nach Voraussetzung existiert eine Umgebung V_x von x mit $f(V_x) \subset B$. Damit existiert eine offene Menge U_x mit $x \in U_x \subset V_x$ und $f(U_x) \subset B$, also ist $f^{-1}(B) = \bigcup_{x \in f^{-1}(B)} U_x$ offen.]]

Auch in topologischen Räumen kann man Häufungspunkte und Grenzwerte von Folgen definieren. Grenzwerte sind jedoch nicht eindeutig, wenn wir nicht noch zusätzliche Eigenschaften wie Hausdorffsch fordern.

1.12 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Folge.

a) Ein Element $x \in X$ heißt Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls gilt:

$$\forall U \in \mathcal{T}, x \in U : \#\{n \in \mathbb{N} | x_n \in U\} = \infty$$

b) Ein Element $x \in X$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls gilt

$$\forall U \in \mathcal{T}, x \in U : \#\{n \in \mathbb{N} | x_n \notin U\} < \infty.$$

1.13 Beispiel. Sei $X \neq \emptyset$ $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Dann konvergiert jede Folge gegen jedes Element.

Mehr Struktur haben Räume, in denen "Abstände" gemessen werden können. Die Idee der Abstandsmessung wird hierbei durch den Begriff Metrik verallgemeinert.

1.14 Definition. Sei X eine Menge und $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ eine Abbildung. d heißt eine Metrik falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(i) $d(x,y) = d(y,x)$

(ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

(X,d) wird dann ein metrischer Raum genannt.

1.15 Beispiele. Einige Beispiele von metrischen Räumen sind:

a) Sei X beliebig und

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

(diskrete Metrik).

b) Die Standardmetrik auf $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, gegeben durch $d(x,y) = |x - y|$.

c) Sei $X = C^0([0,1];\mathbb{R})$. Dann sind

$$d_\infty(f,g) := \|f-g\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|,$$
$$d_1(f,g) := \|f-g\|_{L^1} := \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

zwei Metriken auf X.

1.16 Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum.

a) Die (offene) Kugel um x_0 mit Radius $r > 0$ ist definiert als $B(x_0, r) := \{x \in X\colon d(x_0,x) < r\}$.

b) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt offen, falls gilt: $\forall u \in U\ \exists \varepsilon > 0 : B(u,\varepsilon) \subset U$. Hierdurch induziert eine Metrik eine Topologie $\mathcal{T}_d$, d.h. jeder metrische Raum ist damit ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T}_d)$.

c) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt metrisierbar, falls es eine Metrik d gibt mit $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

[[Zu b): Man sieht direkt aus der Definition, dass

$$\mathcal{T}_d := \{U \subset X : \forall\, u \in U\ \exists\, \varepsilon > 0 : B(u,\varepsilon) \subset U\}$$

eine Topologie ist: Offensichtlich ist $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$. Für $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_d$ und $u \in U_1 \cap U_2$ existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mit $B(u, \varepsilon_1) \subset U_1$ und $B(u, \varepsilon_2) \subset U_2$. Damit ist $B(u, \varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$ für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Falls $U_\lambda \in \mathcal{T}_d$ für $\lambda \in \Lambda$ und $u \in \bigcup_\lambda U_\lambda$, so existiert ein λ_0 mit $u \in U_{\lambda_0}$. Damit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(u, \varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$ und damit $B(u, \varepsilon) \subset \bigcup_\lambda U_\lambda$.]]

1.17 Bemerkung. Die von einer Metrik induzierte Topologie $\mathcal{T}_d$ ist Hausdorffsch, d.h., jeder metrische Raum (X, d) ist ein Hausdorffraum: Betrachte hierzu für $x \neq y \in X$

$$U_x = B\Big(x, \frac{d(x,y)}{2}\Big), \quad U_y = B\Big(y, \frac{d(x,y)}{2}\Big).$$

Ähnlich folgt, dass $\mathcal{T}_d$ normal ist.

Das folgende Beispiel zeigt, dass nicht jeder topologischer Raum metrisierbar ist.

1.18 Beispiel. Sei X ein Menge mit mindestens zwei Elementen und $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$. Ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar mit Metrik d, so gilt

$$\exists x, y \in X : \gamma := d(x, y) > 0.$$

Wegen $\emptyset \subsetneq B(x, \frac{\gamma}{2}) \subsetneq X$ und $B(x, \frac{\gamma}{2}) \in \mathcal{T}_d$ erhalten wir einen Widerspruch.

Metrische Räume sind zwar weniger allgemein als topologische Räume, aber sie verfügen über einige nützliche Eigenschaften, wie eine einfache Charakterisierung abgeschlossener Mengen.

1.19 Bemerkung. Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann sind äquivalent:

(i) Die Menge A enthält alle ihre Häufungspunkte.

(ii) Es gilt $A = \overline{A}$.

(iii) Die Menge A ist abgeschlossen.

Wichtige Eigenschaften wie die Stetigkeit von Funktionen hängen von der gewählten Metrik ab.

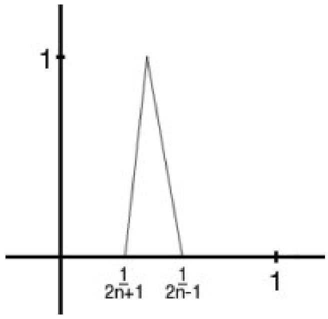
1.20 Beispiel. Wir greifen hierzu das Beispiel 1.15 c) noch einmal auf. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X\colon f \mapsto f$ ist zwar bijektiv, aber die Stetigkeit hängt von der gewählten Metrik ab:

So ist $\mathrm{id}\colon (C^0([0,1]), d_\infty) \to (C^0([0,1]), d_1)$ stetig, denn es gilt

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f, g).$$

Hingegen ist $\mathrm{id}\colon (C^0([0,1]), d_1) \to (C^0([0,1]), d_\infty)$ nicht stetig: Definiere zu $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{2n+1}, \\ 1 - 2n(2n+1)\|x - \frac{1}{2n}\|, & \frac{1}{2n+1} \le x < \frac{1}{2n}, \\ 1 - 2n(2n-11)\|x - \frac{1}{2n}\|, & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{2n-1}, \\ 0, & \frac{1}{2n-1} < x \le 1. \end{cases}$$



Dann gilt

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \longrightarrow 0,$$

aber: $d_\infty(f_n, 0) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1$.

1.21 Definition. Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ eine Isometrie, falls gilt

$$\forall x, y \in X:\ d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y). \tag{1-1}$$

q Eine bijektive Isometrie heißt isometrischer Isomorphismus.

1.22 Beispiel. Versieht man $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik, so sind die durch orthogonale Matrizen gegebenen Abbildungen Isometrien von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$.

1.23 Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt eine Cauchyfolge, falls gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \ge n_0\colon d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Der Raum heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge konvergent ist.

b) Eine Menge $A \subset X$ heißt beschränkt, falls gilt: $\exists r > 0, x \in X : A \subset B(x_0, r)$.

1.24 Beispiel. Sei (X,d) ein metrischer Raum mit diskreter Metrik, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Dann gilt:

$$\exists x_0 \in X, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : x_n = x_0.$$

1.25 Satz. *Sei (X,d) ein metrischer Raum.*

a) Es existiert ein beschränkter metrischer Raum (X,d'), welcher homöomorph zu (X,d) ist.

b) Es existiert ein vollständiger metrischer Raum (Y,d_Y) und ein dichter Teilraum $Y_0 \subset Y$ so, dass (X,d) und (Y_0,d_Y) isometrisch isomorph sind.

Beweis. a) Siehe Übung.

b) (Beweisskizze)
Definiere auf $X_c := \{(x_n)_n \subset X | (x_n)_n \text{ ist Cauch-Folge}\}$ die Äquivalenzrelation

$$(a_n)_n \sim (b_n)_n :\Leftrightarrow (d(a_n,b_n))_n \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Dann bildet die Menge der Äquivalenzklassen mit der Metrik

$$d_y((a_n)_n,(b_n)_n) := \lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n)$$

einen vollständigen metrischen Raum. X wird dann durch Identifizierung mit den konstanten Folgen in diesen Raum isometrisch und dicht eingebettet. $\square$

Auch der folgende Satz, der aus der Analysis bekannt sein sollte, wird hier nicht bewiesen.

1.26 Satz (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, und $T\colon X\to X$ eine Kontraktion, d.h.,*

$$\exists k \in [0,1)\ \forall x,y \in X : d(Tx,Ty) \leq k\cdot d(x,y).$$

Dann existiert genau ein Fixpunkt von T, d.h. genau ein $x^* \in X$ mit $Tx^* = x^*$. Für alle $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x^* und es gilt die Abschätzung

$$d(x^*,T^n x_0) \leq \frac{k^n}{1-k}\cdot d(Tx_0,x_0).$$

c) Kompaktheit

1.27 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$.

a) Eine offene Überdeckung von A ist eine Familie $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{T}$ (wobei Λ eine beliebige Indexmenge ist) mit $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$.
B) Eine offene Überdeckung $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von A hat eine endliche Teilüberdeckung, wenn gilt

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \{\lambda_1, ...\lambda_n\} \subset \Lambda : A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\lambda_j}.$$

c) Die Menge $A \subset X$ heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

1.28 Satz. *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Ist X kompakt und $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig, so ist auch der Wertebereich $f(X)$ kompakt.*

Beweis. Sei $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{T}_Y$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Setze $U_\lambda := f^{-1}(V_\lambda)$. Da f stetig ist, gilt $U_\lambda \in \mathcal{T}_X$, und wegen $X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ ist $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von X.
X ist kompakt und somit existiert eine endliche Teilüberdeckung, $X \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\lambda_j}$. Dann ist aber $f(X) \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{\lambda_j}$ ebenfalls eine endliche Teilüberdeckung für $f(X)$. □

1.29 Bemerkung. In $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ (oder allgemeiner in endlich dimensionalen Räumen) gilt: Eine Teilmenge A ist genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.
In unendlichdimensionalen metrischen Räumen (X, d) folgt nur, dass jede kompakte Teilmenge A beschränkt und abgeschlossen ist. Die Umkehrung gilt nicht, wie das unten stehende Beispiel 1.30 b) zeigt.

1.30 Beispiele. a) Sei X eine unendliche Menge mit diskreter Metrik. Dann ist X beschränkt und abgeschlossen, aber $X = \bigcup_{x\in X} B(x, \frac{1}{2})$ ist eine offene Überdeckung von X, zu welcher keine endliche Teilüberdeckung existiert.

b) Sei

$$X := \ell^p := \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \dots)\colon \xi_j \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \right\}.$$

Durch

$$d(x, y) := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

wird eine Metrik auf ℓ^p definiert. Für die Einheitsvektoren

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \ldots)$$

gilt $d(e_i, e_j) = 2^{\frac{1}{p}}$ $(i \neq j)$. Die Einheitssphäre $S := \{x \in \ell^p | d(x, 0) = 1\}$ ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt.

Denn $\big(B(x, \frac{1}{2})\big)_{x \in S}$ ist eine offene Überdeckung von S.
Angenommen, es gäbe eine endliche Teilüberdeckung $S \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \frac{1}{2})$. Dann kann jede Umgebung $B(x_j, \frac{1}{2})$ höchstens einen Einheitsvektor e_k enthalten, wegen $1 < 2^{\frac{1}{p}}$. Es gibt aber unendlich viele solche Einheitsvektoren. Widerspruch. Also ist S nicht kompakt.

1.31 Definition. Sei (X, d) metrischer Raum.

a) Dann heißt X folgenkompakt, wenn jede Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.

b) Der Raum X heißt totalbeschränkt, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists E \subset X \text{ endlich} : X = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon).$$

E heißt (endliches) ε-Netz für X.

1.32 Bemerkung. a) Entsprechendes gilt auch für Teilmengen $A \subset X$, wobei $E \subset X$ ausreicht. Daraus ist $\widetilde{E} \subset A$ konstruierbar (Dreiecksungleichung).

b) Die Folgenkompaktheit eines metrischen Raums (X, d) ist gleichbedeutend damit, dass jede Folge eine konvergente Teilfolge beitzt.

1.33 Satz. *(X, d) sei metrischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(i) *X ist kompakt.*

(ii) *X ist folgenkompakt.*

(iii) *X ist totalbeschränkt und X vollständig.*

Beweis. **(i)$\Longrightarrow$(ii):**

Angenommen, es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche keinen Häufungspunkt besitzt. Dann gilt:

$$\forall x \in X \ \exists \varepsilon_x > 0 : \#\{n \in \mathbb{N} \,| x_n \in B(x, \varepsilon_x)\} < \infty$$

Da $(B(x,\varepsilon_x))_{x\in X}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge X ist, folgt

$$\exists m \in \mathbb{N},\ \widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_m \in X : X = \bigcup_{j=1}^{m} B(\widetilde{x}_j, \varepsilon_{x_j}).$$

Insbesondere sind alle (unendlich vielen) x_n in endlich vielen Kugeln enthalten. Dies ist ein Widerspruch zur Endlichkeit der Menge $\bigcup_{j=1}^{m}\{n \in \mathbb{N} \colon x_n \in B(\widetilde{x}_j, \varepsilon_{x_j})\}$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii):

Als folgenkompakter Raum ist X vollständig. Angenommen, X ist nicht totalbeschränkt, d.h.,

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N},\ \{x_1,\dots,x_n\} \subset X : \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,\varepsilon) \subsetneq X.$$

Wähle $x_1 \in X$ beliebig, $x_2 \in X\backslash B(x_1,\varepsilon)$, $x_3 \in X\backslash(B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon))$ usw. Dann gilt $x_{n+1} \in X\backslash\bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,\varepsilon)$ und

$$\forall x \in X : \#\{n \in \mathbb{N}\ | x_n \in B(x,\varepsilon)\} \leq 1,$$

denn $d(x_n,x_{n+1}) \geq \varepsilon$. Also besitzt die Folge $(x_n)_n$ keinen Häufungspunkt in X, Widerspruch.

(iii)$\Longrightarrow$(i):

Wir nehmen an, es gibt eine offene Überdeckung $\mathcal{A}$ von X, welche keine endliche Teilüberdeckung besitzt.
X ist totalbeschränkt, mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ in Definition 1.31 haben wir

$$\exists n \in \mathbb{N},\ y_1,\dots,y_n \in X : X = \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j,\tfrac{1}{2}).$$

Wären alle $B(y_j,\frac{1}{2})$, $j = 1,\dots,n$, endlich überdeckbar, so auch X. Demnach gibt es $x_1 \in \{y_1,\dots,y_n\}$ so, dass $B(x_1,\frac{1}{2})$ nicht endlich überdeckbar ist.
Wir konstruieren induktiv eine Folge $(x_n)_n$:
Seien $x_1,\dots,x_n$ gegeben und so konstruiert, dass $B(x_{n-1},\frac{1}{2^{n-1}})$ nicht endlich überdeckbar ist, d.h. es gibt $x_n \in B(x_{n-1},\frac{1}{2^{n-1}})$ mit $B(x_n,\frac{1}{2^n})$ nicht endlich überdeckbar. Also ist

$$\forall m \geq n : d(x_n,x_m) \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

d.h., $(x_n)_n$ ist eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit von X existiert der Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$.
$\mathcal{A}$ ist eine Überdeckung, also

$$\exists V \in \mathcal{A} : x \in V$$

und da die Mengen in $\mathcal{A}$ offen sind, folgt

$$\exists \varepsilon > 0 :\subset B(x,\varepsilon) \subset V.$$

Sei $y \in B(x_n, \frac{1}{2^n})$. Wegen

$$d(y,x) \leq d(y,x_n) + d(x_n,x) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

für hinreichend großes n gilt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : B(x_{n_0}, \tfrac{1}{2^{n_0}}) \subset B(x,\varepsilon) \subset V,$$

Widerspruch zur Konstruktion von $B(x_{n_0}, \frac{1}{2^{n_0}})$. □

1.34 Bemerkung. a) Eine andere Bezeichnung für „totalbeschränkt“ ist auch „präkompakt“.

b) Eine Menge $A \subset X$ heißt relativ kompakt, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

Ein wichtiges Beispiel für kompakte Mengen in einem unendlich dimensionalen Raum wird durch den Satz von Arzelà-Ascoli gegeben.

1.35 Satz. *Sei (X, d_X) ein kompakter metrischer Raum und $M \subset C^0(X,\mathbb{C})$, wobei wir $C^0(X,\mathbb{C})$ mit der Metrik $d(f,g) := \sup_{x\in X} \|f(x) - g(x)\|$ versehen. Dann ist M genau dann kompakt, wenn M gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist.*

1.36 Beispiel. Eine Familie Lipschitz-stetiger Funktionen $M \subset C^0(X,\mathbb{C})$ auf einer kompakten Menge X ist kompakt, wenn die Lipschitz-Konstanten gleichmäßig beschränkt sind.

2. Normierte Räume und stetige lineare Abbildungen

Im Folgenden sei X ein $\mathbb{K}$-VR, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

a) Normierte Räume

2.1 Definition. Ein Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ heißt Norm, falls für alle $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(i) $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

In diesem Fall heißt $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.
Falls in nur die Richtung (ii) und (iii) gelten, so heißt $\|\cdot\|$ eine Halbnorm oder Seminorm.

2.2 Bemerkung. a) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ wird mit $d(x, y) := \|x - y\|$ zu einem metrischen Raum (X, d). Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

b) Sei (X, d) ein metrischer Raum, so ist $\widehat{d}\colon X \to \mathbb{R}$, $\widehat{d}(x) := d(x, 0)$ eine Norm genau dann, wenn für alle $x, y, z \in X$ $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

(i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$,

(ii) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$.

Die von der Norm $\widehat{d}$ induzierte Metrik ist dann wieder d.

2.3 Definition. Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Raum.

2.4 Beispiele. a) Der Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $\|\cdot\| = |\cdot|$ ist ein Banachraum.

b) Auf $X = \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung $p : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$, $(x_1, x_2) \mapsto |x_1|$ eine Seminorm, aber keine Norm.

c) Sei X ein kompakter, metrischer Raum und Y Banachraum. Dann ist der Raum $C^0(X, Y)$ aller stetigen Funktionen von X nach Y, versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$, ein Banachraum.

2.5 Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf X heißen äquivalent, falls $c_1, c_2 > 0$ existieren mit

$$\forall x \in X : c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

2.6 Bemerkung. Äquivalente Normen erzeugen dieselbe Topologie.

2.7 Beispiel. Auf $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent.

Für eine Charakterisierung endlichdimensionaler normierter Räume benötigen wir das folgende Lemma.

2.8 Satz (Rieszsches Lemma). *Sei X ein normierter Raum und $X_0 \subsetneq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt*

$$\forall q \in (0,1)\ \exists x_q \in X, \|x_q\| = 1 : q \leq \inf_{x_0 \in X_0} \|x_q - x_0\| \leq 1.$$

Beweis. Sei $x \in X \setminus X_0$ beliebig und $d := \inf_{x_0 \in X_0} \|x - x_0\|$. Dann ist $d > 0$, da sonst eine Folge $(x_n)_n \subset X_0$ mit $x_n \to x$ existiert und wegen der Abgeschlossenheit wäre $x \in X_0$.

$$\Rightarrow \exists x_d \in X_0 : d \leq \|x - x_d\| \leq \frac{d}{q}.$$

Wir setzen nun $x_q := \frac{x - x_d}{\|x - x_d\|}$. Dann ist $\|x_q\| = 1$, $\inf_{x \in X_0} \|x_q - x\| \leq \|x_q\| \leq 1$, und für $x_0 \in X_0$

$$\|x_q - x_0\| = \left\| \frac{x - x_d}{\|x - x_d\|} - x_0 \right\| = \frac{1}{\|x - x_d\|} \|x - x_d - \|x - x_d\| x_0\| \geq \frac{1}{\|x - x_d\|} d \geq q$$

□

2.9 Bemerkung. a) Für $q = 1$ gilt das Rieszsche Lemma im Allgemeinen nicht. Betrachte hierzu $X := \{x \in C^0([0,1], \mathbb{R}) | x(0) = 0\}$.
Dann ist X bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum und $X_0 := \{x \in X | \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t = 0\}$ ist ein abgeschlossener Unterraum.
Angenommen, es existiert ein $x_1 \in X$ mit $\inf_{x \in X_0} \|x_1 - x\|_\infty = 1$ und $\|x_1\|_\infty = 1$. Es gilt zum einen wegen $x(0) = 0$

$$\left| \int_0^1 x_1(t)\mathrm{d}t \right| < 1$$

und zum anderen ist für $y \in X \setminus X_0$

$$1 \leq \left\| x_1 - \left(x_1 - \frac{\int_0^1 x_1(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 y(t)\mathrm{d}t} y(t) \right) \right\|_\infty = \left| \frac{\int_0^1 x_1(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 y(t)\mathrm{d}t} \right| \|y\|_\infty .$$

$$\Rightarrow \forall y \in X : \left| \int_0^1 y(t)\mathrm{d}t \right| \leq \|y\|_\infty \left| \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t \right| .$$

Wähle nun $y_n(t) = t^n$. Dann ist $y \in X$, $\|y\|_\infty$=1 und $\left|\int_0^1 y(t)\mathrm{d}t\right| = \frac{n}{n+1} \to 1$. Damit bekommen wir aber $\left|\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t\right| = 1$. Widerspruch.

b) In Hilberträumen ist immer $q = 1$ möglich.

2.10 Satz. *Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:*

$$\dim X < \infty \Leftrightarrow \overline{B(0,1)} \text{ ist kompakt.}$$

Beweis. Sei $\dim X < \infty$. Dann sind beschränkte, abgeschlossene Mengen kompakt. Ist nun $\dim X = \infty$, so können wir mit dem Rieszsches Lemma eine Folge $(x_n)_n \subset \partial B(0,1)$ konstruieren, für die $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ ist.
Sei hierzu $x_1 \in \partial B(0,1)$ beliebig, $X_1 := \operatorname{span}\{x_1\}$. Als endlichdimensionaler Unterraum ist $X_1 \subsetneq X$ abgeschlossen, also existiert ein $x_2 \in X$ mit

$$\|x_2\| = 1 \text{ und } \frac{1}{2} \leq \inf_{x \in X_1} \|x_2 - x\|.$$

Nun ist auch $X_2 := \operatorname{span}\{x_1, x_2\} \subsetneq X$ abgeschlossen und induktiv erhalten wir die Folge $(x_n)_n \subset \partial B(0,1)$ mit $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ $(m, n \in \mathbb{N})$, sie besitzt also keine konvergente Teilfolge. $\square$

2.11 Bemerkung.
Jeder endlichdimensionale normierte Raum X ist linear homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.

2.12 Satz. *a) Sei $p\colon X \to [0, \infty)$ eine Seminorm. Dann ist das System*

$$\left\{U \subset X : \forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\colon\ B^{(p)}(x, \varepsilon) \subset U\right\}$$

eine Topologie auf X und heißt die von p erzeugte Topologie (vgl. Definition 1.16). Dabei ist $B^{(p)}(x, \varepsilon) := \{y \in X : p(x - y) < \varepsilon\}$.

b) Diese von einer Seminorm p erzeugte Topologie ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Seminorm sogar eine Norm ist.

Die Menge $\{B^{(p)}(x, \varepsilon) : x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ bildet eine Basis der Topologie. Die von p erzeugte Topologie ist die gröbste Topologie auf X, bezüglich der alle Abbildungen $x \mapsto p(x - x_0)$ mit $x_0 \in X$ stetig sind.

c) Sei $L = \{p_\lambda\colon \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von Seminormen $p_\lambda\colon X \to [0, \infty)$.

Definiere $\mathcal{T}$ als das System aller Mengen $U \subset X$, für welche gilt

$$\forall\, x \in U\ \exists\, r \in \mathbb{N}\ \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda\ \exists\, \varepsilon > 0\colon\ B^{(\lambda_1)}(x, \varepsilon) \cap \dots \cap B^{(\lambda_r)}(x, \varepsilon) \subset U.$$

Dann ist $\mathcal{T}$ eineTopologie auf X.
Dies ist die gröbste Topologie auf X, für die jede der Abbildungen $p_\lambda(\cdot - x_0)$ mit $\lambda \in \Lambda$ und $x_0 \in X$ stetig von X nach $\mathbb{R}$ ist (vgl. Definition 1.7).

Eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist gegeben durch

$$\{B^{(\lambda)}(x,r)\colon \lambda \in \Lambda,\ x \in X,\ r > 0\}.$$

[[Das das System $\mathcal{T}_p := \{U \subset X : \forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon > 0\colon\ B(x,\varepsilon) \subset U\}$ eine Topologie ist, sieht man sofort wie in 1.16. Falls die Seminorm eine Norm ist, ist X Hausdorffsch nach Bem. 1.17. Ansonsten existiert ein $x \in X \setminus \{0\}$ mit $p(x) = 0$, und für die Punkte 0 und x ist die Bedingung eines Hausdorff-Raums verletzt.

Aufgrund der Dreiecksungleichung ist $B(x,\varepsilon) \in \mathcal{T}_p$ für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Andererseits lässt sich jedes $U \in \mathcal{T}_p$ in der Form $U = \bigcup_{x\in U} B(x,\varepsilon_x)$ schreiben, d.h. die Menge aller $B(x,\varepsilon)$ bildet eine Basis der Topologie.

Sei $\mathcal{T}_1$ die von allen Abbildungen $p_{x_0} : x \mapsto p(x - x_0)$ erzeugte Topologie auf X. Dann gilt $B(x_0,\varepsilon) = p_{x_0}^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) \in \mathcal{T}_1$ und damit $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_1$.

Für die Richtung $\mathcal{T}_p \supset \mathcal{T}_1$ ist zu zeigen, dass jedes $p_{x_0}\colon (X,\mathcal{T}_p) \to \mathbb{R}$ stetig ist. Dazu verwendet man Lemma 1.11: Sei $x \in X$ und $W \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von $p_{x_0}(x) = p(x - x_0)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $V := (p_{x_0}(x) - \varepsilon, p_{x_0}(x) + \varepsilon) \subset W$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung sieht man, dass $U := B(x,\varepsilon)$ eine Umgebung von x ist mit $p_{x_0}(U) \subset V \subset W$.]]

2.13 Definition. Die Topologie aus Satz 2.12c) wird die lokalkonvexe Topologie zu L auf X genannt.

2.14 Beispiel. a) Der Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ wird definiert als die Menge aller $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für welche für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$p_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty.$$

Versehen mit der Familie $L = \{p_{\alpha,\beta}\colon \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$ wird $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ein lokalkonvexer topologischer Raum, der sogar Fréchetraum, d.h. metrisierbar und vollständig, ist.

b) Die in Übungsblatt 2, Aufgabe G2 angegebene Topologie ist nicht metrisierbar.

2.15 Definition. Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Dann heißt $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum, falls die Abbildungen

$$\begin{aligned} s&\colon X \times X \to X, && (x_1,x_2) \mapsto x_1 + x_2 \\ m&\colon \mathbb{K} \times X \to X, && (\alpha, x) \mapsto \alpha x \end{aligned}$$

beide stetig sind.

2.16 Bemerkung. a) Normierte Räume sind topologische Vektorräume.

b) Die Verschiebung einer in einem topologischer Vektorraum X offenen Menge um einen konstanten Vektor ergibt in X wieder eine offene Menge.

c) Wenn $A \subset X$ (X topologischer Vektorraum) eine offene Teilmenge ist und $B \subset X$ eine beliebige Teilmenge, dann ist $A + B$ offen in X.

2.17 Definition (Quotientenraum für topologische Vektorräume)**.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum (nicht unbedingt Hausdorffsch), und $M \subset X$ ein Untervektorraum, sowie

$$X/M := \{[x] = x + M : x \in X\}$$

der algebraische Quotientenraum. Wir schreiben Φ für die (lineare) Quotientenabbildung,

$$\Phi\colon X \to X/M \qquad x \mapsto [x]$$

und wir statten X/M mit der Topologie

$$\mathcal{T}_M := \{V \subset X/M : \Phi^{-1}(V) \subset X \text{ offen}\}.$$

aus.

2.18 Bemerkung. a) Die oben definierte Topologie T_M auf X/M besteht aus genau jenen Mengen $H + M \subset X/M$, für die $H + M$ eine in X offene Menge ist.
Aus Bemerkung 2.16 bekommen wir für $H \subset X$ offen in X ist, dass $\Phi(H)$ offen in X/M ist, d.h. die Abbildung Φ ist offen.

b) T_M ist die feinste Topologie auf X/M, für die $\Phi\colon X \to X/M$ stetig ist.

[[Man sieht direkt aus der Definition, dass $\mathcal{T}_M$ eine Topologie auf X/M ist und dass Φ bzgl. dieser Topologie stetig ist. Falls andererseits $\Phi : (X, \mathcal{T}) \to (X/M, \mathcal{T}')$ für eine beliebige Topologie $\mathcal{T}'$ stetig ist, so folgt für alle $V \in \mathcal{T}'$ schon $\Phi^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ und damit $V \in \mathcal{T}_M$, d.h. $\mathcal{T}_M$ ist die maximale Topologie mit dieser Eigenschaft.]]

Wir benötigen noch eine Eigenschaft dieser Quotientenräume, welche hier nicht bewiesen wird.

2.19 Bemerkung. Sei X ein Vektorraum mit einer Seminorm $p(\cdot)$, ausgestattet mit der davon gemäß Satz 2.12 erzeugten Topologie und $M \subset X$ ein Untervektorraum.
Dann ist der Quotientenraum X/M Hausdorffsch genau dann, wenn M eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

2.20 Satz (Quotientenraum für normierte Räume)**.** *Sei X normierter Raum, $M \subset X$ ein Untervektorraum, und X/M der Quotientenraum. Dann ist*

$$\|[x]\| := \operatorname{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|_X$$

eine Seminorm auf X/M.

Falls M abgeschlossen ist, so ist $\|[\cdot]\|$ eine Norm und $(X/M, \|[\cdot]\|)$ ein normierter Raum.

Falls X Banachraum ist und M abgeschlossen ist, so ist auch X/M Banachraum.

Beweis. Nur die letzte Aussage folgt nicht durch direktes Nachrechnen. Sei $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in X/M. Dann existiert eine Teilfolge $([x_{n_k}])_{k\in\mathbb{N}}$ von $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\| < 2^{-(k+1)}$. (Da $\|([x_n]) - ([x_m])\| \longrightarrow 0 \quad (n, m \to \infty)$.)

Schreibe wieder $[x_k]$ statt $[x_{n_k}]$.

Wir können nun eine Cauchyfolge in X aus Repräsentanten dieser $[x_k]$ wählen, für die die Äquivalenzklasse des Grenzwerts der Grenzwert von $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Induktiv folgt, dass nach Definition der Norm in X/M eine Folge $(z_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset X$ existiert mit $z_\ell \in [x_\ell]$ und

$$\|z_{\ell+1} - z_\ell\|_X \le \|[x_{\ell+1}] - [x_\ell]\|_{X/M} + 2^{-\ell} \quad (\ell \in \mathbb{N})$$

für alle $l \in \mathbb{N}$. Damit

$$\begin{aligned} \|z_{k+m} - z_k\|_X &\le \sum_{\ell=k+1}^{k+m} \|z_\ell - z_{\ell-1}\|_X \\ &\le \sum_{\ell=k+1}^{k+m} \Big(\|[x_\ell] - [x_{\ell-1}]\|_{X/M} + 2^{-\ell+1}\Big) \\ &\le \sum_{\ell=k+1}^{k+m} 2^{-\ell+2}, \end{aligned}$$

d.h. $(z_k)_k \subset X$ ist eine Cauchyfolge. Setze $z := \lim_k z_k$. Wegen

$$\|[x_k] - [z]\|_{X/M} = \|[z_k] - [z]\|_{X/M} \le \|z_k - z\|_X \to 0$$

gilt $[x_k] \to [z]$ in X/M. $\square$

Hierdurch können wir aus den $\mathscr{L}^p$-Räumen die Banachräume L^p definieren.

2.21 Definition ($\mathscr{L}^p$-Räume)**.** Sei $(Z, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

a) Sei $1 \le p < \infty$. Definiere $\mathscr{L}^p(\mu)$ als die Menge aller messbaren Funktionen $f\colon Z \to \mathbb{C}$ mit

$$\|f\|_p := \Big(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} < \infty.$$

b) Für $p = \infty$ wird $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ definiert als die Menge aller messbarer Funktionen $f\colon Z \to \mathbb{C}$, für welche es ein $C_f > 0$ gibt mit $\mu(\{z \in Z\colon |f(z)| > C_f\}) = 0$. Man spricht von μ-fast überall beschränkten Funktionen. Für $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ definiert man

$$\|f\|_\infty := \inf\Big\{C \in \mathbb{R}\colon \mu(\{z \in Z\colon |f(z)| > C\}) = 0\Big\}.$$

c) Für Funktionen $f\colon Z \to \mathbb{R}$ werden die entsprechenden Funktionenräume mit $\mathscr{L}^p(\mu;\mathbb{R})$ bezeichnet. Manchmal schreiben wir auch $\mathscr{L}^p(\mu;\mathbb{C})$ statt $\mathscr{L}^p(\mu)$.

2.22 Satz. *Für $1 \le p \le \infty$ ist der Raum $\mathscr{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum, und $\|\cdot\|_p$ definiert eine Seminorm (Halbnorm) auf $\mathscr{L}^p(\mu)$.*

2.23 Satz (L^p-Räume)**.** *Sei $(Z,\mathscr{A},\mu)$ ein Maßraum, und sei $1 \le p \le \infty$. Den Vektorraum $X := \mathscr{L}^p(\mu)$ versehen wir mit der Seminorm $\|\cdot\|_p$ und der induzierten Topologie. Sei*

$$M := \{f \in \mathscr{L}^p(\mu) |\, \|f\|_p = 0\}.$$

Dann ist M ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathscr{L}^p(\mu)$.

Wir definieren

$$L^p(\mu) := \mathscr{L}^p(\mu)/M$$

als Quotientenraum. Dieser besteht aus Äquivalenzklassen von Funktionen, die μ–fast überall übereinstimmen.

Mit dieser Konstruktion wird $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ zu einem Banachraum.

Falls das Maß durch das Lebesgue–Maß $\lambda|_\Omega$ auf einer messbaren Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gegeben ist, schreibt man auch $L^p(\Omega)$ statt $L^p(\lambda|_\Omega)$.

[[M ist als Urbild von $\{0\}$ unter der per Definition stetigen Abbildung $\|\cdot\|_p : \mathscr{L}^p(\mu) \to \mathbb{R}$ abgeschlossen.]]

2.24 Beispiele. Die folgenden Beispiele sind Spezialfälle der oberen Definition.

a) Der Raum $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ wird mit jeder der Normen

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty),$$
$$\|x\|_\infty := \max_{j\in\mathbb{N}} |x_j|$$

zu einem Banachraum.

b) Definiere für $1 \le p < \infty$ die ℓ^p-Räume durch

$$\ell^p := \Big\{x = (x_1, x_2, \dots) | x_j \in \mathbb{C}, \|x\|_p := \Big(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\Big)^{1/p} < \infty\Big\},$$

und für $p = \infty$ den Raum ℓ^∞ durch

$$\ell^\infty := \Big\{ x = (x_1, x_2, \dots) | x_j \in \mathbb{C}, \|x\|_\infty := \sup \{|x_j|, j \in \mathbb{N}\} < \infty \Big\}.$$

Dann ist ℓ^p für alle $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum. Hier ist jeweils $Z = \mathbb{N}$ und μ das Zählmaß.

2.25 Satz. *Seien $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Dann wird durch*

$$\|\cdot\| : X_1 \times X_2 \to [0, \infty), \quad \|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$$

eine Norm auf $X = X_1 \times X_2$ definiert.

Falls X_1 und X_2 beide Banachräume sind, so ist auch $X_1 \oplus X_2$ ein Banachraum.

2.26 Definition. Der Raum X aus Satz 2.25 heißt die direkte Summe von X_1 und X_2, Schreibweise $X = X_1 \oplus X_2$.

b) Stetige lineare Abbildungen

In normierten Räumen ist die Stetigkeit einer linearen Abbildung äquivalent zur Beschränktheit.

2.27 Satz. *Seien X, Y normierte Räume, $T \colon X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) *$T \colon X \to Y$ ist stetig.*
(ii) *$T \colon X \to Y$ ist stetig an der Stelle $0 \in Y$.*
(iii) *T ist beschränkt, d.h. $\exists\, c > 0\ \forall x \in X \colon \|Tx\|_Y \le c\,\|x\|_X$.*

Dies ermöglicht es uns, auf dem Raum der stetigen linearen Abbildungen eine Norm zu definieren.

2.28 Definition. a) Seien X, Y Vektorräume, ausgestattet mit Topologien. Der Raum

$$L(X, Y) := \{T \colon X \to Y \ : \ T \text{ linear, stetig}\}$$

heißt der Raum der linearen stetigen Operatoren von X nach Y. Oft schreibt man Tx statt $T(x)$.

Wir setzen $L(X) := L(X, X)$.

b) Für $T \in L(X, Y)$ (mit normierten Räumen X und Y) definiert man

$$\|T\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X,\, \|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y .$$

$\|T\|$ heißt die Operatornorm von T.

c) Wir bezeichnen mit

$$\begin{aligned}\ker T &:= N(T) := \{x \in X : Tx = 0\},\\ \operatorname{Im} T &:= R(T) := T(X) := \{Tx : x \in X\}\end{aligned}$$

den Kern (englisch „null space“) bzw. den Wertebereich (englisch „range“) von T.

d) Der Raum $X' := L(X, \mathbb{K})$ heißt der (topologische) Dualraum von X.

2.29 Bemerkung. Es gilt

$$\forall x \in X : \ \|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$$

und

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \ \forall\, x \in X : \ \|Tx\|_Y \leq C\,\|x\|_X\}.$$

2.30 Definition. a) Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $X^* := \{f : X \to \mathbb{K},\ f \text{ linear }\}$ der algebraische Dualraum von X. Für $Y \subset X^*$ bezeichnet man die Y-schwache Topologie $\mathcal{T}(Y)$ (vgl. Definition 1.7) auf X auch mit $\sigma(X, Y)$.

b) Sei X topologischer Vektorraum und $X' \subset X^*$ der topologische Dualraum. Dann heißt $\sigma(X, X')$ die schwache Topologie auf X und $\sigma(X', X)$ die schwach-*-Topologie auf X'. (Wir werden später sehen, dass man X als Teilmenge von X'' auffassen kann.)

Für die schwache Konvergenz schreibt man $x_n \rightharpoonup x$ oder $x_n \xrightarrow{w} x$, für die schwach-*-Konvergenz schreibt man $\lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ oder $\lambda_n \xrightarrow{w^*} \lambda$ in X'.

Die schwache Topologie eines unendlichdimensionalen Raumes ist im Allgemeinen nicht metrisierbar ist. Wir können in Zukunft also nicht davon ausgehen, dass jeder von uns benötigte Raum eine Metrik besitzt, die zu seiner Topologie passt.

2.31 Beispiel (Shift-Operatoren). a) Definiere den Rechtsshift $S_R \in L(\ell^2)$ durch

$$S_R\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad y_n := \begin{cases} 0 & : n = 1,\\ x_{n-1} & : n > 1.\end{cases}$$

Dann ist S stetig mit Norm 1 (sogar eine Isometrie, d.h. es gilt $\|Sx\|_2 = \|x\|_2$ $(x \in \ell^2)$), injektiv aber nicht surjektiv. Analog ist der Linksshift

$$S_L\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

stetig mit Norm 1, surjektiv aber nicht injektiv.

b) Sei $\ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{K}) := \{x\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \|x\|_2 := (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^2)^{1/2} < \infty\}$ und S_R der Rechtsshift

$$S_R\big((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) := (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Dann ist S_R ein Norm-Isomorphismus, d.h. S_R ist bijektiv, linear, S_R und S_R^{-1} sind stetig, und S_R ist eine Isometrie.

2.32 Beispiel (Ableitungsoperator)**.** a) Sei $X := C^1([0,1])$ mit Norm $\|f\|_X := \sup\{|f(t)| + |f'(t)|\colon t \in [0,1]\}$ und $Y := C^0([0,1])$, versehen mit der Norm $\|f\|_Y := \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)|\colon t \in [0,1]\}$. Dann sind X, Y Banachräume, und der Ableitungsoperator

$$T\colon X \to Y,\ f \mapsto f'$$

ist ein linearer stetiger Operator mit Norm 1.

b) Wählt man in a) für X die Supremumsnorm $\|f\|_\infty$, so ist der Ableitungsoperator T nicht mehr stetig, denn für $f_n(t) := t^n$ gilt $\|f_n\|_\infty = 1$ und $\|Tf_n\|_\infty = n$, d.h. $\|T\| = \infty$. Jetzt ist X nur noch normierter Vektorraum, aber nicht mehr vollständig.

2.33 Beispiele. a) Sei $X = C^0([0,1])$, erneut versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty$. Dann ist die Auswertung an einer Stelle $x \in [0,1]$

$$\varphi_x : X \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto f(x)$$

eine lineare, stetige Abbildung in den Körper. Also $\varphi_x \in X'$.

b) Sei $X = L^2((0,1),\mathbb{C})$ mit der Norm $\|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)|^2 \mathrm{d}t$. Für $g \in L^2((0,1),\mathbb{C})$ beliebig ist

$$\varphi_g : X \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

stetig und linear mit $\|\varphi_g\| = \|g\|_2$. Hiermit wird also X in X' eingebettet, $X \hookrightarrow X'$. Später werden wir sehen, dass für Hilberträume $X \cong X'$ ist.

Für stetige lineare Abbildungen liefert eine Abschätzung nach unten bereits die Invertierbarkeit.

2.34 Satz. *Seien X, Y normierte Räume und $T \in L(X,Y)$. Dann gilt*

$$T^{-1} \in L(R(T),X) \textit{ existiert } \Leftrightarrow \exists m > 0\ \forall x \in X : \|Tx\|_Y \geq m\|x\|_X.$$

Beweis. Existiert $T^{-1} \in L(R(T),X)$ so gilt

$$\forall y \in R(T) : \|T^{-1}y\|_X \leq \|T^{-1}\|\ \|y\|_Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X : \|x\|_X \leq \|T^{-1}\|\ \|Tx\|_Y.$$

Aus $\|Tx\|_Y \geq m\|x\|_X$ für alle $x \in X$ folgt andererseits $Tx = 0 \Leftrightarrow x = 0$, also ist T injektiv und $T^{-1} : R(T) \to X$ existiert. Wie oben bekommen wir dann $\|T^{-1}\| = \frac{1}{m}$. □

2.35 Satz. *Seien X ein normierter Raum und Y Banachraum. Dann ist $L(X,Y)$ Banachraum.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass $L(X,Y)$ ein normierter Vektorraum ist.
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $L(X,Y)$. Dann ist für jedes $x \in X$

$$\|A_n x - A_m\|_Y \leq \|A_n - A_m\|\|x\|_X,$$

also ist $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y und demnach konvergent. Damit ist

$$A : X \to Y, \quad Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$$

wohldefiniert und linear. Wegen

$$\|Ax\|_Y = \lim_n \|A_n x\|_Y \leq \lim_n \|A_n\| \cdot \|x\|_X \leq C\,\|x\|_X$$

gilt $A \in L(X,Y)$. Da $\|(A - A_n)x\|_Y = \lim_{m\to\infty} \|(A_m - A_n)x\|_Y$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\|A - A_n\| &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A-A_n)x\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x\neq 0} \lim_{m\to\infty} \frac{\|(A_m - A_n)x\|_Y}{\|x\|_X} \leq \lim_{m\to\infty} \|A_m - A_n\| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

für $n \geq n_0$, d.h. es gilt $A_n \longrightarrow A$ in $L(X,Y)$. $\square$

2.36 Beispiel. Sei X ein normierter Raum. Dann sind X' und $X'' = L(X',\mathbb{K})$ Banachräume.

Stetige lineare Operatoren sind bereits gleichmäßig stetig. Somit können auf einem Unterraum definierte Operatoren auf dessen Abschluß fortgesetzt werden.

2.37 Satz. *Seien X ein normierter Raum, $M \subset X$ ein Unterraum und Y Banachraum. Dann existiert zu jedem $T \in L(M,Y)$ eine eindeutige Fortsetzung*

$$\overline{T} \in L(\overline{M}, Y), \quad \overline{T}|_M = T$$

und es gilt $\left\|\overline{T}\right\| = \|T\|$.

Beweis. Zu $x \in \overline{M}$ wählen wir eine Folge $(x_n)_n \subset M$ mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.
Weil T stetig ist, ist $(Tx_n)_n \subset Y$ eine Cauchy-Folge und da Y ein Banachraum ist, existiert $\lim_{n\to\infty} Tx_n$ und ist unabhängig von der Wahl von $(x_n)_n$.
Definiere $\overline{T} : \overline{M} \to Y$ durch

$$\overline{T}x := \lim_{n\to\infty} Tx_n.$$

$\overline{T}$ ist wohldefiniert und $\overline{T}|_M = T$ (für $x \in M$ kann für alle $n \in \mathbb{N}$ $x_n = x$ gewählt werden). Es gilt

$$\left\|\overline{T}x\right\|_Y := \left\|\lim_{n\to\infty} Tx_n\right\|_Y \leq \|T\| \left\|\lim_{n\to\infty} x_n\right\|_X = \|T\| \, \|x\|_X .$$

Damit ist $\overline{T} \in L(\overline{M}, Y)$ und $\left\|\overline{T}\right\| \leq \|T\|$. Wegen $\overline{T}|_M = T$ folgt $\|T\| = \left\|\overline{T}\right\|$. $\square$

Eine wichtige Anwendung des obigen Satzes ist der Fall, dass M dicht in X liegt.

2.38 Beispiel. Sei $X = Y = L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < \infty)$ und $M := C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Definiere den Rechtsshift $T : M \to L^p(\mathbb{R})$ durch

$$(T\varphi)(x) \mapsto \varphi(x-1).$$

Wegen $\|T\varphi\|_p = \|\varphi\|_p$ ist T stetig und kann somit auf $L^p(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden.

Eine punktweise Definition von Operatoren auf $L^p(\mathbb{R})$ ist immer im Sinne dieser Fortsetzung zu verstehen.

2.39 Satz (Neumannsche Reihe)**.**
Sei X ein Banachraum und $T \in L(X)$ mit $\|T\| < 1$.
Dann existiert $(1-T)^{-1}$ und es gilt

$$(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in L(X)$$

mit $\|(1-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$.

Beweis. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{N} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|T\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|} ,$$

d.h. die Reihe konvergiert absolut. Also existiert $S := \sum_{n=0}^\infty T^n \in L(X)$ und $\|S\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$.
Aus $ST = TS = \sum_{n=0}^\infty T^{n+1} = S - 1$ folgt $S(1-T) = (1-T)S = 1$ und damit $S = (1-T)^{-1}$. $\square$

Um die Voraussetzung für die Existenz der Inversen abzuschwächen, führen wir den Begriff des Spektralradius ein.

2.40 Definition. Sei $T \in L(X)$. Dann heißt

$$r(T) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$$

der Spektralradius von T.

Dieses Infimum wird immer „im unendlichen“ angenommen, wie der folgende Satz zeigt.

2.41 Satz. *Sei $T \in L(X)$. Für den Spektralradius gilt*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Beweis. **(i)** Wir zeigen folgende Aussage: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $0 \le a_{n+m} \le a_n a_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(a_n)^{1/n} \longrightarrow a := \inf_n (a_n)^{1/n} \quad (n \longrightarrow \infty)$.

Um dies zu beweisen, sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $(a_N)^{1/N} < a + \varepsilon$ und setze $b(\varepsilon) := \max\{a_1, \ldots, a_N\}$. Schreibe nun $n \in \mathbb{N}$ in der Form $n = kN + r$ mit $0 \le r < N$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(a_n)^{1/n} &= (a_{kN+r})^{1/n} \le (a_N^k a_r)^{1/n} \\
&\le (a+\varepsilon)^{kN/n} b^{1/n} = (a+\varepsilon)(a+\varepsilon)^{-r/n} b^{1/n} \\
&= (a+\varepsilon)\Big(\frac{b}{(a+\varepsilon)^r}\Big)^{1/n} \\
&< a + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

falls n hinreichend groß ist.

(ii) Setzt man $a_n := \|T^n\|$, so gilt $0 \le a_{n+m} \le a_n a_m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ wegen der Submultiplikativität der Operatornorm, und mit (i) folgt $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$. □

2.42 Korollar. *Sei X ein Banachraum und $T \in L(X)$ mit $r(T) < 1$.*
Dann existiert $(1-T)^{-1}$ mit $(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in L(X)$.

3. Hilberträume

Im Folgenden sei wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und X ein $\mathbb{K}$-Vektrorraum.

3.1 Definition. a) Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, falls gilt:

(i) Für alle $y \in X$ ist die Abbildung $x \mapsto \langle x, y \rangle$ linear.
(ii) Für alle $x, y \in X$ gilt $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
(iii) Für alle $x \in X$ gilt $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Der Raum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt dann Prähilbertraum .

b) In einem Prähilbertraum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wird durch $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ eine Norm induziert. Ein vollständiger Prähilbertraum heißt Hilbertraum.

c) Zwei Vektoren $x, y \in X$ heißen orthogonal (in Zeichen $x \perp y$), falls $\langle x, y \rangle = 0$ gilt. Eine Familie $\{x_i\}_{i \in I}$ von Vektoren heißt orthonormal, falls gilt:

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.2 Beispiele. a) Mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$ werden $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ zu einem Hilbertraum.

b) Der Raum $C^0([0,1])$ wird mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} \, \mathrm{d}x$$

zu einem Prähilbertraum.

c) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann wird $L^2(\mu)$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_X f(x) \overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu(x)$$

zu einem Hilbertraum. Insbesondere ist $L^2(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Hilbertraum.

Auch die folgenden elementaren Eigenschaften von Prähilberträumen werden als bekannt vorausgesetzt, sie können aber auch leicht direkt nachgerechnet werden.

3.3 Satz. *Sei X Prähilbertraum.*

a) (Satz von Pythagoras) *Seien $x, y \in X$ orthogonal. Dann gilt*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

b) *Sei* $\{x_n\}_{n=1}^N$ *orthonormal. Dann gilt für alle* $x \in X$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n \rangle x_n \right\|^2 .$$

c) (Besselsche Ungleichung). *Sei* $\{x_n\}_{n=1}^N$ *orthonormal. Dann ist für alle* $x \in X$

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n \rangle|^2.$$

d) (Cauchy–Schwarz-Ungleichung). *Es gilt für alle* $x, y \in X$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

Insbesondere ist $\langle \cdot, \cdot \rangle \in C^0(X \times X, \mathbb{K})$.

e) (Parallelogramm-Identität) *Für alle* $x, y \in X$ *gilt*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

f) (Polarisationsformel) *Für alle* $x, y \in X$ *gilt*

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), & \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\,\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\,\|x-\mathrm{i}y\|^2), & \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Die Bedeutung der Polarisationsformel liegt daran, dass Identitäten nur für die Norm nachgerechnet werden müssen und dann automatisch für die Skalarprodukte gelten.

Die Summe von zwei Hilberträumen X und Y ist wieder ein Hilbertraum, wenn man das Skalarprodukt auf $X \oplus Y$ durch

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{X \oplus Y} := \langle x_1, x_2 \rangle_X + \langle y_1, y_2 \rangle_Y$$

definiert. Man beachte, dass die zugehörige Norm gegeben ist durch

$$\|(x, y)\|_{X \oplus Y} = \left(\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2 \right)^{1/2}.$$

Diese Norm ist äquivalent zur Norm aus Satz 2.25.

a) Der Approximationssatz und der Satz von Riesz für Hilberträume

Im Folgenden sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum.

3.4 Definition. a)$M \subset X$ heißt konvex, falls gilt

$$\forall\, x, y \in M\ \forall\, \alpha \in [0,1]\colon \alpha x + (1-\alpha)y \in M.$$

b) Zu $M \subset X$ heißt

$$M^\perp := \{x \in X \,:\, \forall\, y \in M\colon \langle x, y\rangle = 0\}$$

das orthogonale Komplement von M in X.

3.5 Beispiel. Jeder Unterraum $U \subset X$ ist U konvex.

3.6 Lemma. *Sei $M \subset X$.Dann ist $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von X.*

Beweis. Die Unterraumeigenschaft folgt aus der Linearität des Skalarprodukts. Für die Abgeschlossenheit sei $(x_n)_n \subset M^\perp$ mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Dann ist für $m \in M$ beliebig

$$0 = \langle x_n, m\rangle \to \langle x, m\rangle\ \ (n \to \infty),$$

also $x \in M^\perp$. □

3.7 Bemerkung. a) Es ist $M^\perp = \overline{M}^\perp = (\mathrm{span} M)^\perp$.

b) Es gilt $(M^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{span} M}$

c) Es gilt $M \cap M^\perp \subset \{0\}$. Denn sei $x \in M \cap M^\perp$. Dann ist $\langle x, x\rangle = 0$, d.h. $x = 0$. Insbesondere gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$, falls $0 \in M$ (z.B. falls M ein Untervektorraum von X ist).

3.8 Satz (Approximationssatz)**.** *Sei $M \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen, sowie $z_0 \in X$.*
Dann existiert genau ein $x \in M$ mit $\|x - z_0\| = \mathrm{dist}(z_0, M) := \inf\{\|y - z_0\| : y \in M\}$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$ (betrachte sonst die verschobene Menge $M - z_0$). Sei $d := \mathrm{dist}(0, M) = \inf\{\|y\| : y \in M\}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Folge mit

$\|y_n\| \longrightarrow d$.
Unter Verwendung der Parallelogrammgleichung folgt

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4 \cdot \Big\|\underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in M}\Big\|^2 \\ &\le 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4d^2 \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

da $\|y_n\| \longrightarrow d$. Daher ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge und es existiert $x := \lim_n y_n \in M$. Es gilt $\|x\| = \lim_n \|y_n\| = d$. Damit folgt $\|x\| \le \|y\|$ für alle $y \in M$.

Eindeutigkeit: Sei $\|x_1\| \le \|y\|, \|x_2\| \le \|y\|$ für jedes $y \in M$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\|^2 &= 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1 + x_2\|^2 \\ &= 2\underbrace{\Big(\|x_1\|^2 - \Big\|\frac{x_1 + x_2}{2}\Big\|^2\Big)}_{\le 0} + 2\underbrace{\Big(\|x_2\|^2 - \Big\|\frac{x_1 + x_2}{2}\Big\|^2\Big)}_{\le 0} \le 0.\end{aligned}$$

□

3.9 Satz (Projektionssatz)**.** *Sei $M \subset X$ ein abgeschloßener Unterraum. Dann gilt*

$$X = M \oplus M^\perp,$$

d.h., es existiert für alle $x \in X$ eine eindeutige Zerlegung $x = m + m'$ mit $m \in M, m' \in M^\perp$.
Es ist $\|x - m\| = \min_{y\in M} \|x - y\|$.

Beweis. Nach dem Approximationssatz existiert genau ein $m \in M$ mit $\|m - x\| = \inf\{\|y - x\| : y \in M\}$. Setze $m' := x - m$.

(i) Wir zeigen $m' \in M^\perp$.
Es gilt für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $y \in M$ beliebig

$$\|m'\|^2 \le \|m' + \alpha y\|^2.$$

Andererseits ist

$$\|m' + \alpha y\|^2 = \|m'\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle m', \alpha y\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2.$$

$$\Rightarrow 0 \le 2\operatorname{Re}\langle m', \alpha y\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2.$$

Betrachten wir nun zu $t \in \mathbb{R}$ zum einen $\alpha = t$ und zum anderen $\alpha = it$ (nur wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), so folgt

$$|t|^2\|y\|^2 + 2t\operatorname{Re}\langle m', y\rangle \ge 0$$

und

$$|t|^2 \|y\|^2 + 2t \operatorname{Im} \langle m', y \rangle \geq 0.$$

Also $\langle m', y \rangle = 0$.

(ii) Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $x = m + m' = z + z'$ mit $m, z \in M, m', z' \in M^\perp$. Dann ist $m - z = z' - m' \in M \cap M^\perp = \{0\}$, d.h. $m = z, m' = z'$. □

3.10 Satz (von Riesz)**.** *Sei $T \in X'$. Dann existiert genau ein $x_T \in X$ mit*

$$\forall x \in X: \ Tx = \langle x, x_T \rangle$$

und es gilt $\|T\|_{X'} = \|x_T\|_X$.
Die Abbildung $I_{\text{Riesz}}: X' \to X, \ T \mapsto x_T$ ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear.

Beweis. Existenz von x_T: $M := \ker T = T^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter der stetigen Abbildung T. Damit ist $X = M \oplus M^\perp$ nach Satz 3.9.

Falls $M = X$, so folgt $T = 0$, und wir wählen $x_T = I_{\text{Riesz}}(T) := 0$.

Sei jetzt $M \neq X$. Wähle $y \in M^\perp \setminus \{0\}$ beliebig. Wegen $M \cap M^\perp = \{0\}$ ist dann $Ty \neq 0$. Setze

$$x_T = I_{\text{Riesz}}(T) := \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot y.$$

Um zu zeigen, dass $Tx = \langle x, x_T \rangle$ für jedes $x \in X$ gilt, zerlegen wir x gemäß $X = M^\perp \oplus M$:

$$x = \frac{Tx}{Tx_T} x_T + \left(x - \frac{Tx}{Tx_T} x_T \right) =: x_\perp + x_\parallel.$$

Für $x_\parallel$ folgt

$$Tx_\parallel = T\left(x - \frac{Tx}{Tx_T} x_T \right) = Tx - \frac{Tx}{Tx_T} Tx_T = 0,$$

also $x_\parallel \in \ker T = M$.

Damit haben wir

$$\begin{aligned}\langle x, x_T \rangle = \langle x_\perp, x_T \rangle + \langle x_\parallel, x_T \rangle &= \frac{Tx}{Tx_T} \langle x_T, x_T \rangle + 0 = \frac{Tx}{Tx_T} \|x_T\|^2 \\ &= Tx,\end{aligned}$$

wobei wir $Tx_T = \frac{|Ty|^2}{\|y\|^2} = \|x_T\|^2$ genutzt haben.
Zur Eindeutigkeit: Sind $x_T, \widetilde{x}_T \in X$ mit $Tx = \langle x, x_T \rangle = \langle x, \widetilde{x}_T \rangle$ für alle $x \in X$, so folgt

$$0 = \langle x, x_T - \widetilde{x}_T \rangle$$

und wir bekommen durch die Wahl von $x = x_T - \widetilde{x}_T$, dass $\|x_T - \widetilde{x}_T\| = 0$ ist.

Eigenschaften von I_{Riesz}:
Wegen $\|x_T\| = \frac{|Ty|}{\|y\|} \leq \|T\|_{X'}$ und $\|T\|_{X'} = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |\langle x, x_T\rangle| \leq \|x_T\|$ ist

$$\|T\|_{X'} = \|x_T\|_X .$$

Damit ist I_{Riesz} eine Isometrie und nach Definition konjugiert linear. Dies liefert die Injektivität, da $\ker(T) = \{0\}$.
Zum Beweis der Surjektivität setzen wir zu $y \in X$ die Abbildung

$$T_y : X \to \mathbb{K}, \quad T_y x := \langle x, y\rangle .$$

Dann ist $|T_y x| \leq \|y\| \cdot \|x\|$, d.h. T_y stetig und damit $T_y \in X'$. □

Eine Verallgemeinerung des Darstellungssatzes von Riesz auf stetige Sesquilinearformen stellt der nachstehende Satz dar. Mit ihm kann die Lösbarkeit gewisser (elliptischer) partieller Differentialgleichungen nachgewiesen werden.

3.11 Satz (Lemma von Lax & Milgram). *Sei X ein Hilbertraum und $B(\cdot,\cdot)$ eine stetige Sesquilinearform auf X mit*

$$|B(x,x)| \geq p\,\|x\|^2$$

für ein $p > 0$ und alle $x \in X$. Dann existiert für alle $T \in X'$ genau ein $x_T \in X$ so, dass für alle $x \in X$

$$Tx = B(x, x_T)$$

gilt.

Beweis. Wir definieren zunächst eine lineare Abbildung S, die es ermöglicht, die Abbildung B als ein Skalarprodukt darzustellen. Sei hierzu $u \in X$ beliebig. Dann ist

$$B_u : X \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto B(x,u)$$

stetig und linear, also $B_u \in X'$ und nach dem Satz von Riesz existiert ein f_u mit $B_u(x) = \langle x, f_u\rangle$. Definiere

$$S : X \to X, \quad u \mapsto f_u.$$

Wegen

$$\|Su\|^2 = \langle Su, Su\rangle = B(Su,u) \leq c\,\|Su\|\,\|u\|$$

ist S stetig und aus

$$p\,\|u\|^2 \leq |B(u,u)| = |\langle u, Su\rangle| \leq \|Su\|\,\|u\|$$

folgt, dass $S^{-1} : R(S) \to X$ existiert und stetig ist (Satz 2.34).
Aus dem Projektionssatz folgt $X = \overline{R(S)} + R(S)^{\perp}$. Es gilt

$$\begin{aligned} m \in R(S)^{\perp} &\Leftrightarrow 0 = |\langle m, Sm\rangle| = |B(m,m)| \geq p\,\|m\| \\ &\Leftrightarrow m = 0, \end{aligned}$$

was $X = \overline{R(S)}$ liefert. Für $(y_n)_n \subset R(S)$ mit $y_n \to y \in X$ ist $(S^{-1}y_n)_n$ eine Cauchyfolge in X und demnach konvergent gegen ein $x \in X$. Aus der Stetigkeit von S bekommen wir $Sx = y$, also $\overline{R(S)} = R(S) = X$.
Sei nun $T \in X'$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert ein $f_T \in X$ mit $Tx = \langle x, f_T\rangle$ für alle $x \in X$. Setze $x_T := S^{-1}f_T$. Damit folgt für alle $x \in X$

$$B(x, x_T) = B_{x_T}(x) = \langle x, Sx_T\rangle = \langle x, f_T\rangle = Tx.$$

Sind $x_1, x_2 \in X$ mit $B(x, x_1) = Tx = B(x, x_2)$ für alle $x \in X$, so gilt $0 = B(x, x_2 - x_1)$ und insbesondere $0 = B(x_2 - x_1, x_2 - x_1) \geq p\,\|x_2 - x_1\|^2$, d.h., $x_1 = x_2$. □

b) Orthonormalbasen

3.12 Definition. Sei X ein Hilbertraum. Eine Teilmenge $S \subset X$ heißt Orthonormalbasis oder vollständiges orthonormales System, falls S eine maximale orthonormale Teilmenge von X ist (maximal bezüglich Mengeninklusion).
Man spricht auch von Hilbertraumbasis.

3.13 Satz. *Jeder nichttriviale Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Sei $\mathscr{S}$ die Menge aller orthonormalen Teilmengen des Hilbertraumes X. Dann ist $\mathscr{S} \neq \emptyset$ da $\{\frac{x}{\|x\|}\} \in \mathscr{S}$ für jedes $x \in X \setminus \{0\}$.

Sei $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ eine Kette in $\mathscr{S}$, d.h. für $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ gilt $S_\alpha \subset S_\beta$ oder $S_\beta \subset S_\alpha$. Setze

$$S_0 := \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} S_\alpha \subset X.$$

Dann ist $S_\alpha \subset S_0$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ und zu $x, y \in S_0$ existiert ein $\alpha \in \mathcal{A}$ mit $x, y \in S_\alpha$, d.h. S_0 ist orthonormal, also $S_0 \in \mathscr{S}$. Damit ist S_0 eine obere Schranke zu $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Nach dem Lemma von Zorn existieren maximale Elemente in $\mathscr{S}$. □

3.14 Lemma. *Seien X ein Prähilbertraum und $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt für alle $x, y \in X$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle\, \overline{\langle y, e_n\rangle}| < \infty.$$

Beweis. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt nach der Cauchy–Schwarz-Ungleichung in $\mathbb{R}^N$ und der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}| \leq \Big(\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{n=1}^{N} |\langle y, e_n\rangle|^2\Big)^{1/2} \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

Mit $N \longrightarrow \infty$ erhält man die Behauptung. $\square$

Es existierten Hilberträume mit überabzählbarer Hilbertraumbasis, d.h., wir müssen grundsätzlich auch Summen mit überabzählbarer Indexmenge $\mathcal{A}$ betrachten. Dazu dient die folgende Definition.

3.15 Definition. a) Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine Menge und $(p_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset [0,\infty)$. Definiere

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha := \sup\Big\{ \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_0} p_\alpha \colon \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A} \text{ endlich}\Big\} \in [0,\infty].$$

b) Sei X Hilbertraum, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine Menge und $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset X$. Dann heißt die Reihe $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} y_\alpha$ unbedingt konvergent gegen ein Element $y \in X$, falls die Menge $\mathcal{A}_0 := \{\alpha \in \mathcal{A} \colon y_\alpha \neq 0\}$ abzählbar ist und für jede Aufzählung $\mathcal{A}_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ die Gleichheit $\sum_{n=1}^\infty y_{\alpha_n} = y$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} y_\alpha = y.$$

3.16 Bemerkung. Für $X = \mathbb{K}^n$ ist eine Reihe mit abzählbarer Indexmenge genau dann unbedingt konvergent, falls sie absolut konvergent ist (vgl. großer Umordnungssatz).

3.17 Lemma. *Seien $\mathcal{A} \neq \emptyset$ und $(p_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}$ mit $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} |p_\alpha| < \infty$. Dann ist $\mathcal{A}_0 := \{\alpha \in \mathcal{A} \colon p_\alpha \neq 0\}$ abzählbar.*

Beweis. Es gilt

$$\{\alpha \in \mathcal{A} \colon p_\alpha \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\Big\{\alpha \in \mathcal{A} \colon |p_\alpha| > \frac{1}{n}\Big\}}_{\text{endlich}}.$$

Da die Reihe absolut konvergent ist, ist $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha$ unbedingt konvergent nach dem großen Umordnungssatz. $\square$

3.18 Satz. *Seien X ein Hilbertraum und $S \subset X$ ein Orthonormalsystem.*

a) Für alle $x \in X$ ist $S_x := \{e \in S\colon \langle x, e\rangle \neq 0\}$ abzählbar und die Reihe $\sum_{e\in S} \langle x, e\rangle e$ konvergiert unbedingt.

b) Sei $c_e \in \mathbb{C}$ für $e \in S$ mit $\sum_{e\in S} |c_e|^2 < \infty$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{e\in S} c_e e$ unbedingt in X.

c) Für alle $x \in X$ gilt $x - \sum_{e\in S} \langle x, e\rangle e \in S^\perp$.

Beweis. a) Nach der Besselschen Ungleichung (Satz 3.3 c)) gilt für alle endlichen $\widetilde{S} \subset S$

$$\sum_{e\in\widetilde{S}} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Also ist $\sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle|^2 < \infty$ und nach Lemma 3.17 ist $S_x = \{e_1, e_2, \dots\}$ abzählbar. Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$\left\|\sum_{n=N}^{M} \langle x, e_n\rangle e_n\right\|^2 = \sum_{n=N}^{M} |\langle x, e_n\rangle|^2 \longrightarrow 0 \quad (N, M \longrightarrow \infty).$$

Somit ist $\left(\sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $y := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n \in X$ existiert.

Analog existiert für jede Permutation $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die umgeordnete Reihe $y_\sigma := \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle x, e_{\sigma(n)}\right\rangle e_{\sigma(n)}$. Wir zeigen $y = y_\sigma$. Für $z \in X$ gilt

$$\begin{aligned}\langle y, z\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, z \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \cdot \overline{\langle z, e_n\rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle x, e_{\sigma(n)}\right\rangle \overline{\left\langle z, e_{\sigma(n)}\right\rangle}\\ &= \langle y_\sigma, z\rangle .\end{aligned}$$

Dabei wurde die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle z, e_n\rangle}$ nach Lemma 3.14 benutzt. Es folgt $y - y_\sigma \in X^\perp = \{0\}$.

b) wurde im Beweis von a) mitbewiesen.

c) Für $e \in S$ gilt mit der Bezeichnung aus a)

$$\left\langle x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, e \right\rangle = \langle x, e\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, e\rangle = 0.$$

(Betrachte die Fälle $e \in S_x$, d.h. $e = e_{n_0}$ und $e \notin S_x$, d.h. $\langle x, e\rangle = 0$.) $\square$

3.19 Satz. *Seien X ein Hilbertraum und $S \subset X$ ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:*

(i) *S ist Orthonormalbasis.*

(ii) *$S^\perp = \{0\}$ (bzw. $\overline{\mathrm{span} S} = X$).*

(iii) *Für alle $x \in X$ gilt $x = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle e$.*

(iv) *Für alle $x, y \in X$ gilt $\langle x, y \rangle = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle \overline{\langle y, e \rangle}$.*

(v) *(Parsevalsche Gleichung) Für alle $x \in X$ gilt*

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in S} | \langle x, e \rangle |^2.$$

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii). Falls ein $x \in S^\perp \setminus \{0\}$ existiert, so ist $S \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$ ein Orthonormalsystem.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Satz 3.18 c).

(iii)$\Longrightarrow$(iv). Die Reihen erstrecken sich nur über einen abzählbaren Indexbereich und konvergieren absolut nach Lemma 3.14 und Satz 3.18 a), man darf also einsetzen.

(iv)$\Longrightarrow$(v). Setze $x = y$.

(v)$\Longrightarrow$(i). Falls S nicht maximal ist, wählen wir ein $x \in S^\perp$ mit $\|x\| = 1$. Es ergibt sich $\sum_{e \in S} | \langle x, e \rangle |^2 = 0$, Widerspruch zu (v). $\square$

3.20 Satz. *Sei X ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum mit Hilbertraumbasis $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Dann ist die Abbildung*

$$X \to \ell^2,\ x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in \mathbb{N}}$$

ein isometrischer Isomorphismus von Hilberträumen (d.h. linear, bijektiv und isometrisch).

Beweis. Die Linearität ist klar, Isometrie und damit Injektivität nach Satz 3.19 (v), die Surjektivität nach Satz 3.18 b). $\square$

Ein topologischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Hierbei ist „dicht“ definiert im topologischen Sinne (vgl. Definition 1.23). Da ein metrischer Raum vorliegt, ergibt sich der topologische Abschluss einer Menge durch Hinzufügen aller Häufungspunkte (vgl. Bemerkung 1.19), was in der Anwendung häufig praktischer ist.

3.21 Satz. *Ein normierter Raum X ist genau dann separabel, wenn es ein abzählbares linear unabhängiges $S \subset X$ gibt mit $\overline{\operatorname{span} S} = X$.*
Insbesondere ist ein Hilbertraum genau dann separabel, wenn er eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

3.22 Beispiele (Hilbertraumdimension)**.** a) Der Raum $L^2(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist ein separabler Hilbertraum.
Speziell ist durch $e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ eine Hilbertraumbasis des Hilbertraums $L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ gegeben (Fourierreihen).

b) Es gibt auch Prähilberträume mit überabzählbaren Orthonormalsystemen.
Sei Y die Menge aller Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f|_{(-T,T)} \in L^2(-T, T)$ für alle $T > 0$, für welche

$$\|f\|_1 := \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

existiert. Dann ist $\|\cdot\|_1$ eine Halbnorm auf Y, aber keine Norm (so gilt etwa für die charakteristische Funktion $f := \chi_{(-1,1)}$ zwar $\|f\|_1 = 0$, aber $f \neq 0$).

Sei $N := \{f \in Y : \|f\|_1 = 0\}$. Dann ist N ein abgeschlossener Unterraum.
Definiere $X := Y/N$ als den Quotientenraum mit induzierter Norm $\|[f]\|_2 := \inf_{g\in N} \|f - g\|_1$.
Durch

$$\langle [f], [g] \rangle_2 := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f_1(x) g_1(x) \, \mathrm{d}x$$

wird X zu einem Prähilbertraum und es gilt $\langle [f], [f] \rangle_2 = \|[f]\|_2$.

Zu $\alpha > 0$ definiere $v_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v_\alpha(x) := \sin(\alpha x)$. Wegen

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^{T} v_\alpha(x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{T} \left(T - \frac{\sin(2\alpha T)}{2\alpha} \right) \xrightarrow{T\to\infty} 1$$

gilt $v_\alpha \in Y$ und $\|v_\alpha\|_1 = \|[v_\alpha]\|_2 = 1$. Andererseits erhält man für $\alpha \neq \beta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \sin(\alpha r) \sin(\beta r) \, \mathrm{d}r &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cos((\alpha - \beta) r) - \cos((\alpha + \beta) r) \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2T} \left[\frac{\sin((\alpha - \beta) r)}{\alpha - \beta} - \frac{\sin((\alpha + \beta) r)}{\alpha + \beta} \right]_{r=-T}^{r=T} \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{\sin((\alpha - \beta) T)}{\alpha - \beta} - \frac{\sin((\alpha + \beta) T)}{\alpha + \beta} \right] \xrightarrow{T\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Daher gilt $\langle [v_\alpha], [v_\beta] \rangle_2 = 0$ für $\alpha \neq \beta$, d.h. $\{v_\alpha\}_\alpha$ ist ein überabzählbares Orthonormalsystem in X.

4. Dualräume und Reflexivität

4.1 Beispiele (Dualräume). a) Jeder Hilbertraum X ist isometrisch isomorph zu seinem Dualraum nach dem Satz von Riesz.

b) Für $1 \leq p < \infty$ ist $(\ell^p)' \cong \ell^q$, wobei $1 < q \leq \infty$ definiert ist durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Betrachte hierzu die Abbildung

$$T_q \colon \ell^q \to (\ell^p)',\ x = (x_n)_n \mapsto T_q x \text{ mit } (T_q x)(y) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n \overline{x}_n \quad (y \in \ell^p)$$

Mit der Hölder-Ungleichung folgt

$$|(T_q x)(y)| \leq \|y\|_p \, \|x\|_q$$

und damit die Wohldefiniertheit von T_q sowie $\|T_q x\|_{(\ell^p)'} \leq \|x\|_q$.

Für $y_n := \frac{x_n |x_n|^{q-2}}{\|x\|_q^{q-1}}$ wenn $x_n \neq 0$ und $y_n = 0$ sonst gilt $(y_n)_n \in \ell^p$ (nutze $q - 1 = \frac{q}{p}$). Wegen $(T_q x)(y) = \|x\|_q$ ist T_q isometrisch, was auch die Injektivität liefert.

Da jedes $\ell' \in (\ell^p)'$ die Form $\ell' y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n l_n$ mit $(l_n)_n \subset \mathbb{C}$ hat und für die projezierten Abbildungen

$$l^k : \ell^p \to \mathbb{K},\ l^k y = \sum_{n=1}^{k} y_n l_n$$

die Ungleichung

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |l_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left\| l^k \right\|_{(\ell^p)'} \leq \|\ell\|_{(l^p)'}$$

gilt, ist $(l_n)_n \in \ell^q$.

Ebenso ist $(L^p(\Omega))' \cong L^q(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

[[Allgemeiner: Sei $1 \leq p < \infty$ und $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum (σ-endlich für $p = 1$). Dann ist $(L^p(\mu))' \cong L^q(\mu)$, wobei $1 < q \leq \infty$ definiert ist durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Hierzu zeigt man, dass die Abbildung

$$T \colon L^q(\mu) \to (L^p(\mu))', \quad (Tg)(f) := \int f \overline{g} \, \mathrm{d}\mu \quad (f \in L^p(\mu))$$

ein isometrischer Isomorphismus von Banachräumen ist.
Mit der Hölder-Ungleichung folgt

$$|(Tg)(f)| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

und damit die Wohldefiniertheit von T sowie $\|Tg\|_{(L^p(\mu))'} \leq \|g\|_q$.

Für $f_g := \frac{g|g|^{q-2}}{\|g\|_q^{q-1}} \chi_{g \neq 0} \in L^p(\mu)$ ist $(Tg)(f_g) = \|g\|_q$, also ist T isometrisch.
Die Surjektivität wird hier nicht bewiesen, sie folgt aus dem Satz von Radon-Nikodým.]]

c) Jedes Funktional $l' \in (\ell^\infty)'$ hat die Form $l' = l'_1 + l'_0$, wobei für $x \in \ell^\infty$

$$l'_1 x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{l}_n \text{ mit } (l_n)_n \in \ell^1$$

und

$$l'_0|_{c_0} = 0 \text{ mit } c_0 = \{x \in \ell^\infty | \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

Damit ist $\ell^1 \subsetneq (\ell^\infty)'$. Es gilt $(c_0)' \cong \ell^1$.

Ebenso gilt $L^1(\Omega) \subsetneq (L^\infty(\Omega))'$.

d) Der Raum $(C^0([a,b]))'$ $(a,b \in \mathbb{R})$ ist isometrisch isomorph zum Raum

$$NBV([a,b]) := \{g \in BV([a,b]) | g \text{ rechtstetig in } (a,b), g(a) = 0\}.$$

Hierbei ist $BV([a,b])$ der Raum von Funktionen $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ mit beschränkter Variation

$$\text{var} g = \sup_P \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_i - 1)| < \infty$$

($P = \{t_0, ...t_n\}$ eine Partition von $[a,b]$), versehen mit der Norm $\|g\|_{BV} = g(a) + \text{var} g$.

Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$T : NBV([a,b]) \to (C^0([a,b]))',\ g \mapsto Tg \text{ mit } (Tg)(f) = \int f \mathrm{d}g, \quad (f \in C^0([a,b]))$$

wobei $\int f \mathrm{d}g$ als Riemann-Stieltjes-Integral aufzufassen ist. Man kann also die Funktion g wiederum mit einem Maß identifizieren.

a) Hahn–Banach-Sätze

4.2 Satz (Fortsetzungssatz von Hahn–Banach, reelle Version).
Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $p\colon X \to \mathbb{R}$ konvex, d.h. für alle $\alpha \in [0,1], x, y \in X$ gilt

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y).$$

Sei ferner $L \subset X$ ein Unterraum und $\lambda\colon L \to \mathbb{R}$ linear mit

$$\lambda(x) \le p(x)$$

für alle $x \in L$.

Dann existiert ein lineares $\Lambda\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\Lambda|_L = \lambda$ und $\Lambda(x) \le p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. i) Endlich-dimensionale Fortsetzung
Sei $z \in X \setminus L$ fest gewählt, und definiere $\widetilde{L} := \operatorname{span}\{L, z\} = L \oplus \mathbb{R}z$. $\widetilde{z} \in \widetilde{L}$ hat dann die eindeutige Darstellung $\widetilde{z} = y + tz$ mit $y \in L$ und $t \in \mathbb{R}$.
Wir setzen λ auf $\widetilde{L}$ gemäß

$$\widetilde{\lambda}(\widetilde{z}) = \widetilde{\lambda}(y + tz) := \lambda(y) + t\widetilde{\lambda}(z)$$

fort, wobei wir $\widetilde{\lambda}(z)$ später wählen.

Für $y_1, y_2 \in L$ und $\alpha, \beta > 0$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned}
\beta\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2) = \lambda(\beta y_1 + \alpha y_2) &= (\alpha + \beta) \cdot \lambda\Big(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\, y_1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\, y_2\Big) \\
&\leq (\alpha + \beta) p\Big(\frac{\beta}{\alpha + \beta}(y_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(y_2 + \beta z)\Big) \\
&\leq \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{\alpha}\left[\lambda(y_1) - p(y_1 - \alpha z)\right] \leq \frac{1}{\beta}\left[p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)\right] \tag{4-1}$$

Nun setzen wir

$$\widetilde{\lambda}(z) := \alpha_0 \in \left[\sup_{y_1 \in L,\, \alpha > 0} \frac{\lambda(y_1) - p(y_1 - \alpha z)}{\alpha}, \inf_{y_2 \in L,\, \beta > 0} \frac{p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)}{\beta}\right] \neq \emptyset.$$

$\widetilde{\lambda}$ ist linear auf $\widetilde{L}$ nach Definition, und es gilt

$$\widetilde{\lambda}(tz + y) = t\alpha_0 + \lambda(y) \leq p(tz + y).$$

Denn für $t > 0$ und $y \in L$ gilt nach Wahl von α_0 die Abschätzung

$$\alpha_0 \leq \inf_{y_2 \in L,\, \beta > 0} \frac{p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)}{\beta} \leq \frac{p(y + tz) - \lambda(y)}{t}.$$

Den Fall $t < 0$ sieht man analog.

Für endlich-dimensionale und seperable Räume können folgt hieraus bereits per Induktion die Fortsetzbarkeit von L auf X.

ii) Fortsetzung auf X)
Sei $\mathscr{M}$ die Menge aller Abbildungen $m\colon M \to \mathbb{R}$ auf einen Unterraum $M \supset L$, welche linear sind und für welche gilt $m|_L = \lambda$ und $m \leq p|_M$.

Durch

$$m_1 \prec m_2 :\Longleftrightarrow M_1 \subset M_2,\ m_2|_{M_1} = m_1$$

wird $\mathscr{M}$ partiell geordnet.
Sei $\{m_k\}$ eine Kette in $\mathscr{M}$. Dann ist zum einen $M := \bigcup_k M_k$ ein Unterraum, und durch

$$m(x) := m_k(x) \quad (x \in M_k)$$

wird eine obere Schranke $m \in \mathscr{M}$ der Kette definiert. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element $\Lambda \in \mathscr{M}$.

Da Λ maximal ist, ist Λ auf ganz X definiert. Sonst existierte nach Schritt 1 eine Fortsetzung auf $D(\Lambda) \oplus \mathbb{R} \cdot z$ mit $z \in X \setminus D(\Lambda)$. □

4.3 Satz (Hahn–Banach, komplexe Version)**.**
Sei X ein $\mathbb{C}-$Vektorraum und $p\colon X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

$$p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|\, p(x) + |\beta|\, p(y)$$

für alle $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| + |\beta| = 1$. Sei $L \subset X$ ein Unterraum und $\lambda\colon L \to \mathbb{C}$ sei $\mathbb{C}$–linear mit $|\lambda(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in L$.
Dann existiert ein $\mathbb{C}$–lineares $\Lambda\colon X \to \mathbb{C}$ mit $\Lambda|_L = \lambda$ und $|\Lambda(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis. Setze $\ell(x) := \operatorname{Re} \lambda(x)$. Dann ist $\ell\colon X \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung mit

$$\ell(x) \leq |\lambda(x)| \leq p(x)$$

für $x \in L$. Weil λ $\mathbb{C}$–linear ist, haben wir $\ell(\mathrm{i}x) = -\operatorname{Im} \lambda(x)$, und somit ist

$$\lambda(x) = \ell(x) - \mathrm{i}\ell(\mathrm{i}x).$$

Setze ℓ nach Satz 4.2 fort zu einem $\mathbb{R}-$linearen $\mathcal{L}\colon X \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{L}(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist

$$\Lambda(x) := \mathcal{L}(x) - \mathrm{i}\mathcal{L}(\mathrm{i}x)$$

$\mathbb{R}$–linear. Wegen

$$\Lambda(\mathrm{i}x) = \mathcal{L}(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}\mathcal{L}(-x) = \mathcal{L}(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}\mathcal{L}(x) = \mathrm{i}\Lambda(x)$$

ist Λ tatsächlich $\mathbb{C}$–linear.

Für $\theta := \arg \Lambda(x)$ gilt:

$$|\Lambda(x)| = e^{-\mathrm{i}\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-\mathrm{i}\theta}x) = \mathcal{L}(e^{-\mathrm{i}\theta}x) \leq p(e^{-\mathrm{i}\theta}x) \leq p(x).$$

Hier wurde $\operatorname{Re}\Lambda = \mathcal{L}$, $\Lambda(e^{-\mathrm{i}\theta}x) = |\Lambda(x)| \in \mathbb{R}$ und $|e^{-\mathrm{i}\theta}| = 1$ verwendet. □

4.4 Korollar. *Sei X normiert, $L \subset X$ ein Unterraum und $\lambda \in L'$. Dann gilt:*

$$\exists \Lambda \in X' : \|\Lambda\|_{X'} = \|\lambda\|_{L'}, \ \Lambda|_L = \lambda.$$

Beweis. Sei $p(x) := \|\lambda\|_{L'} \cdot \|x\|$. Dann ist $|\lambda(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in L$.
Nach Satz 4.3 bzw. 4.4 existiert eine Fortsetzung Λ auf X mit

$$|\Lambda(x)| \leq \|\lambda\|_{L'} \cdot \|x\|,$$

d.h. $\Lambda \in X'$ und $\|\Lambda\|_{X'} \leq \|\lambda\|_{L'}$. Wegen $\Lambda|_L = \lambda$ ist $\|\Lambda\|_{X'} = \|\lambda\|_{L'}$. □

4.5 Korollar. *Sei X ein normierter Raum. Dann gilt für alle $x \in X$:*

(i) $\exists \lambda \in X' : \lambda(x) = \|x\|, \|\lambda\|_{X'} = 1.$

(ii) $\|x\|_X = \sup_{\lambda \in X', \|\lambda\|=1} |\lambda(x)|.$

(iii) Ist $\lambda(x) = 0$ für alle $\lambda \in X'$, so ist $x = 0$.

Beweis. (i) Für $x = 0$ ist die Behauptung klar. Für $x \neq 0$ definiere

$$L := \operatorname{span}(x), \ \lambda\colon L \to \mathbb{K}, \ \lambda(\alpha x) := |\alpha| \, \|x\|$$

und setze nach Korollar 4.4 fort.
(ii) Es gilt $|\lambda(x)| \leq \|\lambda\| \, \|x\|_X$, also $\|x\|_X \geq \sup_{\lambda \in X', \|\lambda\|=1} |\lambda(x)|$ und nach (i) existiert $\lambda \in X'$ mit $\|\lambda\|_{X'} = 1$ und $\lambda(x) = \|x\|$.
(iii) Ist $\lambda(x) = 0$ für alle $\lambda \in X'$, so folgt mit (ii) $\|x\|_X = \sup_{\lambda \in X', \|\lambda\|=1} |\lambda(x)| = 0$. □

4.6 Korollar. *Sei X normiert, $M \subset X$ ein Unterraum und $x_0 \in X$. Sei*

$$d := \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| > 0.$$

Dann existiert ein $\lambda \in X'$ mit $\|\lambda\| = 1$, $\lambda(x_0) = d$ und $\lambda|_M = 0$.

Beweis. Definiere λ auf $L := M \oplus \operatorname{span}(x_0)$ durch $\lambda(y + \alpha x_0) := \alpha d$. Dann gilt

$$\|\lambda\|_{L'} = \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{K} \\ y \in M}} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0 \neq \alpha \in \mathbb{K} \\ y \in M}} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x_0\|}$$

$$= \sup_{\substack{0\neq\alpha\in\mathbb{K}\\ z\in M}} \frac{|\alpha d|}{\|-\alpha z+\alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0\neq\alpha\in\mathbb{K}\\ z\in M}} \frac{d}{\|x_0 - z\|} = \frac{d}{\inf_{z\in M}\|x_0-z\|} = \frac{d}{d} = 1.$$

Die Behauptung folgt nun aus Korollar 4.4 durch Fortsetzen von $\lambda : L \to \mathbb{K}$ auf X. □

4.7 Satz. *Sei X ein normierter Raum und X' separabel. Dann ist X separabel.*

Beweis. Wie wählen eine dichte Teilmenge $(\lambda_n)_n \subset X' \setminus \{0\}$. Nach Definition der Norm in X' gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in X, \|x_n\|_X = 1 : |\lambda(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|\lambda_n\|_{X'}.$$

Wir zeigen: $M := \operatorname{span}\{(x_n)_n\}$ liegt dicht in X.
Ansonsten existiert ein $x_0 \in X$ mit $d = \inf_{y\in M}\|x_0 - y\|_X > 0$ und nach Korollar 4.6 gibt es ein $\lambda \in X'$ mit $\lambda|M = 0$, $\lambda(x_0) = d > 0$ und $\|\lambda\|_{X'} = 1$. Aus der Wahl der x_n folgt

$$\frac{1}{2}\|\lambda_n\|_{X'} \leq |\lambda_n(x_n)| = |(\lambda_n - \lambda)x_n| \leq \|\lambda_n - \lambda\|_{X'}\|x_n\|_X = \|\lambda_n - \lambda\|_{X'}.$$

Sei nun $(\lambda_k)_k \subset (\lambda_n)_n$ eine Teilfolge mit $\|\lambda_k - \lambda\|_{X'} \to 0$. Dann konvergiert auch die Norm, $\|\lambda_k\|_{X'} \to \|\lambda\|_{X'} = 1$, und wir bekommen

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\|\lambda\|_{X'} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\|\lambda_k\|_{X'} \leq \lim_{k\to\infty}\|\lambda_k - \lambda\|_{X'} = 0.$$

Widerspruch. □

4.8 Beispiele (Separabilität)**.** a) $\mathbb{K}^n$ ist separabel.

b) Der Raum $C([a,b])$ mit $\|\cdot\|_\infty$-Norm ist ein separabler Banachraum, denn die Polynome mit rationalen Koeffizienten liegen dicht.

c)Ebenso separabel sind für $1 \leq p < \infty$ die Räume ℓ^p und $L^p(\Omega)$ für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

d) Der Banachraum ℓ^∞ ist ein Beispiel für einen nicht separablen Raum:
Angenommen es existiert eine dichte Teilmenge $\{x^{(k)} : k \in \mathbb{N}\} \subset \ell^\infty$. Schreibe $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ und betrachte

$$y_k := \begin{cases} x_k^{(k)} + 1, & |x_k^{(k)}| < 1,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dann gilt $|y_k| \leq 2$ und damit $y := (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Aber für alle $k \in \mathbb{N}$ haben wir $|y_k - x_k^{(k)}| \geq 1$ und damit $\|y - x^{(k)}\|_\infty \geq 1$, Widerspruch zur Dichtheit von $\{x^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$.

d) Auch der Raum $L^\infty(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist ein Beispiel für einen nicht separablen Banachraum.

4.9 Bemerkung. Hiermit haben wir auch bewiesen, dass $(\ell^\infty)'$ nicht isomorph zu ℓ^1 ist (vgl. Beispiel 4.1c)), da sonst ℓ^∞ separabel wäre.

b) Reflexivität

4.10 Lemma. *Sei X ein normierter Raum. Die Abbildung*

$$J : X \to X'',\ x \mapsto Jx \text{ mit } (Jx)(\lambda) := \lambda(x) \quad (\lambda \in X')$$

ist linear und isometrisch (und damit auch injektiv).

Beweis. Es gilt

$$[J(\alpha x + \beta y)](\lambda) = \lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\lambda(x) + \beta\lambda(y) = \alpha(Jx)(\lambda) + \beta(Jy)(\lambda),$$

d.h. die Abbildung J ist linear. Weiter ist

$$\|Jx\|_{X''} = \sup_{\|\lambda\|_{X'}\leq 1} |(Jx)(\lambda)| = \sup_{\|\lambda\|_{X'}\leq 1} |\lambda(x)| = \|x\|_X\,.$$

Nach Lemma 4.5 existiert zu jedem $x \in X$ ein $\lambda_x \in X'$ mit $\|\lambda_x\|_{X'} = 1$ und $\lambda_x(x) = \|x\|_X$. Damit gilt

$$\|Jx\|_{X''} = \sup_{\|\lambda\|_{X'}\leq 1} |\lambda(x)| \geq |\lambda_x(x)| = \|x\|_X\,.$$

□

4.11 Definition. Ein normierter Raum X heißt reflexiv, falls die kanonische Einbettung $J : X \hookrightarrow X''$ aus Lemma 4.10 surjektiv ist.

4.12 Satz. *Sei X ein Hilbertraum. Dann ist X reflexiv.*

Beweis. Nach dem Satz von Riesz ist

$$I_{\text{Riesz}} : X' \to X,\ \lambda \mapsto y_\lambda \text{ mit } \forall x \in X : \lambda(x) = \langle x, y_\lambda\rangle$$

eine Isometrie, surjektiv und konjugiert linear. Also ist auch

$$I_{\text{Riesz}}^{-1} : X \to X',\ y \mapsto \lambda_y \text{ mit } \forall x \in X : \langle x, y\rangle = \lambda_y(x)$$

eine Isometrie, surjektiv und konjugiert linear.

Sei zu $x'' \in X''$ beliebig die Abbildung T definiert durch $T(y) = \overline{x''(\lambda_y)}$ für $y \in X$. Damit ist $T \in X'$ und wir setzen $x = I_{\text{Riesz}}(T)$. Es folgt $Jx = x''$, denn für alle $\lambda \in X'$ gilt

$$(Jx)(\lambda) = \lambda(x) = \langle x, y_\lambda\rangle = \overline{\langle y_\lambda, x\rangle} = \overline{\langle y_\lambda, I_{\text{Riesz}}(T)\rangle} = \overline{T(y_\lambda)} = x''(\lambda).$$

□

4.13 Beispiele. a) Für $1 < p < \infty$ ist (ℓ^p) reflexiv.

Betrachte hierzu für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Abbildung T_q aus Beispiel 4.1,

$$T_q \colon \ell^q \to (\ell^p)',\ y = (y_n)_n \mapsto T_q y \text{ mit } (T_q y)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n.$$

Die Abbildungen T_q und T_q^{-1} sind isometrisch, surjektiv, konjugiert linear und es gilt $\lambda(T_q^{-1}\mu) = \overline{\mu(T_p^{-1}\lambda)}$ für $\mu \in (\ell^q)', \lambda \in (\ell^p)'$.

Zu $x'' \in (\ell^p)''$ definieren wir $l' \in (\ell^q)'$ durch $l'(y) = \overline{x''(T_q y)}$ für alle $y \in \ell^q$ und setzen $x := T_p^{-1} l'$. Damit folgt für $\lambda \in (\ell^p)'$ beliebig

$$(Jx)(\lambda) = \lambda(x) = \lambda(T_p^{-1} l') = \overline{l'(T_q^{-1}\lambda)} = x''(T_q T_q^{-1}\lambda) = x''(\lambda).$$

Allgemeiner gilt: Sei $1 < p < \infty$ und $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $L^p(\mu)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv.

b) Es gilt $\big(L^1(\mu)\big)' \cong L^\infty(\mu)$, aber andererseits $L^1(\mu) \subsetneq \big(L^\infty(\mu)\big)'$ (vgl. Beispiel 4.1), d.h. $L^1(\mu)$ ist nicht reflexiv.

c) $L^\infty(\mu)$ ist nicht reflexiv, denn ein normierter Raum X ist reflexiv genau dann, wenn X' reflexiv ist und X ein Banachraum ist (ohne Beweis).

4.14 Bemerkung (James-Raum)**.** Es existiert ein Banachraum X, der zwar isometrisch isomorph zu seinem Bidualraum X'' aber nicht reflexiv ist.

5. Klassische Sätze der Funktionalanalysis

a) Der Satz von Baire und Folgerungen

5.1 Definition. Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt nirgends dicht, falls $\overline{A}$ keine inneren Punkte enthält, d.h. $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$. Dies ist äquivalent dazu, dass $\overline{A}$ keine offene Kugel enthält.

5.2 Satz (Bairescher Kategoriensatz)**.** *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A_n \subset X$ mit A_n abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine offene Kugel enthält, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass A_{n_0} (schon) eine offene Kugel enthält.*

Beweis. Sei $B(x_0, r) \subset A$ eine offene Kugel. Angenommen, kein A_n enthält eine offene Kugel (also: jede offene Kugel $B(x, \varepsilon)$ „ragt über jedes A_n hinaus"), d.h.

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \, \forall\, x \in X : (X \setminus A_n) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Dann ist einerseits $(X \setminus A_1) \cap B(x_0, r)$ nichtleer (enthält also ein x_1), andererseits offen (als Durchschnitt zweier offener Mengen), also gibt es ein $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$ mit

$$B(x_1, \varepsilon_1) \subset (X \setminus A_1) \cap B(x_0, r).$$

Wähle nun induktiv $x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}$ mit

$$B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset (X \setminus A_{n+1}) \cap B(x_n, \varepsilon_n) \text{ und } 0 < \varepsilon_{n+1} < 2^{-n-1}$$

Wegen $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ und $x_{n+1} \in B(x_n, \varepsilon_n)$ ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge und da X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x_n \longrightarrow x$. Aus

$$d(x, x_n) = \lim_{m\to\infty} \underbrace{d(x_m, x_n)}_{<\varepsilon_n \text{ falls } m>n} < \varepsilon_n$$

folgt $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon_n)$.

Aber es gilt sowohl

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n) = X \setminus A$$

als auch

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon_n) \subset B(x_1, \varepsilon_1) \subset B(x_0, r) \subset A.$$

Somit ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon_n) = \emptyset$ im Widerspruch zu $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon_n)$. $\square$

Satz 5.2 heißt aus folgendem Grund Kategoriensatz: Eine Menge $A \subset X$ heißt von erster Kategorie (oder mager) in X, falls $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ mit nirgends dichten Mengen A_n gilt. Gibt es keine solche Darstellung, heißt A von zweiter Kategorie.

Damit erhalten wir die kurze Formulierung des Satzes von Baire:
Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum. Dann ist X von zweiter Kategorie in sich.

5.3 Bemerkung. Aus dem Satz von Baire folgt leicht: Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist der Durchschnitt einer abzählbaren Familie von dichten offenen Teilmengen von X wieder dicht in X.

5.4 Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, Y normierter Raum und $\mathcal{T} \subset C^0(X, Y)$ eine Familie stetiger Abbildungen, die punktweise gleichmäßig beschränkt ist, d.h., es gilt*

$$\forall\, x \in X\ \exists\, c_x > 0\ \forall f \in \mathcal{T}\colon\ \|f(x)\|_Y \le c_x.$$

Dann existiert eine offene Kugel K und ein $c > 0$ mit

$$\forall f \in \mathcal{T}:\ \sup_{x \in K} \|f(x)\|_Y \le c.$$

Beweis. Die Menge

$$\begin{aligned} A_n &:= \{x \in X\colon\ \sup_{f \in \mathcal{T}} \|f(x)\|_Y \le n\} = \{x \in X\colon\ \forall f \in \mathcal{T} : \|f(x)\|_Y \le n\} \\ &= \bigcap_{f \in \mathcal{T}} \{x \in X\colon\ \|f(x)\|_Y \le n\} \end{aligned}$$

ist (als Durchschnitt abgeschlossener Mengen) abgeschlossen. Für $x \in X$ existiert nach Voraussetzung ein $c_x > 0$ mit $\|f(x)\|_Y \le c_x$ für alle $f \in \mathcal{T}$, d.h. es existiert eine natürliche Zahl n mit $x \in A_n$.
Somit ist $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Nach dem Satz von Baire existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine offene Kugel $K \subset A_{n_0}$.
Damit ist für alle $x \in K, f \in \mathcal{T}$ $\|f(x)\|_Y \le n_0$. □

5.5 Satz (von Banach–Steinhaus)**.** *Sei X Banachraum und Y normierter Raum. Sei $\mathcal{T} \subset L(X, Y)$ eine punktweise gleichmäßig beschränkte Familie, d.h. es gelte*

$$\forall\, x \in X\ \exists\, c_x > 0\ \forall\, T \in \mathcal{T}\colon\ \|Tx\|_Y \le c_x.$$

Dann existiert ein $c > 0$ mit

$$\forall\, T \in \mathcal{T}\colon\ \|T\| \le c.$$

Beweis. Nach Satz 5.4 existieren $B(x_0, r)$ und $c' > 0$ mit

$$\forall\, x \in B(x_0, r)\ \forall\, T \in \mathcal{T}\colon\ \|Tx\|_Y \leq c'.$$

Sei nun $x \in X, \|x\| = 1$ und $T \in \mathcal{T}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|Tx\|_Y &= \frac{2}{r}\ \left\|T\Big(\frac{r}{2}x + x_0 - x_0\Big)\right\|_Y \leq \\ &\leq \frac{2}{r}\left(\Big\|T\Big(\underbrace{\frac{r}{2}x + x_0}_{\in B(x_0,r)}\Big)\Big\|_Y + \Big\|\underbrace{Tx_0}_{\in B(x_0,r)}\Big\|_Y\right) \leq \frac{4}{r}c' =: c.\end{aligned}$$

Somit gilt $\|T\| \leq c$ für alle $T \in \mathcal{T}$). □

Und eine Variation des Satzes von Banach–Steinhaus ist folgendes Ergebnis, dessen Beweis sich ideal zum Selbststudium eignet:

5.6 Satz (von Banach–Steinhaus). *Seien X, Y Banachräume. Dann konvergiert eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X, Y)$ genau dann punktweise gegen eine Abbildung $T \in L(X, Y)$, wenn gilt:*

(i) *die Folge der Normen $\|T_n\|$ ist beschränkt,*

(ii) *die Folge $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für alle Elemente x einer in X dichten Teilmenge A.*

Mit Satz 5.4 können wir beschränkte Mengen mit Hilfe des Dualraums charakterisieren.

5.7 Definition. Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$. Dann heißt M schwach beschränkt, falls gilt

$$\forall\, \lambda \in X'\ \exists\, c_\lambda > 0 : \sup_{x\in M} |\lambda(x)| \leq c_\lambda.$$

5.8 Satz. *Sei X ein normierter Raum. Eine Menge $M \subset X$ ist genau dann beschränkt, wenn sie schwach beschränkt ist.*

Beweis. Sei M beschränkt und $\lambda \in X'$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in M$

$$|\lambda(x)| \leq \|\lambda\|\ \|x\|_X \leq c_\lambda$$

für ein $c_\lambda > 0$, also ist M schwach beschränkt.

Sei nun M schwach beschränkt. Definiere $\mathcal{T} := \{Jx | x \in M\} \subset X''$, wobei J die kanonische Einbettung aus Lemma 4.10 bezeichnet. Für beliebiges $T = Jx \in \mathcal{T}$ und $\lambda \in X'$ ist dann

$$|T(\lambda)| = |(Jx)(\lambda)| = |\lambda(x)| \leq c_\lambda.$$

Damit gilt

$$\forall \lambda \in X' \; \exists c_\lambda > 0 \; \forall T \in \mathcal{T} : |T(\lambda)| \leq c_\lambda.$$

Nach Satz 5.5 existert nun ein $c > 0$ mit

$$\forall T \in \mathcal{T} : \|T\|_{X''} \leq c \Leftrightarrow \forall x \in M : \|Jx\|_{X''} \leq c$$

und da J eine isometrische Abbildung ist, haben wir $\forall x \in M : \|x\|_X \leq c$. □

Nach dem Satz von Riesz ist in Hilberträume ist jedes $\lambda \in X'$ über das Skalarprodukt darstellbar, woraus wir eine einfache Beschreibung der schwachen Beschränktheit folgt.

5.9 Satz. *Sei X ein Hilbertraum. Eine Menge $M \subset X$ ist genau dann beschränkt, wenn gilt*

$$\forall y \in X \; \exists c_y > 0 : \sup_{x \in M} |\langle x, y \rangle| \leq c_y.$$

Eine weitere Anwendung des Satzes von Banach-Steinhaus ist das Prinzip der offenen Abbildung, dass einen Zusammenhang von Surjektivität und der Offenheit einer Abbildung herstellt.

5.10 Lemma. *Seien X und Y normierte Räume, und es sei $T\colon X \to Y$ linear. Dann ist T eine offene Abbildung (gemäß Definition 1.7) genau dann, wenn ein positives δ existiert mit $B(0_Y, \delta) \subset T(B(0_X, 1))$.*

Beweis. Lediglich die Rückrichtung ist nicht-trivial. Sei $U \subset X$ offen und $x \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset U$. Wegen der Linearität von T ist $B(0_Y, \delta\varepsilon) \subset T(B(0_X, \varepsilon))$, nach Verschiebung also auch $B(Tx, \delta\varepsilon) \subset T(B(x, \varepsilon)) \subset T(U)$, und somit ist $T(U)$ offen in Y. □

5.11 Satz (Prinzip der offenen Abbildung)**.** *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$.*
Dann ist T genau dann eine offene Abbildung, wenn T surjektiv ist.

Beweis. Die Surjektivität folgt schnell aus der Offenheit: jedes $y \in Y$ ist enthalten in einer genügend großen offenen Kugel $B(0_Y, r)$, und diese ist nach Lemma 5.10 enthalten in $T(B(0_X, \varrho))$ für ein geeignetes ϱ.

Es bleibt also die Rückrichtung zu zeigen. Wir führen einige Schreibweisen ein:

$$B_r^{(X)} := B(0_X, r) \subset X, \qquad B_r^{(Y)} := B(0_Y, r) \subset Y.$$

i) Wir werden zunächst beweisen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon^{(Y)} \subset \overline{T(B_1^{(X)})}$, also dass im Abschluß des Bildes der Einheitskugel wieder eine Kugel enthalten ist.

Da T surjektiv ist, gilt $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(B_n^{(X)})}$. Nach dem Satz von Baire ist das Innere von $\overline{T(B_n^{(X)})}$ für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$ nichtleer, d.h.

$$\exists \varepsilon_0 > 0, y_0 \in Y : B(y_0, \varepsilon_0) \subset \overline{T(B_n^{(X)})}.$$

Dieses y_0 besitzt wegen der Surjektivität von T ein Urbild $x_0 \in X$, $Tx_0 = y_0$. Es ist $B(y_0, \varepsilon_0) = Tx_0 + B_{\varepsilon_0}^{(Y)}$ und damit

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon_0}^{(Y)} &\subset \overline{T(B_n^{(X)})} - Tx_0 = \overline{T(B_n^{(X)}) - Tx_0} \\ &= \overline{T(nB_1^{(X)}) - Tx_0} = \overline{T(nB_1^{(X)} - x_0)} \subset \overline{T(mB_1^{(X)})} = m\, \overline{T(B_1^{(X)})} \end{aligned}$$

für ein $m \in \mathbb{N}$. Beachte dabei, dass $nB_1^{(X)} - x_0 \subset mB_1^{(X)}$ für großes m gilt. Wir erhalten

$$B_{\varepsilon_0/m}^{(Y)} \subset \overline{T(B_1^{(X)})}.$$

Wähle $\varepsilon := \varepsilon_0/m$.

ii) Es gilt $\overline{T(B_1^{(X)})} \subset T(B_2^{(X)})$, was mit *i*) die Offenheit von T liefert.

Dazu sei $y \in \overline{T(B_1^{(X)})}$ und ε wie im Schritt 1. Nach Definition des topologischen Abschluss gibt es ein $x_1 \in B_1^{(X)}$ mit $y - Tx_1 \in B_{\varepsilon/2}^{(Y)}$.

Nach *i*) ist $B_{\varepsilon/2}^{(Y)} \subset \overline{T(B_{1/2}^{(X)})}$. Wähle $x_2 \in B_{1/2}^{(X)}$ mit $y - Tx_1 - Tx_2 \in B_{\varepsilon/4}^{(Y)} \subset \overline{T(B_{1/4}^{(X)})}$.

Wir erhalten iterativ eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in B_{2^{-n+1}}^{(X)}$ mit $y - \sum_{i=1}^n Tx_i \in B_{2^{-n}\varepsilon}^{(Y)}$. Nach Wahl der x_n ist $x := \sum_{n=1}^\infty x_n$ absolut konvergent. Es gilt $x \in B_2^{(X)}$ wegen $\|x\| \le \sum_n \|x_n\| < 2$.

Aus der Stetigkeit von T erhalten wir

$$y = \sum_{i=1}^\infty Tx_i = T(\sum_{i=1}^\infty x_i) = Tx \in T(B_2^{(X)}).$$

Wir haben $B_\varepsilon^{(Y)} \subset T(B_2^{(X)})$, also auch $B_{\varepsilon/2}^{(Y)} \subset T(B_1^{(X)})$. Mit Lemma 5.10 folgt nun die Behauptung. □

5.12 Satz (Stetigkeit des Inversen). *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$ mit $\ker T = \{0\}$ und $R(T)$ abgeschlossen.*
Dann ist $T^{-1}: R(T) \to X$ stetig.

Beweis. Der Raum $(R(T), \|\cdot\|_Y$ ist ein Banachraum und damit ist $T \in L(X,Y)$ offen. Weil T injektiv ist, existiert $T^{-1}: R(T) \to X$ als lineare Bijektion und die Stetigkeit von T^{-1} ist per Definition äquivalent zur Offenheit von T. □

5.13 Korollar. *Seien $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ und $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume mit*

$$\|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2 \quad (x \in X)$$

für eine Konstante $c > 0$. Dann sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.

Beweis. Satz 5.12, angewandt auf $\mathrm{id}: (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$, $x \mapsto x$. □

5.14 Bemerkung. Sei X Banachraum, Y normierter Raum und $T: X \to Y$ ein Isomorphismus normierter Räume, d.h. T linear, bijektiv und T, T^{-1} stetig. Dann ist auch Y ein Banachraum.

Denn falls $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchyfolge ist, so auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := T^{-1}y_n$. Damit existiert $x := \lim_n x_n \in X$, und für $y := Tx \in Y$ gilt $y_n \longrightarrow y$.

Man beachte, dass hier die Linearität entscheidend ist, vergleiche $\arctan: \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$.

b) Der Satz von Banach-Alaoglu für separable Banachräume

5.15 Definition (Konvergenzbegriffe). Sei X ein normierter Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_n \subset X$ heißt (Norm-)konvergent gegen $x \in X$, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0.$$

Wir schreiben $x_n \longrightarrow x$.

(ii) Eine Folge $(x_n)_n \subset X$ heißt schwach konvergent gegen $x \in X$, wenn gilt

$$\forall \lambda \in X' : \lim_{n\to\infty} \lambda(x_n - x) = 0.$$

Wir schreiben $x_n \rightharpoonup x$.

(iii) Eine Folge $(\lambda_n)_n \subset X'$ heißt schwach-*-konvergent gegen $\lambda \in X'$, wenn gilt

$$\forall x \in X : \lim_{n\to\infty} (\lambda - \lambda_n)(x) = 0.$$

Wir schreiben $\lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$.

5.16 Bemerkung. a) Eine Folge konvergiert genau dann gemäß der obigen Definition, wenn sie in der entsprechenden Topologie aus Definition 2.30 bzw. in der durch die Norm induzierten Topologie konvergiert.

b) Sei X ein (Prä-)Hilbertraum und $(x_n)_n \subset X$. Dann gilt $x \rightharpoonup x \in X$ genau dann, wenn $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ für alle $y \in X$ (Satz von Riesz).

c) Norm-Konvergenz impliziert die schwache Konvergenz, da für $\lambda \in X'$, $x \in X$ und $(x_n)_n \subset X$ mit $x_n \to x$ gilt:

$$|\lambda(x - x_n)| \le \|\lambda\|_{X'} \|x - x_n\|_X \to 0. \quad (n \to \infty)$$

Die schwache Topologie ist also im allgemeinen gröber als die durch die Norm induzierten Topologie. Die beiden Topologien stimmen genau dann überein, wenn X endlichdimensional ist.

d) Konvergiert $(\lambda_n)_n \subset X'$ schwach gegen $\lambda \in X'$, also wenn $x''(\lambda_n - \lambda) \to 0$ für alle $x'' \in X''$ gilt, so folgt $\lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$. Wenn wir mit J die kanonische Einbettung $X \hookrightarrow X''$ bezeichnen, bekommen wir für alle $x \in X$

$$(\lambda - \lambda_n)(x) = (Jx)(\lambda - \lambda_n) \to 0. \quad (n \to \infty)$$

Hieran sieht man auch, dass für reflexive Räume die schwache Konvergenz in X' und die schwach-*-Konvergenz in X' übereinstimmen.

e) Die schwach-*-Konvergenz beschreibt die punktweise Konvergenz einer Folge von Funktionalen.

5.17 Beispiel. Sei X ein Hilbertraum und $(\varphi_n)_n \subset X$ orthonormal. Aus der Besselschen Ungleichung folgt, dass $(|\langle x, \varphi_n\rangle|)_n$ für alle $x \in X$ ein Nullfolge ist und nach dem Satz von Riesz wiederum impliziert dies $\varphi_n \rightharpoonup 0$.

5.18 Lemma. *Sei X ein Banachraum. Dann gilt:*

(i) Der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge $(x_n)_n \subset X$ ist eindeutig und die Folge ist beschränkt.

(ii) Der Grenzwert einer schwach--konvergente Folge $(\lambda_n)_n \subset X'$ ist eindeutig und die Folge beschränkt.*

Beweis. (i) Sind $x, y \in X$ Grenzwerte, so gilt $\lambda(x-y) = 0$ für alle $\lambda \in X'$ und aus Hahn-Banach (Korollar 4.5) folgt $x - y = 0$.
Für alle $\lambda \in X'$ ist $(\lambda(x_n))_n \subset \mathbb{K}$ konvergent, also beschränkt. Also ist $(x_n)_n$ schwach beschränkt und somit nach Satz 5.8 auch beschränkt.

(ii) Sind $\lambda, \mu \in X'$ Grenzwerte, so gilt $(\lambda - \mu)(x) = 0$ für alle $x \in X$ und daher stimmen die Abbildungen überein.
Für alle $x \in X$ ist $(\lambda_n(x))_n \subset \mathbb{K}$ konvergent, also ist $(\lambda_n)_n$ punktweise gleichmäßig beschränkt und somit ist nach Satz 5.5 $(\|\lambda_n\|_{X'})_n$ beschränkt. Nur für diesen letzten Punkt haben wir die Vollständigkeit von X benötigt.

□

5.19 Beispiele. a) Sei X ein Hilbertraum und $S \subset X$ eine Orthonormalbasis. Dann konvergiert $(x_n)_n \subset X$ genau dann schwach gegen ein $x \in X$, wenn $\langle x_n, e\rangle \to \langle x, e\rangle$ für alle $e \in S$ gilt und $(x_n)_n$ beschränkt ist.

Dass aus der schwachen Konvergenz $\langle x_n, e\rangle \to \langle x, e\rangle$ für alle $e \in S$ und die Beschränktheit von $(x_n)_n$ folgt, wurde bereits gezeigt. Umgekehrt gilt für alle $z \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{e\in S} \langle x_n, e\rangle \langle e, z\rangle = \sum_{e\in S} \langle x, e\rangle \langle e, z\rangle ,$$

wobei Satz 3.19 für die Darstellung von $\langle x_n, z\rangle$ und die Beschränktheit von $(\|x_n\|_X)_n$ zum Vertauschen der Grenzprozesse genutzt wurde. Also ist $(x_n)_n$ schwach konvergent.

b) Sei $1 < p < \infty$ und $x_n = (x_n^{(j)})_j \in \ell^p$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(x_n)_n$ genau dann schwach, wenn sie beschränkt ist und jeder Eintrag $(x_n^{(j)})_n$ in $\mathbb{K}$ konvergiert.

c) Sei $1 < p < \infty$. Eine Folge $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ konvergiert genau dann schwach gegen ein $f \in L^p(\Omega)$, wenn sie beschränkt ist und für jedes beschränktes Gebiet $\Omega' \subset \Omega$ gilt: $\int_{\Omega'} f_n \to \int_{\Omega'} f$.

d) Eine Folge $(x_n)_n \subset \ell^1$ konvergiert genau dann schwach, wenn sie in der Norm konvergiert.

5.20 Satz. *Sei X ein (Prä-)Hilbertraum, $(x_n)_n \subset X$ und $x \in X$. Dann konvergiert $(x_n)_n$ genau dann in der Norm gegen $x \in X$, wenn $(x_n)_n$ schwach konvergiert und $\|x_n\| \to \|x\|$ $(n \to \infty)$.*

Beweis. Einerseits folgt aus der Konvergenz von $(x_n)_n$ direkt die schwache Konvergenz und aus der Stetigkeit der Norm ergibt sich $\|x_n\| \to \|x\|$ $(n \to \infty)$.

Andererseits gilt

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 \to 0, \quad (n \to \infty)$$

wenn $(x_n)_n$ schwach konvergiert und $\|x_n\| \to \|x\|$. □

Wir bekommen auch eine Art Grenzwertsatz für die Verkettung von Konvergenzen in X und X', hierbei muss jedoch eine Folge stark konvergieren.

5.21 Lemma.

(i) *Sei X ein normierter Raum, $(x_n)_n \subset X$ mit $x_n \rightharpoonup x$ in X und $(\lambda_n)_n \subset X'$ mit $\lambda_n \to \lambda$ in X'. Dann gilt $\lambda_n(x_n) \to \lambda(x)$ in $\mathbb{K}$.*

(ii) *Sei X ein Banachraum, $(x_n)_n \subset X$ mit $x_n \to$ in X und $(\lambda_n)_n \subset X'$ mit $\lambda_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} \lambda$ in X'. Dann gilt $\lambda_n(x_n) \to \lambda(x)$ in $\mathbb{K}$.*

Beweis. (i) Es gilt

$$\begin{aligned}|\lambda_n(x_n) - \lambda(x)| &\le |\lambda_n(x_n) - \lambda(x_n)| + |\lambda(x_n) - \lambda(x)| \\ &\le \|\lambda_n - \lambda\|_{X'} \|x_n\|_X + |\lambda(x_n - x)| \to 0, \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

da $(x_n)_n$ beschränkt ist.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}|\lambda_n(x_n) - \lambda(x)| &\le |\lambda_n(x_n) - \lambda_n(x)| + |\lambda_n(x) - \lambda(x)| \\ &\le \|x_n - x\|_X \|\lambda_n\|_{X'} + |(\lambda_n - \lambda)(x)| \to 0, \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

da $(\lambda_n)_n$ beschränkt ist.

□

5.22 Beispiel. Sei X ein Hilbertraum und $(\varphi_n)_n \subset X$ orthonormal. Definiere $\lambda_n \in X'$ durch $\lambda_n(x) := \langle x, \varphi_n \rangle$ für alle $x \in X$. Dann gilt $\varphi_n \rightharpoonup 0$ und $\lambda_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} 0$, aber $\lambda_n(\varphi_n) = 1 \not\to 0$ $(n \to \infty)$.

5.23 Definition. Sei X ein normierter Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_n \subset X$ heißt schwache Cauchyfolge, falls $(\lambda(x_n))_n$ für alle $\lambda \in X'$ eine Cauchyfolge ist.

(ii) X heißt schwach folgenvollständig, falls jede schwache Cauchyfolge in X konvergiert.

(iii) $A \subset X$ heißt schwach folgenkompakt, falls jede Folge in A eine schwach konvergente Teilfolge hat.

(iv) $\mathcal{T} \subset X'$ heißt schwach-*-folgenkompakt, falls jede Folge in $\mathcal{T}$ eine schwach-*-konvergente Teilfolge hat.

5.24 Satz (von Banach-Alaoglu)**.** *Sei X ein separabler normierter Raum. Dann ist $S' := \{\lambda \in X' | \, \|\lambda\|_{X'} \leq 1\}$ schwach-*-folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(\lambda_n)_n \subset S'$ und $(x_n)_n \subset X$ dicht und $M := \operatorname{span}((x_n)_n)$. Wir konstruieren zunächst eine auf M schwach-*-konvergente Teilfolge.
Die Folge $(\lambda_n(x_1))_n$ erfüllt $|\lambda_n(x_1)| \leq \|x_1\|_X$ und besitzt deswegen eine konvergente Teilfolge $(\lambda_{n,1}(x_1))_n \subset (\lambda_n(x_1))_n$.

Nun ist auch $(\lambda_{n,1}(x_2))_n$ beschränkt und es existert wieder eine konvergente Teilfolge. Induktiv erhalten wir so für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $(\lambda_{n,k})_n \subset (\lambda_{n,k-1})_n$ mit $(\lambda_{n,k}(x_j))_n$ konvergiert, falls $j \leq k$.

Setze $\mu_n := \lambda_{n,n}$. Da jedes $x \in M$ eine endliche Linearkombination von Elementen der Folge $(x_n)_n$ ist, konvergiert $(\mu_n(x))_n$ auf M. Definiere

$$\mu : M \to \mathbb{K}, \; \mu(x) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(x).$$

Wegen $\|\mu_n\|_{X'} \leq 1$ ist $|\mu(x)| \leq \|x\|_X$ und daher $\mu \in L(M, \mathbb{K})$ mit $\|\mu\|_{X'} \leq 1$.

Nach Satz 2.37 existiert eine eindeutige Fortsetzung λ von μ auf $\overline{M} = X$ mit $\|\lambda\|_{X'} = \|\mu\|_{X'}$.

Um zu zeigen, dass λ der punktweise Grenzwert von $(\mu_n)_n$ auf X ist, sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für alle $x \in X$ existiert ein $y \in M$ mit $\|x - y\|_X < \frac{\varepsilon}{4}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |(\lambda - \mu_n)(x)| &\leq |(\lambda - \mu_n)(x - y)| + |(\lambda - \mu_n)(y)| \\
&\leq \|\lambda - \mu_n\|_{X'} \|x - y\|_X + |(\lambda - \mu_n)(y)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + |(\lambda - \mu_n)(y)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

für n groß genug, da $\lambda|_M = \mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$. □

5.25 Bemerkung. In ℓ^∞ ist $S' := \{\lambda \in (\ell^\infty)' | \, \|\lambda\|_{(\ell^\infty)'} \leq 1\}$ nicht schwach-*-folgenkompakt, aber schwach-*-kompakt.

5.26 Satz. *Sei X ein reflexiver normierter Raum. Dann ist $S := \{x \in X | \, \|x\|_X \leq 1\}$ schwach folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(x_n)_n \subset S$ und $M := \overline{\operatorname{span}((x_n)_n)}$. Als abgeschlossener Teilraum eines reflexiven Raums ist M reflexiv und die kanonische Einbettung $J : M \to M''$ ist ein

isometrischer Isomorphismus.
Da M nach Definition separabel ist, folgt M'' sperabel und nach Satz 4.7 ist M' separabel. Satz 5.24 angewandt auf M' liefert, dass $S'' := \{x'' \in M'' | \, \|x''\|_{M''} \leq 1\}$ schwach-*-folgenkompakt ist.

Da J eine Isometrie ist, gilt $\|Jx_n\|_{M''} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es existiert somit ein $x'' \in M''$ und eine Teilfolge $(Jx_k)_k \subset (Jx_n)_n$ die schwach-*-konvergent gegen x'' ist. Setze $x := J^{-1}x''$. Damit ist zum einen $x \in M$ mit $\|x\|_X \leq 1$ und zum anderen gilt für alle $\lambda \in M'$

$$\lambda(x) = (Jx)(\lambda) = \lim_{k\to\infty} (Jx_k)(\lambda) = \lim_{k\to\infty} \lambda(x_k).$$

Wegen $X' \subset M'$ folgt damit die schwache Konvergenz von $(x_n)_n$ gegen x in X. □

5.27 Korollar. *Ein reflexiver Raum X ist schwach folgenvollstvollständig.*

5.28 Bemerkung. a) Kompaktheit in der schwachen Topologie ist äquivalent zur schwachen Folgenkompaktheit.

b) Es gilt die Umkehrung von Satz 5.26, ein normierter Raum X ist reflexiv, wenn $S := \{x \in X | \, \|x\|_X \leq 1\}$ schwach folgenkompakt ist.

c) $C^0([0,1])$ ist ein Banachraum, aber nicht schwach folgenvollständig, also auch nicht reflexiv.

Betrachte dazu $x_n(t) := t^n$. Dann ist $(x_n)_n$ eine schwache Cauchy-Folge, die aber keinen schwachen Grenzwert in $C^0([0,1])$ besitzt, denn:
Ein Folge $(x_n)_n \subset C^0([a,b])$ $(a, b \in \mathbb{R})$ konvergiert genau dann schwach, wenn $(x_n)_n$ beschränkt ist und $x_n(t) \to x(t)$ $(n \to \infty)$ für alle $t \in [a,b]$ mit einer Funktion $x \in C^0([a,b])$ gilt.

6. Lineare Operatoren: Grundbegriffe

a) Abgeschlossene Operatoren

Im Folgenden sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Wir erinnern an Beispiel 2.32b). Der Ableitungsoperator $T : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht stetig.

Das Beispiel ist typisch: Hier ist der Definitionsbereich $D(T)$ des Operators T ein linearer dichter Teilraum eines Banachraums X, und T bildet nach X ab. In diesem Sinn ist T ein Operator „in“ X.

6.1 Definition. Seien X, Y normierte Räume.

a) Ein linearer Operator $T\colon X \supset D(T) \to Y$ ist eine lineare Abbildung vom Definitionsbereich $D(T) \subset X$ nach Y, wobei $D(T)$ ein Unterraum von X ist.

b) Die Menge $G(T) := \{(x, Tx)\colon x \in D(T)\}$ heißt der Graph von T.

c) Der Operator T heißt abgeschlossen, wenn $G(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \oplus Y$ ist.

d) Der Operator T heißt abschließbar, wenn es einen abgeschlossenen linearen Operator $\overline{T}$ gibt mit $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.
Der Operator $\overline{T}$ heißt Abschließung oder der Abschluss von T.

6.2 Lemma. *Seien nun X, Y Banachräume und $T\colon X \supset D(T) \to Y$ ein linearer Operator.*

a) T ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt

$$\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T),\ x_n \longrightarrow x \in X \text{ und } Tx_n \longrightarrow y \in Y \Rightarrow x \in D(T) \text{ und } Tx = y.$$

b) T ist genau dann abschließbar, wenn gilt

$$\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T),\ x_n \longrightarrow 0 \text{ und } Tx_n \longrightarrow y \in Y \Rightarrow y = 0.$$

c) Ist T abgeschlossen und injektiv, so ist $T^{-1}\colon Y \supset R(T) \to X$ abgeschlossen.

[[a) Dies ist grade die Definition von $G(T)$ abgeschlossen.

b) Ist T abschließbar und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \longrightarrow 0$ und $Tx_n \longrightarrow y \in Y$. Für den Abschluss $\overline{T}$ gilt damit $x_n \longrightarrow 0$ und $\overline{T}x_n \longrightarrow y \in Y$, also $y = \overline{T}x = 0$.

Gelte nun, dass aus $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \longrightarrow 0$ und $Tx_n \longrightarrow y \in Y$ bereits $y = 0$ folgt.
Es gilt

$$\overline{G(T)} = \{(x,y) \in X \times Y | \exists (x_n)_n \subset D(T) \text{ mit } x_n \to x \text{ und } Tx_n \to y\}$$

Wir zeigen, dass zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ existiert mit $(x,y) \in \overline{G(T)}$.
Seien $(x, y^{(1)}), (x, y^{(2)}) \in \overline{G(T)}$ und $(x_n^{(1)}), (x_n^{(2)}) \subset D(T)$ mit $x_n^{(1)} \to x$ und $x_n^{(2)} \to x$ sowie $Tx_n^{(1)} \to y^{(1)}$ und $Tx_n^{(2)} \to y^{(2)}$. Dann gilt $x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \to 0$, $T(x_n^{(1)} - x_n^{(2)}) = Tx_n^{(1)} - Tx_n^{(2)} \to y^{(1)} - y^{(2)}$ und somit $y^{(1)} - y^{(2)} = 0$.
Also ist der Operator $\overline{T} : X \supset D(\overline{T}) \to Y$ mit

$$\begin{aligned} D(\overline{T}) &:= \{x \in X | \exists y \in Y \text{ mit } (x,y) \in \overline{G(T)}\}, \\ \overline{T}x &= y \end{aligned}$$

wohldefiniert und linear. Nach Konstruktion ist $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$, also ist $\overline{T}$ abgeschlossen.

c) Sei $(y_n)_n \subset R(T)$ mit $y_n \longrightarrow y \in Y$ und $T^{-1}y_n \longrightarrow x \in X$. Zu zeigen ist $y \in R(T), T^{-1}y = x$. Setze $x_n := T^{-1}y_n \in D(T)$. Dann gilt $x_n \to x$, $Tx_n \to y$ und deshalb $x \in D(T)$ und $Tx = y$.]]

6.3 Beispiele. a) Seien $X = Y = C^0([0,1])$, $D(T) := C^1([0,1]) \subset X$ und $Tx := x'$. Dann ist T abgeschlossen, denn für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \longrightarrow x$ in X und $Tx_n = x_n' \longrightarrow y$ in X konvergieren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig. Also $x \in C^1([0,1])$ und $x_n' \longrightarrow y'$. Somit ist $x \in D(T)$ und $y = x' = Tx$.

b) Seien $1 < p < \infty$, $X = Y = \ell^p$, $D(T) := \{x \in \ell^p | (jx^{(j)})_j \in \ell^p\}$ und $T(x^{(j)})_j = (jx^{(j)})_j$. Dann ist T abgeschlossen.

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \to x \in \ell^p$ und $Tx_n \to y \in \ell^p$, so folgt $jx_n^{(j)} \to y^{(j)}$ (in $\mathbb{K}$) für alle $j \in \mathbb{N}$. Setze $z^{(j)} := \frac{y^{(j)}}{j}$. Wegen $y \in \ell^p$ ist $z \in D(T)$ und $Tz = y$. Zu zeigen ist nun $z = x$. Nach Wahl von z gilt

$$\begin{aligned} \|x_n - z\|_{\ell^p}^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_n^{(j)} - z^{(j)}|^p &= \sum_{j=1}^{\infty} \left| x_n^{(j)} - \frac{y^{(j)}}{j} \right|^p \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} \left| j^p x_n^{(j)} - y^{(j)} \right|^p \\ &\le \|Tx_n - y\|_{\ell^p}^p \to 0. \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

c) Seien erneut $X = Y = C^0([0,1])$, $D(T) := C^\infty([0,1]) \subset X$ und $Tx := x'$. Dann ist T abschließbar, denn für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \longrightarrow 0$ in X und $Tx_n = x_n' \longrightarrow y$ in X gilt $x_n(t) - x_n(0) = \int_0^t x_n'(s) \mathrm{d}s = \int_0^t Tx_n(s)\mathrm{d}s$. Also $0 = \int_0^t y(s)\mathrm{d}s$ und da $y \in C^0([0,1])$ folgt $y = 0$.

T ist nicht abgeschlossen, denn für $x_n(t) := t^2 \sin \frac{1}{t+\frac{1}{n}}$ gilt $x_n \in C^\infty([0,1])$ mit $x_n(t) := 2t \sin\frac{1}{t+\frac{1}{n}} + \left(\frac{t}{t+\frac{1}{n}}\right)^2 \cos\frac{1}{t+\frac{1}{n}}$ und $x_n(t) \to x(t) := t^2 \sin\frac{1}{t}$. Wegen

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x(t)| &= t^2 \left| \sin\frac{1}{t+\frac{1}{n}} - \sin\frac{1}{t} \right| \\ &= t^2 \left| \int_{\frac{1}{t}}^{\frac{1}{t+\frac{1}{n}}} \cos(s)\mathrm{d}s \right| \end{aligned}$$

$$\leq t^2 \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{t + \frac{1}{n}} \right| \leq \frac{1}{n}$$

konvergiert x_n gegen x in $C^0([0,1])$ und analog folgt $Tx_n \to x'$, aber $x \notin D(T)$. Der Abschluss von T ist der Operator aus a).

d) Seine $X = L^1((-1,1)), Y = \mathbb{R}$, $D(T) := C^0([-1,1]) \cap L^1((-1,1)) \subset X$ und $Tx = x(0)$. Dann gilt für $x_n(t) := (1 - n|t|)\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$ zum einen $\|x_n\|_1 = \frac{1}{n}$ und zum anderen $Tx = 1$. Also ist T nicht abschließbar.

6.4 Lemma. *Seien X, Y Banachräume und $T\colon X \supset D(T) \to Y$ ein linearer Operator. Dann definiert*

$$\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

eine Norm auf $D(T)$, die sog. Graphennorm. Der normierte Raum $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist genau dann ein Banachraum, wenn der Operator T abgeschlossen ist.

Beweis. (i) Sei T abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ eine Cauchyfolge bzgl. der Norm $\|\cdot\|_T$. Dann gilt nach Definition der Norm $\|\cdot\|_T$

$$\|x_n - x_m\|_X + \|T(x_n - x_m)\|_Y \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Daher sind sowohl $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_X$ als auch $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_Y$ Cauchyfolgen und es existieren $x \in X$ und $y \in Y$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$.
Da T abgeschlossen ist, folgt nach Lemma 6.2 a) $x \in D(T)$ und $Tx = y$. Insbesondere folgt $\|x_n - x\|_T \longrightarrow 0$. Also ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum.

(ii) Die andere Richtung der Äquivalenz zeigt man analog. □

6.5 Beispiel. Seien $X = Y = C^0([0,1])$, $D(T) := C^1([0,1]) \subset X$ und $Tx := x'$. Dann ist T abgeschlossen, denn $D(T)$ ist mit der Norm

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_\infty + \|Tf\|_\infty = \|f\|_T$$

ein Banachraum. Man sieht hieran auch, dass der Operator mit dem veränderten Definitionsbereich $D'(T) = C^\infty([0,1])$ nicht abgeschlossen ist.

6.6 Lemma. *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$. Dann ist T abgeschlossen.*

Beweis. Wir verwenden Lemma 6.2a). Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \longrightarrow x$ in X und $Tx_n \longrightarrow y$ in Y. Dann gilt trivialerweise $x \in D(T) = X$, und da T stetig ist, folgt $Tx_n \longrightarrow Tx$, d.h. $Tx = y$. □

Der folgende Satz zeigt, dass auch die Umkehrung gilt, ein abgeschlossener Operator $T\colon X \supset D(T) \to Y$ mit abgeschlossenem Definitionsbreich $D(T)$ ist stetig.

6.7 Satz (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Seien X, Y Banachräume, $T\colon X \supset D(T) \to Y$ abgeschlossener linearer Operator. Falls $D(T)$ abgeschlossen ist, so ist T stetig.*

Also: wenn X, Y Banachräume sind und

$$\begin{tikzcd} X & & Y \\ T : D(T) \arrow[u, hook, "\text{(abgeschlossen)}"] \arrow[rr, "\text{linear}", "\text{abgeschlossen}"'] & & R(T) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

dann ist

$$T\colon (D(T), \|\cdot\|_X) \xrightarrow[\text{stetig}]{\text{linear}} (R(T), \|\cdot\|_Y)$$

Beweis. Da T abgeschlossen ist, ist $G(T)$ mit $\|(x, Tx)\|_G := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ als abgeschlossener Unterraum von $X \oplus Y$ ein Banachraum. Die Projektion

$$\pi_1\colon G(T) \to X, (x, Tx) \mapsto x$$

ist injektiv und hat Operatornorm $\|\pi_1\| \leq 1$, ist also stetig. Der Wertebereich $R(\pi_1) = D(T)$ ist abgeschlossen in X.
Nach dem Satz von der stetigen Inversen (5.12) ist π_1^{-1} stetig als Abbildung von $(D(T), \|\cdot\|_X)$ nach $(G(T), \|\cdot\|_G)$. Ebenso ist $\pi_2\colon G(T) \to Y$, $(x, Tx) \mapsto Tx$, stetig als Abbildung von $(G(T), \|\cdot\|_G)$ nach $(R(T), \|\cdot\|_Y)$. Damit ist $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ stetig. $\square$

6.8 Korollar (Satz von Hellinger–Toeplitz). *Sei X ein Hilbertraum und $T\colon X \to X$ ein linearer, symmetrischer Operator, d.h., für alle $x, y \in X$ gilt*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle\,.$$

Dann ist T stetig.

Beweis. Zu zeigen ist die Abgeschlossenheit von $G(T)$ in $X \oplus X$.

Sei $(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, Tx_n)$, d.h. $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim_{n\to\infty} Tx_n$, jeweils mit Konvergenz in $\|\cdot\|_X$. Für $z \in X$ gilt

$$\begin{aligned}\langle y, z\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty} Tx_n, z\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Tx_n, z\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, Tz\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, Tz\right\rangle = \langle x, Tz\rangle \\ &= \langle Tx, z\rangle\,.\end{aligned}$$

Damit folgt $\langle y - Tx, z\rangle = 0$ für alle $z \in X$. Also ist $y - Tx = 0$, d.h. $(x, y) \in G(T)$. $\square$

6.9 Lemma. *Seien X, Y Banachräume und $T\colon X \supset D(T) \to Y$ abgeschlossener linearer Operator. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es existiert ein $C > 0$ mit $\|Tx\|_Y \geq C\,\|x\|_X$ für alle $x \in D(T)$.*

(ii) *T ist injektiv und $R(T)$ ist abgeschlossen.*

[[(i)$\Longrightarrow$(ii). Der Operator $T\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to (R(T), \|\cdot\|_Y)$ ist surjektiv per Definition und offensichtlich injektiv. Weiterhin ist er beschränkt mit Operatornorm ≤ 1, also stetig. Sein Inverses ist ebenfalls ein beschränkter Operator, wegen (i).

Also ist $T\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to (R(T), \|\cdot\|_Y)$ ein Isomorphismus von normierten Räumen und weil $(D(T), \|\cdot\|_T)$ Banachraum ist (denn T ist abgeschlossener Operator), ist $R(T)$ abgeschlossen nach Bemerkung 5.14.

(ii)$\Longrightarrow$(i) folgt direkt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.]]

b) Spektrum und Resolvente

6.10 Definition. Seien X, Y, Z normierte Räume. Seien ferner $S, \widetilde{S} : X \to Y$ und $T : Y \to Z$ lineare Operatoren.

a) Der Operator $S + \widetilde{S}$ ist definiert durch

$$D(S+\widetilde{S}) := D(S) \cap D(\widetilde{S}) \text{ und } (S+\widetilde{S})x := Sx + \widetilde{S}x \quad (x \in D(S+\widetilde{S})).$$

b) Der Operator $TS\colon X \to Z$ ist definiert durch

$$D(TS) := \{x \in D(S)\colon Sx \in D(T)\} \text{ und } (TS)x := T(Sx) \quad (x \in D(TS)).$$

c) Wir schreiben $S \subset \widetilde{S}$, falls $D(S) \subset D(\widetilde{S})$ und $\widetilde{S}|_{D(S)} = S$ gilt.

Im Folgenden schreiben wir für einen Operator $T\colon X \supset D(T) \to X$ statt $T - \lambda\,\mathrm{id}_X$ einfach $T - \lambda$.

6.11 Definition. Sei X ein Banachraum und $T\colon X \supset D(T) \to X$ ein linearer Operator.

a) $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \; T - \lambda\colon D(T) \to X \text{ ist bijektiv, } (T-\lambda)^{-1}\colon X \to X \text{ ist stetig}\}$ heißt die Resolventenmenge von T.

b) $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ heißt das Spektrum von T.

c) $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon T - \lambda \text{ nicht injektiv}\}$ heißt das Punktspektrum von T (die Menge aller Eigenwerte von T).

d) $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon T - \lambda \text{ injektiv, } \overline{R(T-\lambda)} = X,\ (T-\lambda)^{-1}\colon R(T-\lambda) \to X \text{ nicht stetig}\}$ heißt das kontinuierliche Spektrum von T.

e) $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon T - \lambda \text{ injektiv, } \overline{R(T-\lambda)} \neq X\}$ heißt das residuelle Spektrum (oder Restspektrum) von T.

6.12 Bemerkung. a) Falls $\rho(T) \neq \emptyset$, so ist T abgeschlossen.
Denn $(T-\lambda)^{-1}$ ist abgeschlossen nach Lemma 6.6, und damit ist auch $T-\lambda$ abgeschlossen (wie man z.B. mit Lemma 6.2 c) sieht). Somit ist auch T abgeschlossen (wieder mit Lemma 6.2).

b) Nach Definition gilt

$$\mathbb{C} = \rho(T) \dot\cup \sigma(T) = \rho(T) \dot\cup \sigma_p(T) \dot\cup \sigma_c(T) \dot\cup \sigma_r(T),$$

wobei $\dot\cup$ die disjunkte Vereinigung bezeichnet.

c) Nach dem Satz vom stetigen Inversen folgt für abgeschlossene Operatoren T aus der Bijektivität von $(T-\lambda)\colon D(T) \to X$ bereits die Stetigkeit von $(T-\lambda)^{-1}\colon X \to X$. Somit gilt für T abgeschlossen

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, T-\lambda\colon D(T) \to X \text{ bijektiv}\}, \\ \sigma_c(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, T-\lambda\colon D(T) \to X \text{ injektiv}, \overline{R(T-\lambda)} = X,\ R(T-\lambda) \neq X\}. \end{aligned}$$

d) Falls $\dim X < \infty$, so ist $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$ und $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ ist die Menge der Eigenwerte der darstellenden Matrix.

6.13 Beispiele. a) Sei $X = C([0,1])$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := C^1([0,1])$. Da für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion $f(t) := e^{\lambda t}$ in $\ker(T-\lambda)$ liegt, gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}$.

b) Sei $X := C_0([0,1]) := \{f \in C([0,1])\colon f(0) = 0\}$ und $Tf := f'$ für $f \in D(T) := \{f \in X\colon f' \in X\}$.
Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, und seien $f, g \in X$. Betrachte die Gleichung $(T-\lambda)f = g$, d.h. $f' - \lambda f = g$. Versehen mit der Anfangsbedingung $f(0) = 0$ hat diese gewöhnliche Differentialgleichung die eindeutige Lösung

$$f(t) = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} g(s)\, \mathrm{d}s.$$

Es gilt $f'(0) = g(0) + \lambda f(0) = 0$, d.h. $f' \in X$ und damit $f \in D(T)$. Somit ist $T-\lambda\colon D(T) \to X$ bijektiv für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $\rho(T) = \mathbb{C}$.

c) Sei $1 < p < \infty$, $X = \ell^p$, und $T(x_j)_j = (jx_j)_j$ mit $D(T) := \{x \in \ell^p | (jx_j)_j \in \ell^p\}$.
Für $e_n := (\delta_{jn})_j$ gilt $Te_n = ne_n$ und damit $n \in \sigma_p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $\lambda \notin \mathbb{N}$. Für $y \in \ell^p$, $x \in D(T)$ folgt aus $(T-\lambda)x = y$

$$\forall\, j \in \mathbb{N} : jx_j - \lambda x_j = y_j.$$

Damit muss $x_j = \frac{y_j}{j-\lambda}$ gelten, also ist T injektiv.
Wir müssen noch zeigen, dass für alle $y \in \ell^p$ die Folge $x := \left(\frac{y_j}{j-\lambda}\right)$ in $D(T) \subset \ell^p$ liegt. Sei $c := \sup_{j\in\mathbb{N}} |j-\lambda|^{-1} < \infty$. Damit ist

$$\|x\|_{\ell^p}^p = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{y_j}{j-\lambda}\right|^p \leq c^p \, \|y\|_{\ell^p}^p ,$$

also $x \in \ell^p$ und weiterhin gilt

$$\|(jx_j)_j\|_{\ell^p}^p = \sum_{j=1}^{\infty} \left| j \frac{y_j}{j-\lambda} \right|^p \leq (1+c)^p \, \|y\|_{\ell^p}^p \, ,$$

was $x \in D(T)$ liefert.
Es folgt insgesamt $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{N}$.

d) Sei $1 < p < \infty$, $X = \ell^p$ und $T(x_j)_j = (jx_{j+1})_j$ mit $D(T) := \{x \in \ell^p | (jx_j)_j \in \ell^p\}$. Dann gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}$.
Zu $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ist $x_\lambda := \left(\frac{\lambda^{n-1}}{n!}\right)_n \in D(T)$ mit $Tx_\lambda = x_\lambda$ und $T(\delta_{1j})_j = 0$.

e) Sei $X = \ell^2$ und $S = S_R \in L(X)$ der Rechts-Shift aus Beispiel 2.31, d.h. $S(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$. Dann ist $D(S) = \ell^2$, $\ker S = \{0\}$ und $\|e_1 - y\| \geq 1$ für alle $y \in R(S)$, wobei $e_1 := (1, 0, 0, \dots)$. Daher ist $\overline{R(S)} \neq X$ und damit $0 \in \sigma_r(S)$ (es gilt sogar $\{0\} = \sigma(S)$).

Der Vergleich von a) und b) zeigt, dass eine kleine Änderung des Grundraums X das Spektrum eines unbeschränkten Operators erheblich beeinflussen kann.

6.14 Definition. Sei $T\colon X \supset D(T) \to X$ ein linearer Operator.

a) Für $\lambda \in \rho(T)$ heißt $R_\lambda(T) := (T-\lambda)^{-1}$ die Resolvente von T.
Die Abbildung $\rho(T) \to L(X), \lambda \mapsto R_\lambda(T)$, heißt Resolventenabbildung.

b) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ heißt $\ker(T-\lambda)$ der geometrische Eigenraum von T zu λ und

$$\{x \in D(T) \,:\, \exists\, n \in \mathbb{N}\colon (T-\lambda)^n x = 0\}$$

der algebraische Eigenraum von T zu λ.

6.15 Satz. *Sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T\colon X \supset D(T) \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann ist $\rho(T)$ offen und somit $\sigma(T)$ abgeschlossen.*

Beweis. Falls $\rho(T) = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\lambda_0 \in \rho(T)$. Es gilt

$$T - \lambda = T - \lambda_0 - (\lambda - \lambda_0) = (T-\lambda_0)\big[1 - (\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\big].$$

Weil $T-\lambda_0$ ein abgeschlossener invertierbarer Operator ist, ist $(T-\lambda_0)^{-1}$ beschränkt, siehe Bemerkung 6.12. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| \cdot \|(T-\lambda_0)^{-1}\| < 1$ existiert

$$\big[1 - (\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\big]^{-1} \in L(X)$$

nach Satz 2.39. Damit existiert

$$(T-\lambda)^{-1} = \big[1 - (\lambda-\lambda_0)(T-\lambda_0)^{-1}\big]^{-1}(T-\lambda_0)^{-1} \in L(X).$$

Somit gilt

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda - \lambda_0| < \left\|(T-\lambda_0)^{-1}\right\|^{-1}\right\} \subset \rho(T),$$

also ist $\rho(T)$ offen. □

6.16 Satz. *Sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $T \in L(X)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer.*

Beweis. Hier wird nur die Kompaktheit von $\sigma(T)$ bewiesen. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|$ ist $T - \lambda = (-\lambda)(1 - \lambda^{-1}T)$ nach Satz 2.39 in $L(X)$ invertierbar, d.h. $\lambda \in \rho(T)$. Also ist $\sigma(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| \leq \|T\|\}$ und damit kompakt. □

[[Der Beweis von $\rho(T) \neq \emptyset$ für $T \in L(X)$ verwendet die Holomorphie der Resolventenabbildung und den Satz von Liouville aus der Funktionentheorie. Dabei heißt eine Banachraum-wertige Funktion $f \colon U \to X$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, holomorph, falls für alle $z_0 \in U$ der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert, wobei die Konvergenz in der Norm von X zu verstehen ist. Mit Hilfe der Neumannschen Reihe erhält man eine Reihendarstellung von $R_\lambda(T)$ und kann so zeigen, dass die Resolventenabbildung eine holomorphe Abbildung von $\rho(T)$ in den Banachraum $L(X)$ ist. Wäre $\rho(T) = \mathbb{C}$, so würde aus $\|R_\lambda(T)\| \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$ und dem Satz von Liouville folgen, dass diese Abbildung unabhängig von λ ist.]]

Für unbeschränkte Operatoren können wie bereits gesehen sehr wohl die Fälle $\sigma(T) = \mathbb{C}$ und $\sigma(T) = \emptyset$ auftreten können.

c) Adjungierte Operatoren

6.17 Definition. Seien X, Y Hilberträume und $T \colon X \to Y$ ein linearer dicht definierter Operator (d.h. $\overline{D(T)} = X$). Definiere

$$\begin{aligned} D(T^*) :=& \{y \in Y \colon\ x \mapsto \langle Tx, y\rangle \ \text{ist stetiges lineares Funktional auf } D(T)\} \\ =& \{y \in Y \colon\ \exists x^* \in X : \langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, x^*\rangle_X \ \text{für alle } x \in D(T)\}. \end{aligned}$$

Zu $y \in D(T^*)$ ist $x^* \in X$ eindeutig bestimmt. Definiere

$$T^* \colon Y \to X, \quad T^*y := x^*.$$

Der Operator T^* heißt (Hilbertraum-)Adjungierte von T und nach dieser Definition gilt für alle $x \in D(T), y \in D(T^*)$

$$\langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, T^*x\rangle_X .$$

6.18 Bemerkung. a) Die Eindeutigkeit des x^* und damit die Wohldefiniertheit von T^* folgt aus $\overline{D(T)} = X$, denn sind $x_1^*, x_2^* \in X$ mit $\langle x, x_1^* \rangle_X = \langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, x_2^* \rangle_X$ für alle $x \in D(T)$, so gilt $0 = \langle x, x_1^* - x_2^* \rangle_X$ auf einer dichten Teilmenge und damit $x_1^* = x_2^*$

b) Ist T abschliessbar, so ist T^* dicht definiert und $T^{**} = \overline{T}$.

6.19 Lemma. *Seien X, Y Hilberträume, $T \colon X \supset D(T) \to Y$ ein dicht definierter Operator. Dann ist T^* abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(y_n)_n \subset D(T^*)$ mit $y_n \to y \in Y$ und $T^* y_n \to x \in X$. Dann gilt für alle $z \in D(T)$

$$\langle Tz, x \rangle_Y = \lim_{n\to\infty} \langle Tz, y_n \rangle_Y = \lim_{n\to\infty} \langle z, T^* y_n \rangle_X = \langle z, x \rangle_X$$

und nach Defintion ist damit $y \in D(T^*)$ und $T^* y = x$. □

6.20 Satz. *Seien X, Y Hilberträume, und $T \in L(X, Y)$. Dann ist $D(T^*) = Y$, $T^* \in L(Y, X)$ und $\|T^*\| = \|T\|$.*

Beweis. $D(T^*) = Y$ folgt sofort aus der Defintion, denn es gilt für alle $x \in X, y \in Y$

$$|\langle Tx, y \rangle_Y| \le \|T\| \, \|y\|_X \cdot \|x\|_X ,$$

also ist $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$ ein stetiges lineares Funktional auf X. Damit ist T^* als abgeschlossener Operator mit abgeschlossenem Definitionsbereich auch stetig (Satz 6.7). Mit dem Satz von Hahn-Banach (Korollar 4.5) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|T^*\| &= \sup_{\|y\|_Y=1} \|T^* y\|_X = \sup_{\|y\|_Y=1} \sup_{\|x\|_X=1} |\langle x, T^* y \rangle_X| \\
&= \sup_{\|y\|_Y=1} \sup_{\|x\|_X=1} |\langle Tx, y \rangle_Y| = \sup_{\|x\|_X=1} \sup_{\|y\|_Y=1} |\langle Tx, y \rangle_Y| \\
&= \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = \|T\| .
\end{aligned}$$

□

6.21 Definition. a) Seien X, Y Hilberträume und $T \in L(X, Y)$. Dann heißt T unitär, falls $TT^* = \mathrm{id}_Y$ und $T^* T = \mathrm{id}_X$ gilt.

b) Sei X ein Hilbertraum und T ein linearer dicht definierter Operator in X. Dann heißt T

(i) selbstadjungiert, falls $T = T^*$,

(ii) normal, falls $TT^* = T^*T$,

(iii) wesentlich selbstadjungiert, falls T abschließbar ist und $\overline{T}$ selbstadjungiert ist,

(iv) symmetrisch, falls $T \subset T^*$ gilt.

Bei dieser Definition ist zu beachten, dass zwei Operatoren genau dann gleich sind, falls sie gleiche Definitionsbereiche haben und darauf gleiche Werte annehmen.

6.22 Bemerkung. Aus dem Satz von Satz von Hellinger–Toeplitz (Satz 6.8) folgt, dass ein auf dem ganzen Raum definierter selbstadjungierter Operator stetig ist.

6.23 Beispiele. a) Sei $X = Y = \ell^2$ und $S_R \in L(\ell^2)$ der Rechtsshift aus Beispiel 2.31. Dann gilt für alle $x, y \in \ell^2$

$$\langle S_R x, y\rangle = \sum_{n=2}^{\infty} x_{n-1}\overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_{n+1}} = \langle x, S_L y\rangle\,,$$

wobei $S_L \in L(\ell^2)$ den Links-Shift bezeichnet (siehe ebenfalls Beispiel 2.31). Also ist $S_R^* = S_L$. (Beachte $S_R^{-1} \neq S_L$!)

b) Sei $X = Y = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. Dann ist erneut $S_R^* = S_L$ und nun auch $S_R^{-1} = S_L$, also sind S_R und S_L unitär.

c) Sei $X = L^2((0,1))$ und $T : X \to X$ definiert durch $(Tx)(t) = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s$. Mit der Hölder-Ungleichung folgt $\|Tx\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|_2$, also $T \in L(X)$. Durch den Satz von Fubini erhält man

$$\langle Tx, y\rangle = \int_0^1 \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s \cdot \overline{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \int_s^1 \overline{y(t)}\,\mathrm{d}t \cdot x(s)\,\mathrm{d}s,$$

also $(T^*y)(t) = \int_t^1 y(s)\mathrm{d}s$.

d) Sei $X = L^2(\mathbb{R})$, $D(T) := \{x \in L^2(\mathbb{R}) | \int_{-\infty}^{\infty} s^2|x(s)|^2\mathrm{d}s < \infty\}$ und $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definiert durch $(Tx)(t) = tx(t)$. Dann gilt für alle $x, y \in D(T)$

$$\langle Tx, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} sx(s)\overline{y(s)}\,\mathrm{d}s = \langle x, Ty\rangle\,,$$

also ist T symmetrisch. Noch zu zeigen ist $D(T^*) \subset D(T)$. Sei $y \in D(T^*)$. Wir beweisen wir zunächst $(T^*y)(t) = ty(t)$. Nach der Definition von T^* ist für alle $x \in D(T)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s)(T^*y)(s)\,\mathrm{d}s = \langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} sx(s)y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Wegen $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset D(T)$ folgt also für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)(T^*y)(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)sy(s)\,\mathrm{d}s$$

und dies liefert $(T^*y)(t) = ty(t)$ fast überall. Aus $T^*y \in L^2(\mathbb{R})$ erhalten wir nun $\|T^*y\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2|x(s)|^2\mathrm{d}s < \infty$, was $y \in D(T)$ bedeutet. Damit ist T selbstadjungiert.

6.24 Satz. *Seien X ein Hilbertraum und $T\colon X \supset D(T) \to Y$ ein dicht definierter Operator. Dann gilt*

a) $R(T)^\perp = \overline{R(T)}^\perp = \ker T^*$.

b) $\overline{R(T)} = (\ker T^*)^\perp$.

c) $R(T^*)^\perp = \ker T$ *und* $\overline{R(T^*)} = (\ker T)^\perp$, *falls T zusätzlich abgeschlossen ist.*

Beweis. a) Es gilt $y \in R(T)^\perp$ genau dann, wenn für alle $x \in D(T)$ gilt $\langle Tx, y\rangle = 0$. Dies ist äquivalent zu $y \in D(T^*)$ und $T^*y = 0$, also zu $y \in \ker T^*$.

b) Nach a) gilt $\overline{R(T)} = (R(T))^{\perp\perp} = (\ker T^*)^\perp$.

c) Folgt direkt aus a), b) und Lemma 6.19 und Bemerkung 6.18. □

6.25 Lemma. *Seien X ein Hilbertraum und S, T dicht definierte, lineare Operatoren auf X.*

(i) Für $S, T \in L(X)$ gilt $(ST)^* = T^*S^*$ und, falls T invertierbar ist, $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

(ii) Ist $S \subset T$, dann gilt $T^* \subset S^*$.

(iii) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $(T - \lambda)^* = T^* - \overline{\lambda}$.

Der Begriff der Adjungierten kann auf Banachräume verallgemeinert werden, hierbei handelt es sich dann um eine Abbildung zwischen den Dualräumen.

6.26 Definition (Banachraum-Adjungierte unbeschränkter Operatoren)**.**
Seien X, Y Banachräume und $T\colon X \supset D(T) \to Y$ ein linearer dicht definierter Operator. Definiere

$$D(T') := \{f \in Y'\colon\ \exists\, f_1 \in X' \text{ mit } f(Tx) = f_1(x) \quad (x \in D(T))\}.$$

Zu $f \in D(T')$ ist $f_1 \in X'$ eindeutig bestimmt. Definiere

$$T'f := f_1.$$

$T'\colon Y' \to X'$ mit Definitionsbereich $D(T')$ heißt (Banachraum-)Adjungierte von T.

6.27 Bemerkung. a) $T'f$ ist eindeutig bestimmt, da $\overline{D(T)} = X$.

b) Der Operator T' ist abgeschlossen.

c) Die Abbildung aus dem Satz von Riesz

$$i_X : X \to X', \; x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$$

ist isometrisch aber konjugiert linear. Damit hängen Hilbertraum- und Banachraum-adjungierte über $T^* = i_X^{-1} \circ T' \circ i_Y$ zusammen.

[[zu a) Seien $f_1, f_2 \in X'$ mit $f_1(x) = f(Tx) = f_2(x)$ für alle $x \in D(T)$. Da $\overline{D(T)} = X$ und f_1, f_2 stetig sind, folgt $f_1 = f_2$ auf ganz X. Aus der Eindeutigkeit von $T'f$ folgt dann auch die Linearität von T'.

zu b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T')$ mit Konvergenzen $f_n \longrightarrow f$ in Y' und $T'f_n \longrightarrow g$ in X'. Dann gilt für $x \in D(T)$:

$$f(Tx) = \lim_{n\to\infty} f_n(Tx) = \lim_{n\to\infty} (T'f_n)(x) = g(x).$$

Damit haben wir $f \in D(T')$ und $(f, g) \in G(T')$.]]

6.28 Satz (Banachraum-Adjungierte beschränkter Operatoren)**.** *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Dann gilt $T' \in L(Y', X')$ und $\|T\| = \|T'\|$.*

[[Wegen $f_1 = f \circ T$ ist die Linearität und die Stetigkeit von f_1 klar. Wegen

$$|f_1(x)| = |f(Tx)| \le \|f\|_{Y'} \cdot \|T\| \cdot \|x\|, \qquad x \in X,$$

ist $\|f_1\|_{X'} \le \|T\| \cdot \|f\|_{Y'}$, d.h. $\|T'\| \le \|T\|$. Der Operator T' ist linear wegen

$$T'(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(Tx) = \alpha f(Tx) + \beta g(Tx).$$

Ebenso ist die Abbildung $T \mapsto T'$ linear.

Zu zeigen ist noch, dass $\|T\| \le \|T'\|$ gilt. Nach Lemma 4.5 a) existiert zu $x \in X$ ein $f_x \in Y'$ mit $\|f_x\|_{Y'} = 1$ und $f_x(Tx) = \|Tx\|_Y$. Damit ist

$$\|Tx\|_Y = |f_x(Tx)| = |(T'f_x)(x)| \le \|T'\| \cdot \|x\|_X .$$

]]

Wenn wir für die Anwendung eines Funktionals $\lambda \in X'$ auf ein Element x eines Banachraums X die an den Hilbertraum-Fall angelehnte alternative Schreibweise $\langle x, \lambda \rangle_{X\times X'} := \lambda(x)$ vereinbaren, dann wird die Identität $f(Tx) = f_1(x)$ zu

$$\langle Tx, f \rangle_{Y\times Y'} = \langle x, T'f \rangle_{X\times X'} .$$

Man spricht auch von der dualen Paarung.

6.29 Bemerkung. a) Für $T \in L(X, Y)$ ist $T'' \in L(X'', Y'')$ und $T''|_X = T$. In reflexiven Räumen gilt dann also $T'' = T$.

b) Falls $T \in L(X, Y)$ und $S \in L(Y, Z)$, so ist $(ST)' = T'S'$.

c) Falls $T \in L(X, Y)$ invertierbar ist, so gilt $(T^{-1})' = (T')^{-1}$.

[[zu a) es gilt $(T''\widetilde{x})(f) = \widetilde{x}(T'f) = (T'f)(x) = f(Tx) = \widetilde{Tx}(f)$. In der alternativen Schreibweise lautet diese Rechnung

$$\langle f, T''\widetilde{x}\rangle_{Y'\times Y''} = \langle T'f, \widetilde{x}\rangle_{X'\times X''} = \langle x, T'f\rangle_{X\times X'} = \langle Tx, f\rangle_{Y\times Y'} = \left\langle f, \widetilde{Tx}\right\rangle_{Y'\times Y''},$$

also tatsächlich $T''\widetilde{x} = \widetilde{Tx}$ für jedes $x \in X$, wie behauptet.

zu b) Denn $((ST)'f)(x) = f(STx) = (S'f)(Tx) = [T'(S'f)](x)$, beziehungsweise

$$\langle x, (ST)'f\rangle_{X\times X'} = \langle STx, f\rangle_{Z\times Z'} = \langle Tx, S'f\rangle_{Y\times Y'} = \langle x, T'S'f\rangle_{X\times X'},$$

also $(ST)'f = T'S'f$ für jedes $f \in Z'$.

zu c) Dies gilt wegen $(T^{-1})'T' = (TT^{-1})' = \mathrm{id}_Y' = \mathrm{id}_{Y'}$ und $(T'(T^{-1}))' = (T^{-1}T)' = \mathrm{id}_X' = \mathrm{id}_{X'}$.]]

7. Distributionen und Sobolevräume

7.1 Beispiel. Seien $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, $D(T) = C^2(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $T : X \supset D(T) \to X$ definiert durch $Tu := \triangle u$. T ist dicht definiert, abschliessbar und für $u, v \in D(T)$ gilt

$$\langle Tu, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\triangle u(x))v(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u(x))(\nabla v(x))\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\triangle v(x)\mathrm{d}x = \langle u, Tv\rangle\,,$$

also ist T symmetrisch. Da aber $(D(T), \|\cdot\|_{L^2} + \|T\cdot\|_{L^2})$ kein Banachraum ist, ist T nicht abgeschlossen und somit auch nicht selbstadjungiert. Zur Bestimmung von $D(\overline{T}) = D(T^*)$ benötigen wir die sogenannten Sobolevräume.

Wir werden von hier an die praktische Multiindex-Schreibweise verwenden.

7.2 Definition (Multiindex-Schreibweise)**.** Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} x\xi &:= \sum_{j=1}^n x_j \xi_j, \\ |x| &:= \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{1/2}, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}, \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Für $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f(x).$$

a) Distributionen

7.3 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen.

a) Für eine Funktion $\varphi\colon G \to \mathbb{C}$ heißt $\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{x \in G\colon \varphi(x) \neq 0\}}$ der Träger von φ.

b) Wir schreiben $K \Subset G$, falls K eine kompakte Teilmenge von G ist.
Die Menge

$$C_c^\infty(G) := \{\varphi \in C^\infty(G)\colon \operatorname{supp}\varphi \Subset G\}$$

heißt die Menge der Testfunktionen auf G (oder die Menge der C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger). Manchmal sieht man auch die Bezeichnung $C_0^\infty(G) := C_c^\infty(G)$.

c) Sei nun $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(G)$, dann definieren wir die Konvergenz wie folgt:

$$\varphi_\ell \longrightarrow_{\mathscr{D}} 0 :\Longleftrightarrow \begin{cases} (i) \;\; \exists K \Subset G\colon \forall \ell \in \mathbb{N}\colon \operatorname{supp} \varphi_\ell \subset K \\ (ii) \; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n\colon \sup\limits_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi_\ell(x)| \longrightarrow 0 \text{ für } \ell \longrightarrow \infty \end{cases}$$

Versieht man den Raum der Testfunktionen mit der zu dieser Konvergenz gehörenden Topologie, so schreibt man $\mathscr{D}(G)$. Dies bedeutet, dass $C_c^\infty(G)$ mit der feinsten Topologie ausgestattet wird, für die folgendes gilt: eine Folge $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(G)$ konvergiert genau dann gegen Null, wenn es für jede Nullumgebung U ein $N_0(U)$ gibt, sodass $\varphi_\ell \in U$ für jedes $\ell \geq N_0(U)$.

7.4 Bemerkung. a) Eine Topologie für $\mathscr{D}(G)$, zu welcher obiger Konvergenzbegriff gehört, lässt sich als lokalkonvexe Topologie definieren. Die Definition der zur lokalkonvexen Topologie zugehörigen Familie von Halbnormen ist jedoch relativ kompliziert, was an Bedingung (i) in obiger Definition liegt (vgl. Übungsblatt 2, Aufgabe H1).

b) Die Testfunktionen liegen dicht in $L^p(G)$ für $1 \leq p < \infty$ (aber nicht im $L^\infty(G)$).

c) Man kann sich Testfunktionen mit gewissen Eigenschaften definieren, wie folgende Aussage zeigt: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $U \supset K$ offen. Dann existiert ein $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ und $\varphi = 1$ auf K.

Da die Menge der Testfunktionen offensichtlich einen $\mathbb{C}$-Vektorraum bildet, sind wir in der Lage, die Menge der linearen Funktionale, d.h. der linearen Abbildungen $T\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}$, zu betrachten. Eine stetige lineare Abbildung heißt eine Distribution auf G. Dabei entspricht die obige Topologie auf $\mathscr{D}(G)$ der Stetigkeit in folgender Definition.

7.5 Definition. $\mathscr{D}'(G)$ bezeichnet die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathscr{D}(G)$ nach $\mathbb{C}$, welche stetig sind. Es gilt:

$$f \in \mathscr{D}'(G) :\Longleftrightarrow \begin{cases} \;(i) \;\; f\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C} \text{ linear}, \\ (ii) \;\; (\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(G), \varphi_\ell \longrightarrow_{\mathscr{D}} 0 \Rightarrow f(\varphi_\ell) \longrightarrow 0 \quad (\ell \longrightarrow \infty). \end{cases}$$

$\mathscr{D}'(G)$ heißt Menge der Distributionen von G.

7.6 Beispiel (reguläre Distributionen)**.** Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(G) := \{u\colon G \to \mathbb{C}\colon \forall K \Subset G\colon u|_K \in L^1(K)\}$. Dann definiert

$$[u]\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi \mapsto [u](\varphi) := \int_G u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Distribution, denn

(i) $[u]$ ist offensichtlich linear.

(ii) Sei $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{D}(G)$ mit $\varphi_\ell \longrightarrow_{\mathscr{D}} 0$ für $\ell \longrightarrow \infty$, dann folgt:

$$|[u]\varphi_\ell| \leq \int_G |u(x)\varphi_\ell(x)|\,\mathrm{d}x = \int_K |u(x)\varphi_\ell(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^1(K)} \cdot \sup_{x\in K} |\varphi_\ell(x)| \longrightarrow 0$$

für $\ell \longrightarrow \infty$ und ein passendes $K \Subset G$. In diesem Zusammenhang spricht man auch davon, dass $[u]$ eine von u erzeugte Distribution ist. Eine von einer L^1_{loc}-Funktion erzeugte Distribution heißt *reguläre* Distribution.

7.7 Beispiel (Dirac-Distribution)**.** Ein Beispiel für eine nicht-reguläre Distribution ist die sog. Dirac-Distribution (Diracsche „Deltafunktion"). Sei $x_0 \in G$ fest.

$$\delta_{x_0}\colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi \mapsto \delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0)$$

(i) Linearität ist klar.

(ii) Sei $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{D}(G)$ mit $\varphi_\ell \longrightarrow_{\mathscr{D}} 0$ für $\ell \longrightarrow \infty$, dann folgt:

$$|\delta_{x_0}(\varphi_\ell)| = |\varphi_\ell(x_0)| \leq \sup_{x\in K} |\varphi_\ell(x)| \longrightarrow 0$$

für $\ell \longrightarrow \infty$ und ein $K \Subset G$.

(iii) δ_{x_0} ist nicht regulär
Beweis: Sei angenommen, dass ein $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$ existiert, so dass für alle $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ gilt

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = \int_G u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Es gibt nun sicher ein $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{B(x_0,\varepsilon)} \subset G$ und $\int_{B(x_0,\varepsilon)} |u(x)|\,\mathrm{d}x < 1$ gilt. Weiter finden wir eine Testfunktion φ, für die einerseits $\operatorname{supp}\varphi \subset B(x_0,\varepsilon)$ und andererseits $\forall x \in G\colon \varphi(x_0) \geq \varphi(x) \geq 0$ sowie $\varphi(x_0) > 0$ gilt. Damit ergibt sich dann aber

$$\begin{aligned}\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = |\varphi(x_0)| &= \left|\int_G u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \varphi(x_0)\int_{B(x_0,\varepsilon)} |u(x)|\,\mathrm{d}x \\ &< \varphi(x_0),\end{aligned}$$

was im Widerspruch zur Annahme steht.

Wir haben das Ziel, den klassischen Ableitungsbegriff aufzulockern oder zu verallgemeinern. Das bedeutet aber, dass sich dieser Ableitungsbegriff bei klassisch differenzierbaren Funktionen nicht von dem klassischen Begriff unterscheiden sollte. Es sei

$f \in C^k(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $[f]$ die von f erzeugte reguläre Distribution. Offenbar gilt dann für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le k$

$$[\partial^\alpha f](\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)\varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f \partial^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} [f](\partial^\alpha \varphi).$$

Dies motiviert die folgende

7.8 Definition. Sei $f \in \mathscr{D}'(G)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

i) Definiere

$$\partial^\alpha f \colon \mathscr{D}(G) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha \varphi).$$

$\partial^\alpha f$ heißt Ableitung der Distribution oder distributionelle Ableitung vom Grad $|\alpha|$.

ii) Ist $\partial^\alpha f$ eine reguläre Distribution, d.h. es existiert ein $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$ mit $\partial^\alpha f = [v]$, so heißt v die schwache Ableitung der Ordnung α von f. Es gilt dann

$$[\partial^\alpha f](\varphi) = \int_G v\varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_G f \partial^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(G)$.

Es ist klar, dass $\partial^\alpha f \in \mathscr{D}'(G)$ ist, da mit $\varphi_\ell \longrightarrow_{\mathscr{D}} 0$ auch $\partial^\alpha \varphi_\ell \longrightarrow_{\mathscr{D}} 0$ gilt. Also ist jede Distribution beliebig oft differenzierbar.

7.9 Beispiele. a) Sei $x_0 \in G := \mathbb{R}$ und

$$h_{x_0}(x) := \begin{cases} 1 & : x \ge x_0, \\ 0 & : x < x_0 \end{cases}$$

für $x \in G$, dann gilt $[h_{x_0}]' = \delta_{x_0}$.
Ist $\varphi \in C_c^\infty(G)$, so folgt:

$$[h_{x_0}]'(\varphi) = -\int_a^b h_{x_0}(x)\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = -\int_{x_0}^b \varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \varphi(x_0) = \delta_{x_0}(\varphi).$$

b) Sei $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathscr{D}((-1,1))$

$$\begin{aligned}[\partial_x g](\varphi) &= \int_{-1}^1 g(x)\varphi'(x) \ \mathrm{d}x = \int_{-1}^0 g(x)\varphi'(x) \ \mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\varphi'(x) \ \mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^0 \varphi(x) \ \mathrm{d}x + \int_0^1 \varphi(x) \ \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 h(x)\varphi(x) \ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

mit $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x \in (-1,0). \end{cases}$

Also ist h die schwache Ableitung von g. a) zeigt, dass $[g]'' = 2\delta_0$

c) Allgemeiner gilt für

$$g_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n |x|^{n-2}}, & n \neq 2, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|), & n = 2, \end{cases}$$

wobei ω_n die Oberfläche der Einheitssphäre bezeichnet ($\omega_1 = 2$), dass $-\triangle[g_n] = \delta$. g_n ist damit eine Grundlösung des $-\triangle$-Operators, d.h., für hinreichend glattes f (z.B. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$) wird die Gleichung

$$-\triangle u(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

durch $u := g_n * f$ im distribtionellen Sinne gelöst. $-\triangle u$ ist dann eine reguläre Distribution.

b) Sobolevräume: Definition und erste Eigenschaften

Im folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

Für eine Distribution $u \in \mathscr{D}'(G)$ und einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ schreiben wir

$$\partial^\alpha u \in L^p(G),$$

falls eine Funktion $f \in L^p(G)$ existiert mit $\partial^\alpha u = [f]$ in $\mathscr{D}'(G)$. Hier ist $[f]$ wieder die zu f gehörige reguläre Distribution.

7.10 Definition (Sobolevräume)**.** a) Zu $s \in \mathbb{N}_0$ definiere

$$W^{s,p}(G) := \{u \in \mathscr{D}'(G)\colon\ \partial^\alpha u \in L^p(G) \text{ für } 0 \leq |\alpha| \leq s\}.$$

Als Norm in $W^{s,p}(G)$ definiert man für $1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_{W^{s,p}(G)} := \|u\|_{s,p,G} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(G)} \right)^{1/p}$$

und für $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{s,\infty}(G)} := \|u\|_{s,\infty,G} := \sup_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(G)}.$$

b) Zu $s \in \mathbb{N}_0$ definiere $H^{s,p}(G)$ als die Vervollständigung von $\{u \in C^s(G)\colon\ \|u\|_{s,p,G} < \infty\}$. Im Falle $p = 2$ schreiben wir auch $H^s(G)$ statt $H^{s,2}(G)$.

c) Zu $s \in \mathbb{N}_0$ definiere $H_0^{s,p}(G)$ als den Abschluss von $C_c^\infty(G)$ im Raum $H^{s,p}(G)$.

7.11 Bemerkung. a) In der Definition von $W^{s,p}(G)$ wird insbesondere $u \in L^p(G)$ gefordert. Daher kann man auch schreiben

$$W^{s,p}(G) = \{u \in L^p(G) \colon \partial^\alpha u \in L^p(G) \text{ für } 0 \leq |\alpha| \leq s\}.$$

b) Im Fall von $H^{s,p}(G)$ ist wegen $\|\cdot\|_{L^p(G)} \leq \|\cdot\|_{s,p,G}$ offensichtlich $H^{s,p}(G) \subset L^p(G)$, d.h. ein Element der abstrakten Vervollständigung kann mit einer Funktion in $L^p(G)$ identifiziert werden.

c) Im Fall $p = 2$ erhält man das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^s(G)} := \sum_{|\alpha| \leq s} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(G)}.$$

7.12 Beispiel. Sei $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$. Dann zeigt Beispiel 7.9 $g \in W^{1,p}((-1,1))$ für $1 \leq p \leq \infty$. Es gilt weiterhin $g \in H^{1,p}((-1,1))$ für $1 \leq p < \infty$, aber $g \notin H^{1,\infty}((-1,1))$.

7.13 Lemma. *Die Räume $H^{s,p}(G)$ und $W^{s,p}(G)$ sind Banachräume.*

Beweis. Der Raum $H^{s,p}(G)$ ist als Vervollständigung eines normierten Raumes konstruktionsgemäß ein Banachraum. Sei also $(u_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset W^{s,p}(G)$ eine Cauchyfolge. Nach Definition der Norm ist für $0 \leq |\alpha| \leq s$ auch $(\partial^\alpha u_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset L^p(G)$ eine Cauchyfolge, daher existiert ein $u_\alpha \in L^p(G)$ mit $\partial^\alpha u_\ell \longrightarrow u_\alpha$ in $L^p(G)$. Setze $u := u_{(0,\dots,0)}$.

Für die zugehörigen regulären Distributionen gilt mit der Hölder-Ungleichung für alle $\varphi \in \mathscr{D}(G)$

$$\begin{aligned} |[\partial^\alpha u_\ell](\varphi) - [u_\alpha](\varphi)| &= \left| \int_G (\partial^\alpha u_\ell - u_\alpha)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leq \|\partial^\alpha u_\ell - u_\alpha\|_{L^p(G)} \cdot \|\varphi\|_{L^q(G)} \longrightarrow 0 \quad (\ell \longrightarrow \infty), \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. Also gilt

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha [u])(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}[u](\partial^\alpha \varphi) = \lim_{\ell \to \infty} (-1)^{|\alpha|}[u_\ell](\partial^\alpha \varphi) = \lim_{\ell \to \infty} [\partial^\alpha u_\ell](\varphi) \\ &= \lim_{\ell \to \infty} [\partial^\alpha u_\ell](\varphi) = [u_\alpha](\varphi) \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathscr{D}(G)$. Somit ist $\partial^\alpha u = u_\alpha$ in $\mathscr{D}'(G)$, d.h. $u \in W^{s,p}(G)$.

Es folgt

$$\|u_\ell - u\|_{s,p,G}^p \leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u_\ell - \partial^\alpha u\|_{L^p(G)}^p \longrightarrow 0 \quad (\ell \longrightarrow \infty),$$

also haben wir $u_\ell \longrightarrow u$ in $W^{s,p}(G)$, und $W^{s,p}(G)$ ist ein Banachraum. □

7.14 Lemma. *Für $1 \leq p \leq \infty$ und $s \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$H^{s,p}(G) \subset W^{s,p}(G).$$

Beweis. Sei $u \in H^{s,p}(G)$ und $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C^s(G)$ eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_{s,p,G}$, welche gegen u konvergiert. Nach Definition der $\|\cdot\|_{s,p,G}$-Norm gilt wieder $\partial^\alpha u_\ell \longrightarrow u_\alpha$ mit $u_\alpha \in L^p(G)$. Wie im letzten Beweis sieht man $\partial^\alpha u = u_\alpha$ in $\mathscr{D}'(G)$ und damit $u \in W^{s,p}(G)$. □

Tatsächlich sind die beiden Definitionen von Sobolevräumen für allgemeine Gebiete äquivalent. Der folgende Satz wurde erst 1964 bewiesen (während die ersten Definitionen bereits 1938 formuliert wurden).

7.15 Satz. *Für $1 \leq p < \infty$ und $s \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$W^{s,p}(G) = H^{s,p}(G).$$

[[Wir müssen nur noch $W^{s,p}(G) \subset H^{s,p}(G)$ zeigen, d.h. zu zeigen ist, dass $C^m(G) \cap H^{s,p}(G)$ dicht in $W^{s,p}(G)$ liegt. Unter Verwendung des Friedrichsschen Glättungsoperators kann man sogar zeigen, dass

$$\{\varphi \in C^\infty(G)\colon\ \|\varphi\|_{s,p,G} < \infty\}$$

dicht in $W^{s,p}(G)$ liegt. Dies geschieht über eine kompakte Ausschöpfung von G und eine zugehörige Partition der Eins. Die Details sind z.B. im Buch von Adams [1] beschrieben.]]

Die Räume $H^{s,p}(G)$ und $W^{s,p}(G)$ sind typische Sobolevräume, benannt nach Sergei L'vovich Sobolev (6.10.1908 – 3.1.1980).

Wir gehen jetzt noch kurz auf den Raum $H_0^{s,p}(G)$ ein, wobei wir uns auf $p = 2$ beschränken. Im folgenden bezeichne

$$\langle u, v\rangle_2 := \int_G u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x$$

das L^2-Skalarprodukt. Für vektorwertige Abbildungen $F, G \in L^2(G)^n := L^2(G;\mathbb{C}^n)$ wird ebenfalls die Bezeichnung

$$\langle F, G\rangle_2 := \int_G \sum_{i=1}^n F_i(x)\overline{G_i(x)}\,\mathrm{d}x$$

verwendet. Für $F \in C^1(G)^n$ ist $\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_i$ die Divergenz.

7.16 Definition. Definiere

$$W_0^{1,2}(G) := \big\{u \in H^{1,2}(G)\colon \forall F \in (L^2(G))^n,\ \operatorname{div} F \in L^2(G)\colon \\ \langle u, \operatorname{div} F\rangle_2 = -\langle \nabla u, F\rangle_2\big\}.$$

Der Raum $W_0^{1,2}(G)$ verallgemeinert die Bedingung $u|_{\partial G} = 0$. Ist nämlich ∂G glatt und $u \in W_0^{1,2}(G) \cap C^1(G)$, so können wir zunächst

$$0 = \int_G u \,\overline{\operatorname{div} F}\,\mathrm{d}x + \int_G \nabla u\,\overline{F}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial G} u \left\langle \vec{n}, \overline{F}\,\mathrm{d}S(x) \right\rangle \quad (F \in C^1(\overline{G}))$$

und somit $u|_{\partial G} = 0$ schließen.

7.17 Satz. *Es gilt $H_0^{1,2}(G) = W_0^{1,2}(G)$.*

[[*Beweis:*

Schritt 1: $H_0^{1,2}(G) \subset W_0^{1,2}(G)$:

Zu $u \in H_0^{1,2}(G)$ existiert nach Definition eine Folge $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(G)$ mit $u_\ell \longrightarrow u$ bezüglich der $H^{1,2}$-Norm. Es ergibt sich für alle $F \in (L^2(G))^n$ mit $\operatorname{div} F \in L^2(G)$:

$$\langle u, \operatorname{div} F\rangle_2 = \lim_{\ell\to\infty} \langle u_\ell, \operatorname{div} F\rangle_2 = -\lim_{\ell\to\infty} \langle \nabla u_\ell, F\rangle_2 = -\langle \nabla u, F\rangle_2\,,$$

d.h. es gilt $u \in W_0^{1,2}(G)$. Hier wurde die Hölder-Ungleichung für $p = 2$ in der Form

$$|\langle (u - u_\ell), \operatorname{div} F\rangle_2| \le \|u - u_\ell\|_{L^2} \cdot \|\operatorname{div} F\|_{L^2}$$

verwendet.

Schritt 2: $W_0^{1,2}(G) \subset H_0^{1,2}(G)$:

Zunächst ist offensichtlich, dass $W_0^{1,2}(G)$ ein Hilbertraum mit dem $H^{1,2}$-Skalarprodukt ist. Weiter ist nun $H_0^{1,2}(G)$ ein abgeschlossener Unterraum. Wir werden zeigen, dass das orthogonale Komplement

$$\left(H_0^{1,2}(G)\right)^\perp := \{u \in W_0^{1,2}(G)\colon\ \langle u, \varphi\rangle_{W^{1,2}(G)} = 0 \quad (\varphi \in H_0^{1,2}(G))\}$$

nur die Nullfunktion enthält. Da der Raum $W_0^{1,2}(G)$ in der Form $W_0^{1,2}(G) = H_0^{1,2}(G) \oplus \left(H_0^{1,2}(G)\right)^\perp$ direkt zerlegt werden kann (hierfür benutzen wir die Abgeschlossenheit von $H_0^{1,2}(G)$ als Unterraum von $W_0^{1,2}(G)$), folgt daraus die Behauptung.

Sei also $u \in \left(H_0^{1,2}(G)\right)^\perp$. Offenbar gilt dann für alle $\varphi \in \mathscr{D}(G) \subset H_0^{1,2}(G)$

$$\langle u, \varphi\rangle_{W^{1,2}(G)} = \langle u, \varphi\rangle_2 + \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle_2 = 0.$$

Damit gilt

$$(\triangle[u])(\varphi) = \operatorname{div}[\nabla u](\varphi) = -\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle = [u](\varphi) \quad (\varphi \in \mathscr{D}(G)),$$

d.h. $\triangle u = u \in L^2(G)$. Daraus folgt nun wiederum

$$0 \le \|u\|_2^2 = \langle u, u\rangle_2 = \langle u, \triangle u\rangle_2 = -\langle \nabla u, \nabla u\rangle_2 = -\|\nabla u\|^2 \le 0$$

also $u = 0$, und das war zu zeigen.]]

7.18 Beispiele (schwache Lösbarkeit des Dirichlet-Problems)**.** a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und f gegeben. Wir suchen eine Lösung u von

$$-\triangle u(x) + u(x) = 0 \quad (x \in G)$$

$$u|_{\partial G} = f.$$

Hierbei wollen wir die Existenz einer Lösung im distrubutionellen Sinne und nicht im Raum der klassisch differenzierbaren Funktionen herleiten.
Wir betrachten zu $f \in H^1(G)$ das Problem

$$\begin{aligned} (-\triangle + 1)[u] &= 0 \\ u - f &\in H_0^1(G) \end{aligned}$$

und zeigen, dass genau eine Lösung $u \in H^1(G)$ existiert.
Es gilt $(-\triangle + 1)[u] = 0$ genau dann, wenn für alle $\varphi \in C_c^\infty(G)$

$$0 = (-\triangle + 1)[u](\varphi) = [u]((-\triangle + 1)\varphi) = \int_G u(x)(-\triangle + 1)\varphi(x) \, \mathrm{d}x$$

Wegen $u \in H^1(G)$ ist dies äquivalent zu

$$0 = \int_G (\nabla u(x))(\nabla \varphi(x)) \, \mathrm{d}x + \int_G u(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x = \langle u, \varphi \rangle_{H^1}$$

und da $C_c^\infty(G)$ dicht in $H_0^1(G)$ ist, gilt

$$(-\triangle + 1)[u] = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle u, \varphi \rangle_{H^1} = 0 \text{ für alle } \varphi \in H_0^1(G).$$

Nach dem Projektionssatz ist $H^1(G) = H_0^1(G) \oplus (H_0^1(G))^\perp$ und damit $f = f_0 + f_\perp$ mit $f_0 \in H_0^1(G), f_\perp \in (H_0^1(G))^\perp$. Setze $u = f_\perp$. Dann ist $u - f \in H_0^1(G)$ und $\langle u, \varphi \rangle_{H^1} = 0$ für alle $\varphi \in H_0^1(G)$, also ist u die gesuchte Lösung.
Ist $v \in H^1$ eine weiter Lösung, so ist $v \in (H_0^1(G))^\perp$ und damit ist auch $w := u - v \in (H_0^1(G))^\perp$. Andererseits gilt $u - v = (u - f) - (v - f) \in H_0^1(G)$, also $w = 0$.

b) Mit dem Satz von Riesz erhält man zu jedem $g \in L^2(G)$ die Existenz einer eindeutigen distributionellen Lösung $u \in H_0^1(G)$ von

$$\begin{aligned} -\triangle u(x) + u(x) &= g(x) \quad (x \in G) \\ u|_{\partial G} &= 0. \end{aligned}$$

c) Durch das Lemma von Lax-&-Milgram lässt sich die Aussage auf

$$\begin{aligned} -Lu(x) + u(x) &= g(x) \quad (x \in G) \\ u|_{\partial G} &= 0 \end{aligned}$$

erweitern, wobei $L = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j$ mit $a_{ij} \in L^\infty(G)$ und $\sum_{1 \le i,j \le n} \xi_i a_{ij}(x)\xi_j \ge p|\xi|^2$ für ein $p > 0$ und alle $x \in G, \xi \in \mathbb{R}^n$.

c) Wichtige Sätze aus der Theorie der Sobolevräume

Viele Resultate der Sobolevraum-Theorie erfordern eine gewisse Regularität des betrachteten Gebiets.

7.19 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$.

(i) G erfüllt die Kegeleigenschaft, wenn es einen endlichen Kegel V gibt, so dass jedes $x \in G$ die Spitze eines zu V kongruenten Kegels $V_x \subset G$ ist.

(ii) G erfüllt die Segmenteigenschaft, wenn es für jedes $x \in \partial G$ eine Umgebung $U_x \subset \mathbb{R}^n$ von x und ein $y_x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt, so dass gilt

$$\forall z \in \overline{G} \cap U_x,\ \forall t \in (0,1):\ z + ty_x \in G.$$

Die Einbettung $W^{s,p}(G) \hookrightarrow X$ mit einem normierten Raum X bedeutet, dass es für jedes $u \in W^{s,p}(G)$ einen Repräsentanten in X gibt und dessen Norm in X gegen die $W^{s,p}$-Norm abgeschätzt werden kann.

7.20 Satz (Sobolevscher Einbettungssatz). *Seien $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le p < \infty$, und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit gewöhnlicher Kegeleigenschaft.*

i) Falls $s > \frac{n}{p} + k$, dann gilt

$$W^{s,p}(G) \hookrightarrow C_b^k(G).$$

Insbesondere existiert ein $C > 0$, so dass für alle $u \in W^{s,p}(G)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C_b^k G)} \le C\,\|u\|_{W^{s,p}(G)}$$

gilt.

ii) Falls $s = \frac{n}{p} + k$, dann gilt für $q \in [p, \infty)$

$$W^{s,p}(G) \hookrightarrow W^{k,q}(G).$$

iii) Falls $s < \frac{n}{p} + k$, dann gilt für $q \in [p, \frac{np}{n-sp})$

$$W^{s,p}(G) \hookrightarrow W^{k,q}(G).$$

Beweis. Wir behandeln hier nur i) für $G = (a,b) \subset \mathbb{R}^1$, $k = 0$ und $s = 1$.

Sei zunächst $v \in C^1(G) \cap W^{1,p}(G)$ beliebig. Für $x, y \in G$ gilt

$$v(x) = v(y) + \int_y^x v'(s)\ \mathrm{d}s.$$

Mit der Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}|v(x)|^p &\le 2^{p-1}|v(y)|^p + 2^{p-1}\left|\int_x^y |v'(s)|\,\mathrm{d}s\right|^p \\ &\le 2^{p-1}|v(y)|^p + 2^{p-1}\left(\int_a^b |v'(s)|\,\mathrm{d}s\right)^p \\ &\le 2^{p-1}|v(y)|^p + 2^{p-1}(b-a)^p\int_a^b |v(s)|^p\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Integration über die y-Variable liefert nun

$$\begin{aligned}(b-a)|v(x)|^p &\le 2^{p-1}\int_a^b |v(y)|^p\,\mathrm{d}y + 2^{p-1}(b-a)^{p+1}\int_a^b |v'(s)|^p\,\mathrm{d}s \\ &= 2^{p-1}\,\|v\|_p^p + 2^{p-1}(b-a)^{p+1}\,\|v'\|_p^p\end{aligned}$$

und damit

$$\|v\|_\infty \le 2^{p-1}\max\{(b-a)^{-1},(b-a)^p\}\,\|v\|_{1,p}^p\,. \tag{7-1}$$

Zu $u \in W^{1,p}(G) = H^{1,p}(G)$ existiert eine Folge $(u_n)_n \subset C^1(G)\cap W^{1,p}(G)$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,p}(G)$. Einsetzen von $u_n - u_m$ in (7-1) führt zu

$$\|u_n - u_m\|_\infty \le 2^{p-1}\max\{(b-a)^{-1},(b-a)^p\}\,\|u_n-u_m\|_{1,p}^p\,,$$

also ist $(u_n)_n$ eine Cauchyfolge in $C^0(G)$ und deswegen ist $u \in C^0(G)$. □

7.21 Beispiel. Sei $G = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Die Funktion

$$u : G \to \mathbb{R}, \quad u(x) := \begin{cases}\ln(\ln(\frac{e}{|x|})), & x \ne 0,\\ 0, & x = 0\end{cases}$$

ist nicht stetig, aber es gilt $u \in W^{1,2}(G)$.

Durch Übergang zu Polarkoordinaten bekommen wir

$$\int_G |u(x)|^2\ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r u(r)^2\,\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^1 r(\ln(1-\ln r))^2\,\mathrm{d}r < \infty$$

und mit $\nabla u(x) = \frac{-1}{|x|(1-\ln|x|)}\frac{x}{|x|}$

$$\int_G |\nabla u(x)|^2\ \mathrm{d}x = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{r(1-\ln r)^2}\,\mathrm{d}r = \left.\frac{2\pi}{1-\ln r}\right|_0^1 = 2\pi.$$

7.22 Definition. Seien X und Y normierte Räume und $K\colon X \longrightarrow Y$ eine (nicht unbedingt lineare) Abbildung. Dann heißst K kompakt, falls

(i) K stetig ist und

(ii) für jede beschränkte Menge B das Bild $\overline{K(B)}$ kompakt ist.

7.23 Bemerkung. a) Für lineare Abbildungen folgt die Stetigkeit von K bereits aus (ii).

b) Bedingung (ii) ist äquivalent dazu, dass für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine konvergente Teilfolge von $(Kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y existiert.

7.24 Satz (Rellich–Kondrachov)**.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 \le p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. a) Die Einbettung*

$$W_0^{m,p}(G) \hookrightarrow L^p(G)$$

ist kompakt.

b) Besitzt G die Segmenteigenschaft, so ist

$$W^{m,p}(G) \hookrightarrow L^p(G)$$

kompakt.

c) Besitzt G die Segmenteigenschaft und ist $mp > n$, so ist

$$W^{m,p}(G) \hookrightarrow C_b^0(\overline{G})$$

kompakt.

7.25 Beispiel. Betrachte den Integraloperator aus Beispiel 6.23c), $T : L^2((0,1)) \to L^2((0,1))$ definiert durch $(Tx)(t) = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s$. Es gilt $R(T) \subset H^1((0,1))$ und da $H^1((0,1)) \hookrightarrow L^2((0,1))$ kompakt ist, ist der Operator K kompakt.

Die folgende Ungleichung ist sehr wichtig, um Abschätzungen beweisen zu können.

7.26 Satz (Erste Poincarésche Ungleichung)**.** *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, welches in eine Richtung beschränkt ist. Dann existiert eine Konstante $b > 0$ so, dass*

$$\|u\|_{L^2(G)} \le b\,\|\nabla u\|_{L^2(G)^n} \quad (u \in H_0^1(G)).$$

Damit ist durch

$$|u|_{H^1(G)} := \Big(\sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(G)}^2\Big)^{1/2}$$

auf $H_0^1(G)$ eine Norm gegeben, welche zur Norm $\|\cdot\|_{H^1(G)}$ äquivalent ist.

Beweis. Es sei G ohne Einschränkung in x_n-Richtung beschränkt, d.h. es gelte

$$G \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_n \leq b\}$$

für ein $b > 0$. Wir beweisen die Aussage zunächst für $u \in \mathscr{D}(G)$. Offenbar gilt nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung:

$$u(x) = \int_0^{x_n} 1 \cdot \partial_d u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)\,\mathrm{d}t.$$

Damit können wir unter Verwendung der Cauchy–Schwarz–Ungleichung wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
|u(x)|^2 &\leq b \int_0^{x_n} |\partial_n u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)|^2\,\mathrm{d}t \\
&\leq b \int_0^{b} |\nabla u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)|^2\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2}^2 &\leq b \int_0^b \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^b |\nabla u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)|^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} \right\} \mathrm{d}x_n \\
&\leq b^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2\,,
\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. Da $\mathscr{D}(G) \subset H_0^1(G)$ dicht liegt, folgt die Abschätzung für beliebige $u \in H_0^1(G)$ durch Approximation in der $\|\cdot\|_{H^1(G)}$-Norm. $\square$

7.27 Beispiel (Eigenwerte des $\triangle$-Operators)**.** Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $u \in H^2(G) \cap H_0^1(G)$ mit $-\triangle u - \lambda u = 0$. Durch Multiplikation der Gleichung in L^2 mit u folgt

$$0 = -\langle \triangle u, u \rangle_{L^2(G)} - \lambda \langle u, u \rangle_{L^2(G)} = \|\nabla u\|_{L^2(G)^n}^2 - \lambda \|u\|_{L^2(G)}^2$$

und mit Satz 7.26

$$\lambda \|u\|_{L^2(G)}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(G)^n}^2 \geq \frac{1}{b^2} \|u\|_{L^2(G)}^2\,,$$

also sind die Eigenwerte des $\triangle$-Operators durch $\frac{1}{b^2}$ nach unten beschränkt.

7.28 Satz (Zweite Poincarésche Ungleichung)**.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Segmenteigenschaft. Dann existiert ein $c > 0$ mit*

$$\|u\|_{L^2(G)} \leq c \left(\|\nabla u\|_{L^2(G)^n} + \left| \int_G u(x)\,\mathrm{d}x \right| \right)$$

für alle $u \in H^1(G)$. Damit ist durch

$$\|u\|_{H_*^1(G)} := \left(\|\nabla u\|_{L^2(G)^n}^2 + \left| \langle u, 1 \rangle_{L^2(G)} \right|^2 \right)^{1/2}$$

eine Norm auf $H^1(G)$ gegeben, welche zur Norm $\|\cdot\|_{H^1(G)}$ äquivalent ist.

Beweis. Wir nehmen an, dass eine Folge $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset H^1(G)$ existiert mit $\|u_\ell\|_{L^2(G)} = 1$ und

$$\|\nabla u_\ell\|_{L^2} + \left|\langle u_\ell, 1\rangle_{L^2(G)}\right| < \frac{1}{\ell} \quad (\ell \in \mathbb{N}).$$

Nach dem Satz von Rellich–Kondrachov existiert eine Teilfolge $(\widetilde{u}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $u_0 \in L^2(G)$ konvergiert.
Wegen $\|\nabla\widetilde{u}_\ell\|_{L^2} \longrightarrow 0$ folgt, dass $(\widetilde{u}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset H^1(G)$ eine Cauchyfolge ist.
Da $H^1(G)$ vollständig ist, existiert ein $\overline{u}_0 \in H^1(G)$ mit $\|\widetilde{u}_\ell - \overline{u}_0\|_{H^1(G)} \longrightarrow 0$ und die Eindeutigkeit des Grenzwertes liefert $u_0 = \overline{u}_0$. Aus $\langle\widetilde{u}_\ell, 1\rangle \longrightarrow 0$ folgt $\langle u_0, 1\rangle = 0$. Andererseits gilt $\nabla u_0 = \lim_{n\to\infty} \nabla\widetilde{u}_\ell = 0$, also $u_0 = \text{const}$. Insgesamt folgt also $u_0 = 0$, was im Widerspruch zu

$$\|u_0\|_{L^2} = \lim_{\ell\to\infty} \|\widetilde{u}_\ell\|_{L^2} = 1$$

steht. □

8. Selbstadjungierte und kompakte Operatoren

a) Selbstadjungierte und unitäre Operatoren

Im folgenden sei X ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum.

8.1 Lemma. *a) Sei $T \in L(X)$. Dann ist T genau dann selbstadjungiert, falls $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ gilt für alle $x \in X$.*

b) Sei $T\colon X \subset D(T) \to X$ dicht definiert. Dann ist T genau dann symmetrisch, falls $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ gilt für alle $x \in D(T)$.

Beweis. a) (i) Sei $T = T^*$. Dann ist $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} \in \mathbb{R}$.

(ii) Seien $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Nach Voraussetzung ist

$$\langle T(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle = \overline{\langle T(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle}$$

und damit

$$\alpha \langle Ty, x\rangle + \overline{\alpha}\langle Tx, y\rangle = \alpha \langle y, Tx\rangle + \overline{\alpha}\langle x, Ty\rangle .$$

Für $\alpha = 1$ erhält man

$$\langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle = \langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle .$$

Für $\alpha = \mathrm{i}$ erhält man

$$\langle Ty, x\rangle - \langle Tx, y\rangle = \langle y, Tx\rangle - \langle x, Ty\rangle .$$

Somit folgt

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad (x, y \in X).$$

Nach Definition von T^* gilt also $T = T^*$.

b) Die Rechnung unter a) zeigt, dass $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ für $x, y \in D(T)$ gilt. Dies ist äquivalent zu $T \subset T^*$, d.h. zur Symmetrie von T. □

8.2 Satz (Spektrum selbstadjungierter Operatoren)**.** *Sei $T : X \supset D(T) \to X$ ein selbstadjungierter linearer (nicht notwendig beschränkter) Operator. Dann gilt*

(i) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(ii) $\|(T-\lambda)^{-1}\| \le |\operatorname{Im}\lambda|^{-1} \quad (\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$.

(iii) *Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ sind geometrischer und algebraischer Eigenraum identisch.*

(iv) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

(v) $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Beweis. (i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $x \in D(T)$. Wie in Lemma 8.1 zeigt man $\operatorname{Im}\langle Tx, x\rangle = 0$. Dann ist mit Cauchy–Schwarz

$$\|(T-\lambda)x\| \cdot \|x\| \geq |\langle (T-\lambda)x, x\rangle| \geq |\operatorname{Im}\langle (T-\lambda)x, x\rangle| = |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|x\|^2 . \tag{8-1}$$

Nach Lemma 6.9 ist $T-\lambda$ injektiv und $R(T-\lambda)$ abgeschlossen. Weiterhin ist auch $T-\overline{\lambda}$ injektiv wegen $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

$T-\lambda$ ist surjektiv, denn mit Satz 6.24 a) haben wir

$$\begin{aligned} R(T-\lambda) = \overline{R(T-\lambda)} &= \left((R(T-\lambda))^\perp\right)^\perp = (\ker((T-\lambda)^*))^\perp = \left(\ker(T-\overline{\lambda})\right)^\perp \\ &= \{0\}^\perp = X. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass für $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ der Operator $T-\lambda$ bijektiv ist.

(ii) Setze $y := (T-\lambda)x$ in (8-1) und erhalte

$$\|y\| \geq |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \left\|(T-\lambda)^{-1}y\right\| .$$

(iii) Sei $N_\lambda^{(a)}(T)$ der algebraische Eigenraum zum Eigenwert λ von T. Die Inklusion $\ker(T-\lambda) \subset N_\lambda^{(a)}(T)$ gilt immer. Sei also $x \in N_\lambda^{(a)}(T)\setminus\ker(T-\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x \in D((T-\lambda)^n)$ und $(T-\lambda)^n x = 0$ für ein $n \geq 2$, aber $(T-\lambda)x \neq 0$. Wegen $T = T^*$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\left\|(T-\lambda)^{n-1}x\right\|^2 = \left\langle (T-\lambda)^n x, (T-\lambda)^{n-2}x\right\rangle = 0.$$

Induktiv folgt $(T-\lambda)^{n-2}x = 0, \ldots, (T-\lambda)x = 0$, Widerspruch.

(iv) Das folgt wie in der linearen Algebra. Seien x_1, x_2 Eigenvektoren zu $\lambda_1 \neq \lambda_2$ mit $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle Tx_1, x_2\rangle = \langle x_1, Tx_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle .$$

Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.

(v) Angenommen, es existiert ein $\lambda \in \sigma_r(T)$. Dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$ wegen (i), sowie $T-\lambda$ injektiv und $\overline{R(T-\lambda)} \neq X$ wegen der Definition von σ_r. Schließlich ist dann

$$\overline{R(T-\lambda)} = \left((R(T-\lambda))^\perp\right)^\perp = (\ker((T-\lambda)^*))^\perp = (\ker(T-\lambda))^\perp = \{0\}^\perp = X.$$

Widerspruch. □

Insbesondere für Operatoren T, von denen bereits $\sigma_r(T) = \emptyset$ bekannt ist, ist das sogenannte approximative Spektrum nützlich.

8.3 Lemma (approximative Eigenwerte)**.** *Seien X ein Banachraum und $T\colon X \supset D(T) \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator. Die Menge der approximativen Eigenwerte ist definiert als*

$$\sigma_{\mathrm{app}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ \exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T),\ \|x_n\| = 1 :\ \|(T-\lambda)x_n\| \longrightarrow 0\}.$$

Dann gilt

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{\mathrm{app}}(T) \subset \sigma(T).$$

Beweis. (i) Sei $\lambda \in \sigma_{\mathrm{app}}(T)$. Falls $\lambda \in \rho(T)$, so wäre $(T-\lambda)^{-1}$ stetig, d.h. für alle $x_n \in D(T)$ ist

$$\frac{\|x_n\|}{\|(T-\lambda)x_n\|} \le \left\|(T-\lambda)^{-1}\right\| < \infty.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Definition der approximativen Eigenwerte.

(ii) Für $\lambda \in \sigma_p(T)$ setze $x_n := x$ mit einem normierten Eigenvektor x zum Eigenwert λ.

Sei $\lambda \in \sigma_c(T)$. Dann ist $T-\lambda$ injektiv und $R(T-\lambda)$ nicht abgeschlossen. Nach Lemma 6.9 existiert kein $C > 0$ mit $\|(T-\lambda)x\| \ge C\,\|x\|$. Somit existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(T-\lambda)x_n\| \longrightarrow 0$. □

Wie wir bereits gesehen haben, ist der Nachweis der Symmetrie eines Operators oft durch direktes Nachrechnen möglich. Das nachstehende Resultat gibt Kriterien dafür, wann ein symmetrischer Operator bereits selbstadjungiert ist.

8.4 Satz. *Sei $T : X \supset D(T) \to X$ ein symmetrischer linearer Operator. Es gelte eine der folgenden Bedingungen*

(i) $R(T) = X$,

(ii) $R(T+i) = X = R(T-i)$.

Dann ist T selbstadjungiert.

Beweis. (i) Es gelte $R(T) = X$. Sei $y \in D(T^*)$ und $z := T^*y$. Dann existiert ein $x \in D(T)$ mit $Tx = z$ und es gilt für alle $u \in D(T)$

$$\langle Tu, y\rangle = \langle u, T^*y\rangle = \langle u, z\rangle = \langle u, Tx\rangle = \langle Tu, x\rangle$$

Wegen $R(T) = X$ folgt $0 = \langle v, x-y\rangle$ für alle $v \in X$ und damit $x = y$, also ist $y \in D(T)$.

(ii) Es gelte $R(T+i) = X = R(T-i)$. Sei $y \in D(T^*)$ und $z := (T^* - i)y$. Dann existiert ein $x \in D(T)$ mit $(T-i)x = z$ und es gilt für alle $u \in D(T)$

$$\langle (T+i)u, y\rangle = \langle u, (T^* - i)y\rangle = \langle u, z\rangle = \langle u, (T-i)x\rangle = \langle (T+i)u, x\rangle$$

Wegen $R(T+i) = X$ folgt $0 = \langle v, x-y\rangle$ für alle $v \in X$ und damit $x = y$, also ist $y \in D(T)$. □

8.5 Beispiel. Wir betrachten erneut den Operator $T : L^2(\mathbb{R}) \supset D(T) \to L^2(\mathbb{R})$ definiert durch $(Tx)(t) = tx(t)$ mit $D(T) := \{x \in L^2(\mathbb{R}) | \int_{-\infty}^{\infty} s^2 |x(s)|^2 \mathrm{d}s < \infty\}$. Wir können nun die Selbstadjungiertheit einfacher zeigen als in Beispiel 6.23.
Sei $y \in L^2(\mathbb{R})$. Dann erfüllt $x(t) := \frac{y(t)}{t+i}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2 |x(s)|^2 \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{s^2+1} |y(s)|^2 \mathrm{d}s \leq \|y\|_{L^2}^2 ,$$

also $x \in D(T)$ und es gilt $(T+i)x = y$. Somit ist $R(T+i) = X$ und analog folgt mit $\frac{y(t)}{t-i}$, dass $R(T-i) = X$. Demnach ist T selbstadjungiert.

Der folgende Satz wird ähnlich wie Satz 8.2 bewiesen.

8.6 Satz (Spektrum unitärer Operatoren)**.** *Sei $U \in L(X)$ unitär. Dann gilt*

(i) $\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| = 1\}$.

(ii) $\|(U-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\big||\lambda|-1\big|}$ *für* $|\lambda| \neq 1$.

(iii) *Für $\lambda \in \sigma_p(U)$ sind geometrischer und algebraischer Eigenraum identisch.*

(iv) *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

(v) $\sigma_r(U) = \emptyset$.

8.7 Bemerkung. Sei T ein selbstadjungierter (nicht unbedingt beschränkter) Operator in X. Dann heißt $U := (T-\mathrm{i})(T+\mathrm{i})^{-1}$ die Cayley–Transformierte des Operators T. Dieser Operator U ist unitär.
Die Cayley–Transformation ist umkehrbar: sei $U \in L(X)$ ein unitärer Operator, für den $I-U$ injektiv ist. Dann ist der Operator $T := \mathrm{i}(I+U)(I-U)^{-1}$ selbstadjungiert mit Definitionsbereich $R(I-U)$, und seine Cayley–Transfomierte ist wieder gleich U.
Damit lassen sich einige Aussagen über unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren gewinnen, indem man deren beschränkte Cayley–Transformierten studiert.

8.8 Definition (numerischer Wertebereich)**.** Für $T \in L(X)$ ist der numerische Wertebereich definiert durch

$$W(T) := \{\langle Tx, x\rangle : \ \|x\| = 1\}.$$

8.9 Lemma. *Sei $T \in L(X)$. Dann gilt $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.*

Beweis. Sei $\lambda \notin \overline{W(T)}$. Wir wollen zeigen, dass $\lambda \in \rho(T)$. Für $\|x\| = 1$ gilt nun

$$\begin{aligned} 0 < d := \operatorname{dist}(\lambda, \overline{W(T)}) &\leq |\lambda - \langle Tx, x\rangle| = |\langle(\lambda - T)x, x\rangle| \\ &\leq \|(T-\lambda)x\| \cdot \|x\| = \|(T-\lambda)x\| \, . \end{aligned}$$

Damit haben wir $\|(T-\lambda)x\| \geq d\,\|x\|$ für $x \in X$. Also ist nach Lemma 6.9 der Operator $T-\lambda$ injektiv und $R(T-\lambda)$ abgeschlossen. Falls $T-\lambda$ nicht surjektiv ist, dann existiert ein $x_0 \in R(T-\lambda)^\perp$ mit $\|x_0\| = 1$, und es ist

$$0 = \langle (T-\lambda)x_0, x_0\rangle = \langle Tx_0, x_0\rangle - \lambda,$$

was im Widerspruch steht zu $\lambda \notin \overline{W(T)}$. □

8.10 Lemma. *Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert. Für $m := \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$ und $M := \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$ gilt $\sigma(T) \subset [m, M]$ und $m, M \in \sigma(T)$.*

[[Die Inklusion $\sigma(T) \subset \overline{W(T)} \subset [m, M]$ gilt nach Lemma 8.9.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\langle Tx_n, x_n\rangle \longrightarrow m$. Nach Definition von m ist die Bilinearform $[x, y] := \langle (T-m)x, y\rangle$ positiv semidefinit, und nach Cauchy–Schwarz (angewandt auf $[\cdot,\cdot]$) gilt

$$\begin{aligned} \|(T-m)x_n\|^2 &= [x_n, (T-m)x_n] \leq [x_n, x_n]^{1/2}[(T-m)x_n, (T-m)x_n]^{1/2} \\ &= \langle (T-m)x_n, x_n\rangle^{1/2} \cdot \big\langle (T-m)^2x_n, (T-m)x_n\big\rangle^{1/2} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty), \end{aligned}$$

da $\langle (T-m)x_n, x_n\rangle \longrightarrow 0$ und $\big\langle (T-m)^2x_n, (T-m)x_n\big\rangle$ beschränkt ist. Also ist $m \in \sigma_{\mathrm{app}}(T) \subset \sigma(T)$. Genauso zeigt man $M \in \sigma(T)$.]]

Wir haben den Spektralradius definiert als $r(T) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ (Definition 2.40).

8.11 Satz. *Sei $T \in L(X)$ selbstadjungiert. Dann gilt*

$$r(T) = \|T\| = \max\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(T)\} = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \colon \|x\| = 1\}.$$

Beweis. Übung. □

8.12 Bemerkung. a) Für nicht selbstadjungierte Operatoren gilt die Aussage von Satz 8.11 i. allg. nicht, wie man am Operator aus Beispiel 6.23c), $T : L^2((0,1)) \to L^2((0,1))$ definiert durch $(Tx)(t) = \int_0^t x(s)\mathrm{d}s$, sieht. Es gilt hier $\sigma(T) = \{0\}$.

b) Es gibt selbstadjungierte Operatoren, welche keinen Eigenwert besitzen. Betrachte dazu $X = L^2([0,1])$, $T : X \to X$ definiert durch $(Tx)(t) := tx(t)$ (Multiplikationsoperator). Dann ist $\sigma_p(A) = \emptyset$.

b) Kompakte Operatoren

8.13 Definition. Seien X, Y normierte Räume. Definiere

$$\begin{aligned} K(X,Y) :=& \{T \in L(X,Y) : T \text{ ist kompakt}\} \\ =& \{T \in L(X,Y) : \overline{T(B(0,1)} \text{ ist kompakt}\} \end{aligned}$$

und $K(X) := K(X,X)$.

8.14 Beispiel. Sei $1 \le p \le \infty$. Der Operator $K : \ell^p \to \ell^p$ definiert durch $K(x_n)_n := \left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ ist kompakt.

8.15 Satz. *Seien X, Y, Z normierte Räume.*

a) Für $K \in K(X,Y)$ und $T \in L(Y,Z)$ gilt $TK \in K(X,Z)$.

b) Für $T \in L(X,Y)$ und $K \in K(Y,Z)$ gilt $TK \in K(X,Z)$.

b) Ist $T \in L(X,Y)$ mit $\dim R(T) < \infty$, so ist $T \in K(X,Z)$.

8.16 Satz. *Seien X ein normierter Raum und Y Banachraum. Dann ist $K(X,Y)$ abgeschlossen in $L(X,Y)$.*

Beweis. Sei $T \in \overline{K(X,Y)} \subset L(X,Y)$. Wir zeigen die Totalbeschränktheit von $T(B(0,1))$. Zu $\varepsilon > 0$ beliebig existiert ein $K \in K(X,Y)$ mit $\|K - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da K kompakt ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, ..., x_n \in X$ mit

$$\overline{K(B(0,1))} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(Kx_i, \varepsilon/3)$$

Für $y \in \overline{B(0,1)}$ existiert ein i mit

$$\begin{aligned} \|Ty - Tx_i\|_Y &\le \|Ty - Ky\|_Y + \|Ky - Kx_i\|_Y + \|Kx_i - Kx_i\|_Y \\ &\le \|T - K\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T - K\| \\ &\le \varepsilon. \end{aligned}$$

Es gilt also $\overline{T(B(0,1))} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$, somit ist T kompakt. □

8.17 Satz. *Seien X, Y normierte Räume. Dann gilt: $K \in K(X,Y) \Leftrightarrow K' \in K(Y', X')$.*

[[(i) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y'$ beschränkt. Zu zeigen ist, dass $(K'(f_n))_{n\in\mathbb{N}} = (f_n \circ K)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ eine in X' konvergente Teilfolge besitzt.
Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert ein $c > 0$ mit

$$|f_n(y_1) - f_n(y_2)| \leq \|f_n\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leq c \cdot \|y_1 - y_2\|$$

für alle $y_1, y_2 \in K(B(0,1))$ und $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge gleichgradig stetig und nach dem Satz von Arzelà-Ascoli (1.35) existiert eine auf $\overline{K(B(0,1)}$ gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ und k, ℓ hinreichend groß ist

$$\|f_{n_k}(y) - f_{n_\ell}(y)\| < \varepsilon.$$

für alle $y \in K(B(0,1))$ und damit gilt für $x \in B(0,1)$

$$\|f_{n_k}(Kx) - f_{n_\ell}(Kx)\| < \varepsilon.$$

Da $f_n(Kx) = (K('f_n))(x)$, ist $(K'(f_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}} \subset X'$ eine Cauchyfolge und damit in X' konvergent.

(ii) Sei $K' \in K(Y', X')$. Nach Teil (i) ist $K'' \in K(X'', Y'')$, d.h. die Menge

$$\overline{K''(\{x'' \in X'' : \|x''\| \leq 1\})}$$

ist kompakt. Wegen

$$B(0,1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \subset \{x'' \in X'' : \|x''\| \leq 1\}$$

(isometrische Einbettung) ist also $\overline{K''(B(0,1))} = \overline{K(B(0,1))}$ kompakt, d.h. $K \in K(X,Y)$.]]

8.18 Satz. *Sei X ein Banachraum, $K \in K(X)$ und $T := \mathrm{id} - K$. Dann gilt:*

(i) $\dim \ker(T) < \infty$.

(ii) *$R(T)$ ist abgeschlossen.*

(iii) *Ist $\ker(T) = \{0\}$, so folgt $R(T) = X$.*

Beweis. (i) Als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist $\ker(T)$ abgeschlossen.
Sei $(x_n)_n \subset \ker(T)$ beschränkt. Dann existiert eine Teilfolge $(x_n)_n \subset (x_{n_k})_k$ und ein $y \in X$ mit $Kx_{n_k} \to y$. Wegen $0 = x_{n_k} - Kx_{n_k}$ gilt $x_{n_k} \to y$. Da $y \in \ker(T)$ ist, hat jeden bgeschränkte Folge aus $\ker(T)$ eine dort konvergente Teilfolge und nach dem Lemma von Riesz (Satz 2.8) bedeutet dies, ,dass $\ker(T)$ endlichdimensional ist.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass der Operator „nur nahe des Nullraums klein“ wird, genauer gilt

$$\exists C > 0\ \forall x \in X:\ d(x) := \mathrm{dist}(x, \ker T) \leq C \|Tx\|. \tag{8-2}$$

Andernfalls gibt es eine Folge $(x_n)_n \subset X$ so, dass

$$d(x_n) > n \|Tx_n\|.$$

Wegen $\dim\ker(T) < \infty$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in \ker(T)$ mit $d(x_n) = \|x_n - y_n\|$. Setze

$$z_n := \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|} = \frac{x_n - y_n}{d(x_n)}.$$

Dann gilt $\|z_n\| = 1$, $d(z_n) = 1$ und

$$\|Tz_n\| = \frac{1}{d(x_n)}\|Tx_n\| < \frac{1}{n},$$

also konvergiert (Tz_n) gegen 0 und die Kompaktheit von K liefert für eine Teilfolge $(z_{n_k})_k$ die Konvergenz von $(Kz_{n_k})_k$ gegen ein $z \in X$. Es ist

$$z_{n_k} = Tz_{n_k} + Kz_{n_k},$$

daher konvergiert auch $(z_{n_k})_k$ gegen z. Zum einen ist $z \in \ker(T)$, zum anderen aber $d(z) = 1$. Widerspruch.

Sei nun $(y_n)_n \subset R(T)$ mit $y_n \to y \in X$ und $\widetilde{x}_n \in X$ mit $T\widetilde{x}_n = y_n$. Wähle $z_n \in \ker T$ mit $d(\widetilde{x}_n) = \|\widetilde{x}_n - z_n\|$ und definiere $x_n := \widetilde{x}_n - z_n$. Es gilt nach (8-2)

$$\|x_n\| = d(\widetilde{x}_n) \le C\|T\widetilde{x}_n\| = C\|Tx_n\|,$$

demnach ist $(x_n)_n$ beschränkt und $(Kx_n)_n$ besitzt eine gegen ein $z \in X$ konvergente Teilfolge. Für diese gilt

$$x_{n_k} = Tx_{n_k} + Kx_{n_k} = y_{n_k} + Kx_{n_k}.$$

Also exisitert $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y + z$ mit $Kx = z$ und es ist $y = x - z = x - Kx = Tx$. Damit liegt y in $R(T)$.

(iii) Angenommen es gibt $x \in X \setminus R(T)$. Dann folgt für $n \ge 0$ induktiv $T^n x \in R(T^n)\setminus R(T^{n+1})$, denn existiert ein $y \in X$ mit $T^n x = T^{n+1}y$, so wäre $T^n(x - Ty) = 0$ und damit schon $x = Ty$. Widerspruch.
Wegen $T^{n+1} = (\mathrm{id} - K)^{n+1} = \mathrm{id} + \sum_{j=1}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ j \end{pmatrix}(-K)^j$ kann (ii) auf T^{n+1} angewandt werden, $R(T^{n+1})$ ist abgeschlossen. Wähle nun $z_{n+1} \in R(T^{n+1})$ mit

$$0 < \|T^n x - z_{n+1}\| \le 2 \cdot \mathrm{dist}(T^n x, R(T^{n+1}))$$

und setze

$$x_n := \frac{T^n x - z_{n+1}}{\|T^n x - z_{n+1}\|} \in R(A^n).$$

Aus

$$\mathrm{dist}(x_n, R(T^{n+1})) = \inf_{y\in R(T^{n+1})}\|x_n - y\| = \inf_{y\in R(T^{n+1})}\frac{\|T^n x - z_{n+1} - \|T^n x - z_{n+1}\|\,y\|}{\|T^n x - z_{n+1}\|}$$

$$\geq \frac{\operatorname{dist}(T^n x, R(T^{n+1}))}{\|T^n x - z_{n+1}\|} \geq \frac{1}{2}$$

folgt für $m > n$ mit $-Tx_n + x_m - Tx_m \in R(T^{n+1})$

$$\|Kx_n - Kx_m\| = \|x_n - Tx_n + x_m - Tx_m\| \geq \frac{1}{2},$$

also besitzt $(Kx_n)_n$ keine konvergente Teilfolge, obwohl $(x_n)_n$ beschränkt ist. Widerspruch. □

8.19 Satz. *Sei X ein Banachraum und $K \in K(X)$. Dann gilt:*

(i) $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$.

(ii) $\sigma(K)$ *ist abzählbar.*

(iii) Höchstens $\{0\}$ *ist ein Häufungspunkt von* $\sigma(K)$.

(iv) Die Eigenräume zu $\lambda \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ *sind endlichdimensional.*

Beweis. (i) Sei $\lambda \neq 0$. Dann ist $K - \lambda = -\lambda(\operatorname{id} - \frac{K}{\lambda})$ und nach Satz 8.18 ist $R(K - \lambda) = X$ für $\lambda \neq \sigma_p(K)$.

(ii),(iii): Sei $A_n := \{\lambda \in \sigma(K) : |\lambda| > \frac{1}{n}\} = \{\lambda \in \sigma_p(K) : |\lambda| > \frac{1}{n}\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Angenommen A_n ist nicht endlich. Dann existiert eine Folge von paarweise verschiedenen $(\lambda_k)_k \subset A_n$ mit zugehörigen linear unbhängigen Eigenvektoren $(x_k)_k$.
Für $X_m := \operatorname{span}\{x_1, ..., x_m\}$ gilt $X_{m-1} \subsetneq X_m$ und nach dem Lemma von Riesz (Satz 2.8) gibt es für alle $m \in \mathbb{N}$ ein $y_m \in X_m$ mit $\|y_m\| = 1$ und

$$\operatorname{dist}(y_m, X_{m-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Für $1 \leq i < n$ gilt

$$Ky_j - Ky_i = \lambda_j y_j - \underbrace{\left(Ky_i - (K - \lambda_j)y_j\right)}_{=:z}.$$

Schreibe $y_j = \sum_{l=1}^{j} \alpha_l x_l$. Dann ist

$$(K - \lambda_j)y_j = \sum_{l=1}^{j} \alpha_l(\lambda_l - \lambda_j)x_l = \sum_{l=1}^{j-1} \alpha_l(\lambda_l - \lambda_j)x_l \in X_{j-1}$$

und damit $z \in X_{j-1}$. Also ist

$$\|Ky_j - Ky_i\| = |\lambda_j| \cdot \left\|y_j - \frac{z}{\lambda_j}\right\| \geq \frac{1}{2n},$$

was einen Widerspruch zur Kompaktheit von K darstellt, da eine konvergente Teilfolge von $(Ky_m)_m$ existiert.

(iv) Wurde bereits in Satz 8.18 bewiesen. $\square$

8.20 Bemerkung. Ist $\dim X = \infty$ und $K \in K(X)$, so gilt $0 \in \sigma(K)$.

Hierbei können alle Fälle auftreten, wie man am folgenden Beipiel sieht:
Sei $1 \leq p \leq \infty$, $K : \ell^p \to \ell^p$ aus Beispiel 8.14 definiert durch $K(x_n)_n := \left(\frac{x_n}{n}\right)_n$ und S_R, S_L der Rechts- bzw. Linksshift. Dann sind K, $K_R := S_R K$ und $K_L := S_L K$ kompakt und $0 \in \sigma_c(K)$, $0 \in \sigma_r(K_R)$ sowie $0 \in \sigma_p(K_L)$.

9. Der Spektralsatz für selbstadjungierte beschränkte Operatoren

Der Spektralsatz ist einer der wichtigsten Sätze der Operatortheorie. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes aus der Linearen Algebra, nach welchem selbstadjungierte Matrizen orthogonal diagonalisierbar sind, also zunächst einmal um eine Strukturaussage. Diese Darstellung linearer selbstadjungierter Operatoren kann nun verwendet werden, um etwa Funktionen von Operatoren zu definieren, was wichtige Anwendungen z.B. für partielle Differentialgleichungen besitzt. Man erhält einen Funktionalkalkül für Operatoren.

a) Stetiger und messbarer Funktionalkalkül

9.1 Definition. Eine $\mathbb{C}$-Banachraum $\mathcal{A}$ mit Multiplikation

$$\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

die

(i) $\forall x, y, z \in \mathcal{A}: \; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

(ii) $\forall x, y, z \in \mathcal{A}: \; (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) \;\wedge\; x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$,

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{C} \, \forall x, y \in \mathcal{A}: \; \alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$,

(iv) $\forall x, y \in \mathcal{A}: \; \|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

erfüllt, heißt *Banachalgebra*. Nach (i) und (ii)–(iii) muss die Multiplikation also *assoziativ* und *bilinear* sein. Nach (iii) muss die Norm *submultiplikativ* bezüglich der Multiplikation sein. Wir schreiben $xy := x \cdot y$. Die Banachalgebra $\mathcal{A}$ heißt *kommutativ*, falls

(v) $\forall x, y \in \mathcal{A}: \; xy = yx$.

Ein Element $e \in \mathcal{A}$ heißt Einheit von $\mathcal{A}$, falls

(vi) $[\forall x \in \mathcal{A}: \; xe = ex = x] \quad \wedge \quad \|e\| = 1$.

9.2 Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra. Eine Abbildung

$$* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto x^*,$$

die

(i) $\forall x, y \in \mathcal{A}: \; (x+y)^* = x^* + y^*$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{C} \, \forall x \in \mathcal{A}: \; (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$,

(iii) $\forall x \in \mathcal{A}: \; x^{**} = x$,

(iv) $\forall x, y \in \mathcal{A}: \; (xy)^* = y^* x^*$

erfüllt, heißt *Involution*. Eine Banachalgebra mit Involution, die

(v) $\forall x \in \mathcal{A}: \; \|x^* x\| = \|x\|^2$

erfüllt,heißt *C^*-Algebra*. Wegen $\|x^*\|^2 = \|x^{**}x^*\| = \|xx^*\| = \|x\|^2$ ist diese Involution eine Isometrie auf $\mathcal{A}$.

9.3 Definition.

(I) Seien A und B Banachalgebren. Eine Abbildung $\Phi : A \to \mathcal{B}$ heißt *Algebrenhomomorphismus*, falls sie linear und

$$\forall x, y \in \mathcal{A}: \; \Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y) \qquad \text{(multiplikativ)}$$

ist.

(II) Seien A und B C^*-Algebren. Ein Algebrenhomomorphismus $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt $*$-Homomorphismus, falls

$$\forall x \in \mathcal{A}: \; \Phi(x^*) = (\Phi(x))^*.$$

9.4 Beispiele. a) Sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum. Dann ist $L(X)$ mit Komposition als Multiplikation, $AB := A \circ B$, und Adjungation als Involution, $A^* := A^*$ (die Notation für Involution und Adjungation ist dieselbe!), ein C^*-Algebra. $L(X)$ ist nicht kommutativ. Die Abbildung id_X ist eine Einheit in $\mathcal{A}$. Der Teilraum $K(X) := \{T \in L(X)\colon T \text{ kompakt}\}$ ist auch eine nichtkommutative C^*-Algebra. $K(X)$ har nur dann eine Einheit (nämlich ebenfalls id_X), falls X endlich-dimensional ist.

b) Sei T ein kompakter Hausdorffraum. Dann ist $\left(C(T), \|\cdot\|_\infty\right)$ mit punktweise Multiplikation als Multiplikation, $f \cdot g(x) := f(x)g(x)$, und komplexe Konjugation als Involution, $f^* = \overline{f}$, eine C^*-Algebra. $C(T)$ ist kommutativ. Die konstanten Funktion 1 ist eine Einheit.

c) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $L^\infty(\mu; \mathbb{C})$ ähnlich wie $C(T)$ oben eine C^*-Algebra mit der konstanten Funktion 1 als Einheit.

d) Wir statten den Lebesgueraum $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit dem Faltungsprodukt aus,

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y \quad (u, v \in L^1(\mathbb{R}^n))$$

und erhalten eine kommutative C^*-Algebra ohne Einheit.

Ab jetzt sei stets H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum.

Wir wollen im folgenden Funktionen $f(T)$ eines selbstadjungierten Operators $T \in L(H)$ definieren. Die Definition ist noch klar, falls f ein Polynom ist: Für $f(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ ist

$$f(T) := \sum_{n=0}^N a_n T^n \tag{9-1}$$

(mit $T^0 := \mathrm{id}_H$). Dieser sog. Funktionalkalkül kann mit Hilfe des Satzes von Weierstraß eindeutig auf stetige Funktionen ausgeweitet werden, wie wir später sehen werden. Zunächst eine Version eines Spektralabbildungssatzes.

9.5 Lemma. *Sei $T \in L(H)$ ein Operator (nicht unbedingt selbstadjungiert), und für ein Polynom f (vom Grad ≥ 1) sei $f(T)$ durch (9-1) definiert. Dann gilt*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))\Big(= \{f(\lambda)\colon \lambda \in \sigma(T)\}\Big).$$

Beweis. **Schritt 1:** $\sigma(f(T)) \subset f(\sigma(T))$

Sei $\mu \in \sigma(f(T))$. Wir faktorisieren

$$f(t) - \mu = \beta_N \cdot \prod_{i=1}^N (t - \gamma_i), \qquad \beta_N \neq 0,$$

und erhalten $f(T) - \mu = \beta_N \cdot \prod_{i=1}^N (T - \gamma_i)$. Falls $\gamma_i \in \rho(T)$ für jedes i gälte, so wäre $f(T) - \mu$ bijektiv, d.h. also $\mu \in \rho(f(T))$, was nicht sein kann. Also existiert ein i_0, für das $T - \gamma_{i_0}$ nicht bijektiv ist. Das heißt aber $\gamma_{i_0} \in \sigma(T)$. Wegen $f(\gamma_{i_0}) - \mu = 0$ folgt $\mu \in f(\sigma(T))$.

Schritt 2: $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$

Sei nun $\mu \in f(\sigma(T))$, d.h. es ist $\mu = f(\gamma)$ mit einem $\gamma \in \sigma(T)$. Dann folgt $f(\gamma) - \mu = 0$, d.h.

$$f(t) - \mu = (t - \gamma)\widetilde{f}(t)$$

mit einem Polynom $\widetilde{f}$ von Grad gleich $N-1$. Also gilt

$$f(T) - \mu = (T - \gamma)\widetilde{f}(T) = \widetilde{f}(T)(T - \gamma).$$

Da $\gamma \in \sigma(T)$, ist $T - \gamma$ nicht surjektiv und damit auch $f(T) - \mu$ nicht surjektiv, oder es ist $T - \gamma$ nicht injektiv und damit $f(T) - \mu$ nicht injektiv. In beiden Fällen folgt $\mu \in \sigma(f(T))$. □

Im folgenden sei $\mathbf{1}$ die konstante Funktion 1 und

$$P(\sigma(T)) := \{f \in C(\sigma(T))\colon \exists \text{ Polynom } \widetilde{f} \text{ mit } \widetilde{f}_{|\sigma(T)} = f\}.$$

9.6 Definition und Satz (Stetiger Funktionalkalkül)**.** *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert genau ein stetiger $*$-Homomorphismus*

$$\Phi\colon C(\sigma(T)) \to L(H)$$

mit $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = T$ und $\Phi(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_H$. Die Abbildung Φ heißt der stetige Funktionalkalkül von T. Wir schreiben $f(T) := \Phi(f)$.

Beweis. **Schritt 1: $P(\sigma(T))$ ist dicht in $C(\sigma(T))$:**

Da $T = T^* \in L(H)$, existiert ein Intervall $[m, M] \supset \sigma(T)$. Zu $f \in C(\sigma(T))$ existiert nach dem Erweiterungslemma von Tietze (Satz 1.10) eine stetige Fortsetzung $\widetilde{f} \in C([m, M])$, denn $\sigma(T)$ ist abgeschlossen. Nach dem Satz von Weierstraß liegen die Polynome dicht in $C([m, M])$ und damit auch dicht in $C(\sigma(T))$.

Schritt 2: Φ ist eindeutig:

Da Φ stetig sein soll, ist Φ durch die Werte auf der Menge $P(\sigma(T))$ bereits festgelegt. Da Φ ein $*$-Homomorphismus ist, folgt

$$\Phi\Bigg(\sum_{n=0}^{N} a_n t^n\Bigg) = a_0\Phi(\mathbf{1}) + \sum_{n=1}^{N} a_n \Phi\big(\mathrm{id}_{\sigma(T)}\big)^n.$$

Also ist Φ bereits durch die Werte $\Phi(\mathbf{1})$ und $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)})$ auf $P(\sigma(T))$ eindeutig bestimmt.

Schritt 3: Φ existiert:

Für ein Polynom $f \in P(\sigma(T))$, $f\colon t \mapsto \sum_{j=0}^{N} c_j t^j$, setze $\Phi(f) := \sum_{j=0}^{N} c_j T^j$. Dann ist $\Phi\colon P(\sigma(T)) \to L(H)$ linear und multiplikativ. Da $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, gilt auch $\Phi(f^*) = \Phi(\overline{f}) = \overline{\Phi(f)} = (\Phi(f))^*$. Wir zeigen, dass Φ stetig ist. Für $f \in P(\sigma(T))$ ist

$$\begin{aligned}
\|\Phi(f)\|_{L(H)}^2 = \|\Phi(f)^*\Phi(f)\|_{L(H)} &= \big\|\Phi(\overline{f}f)\big\|_{L(H)} && \Big| \quad L(H) \text{ ist } C^*\text{-Algebra} \\
&= \sup\{|\lambda|\colon \lambda \in \sigma(\Phi(\overline{f}f))\} && \Big| \quad \text{Satz 8.11} \\
&= \sup\{(\overline{f}f)(\lambda)\colon \lambda \in \sigma(T)\} && \Big| \quad \text{Lemma 9.5} \\
&= \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |f(\lambda)|^2 = \|f\|_{L^\infty(\sigma(T))}^2 .
\end{aligned}$$

Somit ist Φ eine Isometrie auf $P(\sigma(T))$, und es existiert eine eindeutige (wieder isometrische) stetige Fortsetzung auf $C(\sigma(T))$. Diese Fortsetzung ist wieder linear, multiplikativ und erfüllt $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$. Zum Beispiel kann man die letzte Eigenschaft folgendermaßen zeigen: Falls f der Limes von Polynomen f_n ist, so gilt

$$\begin{aligned}\Phi(\overline{f}) &= \Phi\big(\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n\big) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\overline{f}_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)^* \\ &= \big[\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)\big]^* = \Phi\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)^* = \Phi(f)^*.\end{aligned}$$

□

9.7 Satz (Eigenschaften des Funktionalkalküls)**.** *Sei $T \in L(H)$ ein selbstadjungierter Operator.*

a) Der Funktionalkalkül $\Phi : C(\sigma(T)) \to L(H)$ ist eine Isometrie.

b) Die Menge $\{f(T) \colon f \in C(\sigma(T))\} \subset L(H)\}$ ist eine kommutative C^*-Algebra. Der Operator $f(T)$ ist normal.

c) (Spektralabbildungssatz). Es ist $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

d) Es ist $(f(T))^* = f(T)$ genau dann, wenn $\overline{f} = f$.

e) Falls $Tx = \lambda x$, so ist $f(T)x = f(\lambda)x$ für $f \in C(\sigma(T))$.

f) Falls $f \geq 0$, so ist $f(T) \geq 0$ ($:\iff \ \forall\, x \in H \colon \langle x, f(T)x\rangle \geq 0$).

Beweis. **Teil a):** Die Isometrie wurde bereits im Beweis von Satz 9.6 gezeigt (für Polynome, welche dicht liegen).

Teil b): Folgen aus Satz 9.6.

Teil c), Schritt 1: wenn $\mu \notin f(\sigma(T))$, dann $\mu \notin \sigma(f(T))$:

Falls $\mu \notin f(\sigma(T))$, dann ist $g := \frac{1}{f-\mu} \in C(\sigma(T))$, und somit

$$g(T)(f(T)-\mu) = \Phi(g) \circ \Phi(f-\mu) = \Phi(g \cdot (f-\mu)) = \Phi(\mathbf{1}_{\sigma(T)}) = \mathrm{id}_H\,.$$

Genauso folgt $(f(T)-\mu)g(T) = \mathrm{id}_H$. Also ist $\mu \in \rho(f(T))$.

Teil c), Schritt 2: wenn $\mu \in f(\sigma(T))$, dann $\mu \in \sigma(f(T))$:

Sei nun $\mu \in f(\sigma(T))$, d.h. es gibt ein $\lambda \in \sigma(T)$ mit $\mu = f(\lambda)$. Wähle Polynome $g_n \in P(\sigma(T))$ mit $\|f - g_n\|_{L^\infty(\sigma(T))} \leq 1/n$ (und damit $\|f(T) - g_n(T)\|_{L(H)} \leq 1/n$). Nach Lemma 9.5 ist $g_n(\lambda) \in \sigma(g_n(T))$. Es ist $g_n(T)$ ein normaler Operator, der also kein Restspektrum hat (Übung!). Dann ist $\sigma(g_n(T)) = \sigma_p(g_n(T)) \cup \sigma_c(g_n(T)) = \sigma_{\mathrm{app}}(g_n(T))$, d.h. es existiert eine Folge $(x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \subset H$ mit $\|x_{n,m}\| = 1$ und $\|(g_n(T) - g_n(\lambda))x_{n,m}\| \leq 1/m$. Somit ist

$$\|(f(T) - f(\lambda))x_{n,n}\| \leq \|(f(T) - g_n(T))x_{n,n}\| + \|(g_n(T) - g_n(\lambda))x_{n,n}\|$$

$$+ |g_n(\lambda) - f(\lambda)| \cdot \|x_{n,n}\| \leq \frac{3}{n},$$

d.h. $f(\lambda) \in \sigma_{\text{app}}(f(T)) \subset \sigma(f(T))$.

Teil d): Wenn nun $f = \overline{f}$, dann ist $(f(T))^* = (\Phi(f))^* = \Phi(\overline{f}) = \Phi(f) = f(T)$. Und wenn andererseits $(f(T))^* = f(T)$, dann ist $f(T)$ selbstadjungiert, also $\mathbb{R} \supset \sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ wegen Teil b), also nimmt f auf $\sigma(T)$ nur reelle Werte an.

Teil e): Dies ist klar für Polynome und folgt für allgemeine Funktionen durch Approximation.

Teil f):

Wir haben $0 \leq f = g^2$ mit $g \in C(\sigma(T)),\ g \geq 0$. Dann ist

$$\langle f(T)x, x\rangle = \left\langle g^2(T)x, x\right\rangle = \langle g(T)x, g(T)x\rangle = \|g(T)x\|^2 \geq 0,$$

wobei die Selbstadjungiertheit von $g(T)$ ausgenutzt wurde. □

Der stetige Funktionalkalkül liefert uns z.B. die Resolvente $R_\lambda(T) := (T-\lambda)^{-1} = f(T)$ mit $f(t) := \frac{1}{t-\lambda} \in C(\sigma(T))$ für $\lambda \in \rho(T)$. Aber eine gute Beschreibung von T erhält man erst über Maße, und dafür brauchen wir noch die charakteristischen Funktionen von T, z.B. $\chi_{[a,b]}(T)$. Dazu reicht der stetige Funktionalkalkül nicht aus, wir benötigen eine messbare Version.

9.8 Lemma (Stetige Sesquilinearformen)**.** *Sei H Hilbertraum und $B\colon H \times H \to \mathbb{K}$ ein stetiger Sesquilinearform, das heißt*

(i) $\forall y \in H:\ x \mapsto B(x,y)$ *linear,*

(ii) $\forall x \in H:\ y \mapsto B(x,y)$ *konjugiert linear (also $B(x,\alpha y) = \overline{\alpha} B(x,y)$ für $\alpha \in \mathbb{K}$),*

(iii) $\forall x, y \in H:\ |B(x,y)| \leq C\,\|x\| \cdot \|y\|$.

Dann existiert genau ein $T \in L(H)$ mit

$$\forall x, y \in H:\ B(x,y) = \langle x, Ty\rangle .$$

Dabei ist $\|T\|_{L(H)}$ die kleinste Konstante C, für die (iii) *gilt.*

Beweis. Da $x \mapsto B(x,y)$ stetig und linear ist, existiert nach Riesz genau ein $\widetilde{y}$ mit $B(x,y) = \langle x, \widetilde{y}\rangle$. Setze $Ty := \widetilde{y}$. Es ist

$$\begin{aligned}\left\langle x, \widetilde{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2}\right\rangle &= B(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 B(x,y_1) + \overline{\alpha}_2 B(x,y_2) \\ &= \overline{\alpha}_1 \langle x, \widetilde{y}_1\rangle + \overline{\alpha}_2 \langle x, \widetilde{y}_2\rangle = \langle x, \alpha_1 \widetilde{y}_1 + \alpha_2 \widetilde{y}_2\rangle .\end{aligned}$$

Also ist T linear. Wegen Eigenschaft (iii) gilt :

$$\|Ty\|^2 = B(Ty, y) \le C \cdot \|Ty\| \cdot \|y\| \,.$$

Also ist T stetig mit $\|T\| \le C$. □

9.9 Definition. a) Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum. Eine Abbildung $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ heißt ein signiertes[1] Maß, falls für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ gilt:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

wobei wir hier verlangen, dass die (unbedingt konvergente) Reihe für jede Folge von disjunkten A_n einen endlichen Wert liefert.

Maße $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ mit dieser Eigenschaft heißen komplexe Maße.

Die Menge aller $\mathbb{K}$-wertigen Maße wird mit $M(X, \mathscr{A})$ bezeichnet. Falls X ein topologischer Raum mit der von der Familie der in X offenen Mengen erzeugten Borel–σ-Algebra $\mathscr{B}(X)$ ist, so schreibt man $M(X) := M(X, \mathscr{B}(X))$.

b) Zu $\mu \in M(X, \mathscr{A})$ definiert man die Variation (das Variationsmaß) $|\mu|$ durch

$$|\mu|(A) := \sup_{\mathscr{Z}} \sum_{E\in\mathscr{Z}} |\mu(E)|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\mathscr{Z}$ von A in endlich viele paarweise disjunkte Mengen aus $\mathscr{A}$ gebildet wird. $|\mu|$ ist ein endliches positives Maß auf $\mathscr{A}$. Die Totalvariation oder Variationsnorm von μ ist definiert durch $\|\mu\|_M := |\mu|(X)$.

9.10 Satz. *$\big(M(X), \|\cdot\|_M\big)$ ist ein Banachraum.*

Beweis. Siehe zum Beispiel [14]. □

9.11 Satz (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann ist die Abbildung*

$$T\colon M(X) \to C(X)', \quad \mu \mapsto T\mu \;\; \text{mit } (T\mu)(f) := \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

ein isometrischer Isomorphismus von Banachräumen.

Beweis. Siehe zum Beispiel [14]. □

[1] Signum=Vorzeichen; das Maß einer Menge darf jetzt also auch negativ sein

9.12 Definition. Sei $X \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer. Durch

$$B(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid \|f\|_\infty < \infty,\ f \text{ ist Borel-messbar}\}$$

wird die Menge aller beschränkten Borel-messbaren Funktionen definiert. Offensichtlich ist $\big(B(X), \|\cdot\|_\infty\big)$ ein C^*-Algebra mit punktweise Multiplikation als Multiplikation, $f \cdot g(x) := f(x)g(x)$, und komplexe Konjugation als Involution, $f^* = \overline{f}$.

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X)$ heißt *punktweise und gleichmäßig beschränkt* konvergent gegen ein $f \in B(X)$, wenn $f_n \longrightarrow f \quad (n \longrightarrow \infty)$ punktweise gilt, sowie $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$.

9.13 Lemma. *Sei $X \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer, sowie $C(X) \subset U \subset B(X)$. Es sei U abgeschlossen bzgl. punktweiser und gleichmäßig beschränkter Konvergenz, d.h. falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ punktweise und gleichmäßig beschränkt gegen $f \in B(X)$ konvergiert, so folgt $f \in U$. Dann gilt bereits $U = B(X)$.*

Beweis. (a) Sei V der Durchschnitt aller Mengen S mit $C(X) \subset S \subset B(X)$, welche abgeschlossen sind bzgl. punktweiser und gleichmäßig beschränkter Konvergenz. Wir werden zeigen, dass $V = B(X)$ gilt, damit folgt auch $U = B(X)$. Wegen $C(X) \subset S$ für alle genannten S ist offensichtlich $C(X) \subset V$.

Wir zeigen, dass V ein Vektorraum ist. Sei zunächst $f \in C(X)$ fest. Dann gelten für $V_f := \{h \in B(X) \colon f + h \in V\}$ die Eigenschaften $C(X) \subset V_f$, und V_f ist abgeschlossen bzgl. obiger Konvergenz. Damit folgt $V_f \supset V$.

Für jedes $g \in V$ und jedes $f \in C(X)$ gilt also $g \in V_f$, d.h. $f + g \in V$. Damit ist $V_g \supset C(X)$, und da V_g ebenfalls abgeschlossen ist bzgl. obiger Konvergenz, folgt $V_g \supset V$. Insgesamt erhalten wir $f + g \in V$ für alle $f, g \in V$. Genauso zeigt man, dass V bzgl. Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

(b) Wir zeigen, dass $V = B(X)$ gilt: Da die Stufenfunktionen im Raum $B(X)$ der beschränkten messbaren Funktionen dicht liegen (im Sinne der punktweisen und gleichmäßig beschränkten Konvergenz), reicht es zu zeigen, dass jede Stufenfunktion in V enthalten ist. Und dafür wiederum reicht es zu zeigen, dass jede charakteristische Funktion einer messbaren Menge in V enthalten ist, denn V ist ein Vektorraum. Dazu zeigen wir, dass jede charakteristische Funktion durch stetige Funktionen approximiert werden kann.

Sei also $\mathscr{B}(X)$ die σ-Algebra der Borelmengen von X und

$$\mathscr{F} := \{A \in \mathscr{B}(X) \colon \chi_A \in V\}.$$

Falls A offen ist, existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X)$ mit $0 \le f_n \le 1$ und $f_n(t) \longrightarrow \chi_A(t) \quad (n \longrightarrow \infty)$ für alle $t \in X$. Wegen der Abgeschlossenheit von V unter der obigen Konvergenz sind also alle offenen Mengen in $\mathscr{F}$ enthalten, insbesondere auch X.

Wir zeigen, dass folgende Aussagen gelten:

(i) Falls $A, B \in \mathscr{F}$ mit $A \subset B$, so ist auch $B \setminus A \in \mathscr{F}$. Denn es gilt $\chi_{B\setminus A} = \chi_B - \chi_A$, und da V ein Vektorraum ist, folgt $\chi_{B\setminus A} \in V$.

(ii) Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ paarweise disjunkt. Dann ist auch $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}$. Denn es gilt $\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$, d.h. χ_A ist punktweiser Limes einer gleichmäßig beschränkten Folge von Funktionen in V und damit selbst in V.

Die Eigenschaften (i) und (ii) sagen, dass $\mathscr{F}$ ein Dynkinsystem[2] ist. Dieses enthält die in X offenen Teilmengen. Sei nun $\mathscr{Z}$ das System dieser offenen Teilmengen. Dann ist

$$\mathscr{F} \supset \mathscr{D}(\mathscr{Z}) = \sigma(\mathscr{Z}) = \mathscr{B}(X) \supset \mathscr{F},$$

woraus sich $\mathscr{F} = \mathscr{B}(X)$ ergibt. Also liegt jede Stufenfunktion in V, was zu zeigen war. $\square$

9.14 Satz (Messbarer Funktionalkalkül). *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gibt es genau eine Abbildung $\Phi\colon B(\sigma(T)) \to L(H)$ mit*

(i) $\Phi(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = T,\ \Phi(\mathbf{1}) = \mathrm{id}_H$.

(ii) *Φ ist ein stetiger $*$-Homomorphismus von C^*-Algebren, und es ist*

$$\|\Phi(f)\|_{L(H)} \le \|f\|_\infty .$$

(iii) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(\sigma(T))$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f_n(t) \longrightarrow f(t) \quad (t \in \sigma(T))$. Dann folgt $\langle \Phi(f_n)x, y\rangle \longrightarrow \langle \Phi(f)x, y\rangle \quad (x, y \in H)$.*

Beweis. Wir reservieren für die Dauer diese Beweises die Schreibweise $f(T)$ für stetige f; für messbare beschränkte Funktionen f schreiben wir hingegen $\Phi(f)$.

Schritt 1: Eindeutigkeit von Φ:

Durch (i)–(ii) wird $\Phi(f)$ für $f \in C(\sigma(T))$ bereits festgelegt (siehe Satz 9.6). Nach (iii) ist Φ eindeutig bestimmt für alle Funktionen, welche punktweiser Limes von stetigen Funktionen sind. Nach Lemma 9.13 ist dies aber schon $B(\sigma(T))$.

[2] Ein Dynkinsystem $\mathscr{D}$ ist eine Teilmenge der Potenzmenge von X mit folgenden Eigenschaften:

- $\emptyset \in \mathscr{D}$,
- wenn $A \in \mathscr{D}$, dann auch $X \setminus A \in \mathscr{D}$,
- wenn $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ für paarweise disjunkte A_n, dann auch $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}$.

Entscheidend ist: wenn $\mathscr{Z}$ ein System von Teilmengen von X ist, sodass die Bildung endlicher Durchschnitte aus $\mathscr{Z}$ nicht herausführt, dann ist das von $\mathscr{Z}$ erzeugte Dynkinsystem $\mathscr{D}(\mathscr{Z})$ gleich der von $\mathscr{Z}$ erzeugten σ–Algebra $\sigma(\mathscr{Z})$.

Schritt 2: Konstruktion von Φ:

Seien $x, y \in H$. Dann definiert

$$\ell_{x,y} \colon C(\sigma(T)) \to \mathbb{C},\ f \mapsto \langle f(T)x, y\rangle$$

eine stetige Linearform. Dabei ist die Linearität klar, die Stetigkeit folgt aus

$$|\ell_{x,y}(f)| \leq \|f(T)x\| \cdot \|y\| = \|f\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\| \,.$$

Hier wurde der stetige Funktionalkalkül Satz 9.7 verwendet. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz 9.11 existiert ein komplexes Maß $\mu_{x,y} \in M(\sigma(T))$ mit

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} \quad (f \in C(\sigma(T))) \tag{9-2}$$

Ebenfalls nach Satz 9.11 gilt $\|\mu_{x,y}\|_M = \|\ell_{x,y}\|_{(C(\sigma(T)))'} \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Die rechte Seite ist aber nicht nur für stetige f, sondern auch für beschränkte messbare $f \in B(\sigma(T))$ definiert. Für $f \in B(\sigma(T))$ betrachte also die Abbildung

$$(x, y) \mapsto \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y}.$$

Diese Abbildung ist sesquilinear, und wegen

$$\left| \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \|\mu_{x,y}\|_M \leq \|f\|_\infty \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

auch stetig. Nach Lemma 9.8 existiert also ein eindeutiger Operator $\Phi(f) \in L(H)$ mit $\|\Phi(f)\|_{L(H)} \leq \|f\|_\infty$ und

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} \quad (x, y \in H). \tag{9-3}$$

Schritt 3: $\Phi\colon B(\sigma(T)) \to L(H)$ ist stetige lineare Abbildung mit (i):

Die Linearität von Φ folgt aus (9-3), denn dort ist die rechte Seite in f linear. Die Stetigkeit ergibt sich aus $\|\Phi(f)\|_{L(H)} \leq \|f\|_\infty$ und Satz 2.27. Weil $\Phi(f) = f(T)$ für stetige f gilt, haben wir auch (i).

Schritt 4: Φ erfüllt (iii):

Nach dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt

$$\langle \Phi(f_n)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f_n \,\mathrm{d}\mu_{x,y} \longrightarrow \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \langle \Phi(f)x, y\rangle \,,$$

wenn die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise und gleichmäßig beschränkt nach f konvergiert.

Schritt 5: Φ ist ein C^*-Algebren-Homomorphismus:

Sei $g \in C(\sigma(T))$ fest. Setze

$$U_g := \{f \in B(\sigma(T)) \colon \Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)\}.$$

Nach Satz 9.7 gilt $C(\sigma(T)) \subset U_g$. Wir zeigen, dass U_g bzgl. punktweiser und gleichmäßig beschränkter Konvergenz abgeschlossen ist. Seien $f_n \in U_g$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f = \lim_n f_n$ punktweise. Dann gilt nach (iii)

$$\langle \Phi(fg)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(f_n g)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(f_n)\Phi(g)x, y\rangle = \langle \Phi(f)\Phi(g)x, y\rangle\,.$$

Somit ist $f \in U_g$. Nach Lemma 9.13 folgt $U_g = B(\sigma(T))$, und deshalb gilt $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$, wenn eine der beiden Funktionen f, g stetig ist, und die andere beschränkt und messbar. Eine Wiederholung dieser Argumentation zeigt dann, dass Φ multiplikativ ist. Genauso zeigt man $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$. □

Wir schreiben wieder $f(T)$ statt $\Phi(f)$, wenn f beschränkt und messbar ist. Das nächste Lemma zeigt, dass sogar Konvergenz in der starken Operatortopologie vorliegt.

9.15 Lemma. *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $B(\sigma(T)) \to B(H)$, $f \mapsto f(T)$ der messbare Funktionalkalkül. Falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(\sigma(T))$ mit $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f_n \longrightarrow f$ punktweise, so gilt $f_n(T)x \longrightarrow f(T)x$ für alle $x \in H$.*

Beweis. In einem Hilbertraum gilt $z_n \longrightarrow z$ in der Normtopologie genau dann, wenn $z_n \longrightarrow z$ in der schwachen Topologie und $\|z_n\| \longrightarrow \|z\|$ gilt. Dies folgt sofort aus

$$\|z_n - z\|^2 = \|z_n\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle z_n, z\rangle + \|z\|^2\,.$$

In der Situation von Satz 9.14 haben wir die schwache Konvergenz von $f_n(T)x$ gegen $f(T)x$ nach (iii). Die Konvergenz der Norm folgt aus

$$\begin{aligned}\|f_n(T)x\|^2 &= \langle f_n(T)x, f_n(T)x\rangle = \langle f_n(T)^* f_n(T)x, x\rangle = \big\langle (\overline{f}_n f_n)(T)x, x\big\rangle \\ &\to \big\langle (\overline{f} f)(T)x, x\big\rangle = \|f(T)x\|^2\,.\end{aligned}$$

□

b) Orthogonale Projektionen

9.16 Definition. Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann heißt $P\colon H \to H$, $x \mapsto x_1$ mit $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$, die orthogonale Projektion von H auf M.

9.17 Lemma. a) *Sei P eine orthogonale Projektion. Dann ist P stetig mit*

$$\|P\| = \begin{cases} 1 & : M \neq \{0\}, \\ 0 & : M = \{0\}. \end{cases}$$

Es gilt $\ker P = M^\perp$ *und* $R(P) = M$.

b) *Ein Operator $P \in L(H)$ ist genau dann orthogonale Projektion, wenn $P^2 = P = P^*$.*

Beweis. **Schritt 1: Teil a):**

Es gilt unter Verwendung des Satzes von Pythagoras

$$\|Px\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

d.h. $P \in L(H)$ und $\|P\|_{L(H)} \leq 1$. Für $M = \{0\}$ ist $P = 0$. Sonst gilt für $x \in M \setminus \{0\}$ die Gleichheit $x = Px$ und damit $\|P\|_{L(H)} = 1$.

Schritt 2: Teil b). Sei $P \in L(H)$ orthogonale Projektion:

Die Gleichheit $P^2 = P$ ist klar nach Definition von P. Seien $x, y \in H$ mit $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, wobei $x_1, y_1 \in M$ und $x_2, y_2 \in M^\perp$. Dann gilt

$$\langle Px, y \rangle = \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1 + y_1 \rangle + \underbrace{\langle x_1, y_2 \rangle}_{=0} = \langle x, y_1 \rangle = \langle x, Py \rangle,$$

d.h. es ist tatsächlich $P = P^*$.

Schritt 3: Teil b). Sei $P^2 = P = P^* \in L(H)$:

Setze $M := R(P)$. Für eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ mit $y_n \longrightarrow y$ existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ mit $y_n = Px_n$, und es ist

$$Py_n = P^2 x_n = Px_n = y_n, \tag{9-4}$$

und damit

$$\|y_n - Py\| = \|P(y_n - y)\| \leq \|P\|_{L(H)} \cdot \|y_n - y\| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),$$

d.h. $Py = y$ wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes. Somit ist M abgeschlossen. Aus Satz 6.24 und $P = P^*$ folgt dann $M^\perp = \ker P$.

Weil M abgeschlossen ist, existiert die orthogonale Projektion $\widetilde{P}$ auf den Unterraum M, und diese erfüllt $\widetilde{P} = \widetilde{P}^2 = \widetilde{P}^*$ wegen Schritt 2.

Für $x, y \in H$ haben wir die Zerlegungen

$$x = x^{(1)} + x^{(2)}, \qquad y = y^{(1)} + y^{(2)}, \qquad x^{(1)}, y^{(1)} \in M, \quad x^{(2)}, y^{(2)} \in M^\perp,$$

und es folgt, für beliebige $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{P}x, y \right\rangle &= \left\langle x, \widetilde{P}y \right\rangle && \Big| \quad \widetilde{P} = \widetilde{P}^* \\ &= \langle x, y^{(1)} \rangle = \langle x, P(y^{(1)} + y^{(2)}) \rangle && \Big| \quad \text{(9-4) und } y^{(2)} \in \ker P \\ &= \langle Px, y \rangle && \Big| \quad P = P^*. \end{aligned}$$

Also gilt $\widetilde{P} = P$, und P ist eine orthogonale Projektion. □

9.18 Lemma. *Sei H ein Hilbertraum, und seien P_1, P_2 orthogonale Projektionen auf abgeschlossene Unterräume M_1 bzw. M_2.*

a) *P_1P_2 ist genau dann orthogonale Projektion, falls $P_1P_2 = P_2P_1$ gilt. In diesem Fall ist P_1P_2 orthogonale Projektion auf den Unterraum $M_1 \cap M_2$.*

b) *Es sind äquivalent:*

(i) $M_1 \subset M_2$.

(ii) $\forall x \in H : \; \|P_1x\| \le \|P_2x\|$.

(iii) *Es gilt $P_1 \leqslant P_2$ im Sinne von* $[\forall x \in H : \; \langle P_1x, x\rangle \le \langle P_2x, x\rangle]$.

(iv) *Es gilt $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.*

Beweis. a) (i). Es gelte $P_1P_2 = P_2P_1$. Dann erhalten wir

$$(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2$$

und

$$(P_1P_2)^* = (P_2P_1)^* = P_1^*P_2^* = P_1P_2.$$

Also ist P_1P_2 eine orthogonale Projektion.

(ii). Sei P_1P_2 orthogonale Projektion. Dann gilt für $x, y \in H$

$$\langle x, P_2P_1y\rangle = \langle x, P_2^*P_1^*y\rangle = \langle P_1P_2x, y\rangle = \langle x, P_1P_2y\rangle\,.$$

Daher ist $P_1P_2 = P_2P_1$.

In diesem Fall gilt $R(P_2P_1) \subset R(P_2) = M_2$ und $R(P_2P_1) = R(P_1P_2) \subset M_1$. Zu $x \in M_1 \cap M_2$ ist $x = P_1x = P_2x$, d.h. $(P_2P_1)x = x$. Insgesamt erhalten wir $R(P_2P_1) = M_1 \cap M_2$.

Der Beweis von Teil b) sei als Übungsaufgabe überlassen. □

9.19 Beispiel. Wir nehmen $H = \mathbb{C}^n$ und wählen ein $T \in L(H)$. Dann wird T durch eine Matrix aus dem $\mathbb{C}^{n\times n}$ dargestellt; und zur Vereinfachung der Notation schreiben wir für diese Matrix auch T. Sei $T = T^*$, und die reellen Eigenwerte von T seien paarweise verschieden: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Dann setzen wir $\mathcal{P}_j$ als den Orthogonalprojektor auf $\ker(T - \lambda_j)$, sowie $P_j := \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \ldots + \mathcal{P}_j$. Für diese P_j gelten dann die Voraussetzungen von Lemma 9.18.

9.20 Bemerkung. In Lemma 9.18 (iii) haben wir für beschränkte selbstadjungierte Operatoren (nicht notwendig Projektionen) eine Vergleichsrelation $\leqslant$ eingeführt. Diese hat für selbstadjungierte Q, R, $S \in L(H)$ folgende Eigenschaften:

- $Q \leqslant Q$,
- wenn $Q \leqslant R$ und $R \leqslant S$, dann $Q \leqslant S$,
- wenn $Q \leqslant R$, dann $Q + S \leqslant R + S$,
- wenn $Q \leqslant R$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann $\alpha Q \leqslant \alpha R$.

Aus Satz 8.11 erhalten wir weiterhin: wenn $Q \leqslant R$ und $R \leqslant Q$, dann $R = Q$. Offenkundig ist $0_{L(H)} \leqslant Q$ für jede Orthogonalprojektion Q.

9.21 Lemma. *Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(H)$ eine Folge orthogonaler Projektionen in einem Hilbertraum H mit $P_m \leqslant P_n$ für $m \leq n$. Dann konvergiert P_n punktweise gegen eine orthogonale Projektion $P \in L(H)$.*

Beweis. Für $x \in H$ ist $(\|P_n x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, monoton steigend (Lemma 9.18 b)), also konvergent. Für $m \leq n$ ist

$$\begin{aligned}\|P_n x - P_m x\|^2 &= \underbrace{\langle P_n x, P_n x\rangle}_{=\|P_n x\|^2} - \underbrace{\langle P_n x, P_m x\rangle}_{=\langle P_m P_n x, x\rangle = \langle P_m x, x\rangle = \|P_m x\|^2} - \langle P_m x, P_n x\rangle + \underbrace{\langle P_m x, P_m x\rangle}_{=\|P_m x\|^2} \\ &= \|P_n x\|^2 + \|P_m x\|^2 - 2\|P_m x\|^2 \longrightarrow 0 \quad (m, n \longrightarrow \infty).\end{aligned}$$

Also existiert $\lim_{n\to\infty} P_n x$, und der Grenzwert hängt linear von x ab; wir können ihn also Px nennen, mit $P \in L(H)$.

Es gilt $\langle Px, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, P_n y\rangle = \langle x, Py\rangle$ und

$$\left\langle P^2 x, y\right\rangle = \langle Px, Py\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_n x, P_n y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_n x, y\rangle = \langle Px, y\rangle\,.$$

Somit gilt $P^2 = P = P^*$. $\square$

c) Projektorwertige Maße und der Spektralsatz

9.22 Definition. Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum. Eine Abbildung $E\colon \mathscr{A} \to L(H)$ heißt ein projektorwertiges Maß (PV-Maß), falls gilt:

(i) $E(A)$ ist orthogonale Projektion $(A \in \mathscr{A})$.

(ii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$\Big[E\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)\Big]x = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(A_n)x \quad (x \in H).$$

(iii) Es gilt $E(X) = \mathrm{id}_H$.

Eine Menge $A \in \mathscr{A}$ heißt eine E-Nullmenge, falls $E(A) = 0$ (dabei ist die 0 auf der rechten Seite der Nulloperator in H).

Falls X topologischer Raum ist und $\mathscr{A} = \mathscr{B}(X)$ die Borel–σ–Algebra, so besitzt das PV-Maß kompakten Träger, falls eine kompakte Menge $K \in \mathscr{B}(X)$ existiert mit $E(K) = \mathrm{id}_H$.

9.23 Beispiel. Sei $H = \mathbb{C}^n$, und $T = T^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Wir wählen $X = \mathbb{R}$ und $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ als Borel–σ–Algebra. Für $A \in \mathscr{A}$ wählen wir $E(A)$ als den Projektor auf $\operatorname{span}\{u_j\colon \lambda_j \in A\}$, wobei u_j ein (jetzt beliebiger) Eigenvektor zum Eigenwert λ_j sei. Dann ist E ein projektorwertiges Maß. Die E-Nullmengen sind genau diejenigen messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$, die kein λ_j enthalten.

9.24 Lemma. *Sei E ein PV-Maß. Dann gilt*

a) $E(\emptyset) = 0_{L(H)}$.

b) $E(A \cup B) + E(A \cap B) = E(A) + E(B) \quad (A, B \in \mathscr{A})$.

c) $E(B \setminus A) = E(B) - E(A)$ *für* $A, B \in \mathscr{A}$ *mit* $A \subset B$.

d) Seien $A_n \in \mathscr{A}$ *mit* $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Dann ist* $E(\bigcup_n A_n)x = \lim_{n\to\infty} E(A_n)x$ *für alle* $x \in H$. *Analog gilt für* $A_n \in \mathscr{A}$ *mit* $A_n \supset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ *die Gleichheit* $E(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)x = \lim_{n\to\infty} E(A_n)x$.

e) $E(A \cap B) = E(A)E(B) = E(B)E(A) \quad (A, B \in \mathscr{A})$.

f) Seien $A, B \in \mathscr{A}$ *mit* $A \cap B = \emptyset$. *Dann ist* $R(E(A)) \perp R(E(B))$.

g) Sei $x \in H$. *Dann ist* $E_x\colon \mathscr{A} \to [0, \infty)$ *mit*

$$E_x(A) := \langle E(A)x, x\rangle = \|E(A)x\|^2$$

ein endliches Maß mit $\|E_x\|_M = E_x(X) = \|x\|^2$.

h) Seien $x, y \in H$. *Dann ist* $E_{x,y} \colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ *mit*

$$E_{x,y}(A) := \langle E(A)x, y\rangle$$

ein komplexes Maß mit $\|E_{x,y}\|_M \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Beweis. Übung $\square$

9.25 Definition. Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum, E ein PV-Maß. Sei $f \colon X \to \mathbb{C}$ eine Stufenfunktion, d.h. es existiert eine Darstellung der Form $f = \sum_{i=1}^n f_i \chi_{A_i}$ mit $f_i \in \mathbb{C}$ und $A_i \in \mathscr{A}$ disjunkt. Dann heißt

$$\int f \,\mathrm{d}E := \sum_{i=1}^n f_i E(A_i) \in L(H)$$

das Integral von f bzgl. E.

9.26 Lemma. *Sei* E *ein PV-Maß und seien* f, g *Stufenfunktionen.*

a) Die Abbildung $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}E$ *(vom Vektorraum der Stufenfunktionen nach* $L(H)$*) ist linear.*

b) Für $x \in H$ *gilt* $\left\|(\int f \,\mathrm{d}E)x\right\|^2 = \int |f|^2 \,\mathrm{d}E_x \leq \|f\|_\infty^2 \|x\|^2$.

c) Es gilt $(\int f \,\mathrm{d}E) \circ (\int g \,\mathrm{d}E) = \int fg \,\mathrm{d}E$.

d) Es gilt $(\int f \,\mathrm{d}E)^* = \int \overline{f} \,\mathrm{d}E$.

Beweis. a) ist klar.

b) Unter Verwendung des Satzes von Pythagoras erhalten wir

$$\begin{aligned}\left\|\Big(\int f \,\mathrm{d}E\Big)x\right\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^n f_i E(A_i)x\right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |f_i|^2 \|E(A_i)x\|^2 = \int |f|^2 \,\mathrm{d}E_x \\ &\leq \|f\|_\infty^2 \|E_x\|_M = \|f\|_\infty^2 \|x\|^2 .\end{aligned}$$

c) Mit Lemma 9.24 gilt

$$\Big(\int f \,\mathrm{d}E\Big)\Big(\int g \,\mathrm{d}E\Big) = \Big(\sum_{i=1}^n f_i E(A_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^m g_j E(B_j)\Big)$$

$$= \sum_{i,j} f_i g_j E(A_i)E(B_j) = \sum_{i,j} f_i g_j E(A_i \cap B_j)$$
$$= \int fg \, \mathrm{d}E.$$

d) folgt direkt aus der Definition des Integrals. □

9.27 Definition. Sei E ein PV-Maß auf $(X, \mathscr{A})$ mit Werten in $L(H)$. Für $f \in B(X)$ sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X)$ eine Folge von Stufenfunktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Definiere das Integral

$$\int f \, \mathrm{d}E := \int f(\lambda) \, \mathrm{d}E(\lambda) := \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}E \in L(H),$$

mit Konvergenz in der starken Operatortopologie. Für $A \in \mathscr{A}$ setzt man $\int_A f \, \mathrm{d}E := \int \chi_A f \, \mathrm{d}E$.

9.28 Bemerkung. a) Man beachte, dass das Integral wegen Lemma 9.26 b) wohldefiniert ist.

b) Die Eigenschaften von Lemma 9.26 übertragen sich in üblicher Weise auf messbare Funktionen.

c) Falls $K \in \mathscr{A}$ ist mit $E(K) = \mathrm{id}_H$, so ist $\int f \, \mathrm{d}E = \int_K f \, \mathrm{d}E$ für alle $f \in B(X)$ (denn $E(X \setminus K) = 0$).

9.29 Satz. *Sei $E\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to L(H)$ ein PV-Maß, und sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $E(K) = \mathrm{id}_H$.*

a) Durch $T := \int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$ wird ein selbstadjungierter Operator $T \in L(H)$ definiert.

b) Es gilt $E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$.

c) Die Abbildung $\Psi\colon B(\sigma(T)) \to L(H)$, $f \mapsto \int_{\sigma(T)} f \, \mathrm{d}E$ ist der (nach Satz 9.14 eindeutig bestimmte) messbare Funktionalkalkül zu T.

Beweis. a) ist klar nach Definition des Integrals und nach Lemma 9.26 d) (für messbare Funktionen).

b) Wähle ein Intervall $(a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $K \subset (a, b]$, d.h. $E((a, b]) = \mathrm{id}_H$.

(i) Wir zeigen zuerst: Zu $\mu \in \rho(T)$ existiert eine offene Umgebung U_μ von μ mit $E(U_\mu) = 0_{L(H)}$. Dazu approximieren wir $\mathrm{id}_{(a,b]}$ durch eine Treppenfunktion f mit äquidistanten Stufen, $f = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{(a_{k-1}, a_k]}$, wobei $a_k := a + k\delta \quad (k = 0, \ldots, N)$

mit $\delta = \frac{b-a}{N}$. Wenn wir $N \in \mathbb{N}$ passend wählen, ist $a_k \neq \mu$ für jedes k. Damit ist

$$\left\| T - \int f \,\mathrm{d}E \right\|_{L(H)} \leq \left\| \mathrm{id}_{(a,b]} - f \right\|_{\infty,(a,b]} \leq \delta.$$

Wegen $\int f \,\mathrm{d}E = \sum_{k=1}^N a_k E((a_{k-1}, a_k])$ und $\sum_{k=1}^N E((a_{k-1}, a_k]) = \mathrm{id}_H$ folgt

$$\left\| (\mu - T) - \sum_{k=1}^N (\mu - a_k) E((a_{k-1}, a_k]) \right\|_{L(H)} \leq \delta.$$

Falls δ hinreichend klein ist (d.h. N genügend groß), so ist der Operator $S := \sum_{k=1}^N (\mu - a_k) E((a_{k-1}, a_k])$ invertierbar, denn es ist $\mu - T$ invertierbar, und

$$S = (\mu - T) - ((\mu - T) - S) = (\mu - T)\Big[I - (\mu - T)^{-1}((\mu - T) - S)\Big],$$

wobei der Ausdruck $[\dots]$ wegen Satz 6.15 invertierbar ist, und für S^{-1} haben wir dann (wieder mit Satz 6.15)

$$\begin{aligned}
S^{-1} &= \Big[I - (\mu - T)^{-1}((\mu - T) - S)\Big]^{-1} (\mu - T)^{-1}, \\
\left\|S^{-1}\right\|_{L(H)} &\leq \frac{1}{1 - \|(\mu - T)^{-1}((\mu - T) - S)\|_{L(H)}} \left\|(\mu - T)^{-1}\right\|_{L(H)} \\
&\leq \frac{1}{1 - \|(\mu - T)^{-1}\|_{L(H)} \cdot \delta} \left\|(\mu - T)^{-1}\right\|_{L(H)} \\
&\leq \left\|(\mu - T)^{-1}\right\|_{L(H)} + 1,
\end{aligned}$$

wenn δ sehr klein ist. Aus Lemma 9.26 c) ist andererseits

$$S^{-1} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\mu - a_k} E((a_{k-1}, a_k]).$$

In der Summe sind nur diejenigen k relevant, für die $E((a_{k-1}, a_k]) \neq 0_{L(H)}$. Wenn wir dann ein $x \in R(E((a_{k-1}, a_k]))$ wählen und $S^{-1}x$ bestimmen, erkennen wir, dass

$$\left\|S^{-1}\right\|_{L(H)} = \max\left\{ \frac{1}{|\mu - a_k|} : E((a_{k-1}, a_k]) \neq 0_{L(H)} \right\},$$

und somit ist $E((a_{k-1}, a_k]) = 0_{L(H)}$ für alle k mit

$$|\mu - a_k| < \frac{1}{\|(\mu - T)^{-1}\|_{L(H)} + 1},$$

d.h. es ist $E(U_\mu) = 0_{L(H)}$ für eine offene Umgebung U_μ von μ.

(ii) Falls $K \subset \rho(T)$ kompakt ist, ist $K \subset \bigcup_{\mu \in K} U_\mu$ eine offene Überdeckung mit $E(U_\mu) = 0_{L(H)}$ für alle μ. Durch die Kompaktheit gibt es eine endliche Teilüberdeckung $K \subset \sum_{i=1}^n U_{\mu_i}$, und $0_{L(H)} \leqslant E(K) \leqslant \sum_{i=1}^n E(U_{\mu_i}) = 0_{L(H)}$, also $E(K) = 0_{L(H)}$.

(iii) Schreibe $\rho(T)$ als abzählbare Vereinigung aufsteigender kompakter Mengen $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Dann folgt $E(\rho(T))x = \lim_{j\to\infty} E(K_j)x = 0$ für alle $x \in H$, d.h. $E(\rho(T)) = 0_{L(H)}$ und damit $E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$.

c) Wir rechnen die Eigenschaften von Satz 9.14 nach. Dabei ist $\Psi(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = T$ nach Definition von T, und $\Psi(\mathbf{1}_{\sigma(T)}) = \mathrm{id}_H$ gilt nach b). Dass Ψ stetiger Homomorphismus von C*-Algebren ist, ist klar nach Lemma 9.26 für messbare Funktionen.

Für die letzte Eigenschaft in Satz 9.14 benutzen wir das Maß $E_{x,y}$ aus Lemma 9.24 h). Es gilt

$$\Big\langle \Big(\int f \,\mathrm{d}E \Big) x, y \Big\rangle = \int f \,\mathrm{d}E_{x,y}.$$

Dies ist klar für Treppenfunktionen und folgt durch Approximation für messbare Funktionen. Nun folgt 9.14 (iii) aus dem Satz über majorisierte Konvergenz.

Damit erfüllt Ψ alle Eigenschaften aus Satz 9.14 und stimmt daher mit dem messbaren Funktionalkalkül überein. □

An dieser Stelle einige Erklärungen zu unserer jetzigen Strategie. Der messbare Funktionalkalkül gemäß Satz 9.14 sagt uns, dass es einen selbstadjungierten Operator $f(T)$ gibt, wenn f beschränkt und messbar ist, und T ist selbstadjungiert und beschränkt. Wir haben aber noch keine „schöne“ Darstellung für diesen Operator $f(T)$. Eine erste Verbesserung dieser Situation ergibt sich aus Satz 9.29: Sei ein PV-Maß E gegeben. Daraus wird gemäß Teil a) ein beschränkter selbstadjungierter Operator T gebaut, und für diesen Operator bekommen wir dann in Teil c) eine explizite Darstellung von $f(T)$.

Im folgenden Beispiel gehen wir ein wenig anders vor: wir starten mit einem beschränkten selbstadjungierten Operator T, und zu diesem T erraten wir ein PV-Maß E, welches den Operator T dann erneut gemäß Satz 9.29 Teil a) erzeugt. In Satz 9.32 werden wir dann erkennen, dass dieses PV-Maß E tatsächlich das einzige mit den gewünschten Eigenschaften ist.

9.30 Beispiel (Multiplikationsoperator)**.** Sei $H = L^2([0,1])$ und sei $T \in L(H)$ mit $(Tx)(t) := t \cdot x(t)$. Dann ist T selbstadjungiert mit $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0,1]$.

Für $x, y \in L^2([0,1])$ gilt

$$\langle Tx, y \rangle = \int_0^1 (Tx)(t) \cdot \overline{y(t)} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 t x(t) \overline{y(t)} \,\mathrm{d}t = \int_{\sigma(T)} \lambda \,\mathrm{d}E_{x,y}(\lambda)$$

mit dem Maß $E_{x,y}(\lambda) = x(\lambda)\overline{y(\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda$. Das Maß $E_{x,y}$ besitzt also eine Dichte bezüglich des Lebesgue–Maßes. Für das Maß erhalten wir somit

$$E_{x,y}(A) = \int_{[0,1]\cap A} x(\lambda)\overline{y(\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda = \langle \chi_{[0,1]\cap A}\cdot x, y\rangle \quad (A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})),$$

d.h. $E(A)x = \chi_{[0,1]\cap A}\cdot x$. Die Projektion $E(A)$ ist damit gegeben als Multiplikationsoperator mit $\chi_{[0,1]\cap A}$.

9.31 Satz (Spektrum und Spektralmaß)**.** *Sei E ein PV-Maß, sodass für ein kompaktes $K \subset \mathbb{R}$ die Beziehung $E(K) = \mathrm{id}_H$ gilt; und ein beschränkter selbstadjungierter Operator T sei definiert als $T := \int \lambda\,\mathrm{d}E(\lambda)$, siehe Satz 9.29 Teil a).*

Für das Spektrum dieses Operators T gilt dann folgendes:

a) Für $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ist $\lambda_0 \in \rho(T)$ genau dann, falls eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von λ_0 existiert mit $E(U) = 0_{L(H)}$.

b) Es ist $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ genau dann, wenn $E(\{\lambda_0\}) \neq 0_{L(H)}$.

c) Für alle $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gilt $R(E(\{\lambda_0\})) = \ker(T - \lambda_0)$.

d) Es ist $\lambda_0 \in \sigma_c(T)$ genau dann, wenn $E(\{\lambda_0\}) = 0_{L(H)}$ und $E((\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)) \neq 0_{L(H)}$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

Beweis. **Teil a):**

Wir wissen bereits aus $E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$, dass $E(\rho(T)) = 0_{L(H)}$. Dann ist auch $E(U) = 0_{L(H)}$ für alle offenen $U \subset \rho(T)$.

Sei andererseits $U \subset \mathbb{R}$ eine (o.E. offene) Umgebung von λ_0 mit $E(U) = 0_{L(H)}$. Definiere $f, g \in B(\sigma(T))$ durch $f(\lambda) := \frac{1}{\lambda-\lambda_0}\cdot\chi_{\sigma(T)\setminus U}$ und $g(\lambda) := (\lambda - \lambda_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(T)(T-\lambda_0) &= f(T)g(T) = (f\cdot g)(T) = \chi_{\sigma(T)\setminus U}(T) \\ &= \int \chi_{\sigma(T)\setminus U}\,\mathrm{d}E = E(\sigma(T)\setminus U) = \mathrm{id}_H\,. \end{aligned}$$

Wegen $f(T)g(T) = g(T)f(T)$ folgt $g(T)f(T) = \mathrm{id}_H$, d.h. $f(T) = g(T)^{-1} = (T-\lambda_0)^{-1}$. Somit ist $\lambda_0 \in \rho(T)$.

Teil b), sei $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$:

Dann existiert ein $x \neq 0$ mit $(T - \lambda_0)x = 0$, und aus Satz 9.7 d) folgt dann $f(T)x = f(\lambda_0)x$ für alle $f \in C(\sigma(T))$, und nach Lemma 9.15 für alle $f \in B(\sigma(T))$. Wir wählen jetzt $f = \chi_{\{\lambda_0\}}$, was eine Stufenfunktion ist. Dann haben wir

$$x = 1\cdot x = f(\lambda_0)x = f(T)x = \left(\int f\,\mathrm{d}E\right)x = 1\cdot E(\{\lambda_0\})x \in R(E(\{\lambda_0\})),$$

und somit ist $\{0\} \neq \ker(T - \lambda_0) \subset R(E(\{\lambda_0\}))$, also $E(\{\lambda_0\}) \neq 0_{L(H)}$.

Teil b), sei $E(\{\lambda_0\}) \neq 0_{L(H)}$:

Dann existiert ein $x \neq 0$ mit $x \in R(E(\{\lambda_0\}))$. Weil $E(\{\lambda_0\})$ ein Projektor ist, haben wir dann $E(\{\lambda_0\})x = x$, für dieses spezielle x.

Falls f eine Stufenfunktion ist, gilt

$$f(T)x = \left(\int f \, \mathrm{d}E \right) x = \sum_{i=1}^{N} f_i E(A_i)x = \sum_{i=1}^{N} f_i E(A_i)E(\{\lambda_0\})x = f(\lambda_0)x.$$

Daraus und aus Lemma 9.15 bekommen wir die Identität $f(T)x = f(\lambda_0)x$ dann für beliebiges $f \in B(\sigma(T))$.

Nun wählen wir $f = \mathrm{id}_{\sigma(T)}$ und erhalten

$$Tx = \mathrm{id}_{\sigma(T)}(T)x = \mathrm{id}_{\sigma(T)}(\lambda_0)x = \lambda_0 x,$$

also folgt $x \in \ker(T - \lambda_0)$, und demnach also $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$.

Teil c):

Übung.

Teil d):

Weil T selbstadjungiert ist, gilt $\sigma_r(T) = \emptyset$, also $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \cap \rho(T)) \dot\cup \sigma_p(T) \dot\cup \sigma_c(T)$. Nun wende man a) und c) an. □

Der nächste Satz ist der Höhepunkt dieses Kapitels. Hierbei ist die Vorgehensweise im Vergleich zu Satz 9.29 und Satz 9.31 genau umgekehrt: wir starten mit einem beschränkten und selbstadjungierten Operator T. Anschließend ermitteln wir ein PV-Maß E, das diesen Operator T erzeugt. Hierbei ist Satz 9.31 hilfreich, der uns (vom Spektrum $\sigma(T)$ ausgehend) einige Informationen darüber liefert, wie E aussehen muss. Weiterhin gewinnen wir eine leistungsfähige Darstellung für den messbaren Funktionalkalkül zu T.

9.32 Satz (Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren)**.** *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes PV-Maß E mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}$ mit $E(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$ und*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda).$$

Die Abbildung $B(\sigma(T)) \to L(H)$, $f \mapsto f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) \, \mathrm{d}E(\lambda)$ definiert den messbaren Funktionalkalkül zu T. Für $f \in B(\sigma(T))$ und $x, y \in H$ gilt

$$\langle f(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) \, \mathrm{d}E_{x,y}(\lambda),$$

wobei $E_{x,y}(A) := \langle E(A)x, y\rangle$ für $x, y \in H$ und $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ das übliche komplexwertige Maß ist.

Beweis. **Schritt 1: Konstruktion von E:**

Sei $f \mapsto f(T)$ der messbare Funktionalkalkül nach Satz 9.14. Für $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ definiere

$$E(A) := \chi_A(T).$$

Schritt 2: E ist PV-Maß:

(i) Wegen $\chi_A = \chi_A^2 = \overline{\chi}_A$ gilt $E(A) = E(A)^2 = E(A)^*$, d.h. $E(A)$ ist eine orthogonale Projektion.

(ii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}(\sigma(T))$ eine Familie paarweiser disjunkter Mengen. Die Funktionen $f_n := \sum_{j=1}^n \chi_{A_j}$ konvergieren punktweise und gleichmäßig beschränkt gegen $f := \sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j} = \chi_A$ mit $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_n$. Nach Lemma 9.15 folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} E(A_j)x = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(T)x = \chi_A(T)x = E(A)x \quad (x \in H).$$

(iii) Nach Satz 9.14 gilt $E(\sigma(T)) = \mathbf{1}_{\sigma(T)}(T) = \mathrm{id}_H$.

Nach (i)–(iii) ist $E\colon \mathscr{B}(\sigma(T)) \to L(H)$ ein PV-Maß.

Schritt 3: E erzeugt T:

Definiere den Operator $S := \int_{\sigma(T)} \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda)$ nach Satz 9.29. Es ist zu zeigen, dass $S = T$. Sei $f \mapsto \Psi(f) := \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}E$ der diesem S zugehörige messbare Funktionalkalkül nach Satz 9.29, und $f \mapsto f(T)$ der zu T gehörige Funktionalkalkül nach Satz 9.14.

Wähle jetzt eine Treppenfunktion f auf $\sigma(T)$ mit $\left\|f - \mathrm{id}_{\sigma(T)}\right\|_{\infty,\sigma(T)} \leq \varepsilon$. Dann gilt

$$\|T - S\|_{L(H)} \leq \|T - f(T)\|_{L(H)} + \|f(T) - \Psi(f)\|_{L(H)} + \|\Psi(f) - S\|_{L(H)}.$$

Nach Satz 9.14 ist

$$\|T - f(T)\|_{L(H)} \leq \left\|\mathrm{id}_{\sigma(T)} - f\right\|_{\infty,\sigma(T)} \leq \varepsilon.$$

Ebenso ist nach Lemma 9.26 b)

$$\|S - \Psi(f)\|_{L(H)} = \left\|\int_{\sigma(T)} (\lambda - f(\lambda)) \,\mathrm{d}E(\lambda)\right\|_{L(H)} \leq \left\|\mathrm{id}_{\sigma(T)} - f\right\|_{L^\infty(\sigma(T))} \leq \varepsilon.$$

Schließlich ist

$$f(T) - \Psi(f) = \sum_{j=1}^{n} f_i \chi_{A_i}(T) - \sum_{j=1}^{n} f_i E(A_i) = 0_{L(H)}.$$

Insgesamt erhalten wir $\|T - S\|_{L(H)} \leq 2\varepsilon$, d.h. $T = S$.

Schritt 4: E ist eindeutig:

Sei $\widetilde{E}$ ein weiteres PV-Maß mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}$, für das $\widetilde{E}(\sigma(T)) = \mathrm{id}_H$ und $T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}\widetilde{E}(\lambda)$. Für jedes $f \in B(\sigma(T))$ ist dann (vgl. Satz 9.29 c))

$$\int_{\sigma(T)} f(\lambda) \, \mathrm{d}E = f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) \, \mathrm{d}\widetilde{E}.$$

Für $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ wählen wir die Stufenfunktion $f = \chi_A$, und es ergibt sich

$$E(A) = \chi_A(T) = \widetilde{E}(A),$$

also ist tatsächlich $E = \widetilde{E}$. □

9.33 Lemma. *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert, E das zugehörige PV-Maß, und $S \in L(H)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$ST = TS$,*

(ii) *für alle $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ gilt $SE(A) = E(A)S$,*

(iii) *für alle $f \in B(\sigma(T))$ gilt $Sf(T) = f(T)S$.*

Beweis. **(i)$\Longrightarrow$(ii):**

Aus $ST = TS$ folgt $ST^n = T^nS$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\langle ST^n x, y\rangle = \langle T^n Sx, y\rangle \quad (x, y \in H, n \geq 0). \tag{9-5}$$

Wir wissen bereits, dass E durch die Familie komplexer Maße $E_{x,y}$ mit $x, y \in H$ eindeutig bestimmt ist, vermöge der Relation $\langle E(A)x, y\rangle = E_{x,y}(A)$. Wegen $\langle SE(A)x, y\rangle = \langle E(A)x, S^*y\rangle$ ist auch $A \mapsto \langle SE(A)x, y\rangle$ ein komplexes Maß. Für alle $x, y \in H$ und $n \in \mathbb{N}_0$ haben wir, mit $f(s) := s^n$, dem Spektralsatz und (9-5),

$$\begin{aligned}\int \lambda^n \, \mathrm{d}\, \langle SE(\lambda)x, y\rangle &= \int f(\lambda) \, \mathrm{d}\, \langle E(\lambda)x, S^*y\rangle = \int f(\lambda) \, \mathrm{d}E_{x,S^*y} \\ &= \langle f(T)x, S^*y\rangle = \langle ST^n x, y\rangle = \langle T^n Sx, y\rangle = \langle f(T)Sx, y\rangle \\ &= \int f(\lambda) \, \mathrm{d}E_{Sx,y} = \int \lambda^n \, \mathrm{d}\, \langle E(\lambda)Sx, y\rangle \, .\end{aligned} \tag{9-6}$$

Also stimmen die Maße $\mu^{(1)}_{x,y}(A) := \langle SE(A)x, y\rangle$ und $\mu^{(2)}_{x,y}(A) := \langle E(A)Sx, y\rangle$ als Funktionale überein auf den Polynomen λ^n und damit auf den stetigen Funktionen $f \in C(\sigma(T))$ (Satz von Weierstraß). Nach dem Darstellungssatz von Riesz (Satz 9.11) sind die Maße gleich. Damit ergibt sich aus (9-6), dass

$$\langle SE(A)x, y\rangle = \langle E(A)Sx, y\rangle \quad (x, y \in H, \ A \in \mathscr{B}(\sigma(T))),$$

d.h. es gilt $SE(A) = E(A)S$ für alle $A \in \mathscr{B}(\sigma(T))$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii):

Folgt aus $\langle Sf(T)x,y\rangle = \int f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu^{(1)}_{x,y}(\lambda)$ und der Beziehung $\langle f(T)Sx,y\rangle = \int f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu^{(2)}_{x,y}(\lambda)$, vgl. die obige Rechnung. Wegen $SE(A) = E(A)S$ sind die beiden Maße gleich, also erhalten wir $\langle Sf(T)x,y\rangle = \langle f(T)Sx,y\rangle$.

(iii)$\Longrightarrow$(i):

Setze $f := \mathrm{id}_{\sigma(T)}$. □

9.34 Beispiel. Sei $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine selbstadjungierte Matrix mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\mu_1,\dots,\mu_m$. Sei $E(\{\mu_j\})$ die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum $\ker(\mu_j - T)$. Dann gilt

$$T = \sum_{j=1}^m \mu_j E(\{\mu_j\}) = \int_{\sigma(T)} \lambda\,\mathrm{d}E(\lambda),$$

wobei das PV-Maß zu T gegeben ist durch

$$E(A) = \sum_{j=1}^m E(A\cap\{\mu_j\}) = \sum_{\{j:\,\mu_j\in A\}} E(\{\mu_j\}) \quad (A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})).$$

9.35 Lemma. *Sei $A \in L(H)$ selbstadjungiert mit $A \geqslant 0_{L(H)}$. Dann existiert genau ein selbstadjungiertes $B \in L(H)$ mit $B \geqslant 0_{L(H)}$ und $B^2 = A$. Der Operator B heißt die Wurzel von A.*

Beweis. Der Operator $B := \sqrt{A}$ erfüllt $B \geqslant 0_{L(H)}$ und $B^2 = A$ nach dem Spektralsatz. Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit. Sei also $\widetilde{B} \geqslant 0_{L(H)}$ mit $\widetilde{B}^2 = A$. Wähle $b \in \mathbb{R}$ mit $b > M := \sup_{\|x\|=1}\langle Ax,x\rangle$ und $b > \left\|\widetilde{B}\right\|^2_{L(H)}$. Sei weiterhin $m := \inf_{\|x\|=1}\langle Ax,x\rangle$.

Zur Funktion $g(t) := \sqrt{t}$ existiert nach dem Satz von Weierstraß eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen mit $\|p_n - g\|_\infty \longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty)$ im Intervall $[0,b] \supset [m,M]$. Damit gilt

$$\|p_n(A) - B\|_{L(H)} = \|p_n(A) - g(A)\|_{L(H)} \longrightarrow 0. \tag{9-7}$$

Setze $\widetilde{p}_n(t) := p_n(t^2)$ und $\widetilde{g}(t) := g(t^2)(=t)$. Dann ist

$$\|\widetilde{p}_n - \widetilde{g}\|_{\infty,[0,\sqrt{b}]} = \|p_n - g\|_{\infty,[0,b]} \longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty).$$

Wir erinnern daran, dass

$$\left[0,\sqrt{b}\right] \supset \left[0,\left\|\widetilde{B}\right\|_{L(H)}\right].$$

Nach dem Funktionalkalkül gilt, für $n \longrightarrow \infty$,

$$\left\|\widetilde{p}_n(\widetilde{B}) - \widetilde{B}\right\|_{L(H)} = \left\|\widetilde{p}_n(\widetilde{B}) - \widetilde{g}(\widetilde{B})\right\|_{L(H)} = \|\widetilde{p}_n - \widetilde{g}\|_{\infty,[0,\sqrt{b}]} \longrightarrow 0. \tag{9-8}$$

Aber es ist $\widetilde{p}_n(\widetilde{B}) = p_n(\widetilde{B}^2) = p_n(A)$. Somit folgt aus (9-7) und (9-8) die Gleichheit $\widetilde{B} = g(A) = B$. □

9.36 Definition. Sei $A \in L(H)$. Der Operator $|A| := \sqrt{A^*A}$ heißt *Absolutbetrag von* A.

9.37 Lemma. *Seien $A, B \in L(H)$ selbstadjungiert mit $A \geqslant 0_{L(H)}$, $B \geqslant 0_{L(H)}$ und $AB = BA$. Dann ist $AB \geqslant 0_{L(H)}$.*

Beweis. Es ist $\sqrt{B}$ selbstadjungiert, und

$$AB = A\sqrt{B}\sqrt{B} = \sqrt{B}A\sqrt{B} \geqslant 0_{L(H)}$$

wegen

$$\left\langle \sqrt{B}A\sqrt{B}x, x \right\rangle = \left\langle A\sqrt{B}x, \sqrt{B}x \right\rangle \geq 0 \quad (x \in H).$$

Hier wurde verwendet, dass A und $\sqrt{B}$ vertauschen (Lemma 9.33). □

9.38 Bemerkung. Aus dem Spektralsatz folgt eine ganze Reihe von Aussagen über Spektren und Normen von Operatoren. So gilt zum Beispiel:

a) Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $\lambda_0 \in \rho(T)$. Dann gilt

$$\left\|(T - \lambda_0)^{-1}\right\|_{L(H)} = \left[\operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(T))\right]^{-1}.$$

Denn die rechte Seite ist $\|f\|_\infty$ für die Funktion $f \in C(\sigma(T))$ mit $f(\lambda) := \frac{1}{\lambda - \lambda_0}$. Vergleiche dazu Satz 8.2.

b) Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $f \in C(\sigma(T))$. Dann ist $\|f(T)\|_{L(H)} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \|f\|_\infty$. Denn das Maximum ist der Spektralradius von T und $\|f(T)\|_{L(H)} = \|f\|_\infty$ nach dem stetigen Funktionalkalkül. (Vergleiche Satz 8.11.) Insbesondere folgt aus der Darstellung $T = \int_K \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$ bereits $\|T\|_{L(H)} \leq \max\{|\lambda| : \lambda \in K\}$.

9.39 Bemerkung. Ein weiteres Ergebnis ist die folgende Zerlegung eines Operators, auch bekannt als polare Zerlegung (vgl. [16]).

Sei $T \in L(H)$. Dann gilt:

- es existiert eine partielle Isometrie $U \in L(H)$ mit $T = U\sqrt{T^*T}$.
- es existiert genau eine partielle Isometrie $U \in L(H)$ mit $T = U\sqrt{T^*T}$ und $\ker U = \ker T$.
- wenn T normal ist, so gibt es ein unitäres U mit $T = U\sqrt{T^*T}$.

Hierbei heißt ein Operator $U \in L(H)$ eine partielle Isometrie, wenn U eine Isometrie auf dem Teilraum $(\ker U)^\perp$ ist.

Man denke an die Zerlegung $z = e^{\mathrm{i}\varphi}|z|$ für jede komplexe Zahl z.

9.40 Bemerkung. Der Spektralsatz wird häufig auch mit Hilfe von Spektralscharen formuliert. Dabei heißt eine Familie $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \subset L(H)$ eine Spektralschar, falls gilt:

(i) F_λ ist orthogonaler Projektor für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $F_\mu F_\lambda = F_\lambda F_\mu = F_\mu$ für alle $\mu \le \lambda$.

(iii) $F_\mu x \to F_\lambda x$ für $\mu \searrow \lambda$ $(x \in H)$ (Rechtsstetigkeit).

(iv) $F_\lambda x \longrightarrow 0$ für $\lambda \longrightarrow -\infty$ $(x \in H)$.

(v) $F_\lambda x \longrightarrow x$ für $\lambda \longrightarrow +\infty$ $(x \in H)$.

Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert und E das zugehörige PV-Maß. Dann wird durch

$$F_\lambda := E((-\infty, \lambda]) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

eine Spektralschar definiert. Definiert man das Integral über Spektralscharen geeignet (etwa im Sinne eines Riemann–Stieltjes–Integrals), so gilt

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d}F_\lambda.$$

Die Spektralscharen entsprechen den Verteilungsfunktionen in der Wahrscheinlichkeitstheorie, die Darstellung von T durch Spektralscharen ist äquivalent zur Darstellung durch PV-Maße.

Der Spektralsatz wurde oben für beschränkte selbstadjungierte Operatoren formuliert. Tatsächlich gilt dieser Satz aber für allgemeinere Operatoren: Zum einen kann die Selbstadjungiertheit $T = T^*$ durch die Normalität $TT^* = T^*T$ des Operators T ersetzt werden, zum anderen kann T auch unbeschränkt sein. Man beachte, dass zwei unbeschränkte Operatoren genau dann gleich sind, wenn sie gleichen Definitionsbereich besitzen und auf diesem übereinstimmen. Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen, der wesentliche Teil des Beweises wurde aber oben schon durchgeführt.

9.41 Definition und Satz (Integral über PV-Maß für messbare Funktionen). *Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum, $E\colon \mathscr{A} \to L(H)$ ein PV-Maß. Zu $x \in H$ sei wieder $E_x\colon \mathscr{A} \to [0,\infty)$ durch $E_x(A) := \|E(A)x\|^2$ definiert. Sei $f\colon X \to \mathbb{C}$ messbar.*

Definiere

$$D\left(\int f\,\mathrm{d}E\right) := \left\{x \in H\colon \int |f|^2\,\mathrm{d}E_x < \infty\right\}.$$

Dann existiert für alle $x \in D(\int f\,\mathrm{d}E)$ eine Folge von Stufenfunktionen $f_n\colon X \to \mathbb{C}$ mit $f_n \longrightarrow f$ punktweise und $\int |f_n - f|^2\,\mathrm{d}E_x \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$, und der Operator

$$\int f\,\mathrm{d}E\colon H \supset D\left(\int f\,\mathrm{d}E\right) \to H,\ x \mapsto \left(\int f\,\mathrm{d}E\right)x := \lim_{n\to\infty}\left(\int f_n\,\mathrm{d}E\right)x$$

ist wohldefiniert.

9.42 Satz (Spektralsatz, allgemeine Formulierung). *Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $T\colon H \supset D(T) \to H$ ein normaler Operator in H. Dann existiert genau ein PV-Maß $E\colon \mathscr{B}(\sigma(T)) \to L(H)$ mit*

$$T = \int_{\sigma(T)} \mathrm{id}_{\sigma(T)}\,\mathrm{d}E.$$

Für jede messbare Funktion $f\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$ wird durch

$$f(T) := \int_{\sigma(T)} f\,\mathrm{d}E,$$
$$D(f(T)) := \left\{x \in H\colon \int_{\sigma(T)} |f|^2\,\mathrm{d}E_x < \infty\right\}$$

ein normaler Operator definiert. Es gelten die üblichen Regeln für den Funktionalkalkül. Falls f ein Polynom ist, stimmt $f(T)$ mit der üblichen Definition überein.

Literatur

[1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York 1975.

[2] Diestel, J., Uhl, J. J.: Vector measures. Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[3] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear Operators. I. General Theory. Interscience Publishers, New York 1963.

[4] Edwards, R. E.: Functional analysis. Theory and applications. Dover, New York 1995.

[5] Gohberg, I., Goldberg, S.: Basic operator theory. Birkhäuser Boston 1981.

[6] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: Classes of linear operators. Vol. I. Birkhäuser Basel 1990.

[7] Halmos, P.: A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin 1974.

[8] Heuser, H.: Funktionalanalysis. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart 1986.

[9] Hirzebruch, F., Scharlau, W.: Einführung in die Funktionalanalysis. Bibliogr. Inst. Mannheim 1971.

[10] Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer Berlin 1976.

[11] Pazy, A.: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, Berlin et al. 1983.

[12] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. Academic Press San Diego 1980.

[13] Rudin, W.: Functional analysis. McGraw-Hill New York 1973.

[14] Rudin, W.: Real and complex analysis. McGraw-Hill New York 1986.

[15] Schaefer, H.H., Wolff, M.P.: Topological vector spaces. Springer Berlin, 1999.

[16] Schröder, H.: Funktionalanalysis. Akademie Verlag Berlin, 1997.

[17] Werner, D.: Funktionalanalysis (5., erw. Aufl.). Springer Berlin 2005.

[18] Yosida, K.: Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin et al. 1965.

Index