Vorlesung

Maß- und Integrationstheorie

Steffen Roch

SoSe 2020

Inhaltsverzeichnis

Wir haben in der Analysis-Vorlesung das Riemann-Integral für Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher kennengelernt. Damit können wir zwar bereits eine ganze Reihe nützlicher Funktionen integrieren und praktische Probleme wie etwa die Berechnung des Volumens und der Oberfläche einer Kugel lösen. Bei verschiedenen Anwendungen in der Analysis stößt man aber schnell an die Grenzen des Riemannschen Integralbegriffs. Hier sind zwei Beispiele:

- Möchte man den Grenzwert einer konvergenten Folge Riemann-integrierbarer Funktionen mit dem Riemann-Integral vertauschen, benötigt man die *gleichmäßige* Konvergenz der Funktionenfolge.

- Wir wissen, dass unter allen Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ die Euklidsche Norm $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ dadurch ausgezeichnet ist, dass sie durch $\|x\|^2 = \langle x,\, x\rangle$ mit dem Skalarprodukt $\langle x,\, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ und damit mit der (Euklidschen) Geometrie des $\mathbb{R}^n$ verknüpft ist. Man möchte daher auf analoge Weise ein Skalarprodukt und eine Norm von Funktionen, etwa auf $[0,\, 1]$, durch

  $$\langle f,\, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad \text{und} \quad \|f\|_2 := \left(\int_0^1 f(x)^2\,dx\right)^{1/2}$$

  einführen. Nun wird hierdurch z.B. auf dem Raum $C([0,\, 1])$ der stetigen Funktionen $f : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$ tatsächlich ein Skalarprodukt und eine Norm definiert; der Raum der stetigen Funktionen ist bzgl. dieser Norm aber nicht vollständig, was es schwierig macht, dort Analysis zu betreiben. (Es gibt zwar ein abstraktes Verfahren der Vervollständigung metrischer Räume; statt mit stetigen Funktionen hätte man dann mit Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen von stetigen Funktionen zu arbeiten, was auch nicht sehr bequem ist.)

Wir betrachten daher in dieser Vorlesung einen Zugang zur Integration, der uns über die Maßtheorie zum Lebesgueschen Integral führen wird. Die Vorteile des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral werden dabei schnell deutlich werden. Insbesondere werden wir z.B. sehen, dass unter geeigneten (recht schwachen) Voraussetzungen bereits die *punktweise* Konvergenz einer Funktionenfolge für das Vertauschen von Limes und Lebesgue-Integral ausreichend ist. Auch wird uns das Lebesgue-Integral einen recht komfortablen Weg zu Banachräumen von Funktionen, in denen die Norm durch ein Skalarprodukt generiert wird, eröffnen (sogenannte Hilberträume).

Im ersten Kapitel sehen wir uns einige Grundbegriffe der Maßtheorie an, die für das Weitere unentbehrlich sind. Im zweiten Kapitel werden wir allgemein Integrale definieren und uns derer Eigenschaften ansehen. Im dritten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Konstruktion von Maßen und führen ein spezielles Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ ein, das sogenannte Lebesgue-Maß. Im vierten Kapitel erarbeiten wir den Satz von Fubini und die Transformationsformel für Lebesgue-Integrale auf dem $\mathbb{R}^n$. Damit stehen uns Wege zur Berechnung zahlreicher konkreter Integrale offen. Im fünften Kapitel untersuchen wir die oben bereits kurz angesprochenen Banachräume integrierbarer Funktionen, die in der modernen (Funktional-) Analysis unentbehrlich geworden sind. Zentrales Thema von Kapitel 6 ist die Fouriertransformation. Schließlich wenden wir uns in den beiden letzten Kapiteln der Integration über Untermannigfaltigkeiten und den Integralsätzen von Gauß, Green und Stokes zu.

Ich habe mich stark an den Skripten von Herrn Neeb und Herrn Farkas orientiert und auch kürzere Anleihen in den Skripten von Herrn Glöckner und Herrn Farwig genommen. Wertvolle Anregungen erhielt ich von Herrn Haller-Dintelmann, der mehrfach die Vorlesung nach diesem Skript gehalten hat. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt. Als ergänzende Literatur kann dienen:

Barner/Flohr: Analysis II,

Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie,

Bröcker: Analysis II, Analysis III,

Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie,

Floret: Maß- und Integrationstheorie,

Forster: Analysis 3,

Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 2,

Rudin: Principles of Mathematical Analysis, Real and Complex Analysis.

Wir bezeichnen die Potenzmenge einer Menge X, d.h. die Menge aller Teilmengen von X, mit $\mathfrak{P}(X)$ und verwenden gewöhnlich Frakturbuchstaben wie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}, \ldots$ zur Bezeichnung von Teilmengen von $\mathfrak{P}(X)$.

1 Grundbegriffe der Maßtheorie

1.1 Einstimmung

Wir möchten jeder Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$ ein *Maß* (oder *Volumen*) $\mu(A)$ zuweisen. Folgende Eigenschaften sollten dabei natürlicherweise erfüllt sein:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(2) Sind A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ disjunkt, so gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(3) Sind A und B kongruent, d.h. entsteht B aus A durch Verschiebung, Drehung oder Spiegelung, so ist $\mu(A) = \mu(B)$.

(4) $\mu([0, 1)^n) = 1$ (d.h. Würfel haben das „richtige“ Volumen).

Um Approximationsargumente zu ermöglichen (z.B. das Ausschöpfen einer Menge durch eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen), werden wir eine Version von (2) mit abzählbar vielen Mengen benötigen:

(2)′ Für jede *Folge* (A_k) paarweise disjunkter Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

Satz 1.1 *Es gibt keine Funktion* $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ *mit den Eigenschaften* (1), (2)′, (3) *und* (4).

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für $n = 1$ (der allgemeine Fall ist nicht schwieriger und folgt aus dem eindimensionalen Fall). Dazu definieren wir eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ durch

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

und betrachten eine Menge $A \subseteq [0, 1)$, die aus jeder Äquivalenzklasse bzgl. $\sim$ genau einen Repräsentanten enthält. Eine solche Menge heißt *Vitali-Menge*. Die Existenz von Vitali-Mengen ist eine Konsequenz des Auswahlaxioms!

Für $p \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ setzen wir

$$A_p := \{x + p : x \in A \cap [0, 1 - p)\} \cup \{x + p - 1 : x \in A \cap [1 - p, 1)\}.$$

Wegen $(A \cap [0, 1 - p)) \cup (A \cap [1 - p, 1)) = A$ und Eigenschaft (2) ist dann

$$\mu(A) = \mu(A \cap [0, 1 - p)) + \mu(A \cap [1 - p, 1)),$$

und Eigenschaft (3) ergibt weiter

$$\mu(A) = \mu((A + p) \cap [p, 1)) + \mu((A + p - 1) \cap [0, p)) = \mu(A_p).$$

Wir zeigen, dass $A_p \cap A_q = \emptyset$ für $p, q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ und $p \neq q$. Angenommen, es ist $z \in A_p \cap A_q$. Dann gibt es $x, y \in A$ mit $z = x + p$ oder $z = x + p - 1$ und $z = y + q$ oder $z = y + q - 1$. In jedem Fall folgt $x - y \in \mathbb{Q}$. Nach Definition von A ist dann aber bereits $x = y$ und folglich $p = q$ oder $p - 1 = q$ oder $p = q - 1$. Wegen $p, q \in [0, 1)$ ist $|p - q| < 1$, und es verbleibt $p = q$ als einzige Möglichkeit. Dies war aber ausgeschlossen.

Als nächstes zeigen wir, dass

$$[0, 1) = \bigcup_{p\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} A_p.$$

Die Inklusion $\supseteq$ ist klar. Für die umgekehrte Inklusion sei $x \in [0, 1)$. Dann gibt es ein $y \in A$ mit $x \sim y$. Es ist also $q := x - y \in \mathbb{Q}$. Sei $p = q + 1$ falls $q < 0$ und $p = q$ sonst. Dann ist $p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ und $x \in A_p$.

Wir verwenden nun $(2)'$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\mu([0, 1)) &= \mu\Big(\bigcup_{p\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} A_p\Big) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} \mu(A_p) = \sum_{p\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} \mu(A) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad \mu(A) = 0, \\ \infty & \text{falls} \quad \mu(A) > 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

im Widerspruch zu (4). ∎

Es kommt noch verblüffender!

Satz 1.2 (Banach-Tarski Paradox) *Sei $n \geq 3$, und seien A und B zwei disjunkte abgeschlossene Kugeln vom Radius 1 in $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, \ldots, A_k$ von A und Kongruenzabbildungen $T_1, \ldots, T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so, dass*

$$A_1 \cup \ldots \cup A_k = A \quad \textit{und} \quad T_1(A_1) \cup \ldots \cup T_k(A_k) = A \cup B.$$

Es ist also möglich, eine Kugel so in endlich viele paarweise disjunkte Teile zu zerlegen, dass sich aus kongruenten Bildern dieser Teile zwei Kugeln der Größe des Originals zusammensetzen lassen! Es kann daher für $n \geq 3$ keine Abbildung $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ mit den Eigenschaften $(1) - (4)$ geben! (Für $n = 1, 2$ gibt es solche Abbildungen. Alle diese Aussagen machen vom Auswahlaxiom Gebrauch.)

1.2 Messbare Mengen und σ-Algebren

Die Überlegungen aus dem vorigen Abschnitt lassen uns davon Abstand nehmen, ein Maß auf der gesamten Potenzmenge definieren zu wollen. Der abstrakte Rahmen der Maßtheorie sieht für uns daher wie folgt aus: Gegeben ist eine nichtleere Menge X, ein Mengensystem $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ und eine Funktion $\mu : \mathfrak{S} \to [0, \infty]$. Wir betrachten die Elemente von $\mathfrak{S}$ gerade als diejenigen Teilmengen A von X, die man messen kann, denen man also ein Maß $\mu(A)$ zuordnen kann.

Das Mengensystem $\mathfrak{S}$ soll eine σ-Algebra im Sinne folgender Definition sein.

Definition 1.3 *Sei X eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ heißt* σ-Algebra *auf X, wenn*

(a) $\emptyset \in \mathfrak{S}$,

(b) für jedes $E \in \mathfrak{S}$ ist $X \setminus E \in \mathfrak{S}$,

(c) für jede Folge $(E_k)_{k\geq1}$ von Mengen $E_k \in \mathfrak{S}$ ist $\cup_{k\geq1} E_k \in \mathfrak{S}$.

Ist $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra auf X, so heißt das Paar $(X, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum, *und die Elemente von $\mathfrak{S}$ heißen* messbare Mengen.

σ-Algebren sind also abgeschlossen bzgl. Komplementbildung (b) und bzgl. abzählbarer Vereinigungen (c). Wegen $(b), (c)$ und der de Morganschen Identität

$$X \setminus (\cap_{k\geq 1} E_k) = \cup_{k\geq 1}(X \setminus E_k)$$

sind σ-Algebren auch abgeschlossen bzgl. abzählbarer Durchschnitte, und wegen $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ sind sie abgeschlossen bzgl. Differenzen.

Beispiel. $\{\emptyset, X\}$ ist die kleinste und $\mathfrak{P}(X)$ die größte σ-Algebra über X. ■

Lemma 1.4 (a) *Ist $\mathcal{A}$ eine Familie von σ-Algebren über X, so ist ihr* Durchschnitt

$$\bigcap \mathcal{A} := \{E \in \mathfrak{P}(X) : E \in \mathfrak{S} \text{ für alle } \mathfrak{S} \in \mathcal{A}\}$$

ebenfalls eine σ-Algebra über X.

(b) *Ist $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra über X und Y eine nichtleere Teilmenge von X, so ist*

$$\mathfrak{S}|_Y := \{E \cap Y : E \in \mathfrak{S}\}$$

eine σ-Algebra über Y, die sogenannte Spur *von $\mathfrak{S}$.*

Den Beweis sollen Sie in der Übung führen.

Sei $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(X)$. Wir betrachten die Menge $\mathcal{A}$ aller σ-Algebren über X, die $\mathfrak{E}$ umfassen. Da $\mathfrak{E}$ in der σ-Algebra $\mathfrak{P}(X)$ enthalten ist, ist $\mathcal{A}$ nicht leer. Der Durchschnitt aller σ-Algebren aus $\mathcal{A}$ ist nach Lemma 1.4 (a) wieder eine σ-Algebra. Diese enthält offenbar $\mathfrak{E}$, und es ist die kleinste σ-Algebra über X, die $\mathfrak{E}$ enthält. Wir nennen sie die *durch $\mathfrak{E}$ erzeugte σ-Algebra* und bezeichnen sie mit $\sigma(\mathfrak{E})$. Die Menge $\mathfrak{E}$ heißt ein *Erzeugersystem* für $\sigma(\mathfrak{E})$.

Ist insbesondere (X, d) ein metrischer Raum und $\mathfrak{O}$ das System der offenen Teilmengen von X, so heißt die durch $\mathfrak{O}$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{B}(X) := \sigma(\mathfrak{O})$ die *Borelsche σ-Algebra auf X*, und die Elemente von $\mathfrak{B}(X)$ heißen *Borelmengen*. Es ist klar, dass alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen Borelmengen sind, ebenso alle abzählbaren Durchschnitte offener Mengen (sogenannte *G_δ-Mengen*) und alle abzählbaren Vereinigungen abgeschlossener Mengen (sogenannte *F_σ-Mengen*).

Versehen wir den $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidschen Metrik, so erhalten wir die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ der Borelmengen auf dem $\mathbb{R}^n$. Das werden - grob gesagt - später die Mengen sein, die wir messen und über die wir integrieren wollen. Wir überlegen uns daher äquivalente Beschreibungen von $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 1.5 *Jedes der folgenden Mengensysteme $\mathcal{E}_j$ erzeugt die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$:*

$\mathcal{E}_1 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$,
$\mathcal{E}_2 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$,
$\mathcal{E}_3 := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$,
$\mathcal{E}_4 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,
$\mathcal{E}_5 := \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{S}_j := \sigma(\mathcal{E}_j)$. Wegen $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ ist $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2$. Aus

$$(a,\, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big[a + \frac{1}{k},\, b\Big)$$

folgt $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathfrak{S}_3$ und damit $\mathfrak{S}_2 \subseteq \mathfrak{S}_3$. Analog folgt aus

$$[a,\, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big[a,\, b - \frac{1}{k}\Big],$$

dass $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathfrak{S}_4$ und $\mathfrak{S}_3 \subseteq \mathfrak{S}_4$, und aus

$$[a,\, b] = (-\infty,\, b] \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(-\infty,\, a - \frac{1}{k}\Big]\Big)$$

folgt, dass $\mathcal{E}_4 \subseteq \mathfrak{S}_5$ und $\mathfrak{S}_4 \subseteq \mathfrak{S}_5$. Es ist somit $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2 \subseteq \mathfrak{S}_3 \subseteq \mathfrak{S}_4 \subseteq \mathfrak{S}_5 \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, und wir müssen noch $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{S}_1$ zeigen. Da $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ durch die offenen Mengen erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass $\mathfrak{S}_1$ jede offene Menge enthält. Sei also $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann gibt es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon,\, x + \varepsilon) \subseteq U$. Wir wählen $a \in (x - \varepsilon,\, x) \cap \mathbb{Q}$ und $b \in (x,\, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$. Dann ist $x \in (a,\, b) \subseteq U$ und folglich

$$U = \bigcup_{(a,\, b) \subseteq U \text{ mit } a,\, b \in \mathbb{Q}} (a,\, b).$$

Da die rechte Seite eine abzählbare Vereinigung ist, folgt $U \in \mathfrak{S}_1$. ∎

Ein analoges Resultat gilt im $\mathbb{R}^n$. Erklären wir beispielsweise für $a = (a_1,\, \ldots,\, a_n)$ und $b = (b_1,\, \ldots,\, b_n)$ mit $a_j \le b_j$ das *halboffene Intervall* $[a,\, b)$ durch

$$[a,\, b) := \{(x_1,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \le x_j < b_j \text{ für alle } j\},$$

so erhalten wir wie in Lemma 1.5:

Lemma 1.6 *Das System $\{[a,\, b) : a,\, b \in \mathbb{R}^n\}$ der halboffenen Intervalle erzeugt $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Auch die (analog definierten) offenen und abgeschlossenen Intervalle erzeugen jeweils $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Wir betrachten nun das Verhalten von σ-Algebren unter Abbildungen. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra über Y. Wegen der Operationstreue der Abbildung $f^{-1} : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X)$ ist dann $f^{-1}(\mathfrak{S}) := \{f^{-1}(E) : E \in \mathfrak{S}\}$ eine σ-Algebra über X ($\nearrow$ Übung).

Satz 1.7 *Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(Y)$ ein Erzeugersystem einer σ-Algebra $\mathfrak{S}$ über Y. Dann erzeugt $f^{-1}(\mathfrak{E})$ die σ-Algebra $f^{-1}(\mathfrak{S})$.*

Beweis. Da $f^{-1}(\mathfrak{S})$ eine σ-Algebra ist, die $f^{-1}(\mathfrak{E})$ umfasst, folgt $\sigma(f^{-1}(\mathfrak{E})) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{S})$. Für den Beweis der umgekehrten Inklusion verwenden wir eine Schlußweise, die als *Prinzip der guten Mengen* bekannt ist: Wir betrachten alle „guten" Teilmengen von Y, d.h. alle Teilmengen von Y, deren Urbild zu $\sigma(f^{-1}(\mathfrak{E}))$ gehört. Die Menge $\mathfrak{C} := \{C \subseteq Y : f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathfrak{E}))\}$ der guten Mengen ist eine σ-Algebra über Y ($\nearrow$ Übung), und offenbar gilt $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{C}$. Dann ist aber auch $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{C}$, d.h. $f^{-1}(\mathfrak{S}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathfrak{E}))$. ∎

Die beiden folgenden Aussagen ergeben sich als unmittelbare Folgerungen (man wende Satz 1.7 auf die Inklusionsabbildung $f : Y \to X,\ x \mapsto x$ an).

Folgerung 1.8 *Sei $\mathfrak{E}$ ein Erzeugersystem einer σ-Algebra $\mathfrak{S}$ über X und $Y \subseteq X$. Dann ist $\mathfrak{E}|_Y := \{S \cap Y : S \in \mathfrak{E}\}$ ein Erzeugersystem für die σ-Algebra $\mathfrak{S}|_Y$.*

Folgerung 1.9 *Seien X ein metrischer Raum, $\mathfrak{O}$ das System der offenen Teilmengen von X und Y eine Teilmenge von X. Dann erzeugt das System $\mathfrak{O}|_Y$ der relativ offenen Teilmengen von Y die σ-Algebra $\mathfrak{B}(X)|_Y$, d.h. es ist $\mathfrak{B}(X)|_Y = \mathfrak{B}(Y)$, wobei $\mathfrak{B}(Y)$ die von $\mathfrak{O}|_Y$ erzeugte σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von Y bezeichnet.*

Eng mit dem Begriff einer σ-Algebra ist der folgende verknüpft.

Definition 1.10 *Sei X eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ heißt ein* Dynkin-System *auf X, wenn*
(a) $X \in \mathfrak{D}$,
(b) für jedes $A \in \mathfrak{D}$ ist $X \setminus A \in \mathfrak{D}$,
(c) für jede Folge $(E_k)_{k\geq 1}$ paarweise disjunkter Mengen $E_n \in \mathfrak{D}$ ist $\cup_{k\geq 1} E_k \in \mathfrak{D}$.

Sei $\mathfrak{D}$ ein Dynkin-System auf X. Sind A, $B \in \mathfrak{D}$ und ist $B \subseteq A$, so sind $A^c := X \setminus A$ und B disjunkt, und wegen

$$A \setminus B = (A^c \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots)^c = (A^c \cup B \cup X^c \cup X^c \cup \ldots)^c$$

folgt $A \setminus B \in \mathfrak{D}$. Dynkin-Systeme sind also abgeschlossen bzgl. Differenzen.

Satz 1.11 *Ein Dynkin-System ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte ist.*

Beweis. Sei $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra. Dann ist $\emptyset \in \mathfrak{S}$ und folglich $X = X \setminus \emptyset \in \mathfrak{S}$. Daher ist $\mathfrak{S}$ ein Dynkin-System. Da $\mathfrak{S}$ nach den de Morganschen Regeln abgeschlossen bzgl. abzählbarer Durchschnitte ist, ist es wegen $A_1 \cap \ldots \cap A_k = A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap X \cap X \ldots$ auch abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte.

Sei nun $\mathfrak{D}$ ein durchschnittsstabiles Dynkin-System. Dann ist $X \in \mathfrak{D}$ und folglich $\emptyset = X \setminus X \in \mathfrak{D}$. Weiter: sind A, $B \in \mathfrak{D}$, so ist wegen Eigenschaft (b) und der Durchschnittsstabilität auch $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathfrak{D}$, d.h. das System $\mathfrak{D}$

ist abgeschlossen bzgl. Differenzen und, wegen der de Morganschen Regeln, auch bzgl. endlicher Vereinigungen. Sei schließlich (E_k) eine Folge in $\mathfrak{D}$. Wir setzen $A_1 := E_1$ und $A_k := E_k \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_{k-1})$ für $k > 1$. Mit vollständiger Induktion folgt leicht, dass alle A_k in $\mathfrak{D}$ liegen, dass $A_1 \cup \ldots \cup A_k = E_1 \cup \ldots \cup E_k$ für alle k, und dass die A_k paarweise disjunkt sind. Dann ist $\cup_{k\geq 1} E_k = \cup_{k\geq 1} A_k \in \mathfrak{D}$ wegen Eigenschaft (c) eines Dynkin-Systems, d.h. $\mathfrak{D}$ ist eine σ-Algebra. ■

Man kann leicht sehen, dass für Dynkin-Systeme eine Aussage analog zu Lemma 1.4 gilt. Es gibt also für jedes Mengensystem $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein kleinstes Dynkin-System $\mathfrak{D}$, das $\mathfrak{E}$ umfasst. Wir nennen $\mathfrak{D}$ das durch $\mathfrak{E}$ erzeugte Dynkin-System. Die Bedeutung der Dynkin-Systeme in der Maßtheorie beruht darauf, dass jedes von einem durchschnittsstabilen Mengensystem erzeugte Dynkin-System automatisch eine σ-Algebra ist, wie folgender Satz zeigt.

Satz 1.12 *Ist $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ durchschnittsstabil, so ist das von $\mathfrak{E}$ erzeugte Dynkin-System gleich der von $\mathfrak{E}$ erzeugten σ-Algebra.*

Beweis. Nach Satz 1.11 genügt es zu zeigen, dass das durch $\mathfrak{E}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}$ durchschnittsstabil ist. Für $D \in \mathfrak{D}$ sei $\mathfrak{Q}(D) := \{M \subseteq X : M \cap D \in \mathfrak{D}\}$. Dann ist $\mathfrak{Q}(D)$ ein Dynkin-System über X. Für jedes $M \in \mathfrak{Q}(D)$ ist nämlich $(X \setminus M) \cap D = D \setminus (M \cap D) \in \mathfrak{D}$ (siehe Anmerkung nach Definition 1.10), und für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $A_k \in \mathfrak{Q}(D)$ ist

$$D \cap \Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\Big) = \bigcup_{k\geq 1} (A_k \cap D) \in \mathfrak{D}.$$

Weiter: für jedes $E \in \mathfrak{E}$ ist $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{Q}(E)$, da ja $\mathfrak{E}$ durchschnittsstabil ist. Dann ist aber auch $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{Q}(E)$ für jedes $E \in \mathfrak{E}$.

Sind nun $E \in \mathfrak{E}$ und $D \in \mathfrak{D}$, so ist (wie soeben gesehen) $D \in \mathfrak{Q}(E)$, also auch $E \in \mathfrak{Q}(D)$. Daher ist $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{Q}(D)$ und, da $\mathfrak{Q}(D)$ ein Dynkin-System ist, auch $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{Q}(D)$ für jedes $D \in \mathfrak{D}$. Folglich ist $\mathfrak{D}$ durchschnittsstabil. ■

Dieser Satz ist oft in folgender Situation nützlich: Wir wollen eine Eigenschaft φ für die Elemente einer σ-Algebra $\sigma(\mathfrak{E})$ zeigen. Dazu zeigt man nur

1) Elemente von $\mathfrak{E}$ haben die Eigenschaft φ, und $\mathfrak{E}$ ist durchschnittsstabil.
2) $\mathfrak{D} := \{A \subseteq X : A \text{ hat Eigenschaft } \varphi\}$ ist ein Dynkin-System

(Prinzip der guten Mengen). Das durch $\mathfrak{E}$ erzeugte Dynkin-System liegt dann in $\mathfrak{D}$, also haben die Elements dieses Dynkin-Systems die Eigenschaft φ, und dieses Dynkin-System stimmt wegen Satz 1.12 mit $\sigma(\mathfrak{E})$ überein.

1.3 Messbare Funktionen

Wir wenden uns nun den Funktionen zu, die wir später integrieren wollen.

Definition 1.13 *Seien* $(X_1, \mathfrak{S}_1), (X_2, \mathfrak{S}_2)$ *messbare Räume. Eine Funktion* $f : X_1 \to X_2$ *heißt* messbar*, wenn das Urbild jeder messbaren Menge messbar ist, d.h. wenn* $f^{-1}(E) \in \mathfrak{S}_1$ *für jede Menge* $E \in \mathfrak{S}_2$.

Man beachte die formale Ähnlichkeit zur Charakterisierung stetiger Funktionen durch die Eigenschaft, dass Urbilder offener Mengen offen sind.

Satz 1.14 *Verknüpfungen messbarer Funktionen sind messbar. Genauer: sind* $(X_1, \mathfrak{S}_1)$, $(X_2, \mathfrak{S}_2)$ *und* $(X_3, \mathfrak{S}_3)$ *messbare Räume und* $f : X_1 \to X_2$ *und* $g : X_2 \to X_3$ *messbare Funktionen, so ist auch* $g \circ f : X_1 \to X_3$ *messbar.*

Beweis. Für jedes $E \in \mathfrak{S}_3$ ist

$$(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E)) \in f^{-1}(\mathfrak{S}_2) \subseteq \mathfrak{S}_1,$$

also ist $g \circ f$ messbar. ■

Der folgende Satz zeigt, dass es für das Überprüfen der Messbarkeit einer Funktion nicht erforderlich ist, die Urbilder *aller* messbaren Mengen zu betrachten.

Satz 1.15 *Seien* $(X_1, \mathfrak{S}_1)$, $(X_2, \mathfrak{S}_2)$ *messbare Räume, wobei* $\mathfrak{S}_2 = \sigma(\mathcal{E}_2)$ *für eine Teilmenge* $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathfrak{P}(X_2)$ *ist, und sei* $f : X_1 \to X_2$. *Ist* $f^{-1}(E) \in \mathfrak{S}_1$ *für jedes* $E \in \mathcal{E}_2$, *so ist* f *bereits messbar.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$\mathcal{E}_2 \subseteq \{E \in \mathfrak{P}(X_2) : f^{-1}(E) \in \mathfrak{S}_1\}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass die rechte Seite eine σ-Algebra ist. Dann muss aber auch

$$\mathfrak{S}_2 = \sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \{E \in \mathfrak{P}(X_2) : f^{-1}(E) \in \mathfrak{S}_1\}$$

sein, d.h. f ist messbar. ■

Ist also (X_2, d) ein metrischer Raum, so ist $f : (X_1, \mathfrak{S}_1) \to (X_2, \mathfrak{B}(X_2))$ genau dann messbar, wenn das Urbild jeder offenen Menge messbar ist. Da bei stetigen Abbildungen Urbilder offener Mengen offen sind, folgt sofort:

Folgerung 1.16 *Sind* X, Y *metrische Räume, so ist jede stetige Funktion* $f : X \to Y$ *messbar bzgl. der* σ*-Algebren* $\mathfrak{B}(X)$ *und* $\mathfrak{B}(Y)$ *der Borelmengen.*

Folgerung 1.17 *Sei* $(X, \mathfrak{S})$ *ein messbarer Raum und* $f : (X, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) f *ist messbar.*

(b) *Urbilder offener Intervalle sind messbar.*

(c) *Urbilder halboffener Intervalle sind messbar.*

(d) *Urbilder abgeschlossener Intervalle sind messbar.*

(e) *Für alle* $b \in \mathbb{R}$ *ist* $f^{-1}((-\infty, b])$ *messbar.*

Dies folgt sofort aus Satz 1.15 und Lemma 1.5. Mit Lemma 1.6 bekommt man eine analoge Aussage für den $\mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt

$$f : X \to \mathbb{R}^n \text{ messbar } \Leftrightarrow \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}^n \text{ mit } a \leq b \text{ gilt } f^{-1}([a, b)) \in \mathfrak{S}. \quad (1.1)$$

Darüberhinaus gilt:

Satz 1.18 *Sei* $(X, \mathfrak{S})$ *ein messbarer Raum und* $f := (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent*:
(*a*) $f : (X, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ *ist messbar.*
(*b*) *Jede der Koordinatenfunktionen* $f_j : (X, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ *ist messbar.*

Beweis. $(a) \to (b)$: Die Projektionen $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$ sind stetig und daher messbar (Folgerung 1.16). Nach Satz 1.14 sind auch die Funktionen $f_j = p_j \circ f$ messbar.
$(b) \to (a)$: Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Sind alle Koordinatenfunktionen messbar, so sind alle Urbilder

$$f^{-1}\big([a, b)\big) = \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}\big([a_j, b_j)\big)$$

messbar. Die Aussage (1.1) liefert die Messbarkeit von f. ∎

Es ist oft praktisch und sinnvoll, statt mit reellwertigen Funktionen mit Funktionen zu arbeiten, deren Werte in der *erweiterten Zahlengeraden* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ liegen. Man kann leicht zeigen, dass die Menge

$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \{A \in \mathfrak{P}(\overline{\mathbb{R}}) : A \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$$

eine σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ ist und dass man $\overline{\mathbb{R}}$ mit einer Metrik versehen kann, so dass die Elemente von $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ gerade die Borelmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ sind ($\nearrow$ Übung). Wir nennen daher $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ die *σ-Algebra der Borelmengen auf* $\overline{\mathbb{R}}$. Weiter setzen wir die Relation $<$ auf $\mathbb{R}$ durch $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ auf ganz $\overline{\mathbb{R}}$ fort.

Lemma 1.19 *Sei* $(X, \mathfrak{S})$ *ein messbarer Raum und* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(*a*) *Die Funktion* $f : (X, \mathfrak{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ *ist messbar.*
(*b*) *Die Funktion* $-f : (X, \mathfrak{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ *ist messbar.*
(*c*) *Für jedes* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ *ist* $\{x \in X : f(x) \leq b\}$ *messbar.*
(*d*) *Für jedes* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *ist* $\{x \in X : f(x) > a\}$ *messbar.*
(*e*) *Für jedes* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *ist* $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ *messbar.*
(*f*) *Für jedes* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ *ist* $\{x \in X : f(x) < b\}$ *messbar.*

Beweis. Die Äquivalenz $(a) \Leftrightarrow (b)$ folgt aus $-\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$, die Implikation $(a) \Rightarrow (c)$ folgt aus $[-\infty, b] \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$, und $(c) \Rightarrow (d)$ folgt durch Komplementbildung

$$\{x \in X : f(x) > a\} = X \setminus \{x \in X : f(x) \leq a\}.$$

$(d) \Rightarrow (a)$: Nach Satz 1.15 genügt es zu zeigen, dass die Intervalle $(a, \infty]$ die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ erzeugen. Sei $\mathfrak{S}'$ die kleinste σ-Algebra über $\overline{\mathbb{R}}$, die alle Intervalle $(a, \infty]$ mit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ enthält. Offenbar ist $\mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann liegt $(a, b] = (a, \infty] \setminus (b, \infty]$ in $\mathfrak{S}'$, und wie in Lemma 1.5 folgt $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{S}'$. Weiter ist $\overline{\mathbb{R}} \setminus (-\infty, \infty] = \{-\infty\} \in \mathfrak{S}'$ und ebenso

$$\{\infty\} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \Big(\{-\infty\} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (-\infty, k]\Big) \in \mathfrak{S}'.$$

Da jede Borelmenge auf $\overline{\mathbb{R}}$ die Vereinigung einer Menge aus $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mit einer der Mengen $\emptyset$, $\{-\infty\}$, $\{\infty\}$, $\{-\infty, \infty\}$ ist, folgt $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \mathfrak{S}'$ und damit $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathfrak{S}'$. Die Implikationen $(a) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (a)$ zeigt man analog. ∎

Satz 1.20 *Seien $(X, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum und $f, g : (X, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ messbare Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $|f|$, $f + g$, fg, $\max(f, g)$, $\min(f, g) : X \to \mathbb{R}$ messbar.*

Beweis. Die Messbarkeit von $|f|$ folgt aus der Stetigkeit (und folglich Messbarkeit) der Betragsfunktion mit Satz 1.14. Weiter wissen wir aus Satz 1.18, dass die Funktion $F = (f, g) : (X, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2))$ messbar ist. Aus der Stetigkeit der Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y,\ xy,\ \max(x, y),\ \min(x, y)$$

und aus Satz 1.14 folgen die übrigen Behauptungen. ∎

Da konstante Funktionen messbar sind (warum?), bildet nach Satz 1.20 die Menge aller messbaren Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ einen reellen Vektorraum. Die folgenden Resultate zeigen, dass die Messbarkeit bemerkenswert stabil gegenüber Grenzprozessen ist.

Satz 1.21 *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : (X, \mathfrak{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ eine messbare Funktion. Dann sind auch die Funktionen*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \quad \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \quad \limsup_{k \to \infty} f_k, \quad \liminf_{k \to \infty} f_k$$

messbar.

Beweis. Sei $g := \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$. Für alle $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist dann

$$\{x \in X : g(x) > a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_k(x) > a\}.$$

Nach Voraussetzung und Lemma 1.19 ist die rechte Seite messbar. Also ist für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ die linke Seite messbar, und g ist messbar nach Lemma 1.19. Genauso folgt die Messbarkeit von $\inf f_k$. Aus

$$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq k} f_j$$

folgt nun die Messbarkeit von $\limsup f_k$. Die von $\liminf f_k$ zeigt man analog. ■

Satz 1.22 *Punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar, d.h. ist (f_k) eine Folge messbarer Funktionen $f_k : (X, \mathfrak{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ und existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für jedes $x \in X$, so ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.*

Dies folgt wegen $f = \limsup f_k$ sofort aus Satz 1.21. ■

1.4 Maße

Wir wenden uns nun dem Messen messbarer Mengen eines messbaren Raumes zu und beginnen mit einer Axiomatisierung des Maßbegriffes.

Definition 1.23 *Sei $(X, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum. Ein* Maß *auf $(X, \mathfrak{S})$ ist eine Funktion $\mu : \mathfrak{S} \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:*

(*a*) $\mu(\emptyset) = 0$.

(*b*) *μ ist σ-*additiv*, d.h. für jede Folge $(E_k)_{k\geq 1}$ paarweise disjunkter Mengen $E_k \in \mathfrak{S}$ gilt*
$$\mu\Big(\bigcup_{k\geq 1} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k). \tag{1.2}$$

Ist μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{S})$, so heißt das Tripel $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum. *Das Maß μ heißt* endlich, *wenn $\mu(X) < \infty$.*

Im Weiteren haben wir hin und wieder (z.B. in (1.2)) mit $\pm\infty$ zu rechnen. Dazu vereinbaren wir folgende Regeln:

$$\begin{array}{rclcll} 0\cdot\infty &=& \infty\cdot 0 &=& 0, & \\ x\cdot\infty &=& \infty\cdot x &=& \infty & \text{falls } x > 0, \\ x\cdot\infty &=& \infty\cdot x &=& -\infty & \text{falls } x < 0, \\ x+\infty &=& \infty + x &=& \infty & \text{für } x \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}. \end{array}$$

Achtung: $\infty - \infty$ ist nicht erklärt.

Beispiele für Maße. (*a*) Ist $\mathfrak{S} = \{\emptyset, X\}$, so kann $\mu(X) \in [0, \infty]$ beliebig gewählt werden, und man erhält mit $\mu(\emptyset) = 0$ ein Maß auf $(X, \mathfrak{S})$.

(b) Für jedes $x \in X$ wird durch

$$\delta_x(E) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in E \\ 0 & \text{wenn } x \notin E \end{cases}$$

ein Maß auf $(X, \mathfrak{S})$ festgelegt, das sogenannte *Punkt-* oder *Diracmaß in* x.

(c) Durch

$$\mu : \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad E \mapsto \text{Anzahl der Elemente von } E$$

wird das *Zählmaß* auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ definiert.

(d) Ist $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $E \in \mathfrak{S}$, so ist auch $(E, \mathfrak{S}|_E, \mu|_{\mathfrak{S}|_E})$ ein Maßraum (vgl. Lemma 1.4b)). ■

Lemma 1.24 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt*

(a) *μ ist* additiv, *d.h. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ falls $A, B \in \mathfrak{S}$ und $A \cap B = \emptyset$.*

(b) *μ ist* monoton, *d.h. $\mu(A) \leq \mu(B)$ falls $A, B \in \mathfrak{S}$ und $A \subseteq B$.*

(c) *ist $(E_j)_{j\geq 1} \subseteq \mathfrak{S}$ monoton wachsend (d.h. $E_j \subseteq E_{j+1}$ für alle j), dann ist*

$$\mu\Big(\bigcup_{j\geq 1} E_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j).$$

(d) *ist $(E_j)_{j\geq 1} \subseteq \mathfrak{S}$ monoton fallend (d.h. $E_j \supseteq E_{j+1}$ für alle j) und $\mu(E_1) < \infty$, dann ist*

$$\mu\Big(\bigcap_{j\geq 1} E_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j).$$

(e) *μ ist* σ-subadditiv, *d.h. für beliebige Folgen $(E_j)_{j\geq 1} \subseteq \mathfrak{S}$ ist*

$$\mu\Big(\bigcup_{j\geq 1} E_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Beweis. (a) Man wende die σ-Additivität auf die Folge $A, B, \emptyset, \emptyset, \ldots$ an.

(b) Aus (a) folgt $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

(c) Sei $E := \bigcup_{j\geq 1} E_j$, $E_0 := \emptyset$ und $A_j := E_j \setminus E_{j-1}$ für $j \geq 1$. Dann sind die Mengen A_j paarweise disjunkt, und für jedes n ist $E_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ sowie $E = \bigcup_{j\geq 1} A_j$. Aus der σ-Additivität und Eigenschaft (a) von μ folgt

$$\mu(E_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) \quad \text{sowie} \quad \mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Hieraus folgt aber $\mu(E_k) \to \mu(E)$ für $k \to \infty$.

(d) Sei $E := \bigcap_{j\geq 1} E_j$ und $C_j := E_1 \setminus E_j$ für $j \geq 1$. Die Folge $(C_j)_{j\geq 1}$ ist monoton wachsend, und aus (c) und den de Morganschen Identitäten folgt

$$\lim_{j\to\infty} \mu(C_j) = \mu\Big(\bigcup_{j\geq 1} C_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j\geq 1}(E_1 \setminus E_j)\Big) = \mu\Big(E_1 \setminus \bigcap_{j\geq 1} E_j\Big) = \mu(E_1 \setminus E).$$

Aus $\mu(E_1) = \mu(E_j) + \mu(C_j)$ und $\mu(E_1) = \mu(E) + \mu(E_1 \setminus E)$ sowie $\mu(E_1) < \infty$ folgt

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E_1) - \mu(E_1 \setminus E) = \mu(E_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(C_j) \\ &= \mu(E_1) - \lim_{j\to\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_j)) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j). \end{aligned}$$

(e) Sei $A_1 := E_1$ und $A_k := E_k \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_{k-1})$ für $k > 1$. Die Mengen A_k sind paarweise disjunkt, und es ist $\bigcup_{k\geq 1} A_k = \bigcup_{k\geq 1} E_k$ sowie $\mu(A_n) \leq \mu(E_k)$ für alle k wegen (b). Aus der σ-Additivität folgt

$$\mu\Big(\bigcup_{k\geq 1} E_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k). \qquad \blacksquare$$

Satz 1.25 (Eindeutigkeitssatz für endliche Maße) *Sei $(X, \mathfrak{S})$ ein meßbarer Raum und $\mathfrak{E}$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathfrak{S}$ mit $X \in \mathfrak{E}$. Sind μ, ν endliche Maße auf $\mathfrak{S}$ mit $\mu(E) = \nu(E)$ für alle $E \in \mathfrak{E}$, so gilt bereits $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{S}$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathfrak{D} := \{A \in \mathfrak{S} : \mu(A) = \nu(A)\}$ ein Dynkin-System ist. Da $\mathfrak{E}$ durchschnittstabil ist, liefert dann Satz 1.12 für das von $\mathfrak{E}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}(\mathfrak{E})$

$$\mathfrak{S} = \sigma(\mathfrak{E}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{E}) \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{S}.$$

Es ist also $\mathfrak{D} = \mathfrak{S}$, und wir sind fertig.

Zum Nachweis, dass $\mathfrak{D}$ ein Dynkin-System ist, beobachten wir zunächst, dass nach Voraussetzung $X \in \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{D}$ ist. Wir zeigen weiter, dass $X \setminus A \in \mathfrak{D}$ wenn $A \in \mathfrak{D}$. Aus $A \cup (X \setminus A) = X$ folgt $\mu(A) + \mu(X \setminus A) = \mu(X)$ und $\nu(A) + \nu(X \setminus A) = \nu(X)$. Wegen $\mu(A) = \nu(A)$ und $\mu(X) = \nu(X)$ und der Endlichkeit der Maße folgt daraus $\mu(X \setminus A) = \nu(X \setminus A)$, also $X \setminus A \in \mathfrak{D}$.

Sei noch (E_k) eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{D}$. Dann ist

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(E_k) = \nu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big).$$

Also ist auch $\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathfrak{D}$, und $\mathfrak{D}$ ist ein Dynkin-System. $\blacksquare$

Definition 1.26 *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Maß auf $(X, \mathfrak{B}(X))$ heißt ein* Borel-Maß.

Der folgende Satz ist ein Spezialfall von Satz 1.25.

Satz 1.27 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien μ, ν endliche Borel-Maße auf X. Wenn $\mu(G) = \nu(G)$ für alle offenen Mengen $G \subseteq X$, dann ist $\mu(B) = \nu(B)$ für alle $B \in \mathfrak{B}(X)$.*

Satz 1.28 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und μ ein endliches Borel-Maß auf X. Dann gilt für jedes $B \in \mathfrak{B}(X)$*

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \inf\{\mu(G) : B \subseteq G,\ G \text{ offen}\}, && (1.3)\\ \mu(B) &= \sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ abgeschlossen}\}. && (1.4) \end{aligned}$$

Insbesondere gibt es für jedes $B \in \mathfrak{B}(X)$ eine F_σ-Menge A und eine G_δ-Menge C mit $A \subseteq B \subseteq C$ und $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C)$.

Beweis. Wegen der Monotonie gilt $\leq$ in (1.3) und $\geq$ in (1.4). Wir zeigen, dass

$$\mathfrak{D} := \{B \in \mathfrak{B}(X) : B \text{ erfüllt (1.3) und (1.4)}\}$$

ein Dynkin-System ist. Offenbar ist $X \in \mathfrak{D}$. Wir überlegen uns, dass $X \setminus A \in \mathfrak{D}$ für alle $A \in \mathfrak{D}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen eine abgeschlossene Menge F und eine offene Menge G so, dass $F \subseteq A \subseteq G$ und $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Dann ist $X \setminus F$ offen, $X \setminus G$ abgeschlossen, $X \setminus G \subseteq X \setminus A \subseteq X \setminus F$, und

$$\begin{aligned} \mu((X \setminus F) \setminus (X \setminus A)) + \mu((X \setminus A) \setminus (X \setminus G)) &= \mu((X \setminus F) \setminus (X \setminus G))\\ &= \mu(G \setminus F) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $X \setminus A \in \mathfrak{D}$.

Wir zeigen weiter: $\cup_{k\geq 1} A_k \in \mathfrak{D}$ für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $A_k \in \mathfrak{D}$. Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $k \geq 1$ gibt es eine abgeschlossene Menge F_k und eine offene Menge G_k mit

$$F_k \subseteq A_k \subseteq G_k \quad \text{und} \quad \mu(G_k \setminus F_k) \leq \varepsilon\, 2^{-k}.$$

Sei $G := \cup_{k\in\mathbb{N}} G_k$ und $B := \cup_{k\in\mathbb{N}} F_n$. Dann ist G offen. Da die F_k ebenfalls paarweise disjunkt sind, folgt $\mu(B) = \mu(\cup_{k\in\mathbb{N}} F_k) = \sum \mu(F_k)$. Es gibt daher ein $k_0 \geq 1$ so, dass für die Menge $F := \cup_{k=1}^{k_0} F_k$ gilt $\mu(B \setminus F) \leq \varepsilon$. Offenbar ist F abgeschlossen, und es ist $F \subseteq \cup_{k\geq 1} A_k \subseteq G$ sowie

$$\begin{aligned} \mu(G \setminus F) &= \mu(G \setminus B) + \mu(B \setminus F)\\ &\leq \mu\Big(\bigcup_{k\geq 1} (G_k \setminus F_k)\Big) + \mu(B \setminus F)\\ &\leq \sum_{k\geq 1} \mu(G_k \setminus F_k) + \mu(B \setminus F) \ \leq\ 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist $\mathfrak{D}$ ein Dynkin-System.

Wir zeigen schließlich: Jede abgeschlossene Menge $F \subseteq X$ gehört zu $\mathfrak{D}$. Offenbar gilt (1.4) für F. Um auch (1.3) einzusehen, setzen wir

$$G_k := \{x \in X : \text{es gibt ein } f \in F \text{ mit } d(x,\, f) < 1/k\} = \bigcup_{f \in F} U_{1/k}(f).$$

Die Mengen G_k sind offen, sie bilden eine monoton fallende Folge, und es ist $F = \bigcap_{k \geq 1} G_k$. Aus Lemma 1.24 ($d$) folgt dann

$$\mu(F) = \lim_{k \to \infty} \mu(G_k).$$

Also ist auch (1.3) erfüllt und $F \in \mathfrak{D}$. Dann enthält $\mathfrak{D}$ aber auch alle offenen Mengen, und wir erhalten $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{D}$ mit Satz 1.12 (Prinzip der guten Mengen). Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der ersten. ■

Für nicht endliche Maße gelten die o.g. Sätze im allgemeinen nicht. Man nennt daher ein Borel-Maß *regulär*, falls für jede Borelmenge B (1.3) und (1.4) gelten. Endliche Borel-Maße auf metrischen Räumen sind stets regulär.

1.5 Nullmengen und Vollständigkeit von Maßräumen

Viele Begriffe und Aussagen der Maß- und Integrationstheorie werden einfacher und natürlicher, wenn der Maßraum vollständig in folgendem Sinn ist.

Definition 1.29 *Sei $(X,\, \mathfrak{S},\, \mu)$ ein Maßraum. Eine Teilmenge N von X heißt eine* μ-Nullmenge, *wenn sie Teilmenge einer Menge $E \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(E) = 0$ ist. Gehört jede μ-Nullmenge von X zu $\mathfrak{S}$, so heißt $(X,\, \mathfrak{S},\, \mu)$* vollständig.

Liegt eine μ-Nullmenge N in $\mathfrak{S}$, so ist $\mu(N) = 0$ nach Lemma 1.24 (b). In vollständigen Maßräumen stimmen also die Begriffe *μ-Nullmenge* und *Menge vom Maß* 0 überein.

Wir sehen uns zwei einfache Aussagen an, in denen die Vollständigkeit eine Rolle spielt. Dazu vereinbaren wir: Ist $(X,\, \mathfrak{S},\, \mu)$ ein Maßraum und gilt eine Eigenschaft P für alle Punkte von X mit Ausnahme von Punkten in einer μ-Nullmenge, so sagen wir, dass P *fast überall* (oder genauer *μ-fast überall*) gilt.

Lemma 1.30 *Sei $(X,\, \mathfrak{S},\, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, $(X',\, \mathfrak{S}')$ ein messbarer Raum und seien $f,\, g : X \to X'$ Funktionen, die fast überall übereinstimmen. Ist f messbar, dann ist auch g messbar.*

Beweis. Sei $N \subseteq X$ eine μ-Nullmenge so, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$, und sei $E \in \mathfrak{S}'$. Dann ist

$$\begin{aligned} g^{-1}(E) &= \big(g^{-1}(E) \cap (X \setminus N)\big) \cup \big(g^{-1}(E) \cap N\big) \\ &= \big(f^{-1}(E) \cap (X \setminus N)\big) \cup \big(g^{-1}(E) \cap N\big). \end{aligned}$$

Die Menge $f^{-1}(E) \cap (X \setminus N)$ ist messbar nach Voraussetzung, und $g^{-1}(E) \cap N$ ist Teilmenge der μ-Nullmenge N, also selbst eine μ-Nullmenge und damit messbar. Also ist $g^{-1}(E) \in \mathfrak{S}$ für jedes $E \in \mathfrak{S}'$, d.h. g ist messbar. ∎

Lemma 1.31 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, und die Funktionen $f_n : (X,\, \mathfrak{S},\, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}},\, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ seien messbar und sollen fast überall gegen eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergieren. Dann ist f messbar.*

Beweis. Sei $N \subseteq X$ eine μ-Nullmenge so, dass $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$. Aus Satz 1.22 folgt die Messbarkeit von $f|_{X \setminus N}$. Aus der Vollständigkeit folgt weiter, dass auch $f|_N$ messbar ist. Für jede Menge $A \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist ja $(f|_N)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap N$ Teilmenge einer μ-Nullmenge, also messbar. Für beliebiges $B \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ erhalten wir somit die Messbarkeit von

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \Big(f^{-1}(B) \cap (X \setminus N)\Big) \cup \Big(f^{-1}(B) \cap N\Big) \\ &= (f|_{X \setminus N})^{-1}(B) \cup (f|_N)^{-1}(B). \end{aligned}$$

Also ist f messbar. ∎

Nichtvollständige Maßräume lassen sich auf natürliche Weise zu vollständigen Maßräumen erweitern. Sei dazu $(X,\, \mathfrak{S},\, \mu)$ ein Maßraum. Die Menge $\tilde{\mathfrak{S}}$ bestehe aus allen Teilmengen von X, die Vereinigung einer Menge aus $\mathfrak{S}$ und einer μ-Nullmenge sind. Ist $E \in \mathfrak{S}$ und N eine μ-Nullmenge, so setzen wir $\tilde{\mu}(E \cup N) := \mu(E)$. Diese Definition von $\tilde{\mu}$ ist korrekt. Sind nämlich $E,\, F \in \mathfrak{S}$ und $M \subseteq \tilde{M} \in \mathfrak{S}$, $N \subseteq \tilde{N} \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(\tilde{M}) = \mu(\tilde{N}) = 0$ und $E \cup M = F \cup N$, so ist $F \subseteq F \cup N = E \cup M \subseteq E \cup \tilde{M}$ und folglich

$$\mu(F) \leq \mu(E \cup \tilde{M}) \leq \mu(E) + \mu(\tilde{M}) = \mu(E).$$

Analog zeigt man, dass $\mu(E) \leq \mu(F)$ und somit $\mu(E) = \mu(F)$ ist. Der folgende Satz soll in der Übung bewiesen werden.

Satz 1.32 *$(X,\, \tilde{\mathfrak{S}},\, \tilde{\mu})$ ist ein vollständiger Maßraum.*

2 Allgemeine Integrationstheorie

Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum. Ziel ist es, messbare Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ zu integrieren. Dabei gehen wir schrittweise vor. Das Maß μ wird uns vorgeben, was das Integral der charakteristischen Funktion einer messbaren Menge sein soll. Davon ausgehend definieren wir das Integral von nichtnegativen messbaren Funktionen mit nur endlich vielen Werten (Stufenfunktionen) und dann für beliebige nichtnegative messbare Funktionen, die wir von unten durch Stufenfunktionen annähern. Schließlich spalten wir allgemeine messbare Funktionen in ihren Positiv- und Negativteil auf, für die wir die Integrale bereits definiert haben.

Wir werden sehen, dass das so erklärte Lebesgue-Integral wesentlich allgemeiner und flexibler ist als das Riemann-Integral.

2.1 Stufenfunktionen

Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum. Eine messbare Funktion $s : X \to \mathbb{R}$ heißt *Stufenfunktion* (oder *einfache Funktion*), wenn ihr Wertebereich $s(X)$ endlich ist. Jede konstante Funktion ist eine Stufenfunktion. Wie sieht es mit Funktionen aus, die zwei Werte annehmen? Dazu betrachten wir für jede Menge $A \subseteq X$ ihre *charakteristische Funktion*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad x \in A \\ 0 & \text{wenn} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Diese Funktion ist genau dann messbar (und damit eine Stufenfunktion), wenn $A \in \mathfrak{S}$. Beispielsweise ist $\chi_{\mathbb{Q}}$ eine Stufenfunktion für $(X, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Lemma 2.1 *Eine Funktion $s : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Stufenfunktion, wenn es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{S}$ so gibt, dass $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$.*

Beweis. Sind $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und $A_j \in \mathfrak{S}$ für $j = 1, \ldots, k$, so ist $\sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$ messbar nach Satz 1.20 und damit eine Stufenfunktion. Sei umgekehrt s eine Stufenfunktion und $s(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ mit paarweise verschiedenen Zahlen α_j. Dann sind die Mengen $A_j := s^{-1}(\{\alpha_j\})$ messbar und paarweise disjunkt, und es ist $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$. ∎

Der folgende Satz zeigt, dass messbare Funktionen durch Stufenfunktionen approximiert werden können.

Satz 2.2 *Sei $f : X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen $s_n : X \to [0, \infty)$ so, dass*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \quad \textit{für alle } x \in X$$

und dass die Konvergenz auf jeder Menge $\{x \in X : f(x) \le c\}$ mit $c \in [0, \infty)$ gleichmäßig ist.

Beweis. Für $n \geq 1$ sei

$$s_n(x) := \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{falls } f(x) \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right) \text{ mit } 0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1, \\ n & \text{falls } f(x) \in [n, \infty]. \end{cases}$$

Dann ist $(s_n)_{n \geq 1}$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, und für alle $c \in [0, \infty)$ und $n > c$ ist

$$|f(x) - s_n(x)| < 2^{-n} \quad \text{für alle } x \text{ mit } f(x) \leq c.$$

Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen s_n auf der Menge $\{x \in X : f(x) \leq c\}$ sowie die punktweise Konvergenz auf $\{x \in X : f(x) < \infty\}$. Die punktweise Konvergenz auf $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ ist offensichtlich. ■

Folgerung 2.3 *Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn sie punktweiser Grenzwert einer Folge von Stufenfunktionen ist.*

Beweis. Punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar nach Satz 1.22. Ist umgekehrt f messbar, so sind die Funktionen $f_\pm := \max(0, \pm f)$ nach Satz 1.20 messbar und nichtnegativ. Nach Satz 2.2 sind beide Funktionen punktweise Grenzwerte von Stufenfunktionen. Dann hat auch $f = f_+ - f_-$ diese Eigenschaft. ■

2.2 Das Lebesgue-Integral

Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathfrak{S}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Wir definieren das Integral von f über E bzgl. des Maßes μ in mehreren Schritten.

Schritt A: Für $f = \chi_A$ mit $A \in \mathfrak{S}$ definieren wir $I_E(f) := \mu(A \cap E)$.

Schritt B: Sei f eine nichtnegative Stufenfunktion. Mit Lemma 2.1 schreiben wir f als $\sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$ mit $\alpha_j \in [0, \infty)$ und mit paarweise disjunkten Mengen $A_j \in \mathfrak{S}$ so dass $\bigcup_{j=1}^k A_j = X$ und definieren

$$I_E(f) := \sum_{j=1}^k \alpha_j I_E(\chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j \cap E).$$

Schritt C: Ist f messbar und nichtnegativ, so definieren wir

$$\int_E f \, d\mu := \sup \{I_E(s) : s \text{ ist Stufenfunktion und } 0 \leq s \leq f\}.$$

Die Menge auf der rechten Seite ist nach Satz 2.2 nicht leer. Man beachte, dass $\int_E f \, d\mu$ den Wert $+\infty$ annehmen kann. Ist f selbst eine nichtnegative Stufenfunktion, so ist $\int_E f \, d\mu = I_E(f)$. Für alle Stufenfunktionen $0 \leq s \leq f$ ist nämlich

$I_E(s) \le I_E(f)$.

Schritt D: Schließlich sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Nach Satz 1.20 sind die Funktionen $f_+ := \max(0, f)$ und $f_- := \max(0, -f)$ messbar, es ist $f = f_+ - f_-$, und die Integrale

$$\int_E f_+ \, d\mu, \quad \int_E f_- \, d\mu \tag{2.1}$$

sind wie in Schritt C erklärt.

Definition 2.4 *Ist eines der Integrale* (2.1) *endlich, so definieren wir*

$$\int_E f \, d\mu := \int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{2.2}$$

Sind beide Integrale in (2.1) *endlich, so heißt* f Lebesgue-integrierbar*, und wir schreiben* $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ *bzw.* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *falls* $E = X$.

Man beachte, dass wir das Integral von f auch dann definiert haben, wenn f nicht Lebesgue-integrierbar ist, aber eine der Funktionen f_+, f_- diese Eigenschaft hat. Das ist in vielen Situationen bequem.

Für komplexwertige Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ definieren wir naheliegend: Die Funktion f heißt *Lebesgue-integrierbar*, wenn ihr Real- und Imaginärteil in $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ liegen. In diesem Fall setzen wir

$$\int_E f \, d\mu := \int_E \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f \, d\mu.$$

Vereinbarung. *Wir beschränken uns im Weiteren auf reellwertige Funktionen. Viele der nachstehenden Sätze lassen sich ohne Mühe auf den Fall komplexwertigen Funktionen übertragen.*

Wir sehen uns einige elementare Eigenschaften des Lebesgue-Integrals an.

Lemma 2.5 (*a*) *Ist* f *messbar und beschränkt auf* E *und* $\mu(E) < \infty$, *so ist* $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$.
(*b*) *Seien* f, g *messbar auf* E *mit* $0 \le f \le g$ *auf* E *oder* $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ *mit* $f \le g$ *auf* E. *Dann gilt*

$$\int_E f \, d\mu \le \int_E g \, d\mu.$$

(*c*) *Ist* f *messbar und* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a \le f \le b$ *auf* E *und ist* $\mu(E) < \infty$, *so ist*

$$a \cdot \mu(E) \le \int_E f \, d\mu \le b \cdot \mu(E).$$

(*d*) *Ist* $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ *und* $c \in \mathbb{R}$, *so ist* $cf \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ *und*

$$\int_E cf \, d\mu = c \int_E f \, d\mu.$$

(*e*) *Ist* f *messbar und* $\mu(E) = 0$, *so ist* $\int_E f \, d\mu = 0$.
(*f*) *Ist* $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ *und* $A \in \mathfrak{S}$ *Teilmenge von* E, *so ist* $f \in \mathcal{L}^1(\mu, A)$.

Beweis. (a) Sei $|f| \leq M < \infty$ auf E. Dann ist $f_\pm \leq M$ auf E, und hieraus folgt sofort $\int_E f_\pm \, d\mu \leq M\mu(E)$, denn diese Relation überträgt sich offenbar auf die entsprechenden Stufenfunktionen.
(b) Aus $f \leq g$ folgt $f_+ \leq g_+$ und $g_- \leq f_-$ auf E. Hieraus folgt

$$\int_E f_+ \, d\mu \leq \int_E g_+ \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_E g_- \, d\mu \leq \int_E f_- \, d\mu$$

(für jede Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f_+$ ist ja erst recht $0 \leq s \leq g_+$) und daher

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu \leq \int_E g_+ \, d\mu - \int_E g_- \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

(c) Dies folgt sofort aus (b), wenn wir f mit den Konstanten a, b vergleichen.
(d) Für Stufenfunktionen s ist offenbar $I_E(cs) = cI_E(s)$. Ist nun etwa $c > 0$ und $f \geq 0$, so folgt

$$\begin{aligned} \int_E cf \, d\mu &= \sup\{I_E(s) : 0 \leq s \leq cf\} = \sup\left\{I_E(s) : 0 \leq \frac{1}{c}s \leq f\right\} \\ &= \sup\left\{cI_E\Big(\frac{1}{c}s\Big) : 0 \leq \frac{1}{c}s \leq f\right\} \\ &= c \sup\Big\{I_E(t) : 0 \leq t \leq f\Big\} = c\int_E f \, d\mu. \end{aligned}$$

Die übrigen Fälle behandelt man ähnlich.
(e) Für *jede* Stufenfunktion s ist $I_E(s) = 0$. Also ist $\int_E f_\pm \, d\mu = 0$ und $\int_E f \, d\mu = 0$.
(f) Für alle Stufenfunktionen $0 \leq s \leq f_+$ ist $I_A(s) \leq I_E(s)$ und daher

$$\int_A f_+ \, d\mu = \sup\{I_A(s) : 0 \leq s \leq f_+\} \leq \sup\{I_E(s) : 0 \leq s \leq f_+\} = \int_E f_+ \, d\mu < \infty.$$

Für f_- argumentiert man analog. ∎

Satz 2.6 (a) *Sei $f \geq 0$ messbar auf X. Für $A \in \mathfrak{S}$ definieren wir*

$$\varphi(A) := \int_A f \, d\mu. \tag{2.3}$$

Dann ist φ ein Maß auf $(X, \mathfrak{S})$.
(b) *Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, so ist die Funktion φ σ-additiv.*

Beweis. Aussage (b) folgt sofort, wenn wir (a) auf die Funktionen $f_\pm$ anwenden und $f = f_+ - f_-$ beachten. Wir zeigen (a). Da $\varphi(\emptyset) = 0$ nach Lemma 2.5 (e), müssen wir noch die σ-Additivität zeigen. Sei also $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ mit paarweise disjunkten messbaren Mengen A_n. Zu zeigen ist, dass $\varphi(A) = \sum_{n\geq 1} \varphi(A_n)$.

Ist $f = \chi_C$ eine charakteristische Funktion, so ist $\int_A f\,d\mu = \mu(A \cap C)$, und die Behauptung folgt aus der σ-Additivität von μ. Ist $f = \sum_{j=1}^k c_i \chi_{C_i}$ eine Stufenfunktion mit paarweise disjunkten Mengen $C_i \in \mathfrak{S}$, so ist

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{j=1}^k c_j\,\mu(A \cap C_j),$$

und die Behauptung folgt aus der σ-Additivität der einzelnen Summanden. Sei nun $f \geq 0$ messbar. Aus dem bereits Bewiesenen folgt für jede Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f$, dass

$$\int_A s\,d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} s\,d\mu \leq \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} f\,d\mu = \sum_{n\geq 1} \varphi(A_n).$$

Bilden wir links das Supremum über alle Stufenfunktionen s mit $0 \leq s \leq f$, folgt

$$\varphi(A) = \int_A f\,d\mu \leq \sum_{n\geq 1} \varphi(A_n),$$

und es verbleibt noch $\sum_{n\geq 1} \varphi(A_n) \leq \varphi(A)$ zu zeigen. Für $\varphi(A) = \infty$ ist dies klar. Sei also $\varphi(A) < \infty$ und damit auch $\varphi(A_n) < \infty$ für alle n. Mit der Definition des Integrals finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ eine Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f$ und

$$\int_{A_1} s\,d\mu \geq \int_{A_1} f\,d\mu - \varepsilon \quad \text{sowie} \quad \int_{A_2} s\,d\mu \geq \int_{A_2} f\,d\mu - \varepsilon.$$

Folglich ist

$$\varphi(A_1 \cup A_2) \geq \int_{A_1 \cup A_2} s\,d\mu = \int_{A_1} s\,d\mu + \int_{A_2} s\,d\mu \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\varphi(A_1 \cup A_2) \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$. Induktiv erhalten wir

$$\varphi\Big(\bigcup_{j=1}^n A_j\Big) \geq \sum_{j=1}^n \varphi(A_j) \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Wegen $\bigcup_{j=1}^n A_j \subseteq A$ führt dies auf

$$\varphi(A) \geq \lim_{n\to\infty} \varphi\Big(\bigcup_{j=1}^n A_j\Big) \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \varphi(A_j) = \sum_{j=1}^\infty \varphi(A_j).$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Folgerung 2.7 *Sind $A \subseteq B$ messbare Mengen mit $\mu(B \setminus A) = 0$ und ist f Lebesgue-integrierbar, so ist*

$$\int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu.$$

Beweis. Die Funktion $\varphi(E) := \int_E f\,d\mu$ ist additiv nach Satz 2.6. Folglich ist $\varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B \setminus A)$. Nach Lemma 2.5 (e) ist aber $\varphi(B \setminus A) = 0$. ∎

Folgerung 2.8 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ vollständig, die Funktionen $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seien fast überall gleich, und sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ für $E \in \mathfrak{S}$. Dann ist auch $g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ und*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$$

Beweis. Die Funktion g ist messbar nach Lemma 1.30. Sei N eine μ-Nullmenge so, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$. Dann ist $f_\pm = g_\pm$ auf $X \setminus N$ und

$$\begin{aligned}
\int_E f_+\,d\mu &= \int_{E\setminus N} f_+\,d\mu && \text{(nach Folgerung 2.7)} \\
&= \int_{E\setminus N} g_+\,d\mu && \text{(nach Voraussetzung)} \\
&= \int_{E\setminus N} g_+\,d\mu + \int_{N\cap E} g_+\,d\mu && \text{(nach Lemma 2.5 } (e)) \\
&= \int_E g_+\,d\mu.
\end{aligned}$$
∎

Satz 2.9 *Mit $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ ist auch $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$, und es gilt*

$$\Big| \int_E f\,d\mu \Big| \le \int_E |f|\,d\mu.$$

Beweis. Sei $A := \{x \in E : f(x) \ge 0\}$ und $B := E \setminus A$. Nach Satz 2.6 (a) ist

$$\int_E |f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu + \int_B |f|\,d\mu = \int_A f_+\,d\mu + \int_B f_-\,d\mu < \infty$$

und somit $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$. Wegen $f \le |f|$ und $-f \le |f|$ ist nach Lemma 2.5 (b), (d)

$$\int_E f\,d\mu \le \int_E |f|\,d\mu \quad \text{und} \quad -\int_E f\,d\mu \le \int_E |f|\,d\mu.$$

Hieraus folgt die Behauptung. ∎

Satz 2.10 (a) *Ist f messbar, $|f| \le g$ und $g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$, so ist auch $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$.*

(b) *Ist $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ vollständig, f messbar, $|f| \le g$ fast überall und $g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$.*

Beweis. (a) Dies folgt sofort aus $f_+ \le g$ und $f_- \le g$.

(b) Sei N eine μ-Nullmenge so, dass $|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$, und sei

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in X \setminus N, \\ g(x) & \text{falls } x \in N. \end{cases}$$

Nach Lemma 1.30 ist $\tilde{f}$ messbar, und es gilt $|\tilde{f}| \le g$ überall. Nach Teil (a) ist $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$, und mit Folgerung 2.8 finden wir $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$. ∎

2.3 Konvergenzsätze

Wir behandeln in diesem Abschnitt die wichtigsten Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral. Diese Sätze sind unentbehrliche Werkzeuge der Analysis.

Satz 2.11 (Beppo Levi, Satz über monotone Konvergenz) *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ vollständig, $E \in \mathfrak{S}$, und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge messbarer Funktionen mit*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty \quad \textit{für fast alle } x \in X. \tag{2.4}$$

Dann konvergiert (f_n) fast überall punktweise gegen eine messbare Funktion f, und $\int_E f_n\,d\mu \to \int_E f\,d\mu$.

Ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit gilt die Aussage immer noch, wenn man (2.4) für *alle* $x \in X$ fordert.

Beweis. Sei N eine μ-Nullmenge so, dass (2.4) für alle $x \in X \setminus N$ erfüllt ist. Für jedes $x \in X \setminus N$ konvergiert dann die Folge $(f_n(x))$ gegen einen Wert $\tilde{f}(x) \in [0, \infty]$. Wir setzen

$$f(x) := \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{für } x \in X \setminus N, \\ \infty & \text{für } x \in N. \end{cases}$$

Nach Lemma 1.31 ist f messbar. Sei $\alpha_n := \int_E f_n\,d\mu$. Nach Lemma 2.5 ($b$) und Folgerung 2.7 ist die Folge (α_n) monoton wachsend. Sei

$$\alpha := \sup\{\alpha_n : n \geq 1\} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \in [0,\, \infty].$$

Dank der Monotonie des Integrals aus Lemma 2.5 (b) gilt $\alpha_n \leq \int_E f\,d\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch $\alpha \leq \int_E f\,d\mu$.

Wir zeigen noch die umgekehrte Ungleichung $\alpha \geq \int_E f\,d\mu$. Dabei reicht es den Fall $\alpha < \infty$ zu betrachten, denn sonst ist nichts zu beweisen. Seien s eine Stufenfunktion mit $0 \leq s \leq f$, $c \in (0,\, 1)$ und $E_n := \{x \in E \setminus N : f_n(x) \geq cs(x)\}$ für $n \geq 1$. Dann ist $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle n (Monotonie der Folge (f_n) außerhalb von N) und $\bigcup_{n\geq 1} E_n = E \setminus N$ (wegen $f_n(x) \to f(x)$ und $cs(x) < f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$).

Mit Satz 2.6 (a) und Lemma 2.5 (b) erhalten wir außerdem, dass

$$\int_E f_n\,d\mu \geq \int_{E_n} f_n\,d\mu \geq c \int_{E_n} s\,d\mu. \tag{2.5}$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich daher wieder mit Satz 2.6 (a), (2.5) und Lemma 1.24 (c)

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \geq c \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s\,d\mu = c \int_{E\setminus N} s\,d\mu = c \int_E s\,d\mu.$$

Da $c \in (0,\, 1)$ beliebig war, folgt $\alpha \geq \int_E s\,d\mu$ für alle Stufenfunktionen s mit $0 \leq s \leq f$. Dann ist aber $\alpha \geq \int_E f\,d\mu$. ∎

Satz 2.12 *Sind $f,\, g \in \mathcal{L}^1(\mu,\, E)$ und ist $f+g$ erklärt, so ist auch $f+g \in \mathcal{L}^1(\mu,\, E)$ und es gilt*

$$\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu. \tag{2.6}$$

Der Satz gilt auch, wenn f, g nichtnegative messbare Funktionen sind. Dies wird im ersten Teil des folgenden Beweises gezeigt.

Beweis. Zuerst zeigen wir (2.6) für nichtnegative Stufenfunktionen. Ist $s = \sum_j c_j \chi_{E_j}$ eine nichtnegative Stufenfunktion (mit *nicht notwendig* paarweise disjunkten Mengen E_i), so kann man s schreiben als $\sum_k d_k \chi_{F_k}$ mit paarweise disjunkten Mengen F_k und mit $d_k := \sum_{j: F_k \subseteq E_j} c_j$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_E s\, d\mu &= \sum_k d_k \mu(F_k \cap E) = \sum_k \sum_{j: F_k \subseteq E_j} c_j \mu(F_k \cap E) \\ &= \sum_j c_j \sum_{k: F_k \subseteq E_j} \mu(F_k \cap E) = \sum_j c_j \mu(E_j \cap E) = \sum_j c_j \int_E \chi_{E_j}\, d\mu.\end{aligned}$$

Da man zwei Stufenfunktionen s, t immer als $s = \sum_j c_j \chi_{E_j}$ und $t = \sum_j d_j \chi_{E_j}$ (also mit *gleichen* Mengen E_j) schreiben kann, folgt hieraus (2.6) für nichtnegative Stufenfunktionen.

Seien nun f, g nichtnegative messbare Funktionen. Nach Satz 2.2 gibt es monoton wachsende Folgen (s_n) bzw. (t_n) von Stufenfunktionen, die punktweise gegen f bzw. g konvergieren. Dann ist $(s_n + t_n)$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, die punktweise gegen $f+g$ konvergiert. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert

$$\int_E s_n\, d\mu \to \int_E f\, d\mu, \quad \int_E t_n\, d\mu \to \int_E g\, d\mu, \quad \int_E (s_n + t_n)\, d\mu \to \int_E (f+g)\, d\mu.$$

Aus $\int_E s_n\, d\mu + \int_E t_n\, d\mu = \int_E (s_n + t_n)\, d\mu$ folgt (2.6) auch in diesem Fall.

Seien schließlich $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu,\, E)$. Dann sind nach Satz 2.9 auch $|f|$ und $|g|$ integrabel und nach dem schon gezeigten gilt dann dasselbe für $|f| + |g|$. Wegen $|f_1 + f_2| \le |f_1| + |f_2|$ liefert Satz 2.10, dass $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu,\, E)$ ist. Zum Nachweis von (2.6) zerlegen wir zunächst sowohl $f+g$ als auch f und g in Positiv- und Negativteile. Das liefert

$$f_+ - f_- + g_+ - g_- = f + g = (f+g)_+ - (f+g)_-$$

bzw.

$$f_+ + g_+ + (f+g)_- = (f+g)_+ + f_- + g_-.$$

In dieser Gleichung stehen nur noch nichtnegative Funktionen, die addiert werden. Wir können also auf beiden Seiten der Gleichung über E integrieren und dann die bereits gezeigte Linearität des Integrals für nichtnegative messbare Funktionen benutzen. Damit gilt

$$\int_E f_+ \, d\mu + \int_E g_+ \, d\mu + \int_E (f+g)_- \, d\mu = \int_E (f+g)_+ \, d\mu + \int_E f_- \, d\mu + \int_E g_- \, d\mu.$$

Schließlich gelangt man so zu

$$\begin{aligned}
\int_E (f+g) \, d\mu &= \int_E (f+g)_+ \, d\mu - \int_E (f+g)_- \, d\mu \\
&= \int_E f_+ \, d\mu + \int_E g_+ \, d\mu - \int_E f_- \, d\mu - \int_E g_- \, d\mu \\
&= \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu
\end{aligned}$$

und der Beweis ist beendet. ■

Wir haben hier nur die schwächere Form von Satz 2.11 benutzt. Satz 2.12 gilt also ohne Vollständigkeitsvoraussetzung. Für Reihen liefert Satz 2.11:

Folgerung 2.13 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ vollständig, $f_j : X \to [0, \infty]$ messbar, und $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ fast überall. Dann ist f messbar, und für jedes $E \in \mathfrak{S}$ ist*

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j \, d\mu.$$

Beweis. Sei $g_n := \sum_{j=1}^{n} f_j$. Die Folge (g_n) ist monoton wachsend und konvergiert fast überall gegen f. Nach Lemma 1.31 ist f messbar, und die Sätze 2.11 und 2.12 liefern

$$\begin{aligned}
\int_E f \, d\mu &\overset{2.11}{=} \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{j=1}^{n} f_j \, d\mu \\
&\overset{2.12}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_E f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j \, d\mu. \qquad ■
\end{aligned}$$

Unser nächstes Ziel ist der Satz von der majorisierten Konvergenz, das wohl wichtigste Werkzeug, um die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration zu zeigen. Vorbereitend überlegen wir uns ein Lemma.

Lemma 2.14 (Fatou) *Seien $f_n : X \to [0, \infty]$ messbare Funktionen und $E \in \mathfrak{S}$. Dann ist*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Beweis. Für $k \geq 1$ sei $g_k := \inf_{j\geq k} f_j$. Dann ist $g_k \leq f_k$ und somit $\int_E g_k\,d\mu \leq \int_E f_k\,d\mu$. Weiter ist die Folge (g_k) monoton wachsend, und sie konvergiert punktweise gegen $\liminf_{n\to\infty} f_n$. Der Satz über montone Konvergenz (schwache Fassung) liefert

$$\int_E g_k\,d\mu \to \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

und damit

$$\liminf_{k\to\infty} \int_E f_k\,d\mu \geq \liminf_{k\to\infty} \int_E g_k\,d\mu \geq \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu. \qquad \blacksquare$$

Satz 2.15 (Lebesgue, Satz über majorisierte Konvergenz) *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, $E \in \mathfrak{S}$, und (f_n) eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergieren. Weiter sei g eine messbare Funktion mit $|f_n| \leq g$ für alle n fast überall. Ist $g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$, so gehören auch f und f_n zu $\mathcal{L}^1(\mu, E)$, und es gilt*

$$\int_E f_n\,d\mu \to \int_E f\,d\mu.$$

Beweis. Sei N eine Nullmenge so, dass $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ und $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle n und alle $x \in X \setminus N$. Dann ist $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$, und nach Satz 2.10 (b) sind $f,\, f_n \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$. Weiter ist $|f - f_n| \leq 2g$ auf $X \setminus N$. Wir wenden das Fatousche Lemma auf die Folge der Funktionen $(2g - |f - f_n|)|_{X\setminus N}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_E 2g\,d\mu &= \int_{E\setminus N} 2g\,d\mu = \int_{E\setminus N} \liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|)\,d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{E\setminus N} (2g - |f_n - f|)\,d\mu \\
&= \int_{E\setminus N} 2g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_{E\setminus N} -|f_n - f|\,d\mu \\
&= \int_E 2g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\,d\mu \leq \int_E 2g\,d\mu.
\end{aligned}$$

Da $\int_E 2g\,d\mu = 2\int_E g\,d\mu < \infty$ ist, erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\,d\mu = 0$. Dies hat

$$\Big|\int_E f_n\,d\mu - \int_E f\,d\mu\Big| \leq \int_E |f_n - f|\,d\mu \to 0$$

zur Folge (Satz 2.12 und Satz 2.9). $\blacksquare$

Ohne Vollständigkeitsvoraussetzung gilt Satz 2.15 noch, wenn alle „fast“ in seiner Formulierung gestrichen werden.

Ergänzend gehen wir noch kurz auf parameterabhängige Integrale ein, für die wir nun wesentlich stärkere Aussagen als früher zeigen können.

Satz 2.16 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Weiter sei $f : X \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für jedes $u \in U$ die Funktion*

$$\hat{f}_u : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x, u)$$

zu $\mathcal{L}^1(\mu, X)$ gehört. Schließlich sei $g : U \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$u \mapsto \int_X \hat{f}_u \, d\mu = \int_X f(x, u) \, d\mu(x).$$

(a) Sind alle Funktionen $f_x : U \to \mathbb{R}$, $u \mapsto f(x, u)$ stetig in $p \in U$ und existiert eine Funktion $h \in \mathcal{L}^1(\mu, X)$ mit $|f(x, u)| \leq h(x)$ für alle $(x, u) \in X \times U$, so ist g in p stetig.

(b) Sei $1 \leq j \leq d$. Haben alle Funktionen f_x eine stetige partielle Ableitung $D_j f_x = \frac{\partial f_x}{\partial u_j}$ und gibt es eine Funktion $h \in \mathcal{L}^1(\mu, X)$ mit

$$|D_j f_x(u)| \leq h(x) \quad \text{für alle } (x, u) \in X \times U,$$

so existiert auch $D_j g$, diese Funktion ist stetig, und für alle $p \in U$ ist

$$(D_j g)(p) = \int_X D_j f(x, p) \, d\mu(x).$$

Beweis. Aussage (a) folgt direkt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz, da man Stetigkeit durch konvergente Folgen testen kann. Zu (b): Mit dem Mittelwertsatz finden wir für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit $p + \mu t e_j \in U$ für alle $\mu \in [0, 1]$ ein $\theta \in [0, 1]$ so, dass

$$\frac{1}{t}|f(x, p + te_j) - f(x, p)| = |(D_j f)(x, p + \theta t e_j)| \leq h(x).$$

Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz erhalten wir für jede Folge (t_n) mit $t_n \to 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{g(p + t_n e_j) - g(p)}{t_n} &= \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{f(x, p + t_n e_j) - f(x,p)}{t_n} \, d\mu \\ &= \int_X D_j f(x,p) \, d\mu. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

3 Konstruktion des Lebesgue-Maßes

Im ersten Teil dieses Abschnittes werden wir Techniken zur Konstruktion von Maßen entwickeln. Die wichtigste Anwendung finden diese Techniken im zweiten Teil, wo wir ein Maß auf den Borelmengen des $\mathbb{R}^n$ konstruieren, das sogenannte Lebesgue-Maß.

3.1 Äußere Maße

In den folgenden Abschnitten 3.1 - 3.3 sei X eine nichtleere Menge und $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein Mengensystem mit $\emptyset \in \mathfrak{E}$.

Definition 3.1 *Eine Funktion $\varphi : \mathfrak{E} \to [0, \infty]$ heißt ein* relativ äußeres Maß *über X, wenn $\varphi(\emptyset) = 0$ und wenn für alle A, $A_n \in \mathfrak{E}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n$ gilt*

$$\varphi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Ist darüberhinaus $\mathfrak{E} = \mathfrak{P}(X)$, so heißt φ ein äußeres Maß*.*

Offenbar ist jedes Maß auf einer σ-Algebra über X auch ein relativ äußeres Maß. Es ist klar, dass relativ äußere Maße monoton und σ-subadditiv sind, d.h. A, $B \in \mathfrak{E}$ und $A \subseteq B$ impliziert $\varphi(A) \leq \varphi(B)$, und aus A, $A_n \in \mathfrak{E}$ und $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ folgt

$$\varphi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Satz 3.2 *Sei $\alpha : \mathfrak{E} \to [0, \infty]$ eine Funktion mit $\alpha(\emptyset) = 0$. Für $A \subseteq X$ setzen wir $\varphi_\alpha(A) := \infty$, falls es keine Mengen $A_n \in \mathfrak{E}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n$ gibt. Anderenfalls sei*

$$\varphi_\alpha(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(A_n) : A_n \in \mathfrak{E} \text{ und } A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n \right\}.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(a) φ_α ist ein äußeres Maß auf X.

(b) Ist φ ein (mindestens) auf $\mathfrak{E}$ definiertes relativ äußeres Maß mit $\varphi \leq \alpha$, dann ist $\varphi \leq \varphi_\alpha$ (diese Ungleichungen gelten dort, wo beide Seiten definiert sind).

(c) Es ist $\varphi_\alpha|_{\mathfrak{E}} = \alpha$ genau dann, wenn α ein relativ äußeres Maß ist.

Beweis. (a) Es ist klar, dass $\varphi_\alpha(\emptyset) = 0$. Sei $A \subseteq \cup_{n\geq 1} A_n$ für gewisse Teilmengen A, $A_n \subseteq X$. Falls $\varphi_\alpha(A_n) = \infty$ für ein n, so ist die zu beweisende Ungleichung offenbar wahr. Wie können daher annehmen, dass $\varphi_\alpha(A_n) < \infty$ für alle $n \geq 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $n \geq 1$ gibt es Mengen $B_n^k \in \mathfrak{E}$ mit

$$A_n \subseteq \cup_{k\geq 1} B_n^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(B_n^k) \leq \varphi_\alpha(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Dann ist $A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n \subseteq \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq 1} B_n^k$, und da φ_α offenbar monoton ist, folgt hieraus

$$\varphi_\alpha(A) \leq \varphi_\alpha\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(B_n^k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\varphi_\alpha(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_\alpha(A_n) + \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung.

(b) Sei $A \subseteq X$ eine Menge, für die $\varphi(A)$ definiert ist. Falls $\varphi_\alpha(A) = \infty$, dann ist die Behauptung $\varphi(A) \leq \varphi_\alpha(A)$ offensichtlich. Sei also $A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n$ mit $A_n \in \mathfrak{E}$. Dann ist

$$\varphi(A) \leq \sum_{n\geq 1} \varphi(A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \alpha(A_n).$$

Bilden wir rechts das Infimum über alle Überdeckungen $\bigcup A_n$ von A, erhalten wir die Behauptung.

(c) Ist α ein relativ äußeres Maß, so gilt $\alpha \leq \varphi_\alpha$ auf $\mathfrak{E}$ wegen (b). Da auf $\mathfrak{E}$ stets $\varphi_\alpha \leq \alpha$ gilt, ist $\varphi_\alpha = \alpha$ auf $\mathfrak{E}$. ∎

3.2 Messbarkeit nach Carathéodory

Definition 3.3 *Sei φ ein äußeres Maß auf X. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt φ-messbar oder* messbar nach Carathéodory*, falls*

$$\varphi(H) = \varphi(H \cap A) + \varphi(H \cap A^c) \quad \text{für alle } H \subseteq X.$$

Die Menge der φ-messbaren Teilmengen von X bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_\varphi$.

Wegen $H = (H \cap A) \cup (H \cap A^c)$ ist stets $\varphi(H) \leq \varphi(H \cap A) + \varphi(H \cap A^c)$. Eine Menge $A \subseteq X$ ist also genau dann φ-messbar, wenn $\varphi(H) \geq \varphi(H\cap A)+\varphi(H\cap A^c)$ für alle $H \subseteq X$.

Satz 3.4 (Carathéodory) *Ist φ ein äußeres Maß auf X, dann ist $\mathfrak{M}_\varphi$ eine σ-Algebra und $(X, \mathfrak{M}_\varphi, \varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi})$ ein vollständiger Maßraum. Außerdem wird für jede Teilmenge $H \subseteq X$ durch $\mu_H(A) := \varphi(A \cap H)$ ein Maß auf $\mathfrak{M}_\varphi$ definiert.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathfrak{M}_\varphi$ eine σ-Algebra ist. Offenbar ist $\emptyset \in \mathfrak{M}_\varphi$, und es ist ebenso klar, dass eine Menge A genau dann φ-messbar ist, wenn ihr Komplement A^c φ-messbar ist. $\mathfrak{M}_\varphi$ ist also abgeschlossen bzgl. Komplementbildung.

Wir zeigen weiter, dass $\mathfrak{M}_\varphi$ abgeschlossen ist bzgl. endlicher Vereinigungen. Für A, $B \in \mathfrak{M}_\varphi$ und $H \subseteq X$ ist

$$\begin{aligned}\varphi(H) &= \varphi(H\cap A)+\varphi(H\cap A^c)\\ &= \varphi(H\cap A\cap B)+\varphi(H\cap A\cap B^c)+\varphi(H\cap A^c\cap B)+\varphi(H\cap A^c\cap B^c)\\ &\geq \varphi(H\cap(A\cup B))+\varphi(H\cap(A\cup B)^c),\end{aligned}$$

da ja $A\cup B=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$ und φ subadditiv ist. Nach obiger Bemerkung ist $A\cup B\in\mathfrak{M}_\varphi$. Also ist $\mathfrak{M}_\varphi$ tatsächlich abgeschlossen bzgl. endlicher Vereinigungen und wegen $A\cap B=(A^c\cup B^c)^c$ und $A\setminus B=A\cap B^c$ auch bzgl. endlicher Durchschnitte sowie bzgl. Differenzen.

Wir zeigen noch, dass $\mathfrak{M}_\varphi$ auch abgeschlossen ist bzgl. abzählbarer Vereinigungen. Mit der bereits mehrfach benutzten „Disjunktierungstechnik“ genügt es zu zeigen, dass $\mathfrak{M}_\varphi$ abgeschlossen ist bzgl. abzählbarer *und paarweise disjunkter Vereinigungen*, d.h. wir haben zu zeigen, dass für jede Folge paarweise disjunkter Mengen $A_j\in\mathfrak{M}_\varphi$ gilt $\bigcup_{j\geq1}A_j\in\mathfrak{M}_\varphi$.

Wir bemerken vorab, dass für zwei je disjunkte Mengen A, $B\in\mathfrak{M}_\varphi$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(H\cap(A\cup B)) &= \varphi(H\cap(A\cup B)\cap A)+\varphi(H\cap(A\cup B)\cap A^c)\\ &= \varphi(H\cap A)+\varphi(H\cap B).\end{aligned}$$

Dies impliziert durch Induktion, dass μ_H (endlich) additiv ist. Damit folgt nun für alle $n\in\mathbb{N}$

$$\varphi\left(H\cap\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right)\geq\varphi\left(H\cap\bigcup_{j=1}^n A_j\right)=\sum_{j=1}^n\varphi(H\cap A_j),$$

woraus schließlich folgt, dass

$$\varphi\left(H\cap\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right)\geq\sum_{j=1}^\infty\varphi(H\cap A_j).$$

Da die Ungleichung $\leq$ wegen der Subadditivität stets gilt, folgt die σ-Additivität von μ_H. Wegen $\mu_X=\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi}$ ist auch $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi}$ σ-additiv. Da $\mathfrak{M}_\varphi$ abgeschlossen bzgl. endlicher Vereinigungen ist, gilt weiter

$$\varphi(H)=\varphi\left(H\cap\bigcup_{j=1}^n A_j\right)+\varphi\left(H\setminus\bigcup_{j=1}^n A_j\right)\geq\sum_{j=1}^n\varphi(H\cap A_j)+\varphi\left(H\setminus\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right).$$

Grenzübergang $n\to\infty$ liefert

$$\varphi(H)\geq\sum_{j=1}^\infty\varphi(H\cap A_j)+\varphi\left(H\setminus\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right)=\varphi\left(H\cap\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right)+\varphi\left(H\setminus\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right).$$

Also ist $\bigcup_{j\geq 1} A_j \in \mathfrak{M}_\varphi$, und $\mathfrak{M}_\varphi$ ist eine σ-Algebra.
Zur Vollständigkeit: Sei $N \subseteq X$ und $N \subseteq C$ für ein $C \in \mathfrak{M}_\varphi$ mit $\varphi(C) = 0$. Für jedes $H \subseteq X$ ist dann

$$\varphi(H) \leq \varphi(H \cap N) + \varphi(H \cap N^c) \leq \varphi(N) + \varphi(H) \leq \varphi(C) + \varphi(H) = \varphi(H).$$

Wir haben daher überall Gleichheit in dieser Ungleichungskette. Insbesondere ist $\varphi(H) = \varphi(H \cap N) + \varphi(H \cap N^c)$ und somit $N \in \mathfrak{M}_\varphi$. ∎

3.3 Fortsetzung von relativ äußeren Maßen

Satz 3.5 (Fortsetzungssatz) *Das Mengensystem $\mathfrak{E}$ sei bzgl. der Differenz abgeschlossen, und $\alpha : \mathfrak{E} \to [0, \infty]$ sei ein relativ äußeres Maß und auf $\mathfrak{E}$ additiv. Dann ist $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}$ und $\varphi_\alpha|_{\mathfrak{E}} = \alpha$, d.h. φ_α ist die Fortsetzung von α.*

Beweis. Aus Satz 3.2 (c) folgt sofort, dass $\varphi_\alpha|_{\mathfrak{E}} = \alpha$ ist. Wir zeigen noch die Inklusion $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}$ und bemerken vorab, dass wegen $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ das Mengensystem $\mathfrak{E}$ auch abgeschlossen bzgl. Durchschnitten ist.

Sei $A \in \mathfrak{E}$ und $H \subseteq X$ beliebig. Falls $\varphi_\alpha(H) = \infty$, dann ist sicher

$$\varphi_\alpha(H) \geq \varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \setminus A). \tag{3.1}$$

Sei also $\varphi_\alpha(H) < \infty$, und seien $A_n \in \mathfrak{E}$ mit $H \subseteq \bigcup_n A_n$. Wegen

$$H \cap A \subseteq \bigcup_n (A_n \cap A) \quad \text{und} \quad H \setminus A \subseteq \bigcup_n (A_n \setminus A)$$

und mit der Additivität von α auf $\mathfrak{E}$ erhalten wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \setminus A) &\leq \sum_n \varphi_\alpha(A_n \cap A) + \sum_n \varphi_\alpha(A_n \setminus A) \\ &= \sum_n \alpha(A_n \cap A) + \sum_n \alpha(A_n \setminus A) = \sum_n \alpha(A_n). \end{aligned}$$

Wir bilden auf der rechten Seite das Infimum über alle Überdeckungen von H und erhalten (3.1) auch in diesem Fall. Es ist also $A \in \mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}$. ∎

Satz 3.6 (Eindeutigkeitssatz I) *Das Mengensystem $\mathfrak{E}$ sei bzgl. der Differenz abgeschlossen, und $\alpha : \mathfrak{E} \to [0, \infty]$ sei ein relativ äußeres Maß und auf $\mathfrak{E}$ additiv. Weiter sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra mit $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}$ und μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$, welches α fortsetzt. Ist $\varphi_\alpha(X) < \infty$, dann ist $\varphi_\alpha|_{\mathfrak{A}} = \mu$. Insbesondere ist φ_α die eindeutige Fortsetzung von α zu einem Maß auf $\mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}$.*

Beweis. Offenbar ist $\mu|_{\mathfrak{E}}$ ein relativ äußeres Maß, das mit α übereinstimmt. Aus Satz 3.2 (b) folgt daher $\mu \leq \varphi_\alpha$ auf $\mathfrak{A}$. Da nach Voraussetzung $\varphi_\alpha(X) < \infty$ ist, definiert $\nu := \varphi_\alpha - \mu$ ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Für dieses ist $\nu(A) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{E}$. Dann ist aber auch $\nu(X) = 0$, denn es ist ja $X \subseteq \bigcup_n A_n$ mit geeigneten Mengen $A_n \in \mathfrak{E}$ (sonst hätten wir $\varphi_\alpha(X) = \infty$ gesetzt; vgl. die Definition von φ_α in Satz 3.2). Dann ist aber $\nu(A) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, also stimmen φ_α und μ auf $\mathfrak{A}$ überein. ■

Der obige Eindeutigkeitssatz gilt bereits, wenn X nur *σ-endlich bzgl.* $\mathfrak{E}$ ist, d.h. wenn X durch höchstens abzählbar viele $A_n \in \mathfrak{E}$ mit $\alpha(A_n) < \infty$ überdeckt wird. Die Beweisidee ist, die A_n paarweise disjunkt zu wählen und den Eindeutigkeitssatz 3.6 für jedes A_n separat zu benutzen. Im Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.7 *Das Mengensystem $\mathfrak{E}$ sei bzgl. der Differenz abgeschlossen, und sei $\alpha : \mathfrak{E} \to [0, \infty]$ monoton (z.B. ein relativ äußeres Maß). Für $C \in \mathfrak{E}$ mit $\alpha(C) < \infty$ setzen wir $\mathfrak{E}|_C := \{A \cap C : A \in \mathfrak{E}\}$ und $\gamma := \alpha|_{(\mathfrak{E}|_C)}$, und wir betrachten das äußere Maß φ_γ auf $\mathfrak{P}(C)$. Dann gilt*

$$\mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}|_C \subseteq \mathfrak{M}_{\varphi_\gamma} \quad \textit{und} \quad \varphi_\alpha|_{\mathfrak{P}(C)} = \varphi_\gamma. \tag{3.2}$$

Ist $C \in \mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}$, dann gilt sogar die Gleichheit $\mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}|_C = \mathfrak{M}_{\varphi_\gamma}$.

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass mit $\mathfrak{E}$ auch $\mathfrak{E}|_C$ abgeschlossen bzgl. $\setminus$ ist und dass $\mathfrak{E}|_C \subseteq \mathfrak{E}$, da $\mathfrak{E}$ abgeschlossen bzgl. $\cap$ ist. Für $H \subseteq C$ ist $\varphi_\alpha(H) \leq \varphi_\gamma(H)$, da links das Infimum über eine größere Menge gebildet wird. Überdecken wir andererseits H durch $\bigcup_n A_n$ mit $A_n \in \mathfrak{E}$, so wird H auch durch $\bigcup_n (A_n \cap C)$ mit $A_n \cap C \in \mathfrak{E}|_C$ überdeckt, und es ist

$$\varphi_\gamma(H) \leq \sum_n \gamma(A_n \cap C) = \sum_n \alpha(A_n \cap C) \leq \sum_n \alpha(A_n).$$

Bilden wir rechts das Infimum über alle Überdeckungen, folgt $\varphi_\gamma(H) \leq \varphi_\alpha(H)$ und somit $\varphi_\gamma(H) = \varphi_\alpha(H)$ für alle $H \subseteq C$.

Seien nun $A \in \mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}$ und $H \subseteq C$. Dann ist, wie wir soeben gesehen haben,

$$\begin{aligned}
\varphi_\gamma(H) &= \varphi_\alpha(H) = \varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \setminus A) \\
&= \varphi_\alpha(H \cap (A \cap C)) + \varphi_\alpha(H \setminus (A \cap C)) \\
&= \varphi_\gamma(H \cap (A \cap C)) + \varphi_\gamma(H \setminus (A \cap C))
\end{aligned}$$

und daher $A \cap C \in \mathfrak{M}_{\varphi_\gamma}$. Das zeigt (3.2).

Seien nun schließlich $C \in \mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}$ und $A \in \mathfrak{M}_{\varphi_\gamma}$ (also insbesondere $A \subseteq C$). Für jedes $H \subseteq X$ ist dann

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(H) &= \varphi_\alpha(H \setminus C) + \varphi_\alpha(H \cap C) \\
&= \varphi_\alpha(H \setminus C) + \varphi_\gamma(H \cap C) \\
&= \varphi_\alpha(H \setminus C) + \varphi_\gamma((H \cap C) \cap A) + \varphi_\gamma((H \cap C) \setminus A) \\
&= \varphi_\alpha(H \setminus C) + \varphi_\alpha((H \cap C) \cap A) + \varphi_\alpha((H \cap C) \setminus A) \\
&\geq \varphi_\alpha(H \setminus A) + \varphi_\alpha(H \cap A),
\end{aligned}$$

also $A \in \mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}$. ■

Satz 3.8 (Eindeutigkeitssatz II) *Das Mengensystem $\mathfrak{E}$ sei bzgl. der Differenz abgeschlossen, und $\alpha : \mathfrak{E} \to [0, \infty]$ sei ein relativ äußeres Maß und auf $\mathfrak{E}$ additiv. Weiter sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra mit $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}$ und μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$, welches α fortsetzt. Gilt außerdem $X = \bigcup_n A_n$ mit $A_n \in \mathfrak{E}$ und $\alpha(A_n) < \infty$, so ist $\varphi_\alpha|_{\mathfrak{A}} = \mu$. Insbesondere ist φ_α die eindeutige Fortsetzung von α zu einem Maß auf $\mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}$.*

Beweis. O.E.d.A. können wir annehmen, dass die A_n paarweise disjunkt sind (andernfalls ersetzen wir $A_1, A_2, A_3, \ldots$ durch $A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots$). Für $\gamma_n := \alpha|_{(\mathfrak{E}|_{A_n})}$ gilt nach dem obigen Lemma

$$\mathfrak{M}_{\varphi_{\gamma_n}} = \mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}|_{A_n} \quad \text{und} \quad \varphi_{\gamma_n}(A) = \varphi_\alpha(A) \quad \text{für } A \subseteq A_n.$$

Wegen $\mathfrak{E}|_{A_n} \subseteq \mathfrak{A}|_{A_n} \subseteq \mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}|_{A_n} = \mathfrak{M}_{\varphi_{\gamma_n}}$ können wir den Eindeutigkeitssatz I auf $\mu|_{(\mathfrak{A}|_{A_n})}$ anwenden und erhalten

$$\mu(A \cap A_n) = \varphi_{\gamma_n}(A \cap A_n) = \varphi_\alpha(A \cap A_n)$$

und somit

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A \cap A_n) = \sum_n \varphi_\alpha(A \cap A_n) = \varphi_\alpha(A)$$

für alle $A \in \mathfrak{A}$. ■

3.4 Metrische äußere Maße$^\diamond$

Sei (X, d) ein metrischer Raum und φ ein äußeres Maß auf X. Den Abschluß einer Menge $A \subseteq X$ bezeichnen wir mit $\overline{A}$. Der folgende Satz klärt, wann Borelmengen meßbar nach Carathéodory sind. Dazu führen wir folgenden Begriffe ein: Wir bezeichnen mit

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf_{a \in A,\, b \in B} d(a, b) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y)$$

den *Abstand* der Mengen $A, B \subseteq X$ bzw. den *Durchmesser* der Menge $A \subseteq X$.

Definition 3.9 *Ein äußeres Maß φ auf X heißt* metrisch, *falls*

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

für alle $A, B \subseteq X$ mit $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

Satz 3.10 *Sei φ ein äußeres Maß auf X. Dann ist $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{M}_\varphi$ genau dann, wenn φ metrisch ist.*

Beweis. Sei zunächst $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{M}_\varphi$, und seien $A,\, B \subseteq X$ mit $\operatorname{dist}(A,\, B) > 0$. Dann ist $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Da nach Voraussetzung $\overline{A} \in \mathfrak{M}_\varphi$ ist, folgt

$$\varphi(A \cup B) = \varphi((A \cup B) \cap \overline{A}) + \varphi((A \cup B) \setminus \overline{A}) = \varphi(A) + \varphi(B),$$

d.h. φ ist metrisch. Sei nun umgekehrt φ metrisch. Wir zeigen, dass jede offene Menge G zu $\mathfrak{M}_\varphi$ gehört. Dazu definieren wir

$$G_k := \{x \in G : \operatorname{dist}(x,\, X \setminus G) \geq 1/k\} \quad \text{und} \quad U_k := G_k \setminus G_{k-1}.$$

Für alle $H \subseteq X$ und $m \in \mathbb{N}$ ist dann

$$H \cap G = (H \cap G_m) \cup \bigcup_{k=m+1}^{\infty} (H \cap U_k).$$

Wir schreiben der Kürze halber $a_k := \varphi(H \cap U_k)$ und erhalten

$$\varphi(H \cap G) \leq \varphi(H \cap G_m) + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k.$$

Falls $\sum_k a_k < \infty$, so folgt sofort

$$\varphi(H \cap G) \leq \lim_{m\to\infty} \varphi(H \cap G_m) \tag{3.3}$$

(man beachte, dass die Mengen G_m monoton wachsen und daher der Grenzwert im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert).

Ist dagegen $\sum_k a_k = \infty$, dann gilt $\sum_k a_{2k} = \infty$ oder $\sum_k a_{2k+1} = \infty$. Wir sehen uns nur den ersten Fall an; der zweite lässt sich analog behandeln. Sei also $\sum_k a_{2k} = \infty$. Wegen $\operatorname{dist}(U_{2k},\, U_{2j}) > 0$ für $j \neq k$, und da φ nach Voraussetzung metrisch ist, folgt

$$\sum_{k=1}^{N} a_{2k} = \sum_{k=1}^{N} \varphi(H \cap U_{2k}) = \varphi\left(\bigcup_{k=1}^{N} (H \cap U_{2k})\right) \leq \varphi(H \cap G_{2N}).$$

Hieraus folgt $\lim_{N\to\infty} \varphi(H \cap G_{2N}) = \infty$, und damit gilt natürlich ebenfalls wieder (3.3). Nun ist für jedes m

$$\varphi(H) \geq \varphi\left((H \cap G_m) \cup (H \setminus G)\right) = \varphi(H \cap G_m) + \varphi(H \setminus G).$$

Da (3.3) in jedem der betrachteten Fälle gilt, folgt schließlich

$$\varphi(H) \geq \lim_{m\to\infty} \varphi(H \cap G_m) + \varphi(H \setminus G) \geq \varphi(H \cap G) + \varphi(H \setminus G)$$

und damit die Behauptung. ∎

3.5 Konstruktion des Lebesgue-Maßes

Für Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a_j \leq b_j$ für $j = 1, \ldots, n$ setzen wir wie vorher

$$[a, b) := [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n).$$

Die Menge aller halboffenen Intervalle bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$. Für jedes Intervall $I = [a, b)$ definieren wir sein n-dimensionales *Volumen* durch

$$\mathrm{vol}_n(I) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

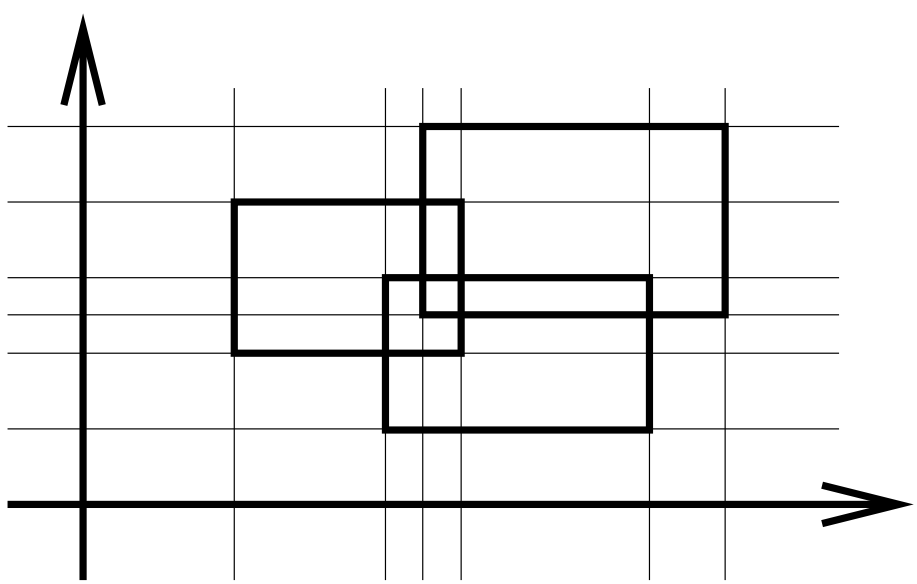
Weiter sei $\mathfrak{E}$ die Menge aller endlichen Vereinigungen von Intervallen aus $\mathfrak{R}$.

Lemma 3.11 *(a) $\emptyset \in \mathfrak{E}$, und $\mathfrak{E}$ ist abgeschlossen bzgl. $\cup$, $\cap$ und $\setminus$.*
(b) Jedes $A \in \mathfrak{E}$ kann als Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle aus $\mathfrak{R}$ geschrieben werden. Ist $A = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ eine solche disjunkte Vereinigung, so ist die Funktion

$$\alpha(A) := \sum_{j=1}^{N} \mathrm{vol}_n(I_j)$$

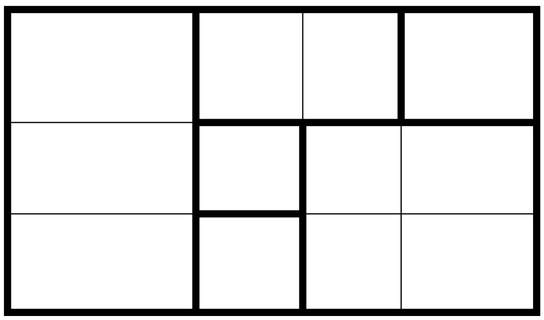
wohldefiniert und additiv auf $\mathfrak{E}$. Für alle $I \in \mathfrak{R}$ gilt $\alpha(I) = \mathrm{vol}_n(I)$.
(c) α ist ein relativ äußeres Maß auf $\mathfrak{E}$.

Beweis. Man sieht leicht (Bildchen malen!), dass Durchschnitt, Vereinigung und Differenz zweier Intervalle aus $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{E}$ liegen. Hieraus folgt die Behauptung (a), und auch die erste Aussage von (b) macht man sich leicht an einer Skizze klar:



Als nächstes überlegt man sich: Ist $I \in \mathfrak{R}$ eine endliche Vereinigung $\bigcup_j I_j$ paarweise disjunkter Intervalle aus $\mathfrak{R}$, so ist

$$\mathrm{vol}_n(I) = \sum_j \mathrm{vol}_n(I_j). \tag{3.4}$$



(Falls Sie diese anschauliche Argumentation nicht mögen, finden Sie ausführliche Beweise in Bauer, S. 26 - 28.) Die Wohldefiniertheit erhalten wir dann wie folgt: Seien $A = \bigcup_{j=1}^N I_j = \bigcup_{k=1}^M J_k$ zwei Darstellungen von $A \in \mathfrak{E}$ als endliche Vereinigungen paarweise disjunkter Intervalle aus $\mathfrak{R}$, so ist

$$I_j = I_j \cap A = I_j \cap \Big(\bigcup_{k=1}^M J_k \Big) = \bigcup_{k=1}^M (I_j \cap J_k).$$

Wegen (3.4) ist dann

$$\sum_{j=1}^N \mathrm{vol}_n(I_j) = \sum_{j=1}^N \mathrm{vol}_n \Big(\bigcup_{k=1}^M (I_j \cap J_k) \Big) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \mathrm{vol}_n(I_j \cap J_k).$$

Eine analoge Rechnung für die zweite Darstellung von A liefert den gleichen Ausdruck. Auch die Additivität von α ist nun leicht zu sehen.
(c) Wie zeigen zuerst, dass α subadditiv ist. Sei $A \subseteq \bigcup_{k=1}^N A_k$ mit $A, A_k \in \mathfrak{E}$. Dann sind $I_1 := A_1$, $I_2 := A_2 \setminus I_1$, $I_3 := A_3 \setminus (I_1 \cup I_2)$ u.s.w. paarweise disjunkte Mengen aus $\mathfrak{E}$ mit $\bigcup_{k=1}^N A_k = \bigcup_{k=1}^N I_k$. Wegen der Additivität von α ist dann

$$\alpha(A) \leq \alpha \Big(\bigcup_{k=1}^N A_k \Big) = \alpha \Big(\bigcup_{k=1}^N I_k \Big) = \sum_{k=1}^N \alpha(I_k) \leq \sum_{k=1}^N \alpha(A_k).$$

Sei nun $A \subseteq \bigcup_{k \geq 1} A_k$ eine abzählbare Überdeckung von $A \in \mathfrak{E}$ durch Mengen $A_k \in \mathfrak{E}$. Jedes A_k ist also eine endliche Vereinigung von Intervallen, und wir können annehmen, dass alle auftretenden Intervalle paarweise disjunkt sind (wir definieren wie oben die I_k und zerlegen diese Mengen in paarweise disjunkte Intervalle). Diese nummerieren wir durch und erhalten eine Folge paarweise disjunkter Intervalle $J_i \in \mathfrak{R}$ mit $A \subseteq \cup_{i \geq 1} J_i$.

Sei $\delta > 1$. Mit J_i^δ bezeichnen wir das Intervall, das aus J_i durch zentrische Streckung mit dem Faktor δ hervorgeht, wobei der Mittelpunkt von J_i als Streckungszentrum dient. Offenbar ist dann $\overline{J_i} \subset \operatorname{int}(J_i^\delta)$. Wegen $A \in \mathfrak{E}$ ist A eine endliche Vereinigung von Intervallen. Somit ist $\overline{A}$ kompakt, und A wird bereits durch endlich viele der Intervalle J_i^δ, etwa durch $J_1^\delta, \dots J_K^\delta$, überdeckt. Nach dem oben Bewiesenen und Dank der Additivität von α auf $\mathfrak{E}$, die im Teil (b) bewiesen wurde, ist dann

$$\alpha(A) \leq \sum_{i=1}^{K} \alpha(J_i^\delta) = \delta^d \sum_{i=1}^{K} \alpha(J_i) \leq \delta^d \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(J_i) \leq \delta^d \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k).$$

Da dies für jedes $\delta > 1$ gilt, folgt

$$\alpha(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k),$$

und α ist ein relativ äußeres Maß. ■

Definition 3.12 *Seien $\mathfrak{E}$ und α wie oben und φ_α das zugehörige äußere Maß auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt $\lambda_n^* := \varphi_\alpha$ das n-dimensionale* äußere Lebesgue-Maß. *Wir bezeichnen die σ-Algebra $\mathfrak{M}_{\varphi_\alpha}$ der λ_n^*-messbaren Mengen mit $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ und nennen ihre Elemente* Lebesgue-Mengen *oder* Lebesgue-messbare Mengen. *Das Maß $\lambda_n := \lambda_n^*|_{\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)}$ heißt das n-dimensionale* Lebesgue-Maß, *und $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ ist der* Lebesguesche Maßraum.

Satz 3.13 *Mit diesen Definitionen gilt*:
(a) λ_n^* ist ein metrisches äußeres Maß.
(b) Borelmengen sind Lebesgue-meßbar, d.h. es ist $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$.
(c) Der Lebesguesche Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ ist vollständig.
(d) Für alle $A \in \mathfrak{E}$ ist $\lambda_n(A) = \alpha(A)$. Insbesondere ist $\lambda_n(I) = \mathrm{vol}_n(I)$ für alle Intervalle $I \in \mathfrak{R}$.
(e) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist $\lambda_n(K) < \infty$.
(f) Der Lebesguesche Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ ist σ-endlich. Es ist sogar $\mathbb{R}^n$ eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.
(g) Für $a \leq b$ (komponentenweise) ist $\lambda_n([a, b)) = \lambda_n([a, b]) = \lambda_n((a, b))$.
(h) Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra mit $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ und ist μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$ mit $\mu|_{\mathfrak{E}} = \alpha$, so ist $\lambda_n|_{\mathfrak{A}} = \mu$.

Es gibt also genau ein Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, das allen Intervallen ihr (gewöhnliches) n-dimensionales Volumen zuordnet.

Beweis. Aussage (a) zeigen wir separat am Ende dieses Abschnittes.

(b) Dies folgt aus Aussage (a) und Satz 3.10; kann aber auch leicht ohne Benutzung von (a) eingesehen werden: Wegen des Fortsetzungssatzes 3.5 gilt $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$. Da aber $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{E}$ und da $\mathfrak{R}$ die Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugt, folgt

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathfrak{R}) \subseteq \sigma(\mathfrak{E}) \subseteq \sigma(\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)) = \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n).$$

(c) Dies ergibt sich unmittelbar aus unserer Konstruktion: der Satz von Carathéodory (Satz 3.4) liefert vollständige Maßräume.

(d) λ_n^* setzt α (wegen Satz 3.5) und vol_n (wegen Lemma 3.11) fort.

(e) Kompakte Mengen sind beschränkt. Für jedes kompakte K gibt es daher ein Intervall $I \in \mathfrak{R}$ mit $K \subseteq I$. Dann ist aber

$$\lambda_n(K) \leq \lambda_n(I) = \mathrm{vol}_n(I) < \infty.$$

(f) Offenbar ist $\mathbb{R}^n$ die Vereinigung über $k \in \mathbb{N}$ der abgeschlossenen (also kompakten) Kugeln um 0 vom Radius k.

(g) Wir bezeichnen mit $\mathbf{1}$ den Vektor $(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Für $a \leq b$ ist dann

$$(a, b) = \bigcup_{k \geq 1} [a + k^{-1}\mathbf{1}, b) \quad \text{and} \quad [a, b] = \bigcap_{k \geq 1} [a, b + k^{-1}\mathbf{1}),$$

und die Behauptung folgt aus Lemma 1.24 (c), (d), angewandt auf das Lebesgue-Maß λ_n.

(h) Das ist die Aussage des Eindeutigkeitssatzes 3.8 (beachte, dass der Lebesguesche Maßraum nach (f) σ-endlich ist). ∎

Führt man diese Konstruktion mit

$$\mathfrak{E}_{\mathbb{Q}} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{N} [a_k, b_k) : a_k, b_k \in \mathbb{Q}^d, N \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{und} \quad \alpha_{\mathbb{Q}} := \alpha|_{\mathfrak{E}_{\mathbb{Q}}}$$

statt mit $\mathfrak{E}$ und α durch, gelangt man zum gleichen Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$.

Satz 3.14 *Das äußere Lebesgue-Maß ist translationsinvariant, d.h. für jedes $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und jedes $a \in \mathbb{R}^n$ ist*

$$\lambda_n^*(a + A) = \lambda_n^*(A).$$

Da ferner gilt

$$A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow a + A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{sowie} \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow a + A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \tag{3.5}$$

sind auch das Lebesgue-Maß λ_n auf $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ sowie seine Einschränkung auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ translationsinvariant.

Beweis. Offenbar ist vol_n translationsinvariant. Somit hat auch λ_n^* diese Eigenschaft, und es folgt die erste Aussage in (3.5).

Für $a \in \mathbb{R}^n$ sei $f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $x \mapsto x - a$. Da f_a stetig ist, ist für jede offene Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ihr Urbild $f_a^{-1}(G) = a + G$ offen. Die Menge

$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n : f_a^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\}$$

ist eine σ-Algebra, und sie enthält alle offenen Mengen. Somit ist $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathfrak{A}$, woraus die zweite Aussage in (3.5) folgt. ■

Satz 3.15 *Das Lebesgue-Maß λ_n ist das einzige translationsinvariante Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda([0,\,1)^n) = 1$. Eine analoge Aussage gilt für $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Dass λ_d die angegebenen Eigenschaften hat, folgt aus Lemma 3.11 und Satz 3.14. Sei nun umgekehrt μ ein translationsinvariantes Maß, das mindestens auf $\mathfrak{R}$ definiert und durch $\mu([0,\,1)^n) = 1$ normiert ist. Seien $a,\, b \in \mathbb{Q}^d$ mit $a \le b$. Aus der Translationsinvarianz folgt

$$\mu([a,\,b)) = \mu([0,\,b-a) + a) = \mu([0,\,b-a)).$$

Da $b - a \in \mathbb{Q}^n$, können wir $b - a$ schreiben als $(\frac{m_1}{m},\, \ldots,\, \frac{m_n}{m})$ mit $m,\, m_j \in \mathbb{Z}$ und $m > 0$. Somit ist $[0,\,b-a)$ eine disjunkte Vereinigung von $m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ Intervallen, die durch Translation aus $[0,\,\frac{1}{m})^n$ hervorgehen. Aus der Translationsinvarianz und der Additivität folgt

$$\mu([0,\,b-a)) = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n\, \mu([0,\,1/m)^n).$$

Wir bestimmen $\mu([0,\,\frac{1}{m})^n)$. Da $[0,\,1)^n$ darstellbar ist als disjunkte Vereinigung von m^n Intervallen, die durch Translation aus $[0,\,\frac{1}{m})^n$ hervorgehen, ist

$$1 = \mu([0,\,1)^n) = m^n \mu([0,\,1/m)^n), \quad \text{also} \quad \mu([0,\,1/m)^n) = m^{-n}.$$

Damit wird

$$\mu([a,\,b)) = \mu([0,\,b-a)) = \frac{m_1 \cdot \ldots \cdot m_n}{m^n} = \lambda_n([0,\,b-a)) = \lambda_n([a,\,b)).$$

Es ist also $\mu = \mathrm{vol}_n = \lambda_n$ auf der Menge der Intervalle mit rationalen Endpunkten. Dann stimmen diese Funktionen auch auf der Menge $\mathfrak{E}_{\mathbb{Q}}$ überein (vgl. die Anmerkung nach Satz 3.13). Satz 3.13 (h) liefert schließlich $\lambda_n = \mu$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ und auf $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$. ■

Folgerung 3.16 *Ist $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ und $t > 0$, so ist auch $tE \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt*

$$\lambda_n(tE) = t^n \lambda_n(E).$$

Beweis. Man überprüft leicht, dass $t\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \{tB : B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\}$ eine σ-Algebra über $\mathbb{R}^n$ ist, die alle offenen Mengen enthält. Folglich ist $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ in $t\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ enthalten. Eine Wiederholung dieser Überlegung liefert

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq t\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \frac{1}{t}\, t\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n).$$

Insbesondere ist also $tE \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ für $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$$\mu(E) := \frac{1}{t^n}\, \lambda_n(tE).$$

Man bestätigt leicht, dass μ ein Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ist und dass

$$\mu(J) = \frac{1}{t^n}\, \lambda_n(tJ) = \frac{1}{t^n} \prod_{j=1}^{n} (tb_j - ta_j) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = \lambda_n(J)$$

für jedes Intervall $J = [a, b)$ ist. Mit Satz 3.13 folgt $\mu = \lambda$ auf ganz $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. ■

Beweis von Satz 3.13 $(a)^\diamond$**.** Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A, B) =: \delta > 0$. Wir möchten zeigen, dass $\lambda_n^*(A \cup B) \geq \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B)$. Für $\lambda_n^*(A \cup B) = \infty$ gilt dies offenbar. Sei also $\lambda_n^*(A \cup B) < \infty$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann (vgl. Satz 3.2) gibt es Intervalle $J_k \in \mathfrak{R}$ mit $A \cup B \subseteq \bigcup_k J_k$ und

$$\lambda_n^*(A \cup B) \geq \sum_k \operatorname{vol}_n(J_k) - \varepsilon. \tag{3.6}$$

Da jedes Intervall J_k geschrieben werden kann als endliche Vereinigung von Intervallen vom Durchmesser $\leq \delta/3$ und da wir Intervalle J_k mit $J_k \cap (A \cup B) = \emptyset$ in (3.6) einfach weglassen können, nehmen wir in weiteren an, dass für die Intervalle J_k in (3.6) gilt:

$$\operatorname{diam}(J_k) \leq \delta/3 \quad \text{und} \quad J_k \cap (A \cup B) \neq \emptyset.$$

Hieraus folgt, dass jedes dieser Intervalle J_k entweder mit A oder mit B einen Punkt gemeinsam hat: Sind I, J Intervalle mit $\operatorname{diam}(I) \leq \delta/3$, $\operatorname{diam}(J) \leq \delta/3$ sowie mit $a \in I \cap A$ und $b \in J \cap B$, so ist für alle $x \in I$ und alle $y \in J$

$$0 < \delta \leq |a - b| \leq |a - x| + |x - y| + |y - b|,$$

also

$$|x - y| \geq |a - b| - |a - x| - |y - b| \geq \delta - \delta/3 - \delta/3 = \delta/3.$$

Somit ist $\operatorname{dist}(I, J) \geq \delta/3$ und insbesondere $I \cap J = 0$.

Wir erhalten daher aus (3.6)

$$\lambda_n^*(A \cup B) \geq \sum_{J_k : J_k \cap A \neq \emptyset} \operatorname{vol}_n(J_k) + \sum_{J_k : J_k \cap B \neq \emptyset} \operatorname{vol}_n(J_k) - \varepsilon.$$

Da die Intervalle J_k mit $J_k \cap A \neq \emptyset$ die Menge A überdecken und die mit $J_k \cap B \neq \emptyset$ die Menge B überdecken, folgt mit der Definition von λ_n^* (vgl. wieder Satz 3.2), dass

$$\lambda_n^*(A \cup B) \geq \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B) - \varepsilon.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung. ■

3.6 Regularität

Der folgende Satz zeigt insbesondere, dass das Lebesgue-Maß λ_n auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ein reguläres Borelmaß ist.

Satz 3.17 *Sei $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine offene Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ mit*

$$F \subseteq A \subseteq G \quad \textit{and} \quad \lambda_n(G \setminus F) < \varepsilon.$$

Dabei kann F als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen gewählt werden.

Beweis. Sei zunächst A beschränkt und somit $\lambda_n(A) < \infty$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine abzählbare Überdeckung $A \subseteq \bigcup_k J_k$ durch Intervalle $J_k \in \mathfrak{R}$ mit

$$\sum_k \operatorname{vol}_n(J_k) < \lambda_n(A) + \varepsilon/4.$$

Für $\delta > 0$ sei J_k^δ das Intervall, das aus J_k durch Streckung mit dem Faktor $1 + \delta$ und mit dem Mittelpunkt des Intervalls als Streckungszentrum hervorgeht. Dann ist

$$\sum_k \lambda_n(J_k^\delta) = (1+\delta)^n \sum_k \lambda_n(J_k) < (1+\delta)^n (\lambda_n(A) + \varepsilon/4) < \lambda_n(A) + \varepsilon/2,$$

falls δ nur klein genug ist. Für ein solches δ sei $G := \bigcup_k \operatorname{int} J_k^\delta$. Dann ist G offen, $A \subseteq G$, und wegen der Subadditivität ist

$$\lambda_n(G) \leq \sum_k \lambda_n(J_k^\delta) < \lambda_n(A) + \varepsilon/2.$$

Weiter: da A beschränkt ist, gibt es eine abgeschlossene Kugel B mit $A \subseteq B$. Wie wir oben gesehen haben, gibt es dann eine offene Menge G' so, dass

$$B \setminus A \subseteq G' \quad \text{und} \quad \lambda_n(G') \leq \lambda_n(B \setminus A) + \varepsilon/2.$$

Dann ist die Menge $F := B \setminus G'$ kompakt, $F \subseteq A$, und

$$\begin{aligned} \lambda_n(F) &= \lambda_n(B \setminus G') \geq \lambda_n(B) - \lambda_n(G') \geq \lambda_n(B) - \lambda_n(B) + \lambda_n(A) - \varepsilon/2 \\ &= \lambda_n(A) - \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Wegen

$$\lambda_n(G \setminus F) = \lambda_n(G \setminus A) + \lambda_n(A \setminus F) \leq \varepsilon$$

haben wir die gewünschten Mengen gefunden.

Sei nun A unbeschränkt. Wir bezeichnen mit B_j die abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius j und definieren

$$A_1 := A \cap B_1 \quad \text{und} \quad A_j := A \cap (B_j \setminus B_{j-1}) \quad \text{für } j \geq 2.$$

Die Mengen A_j sind beschränkt und paarweise disjunkt, und es ist $A = \bigcup_j A_j$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem oben Bewiesenen gibt es kompakte Mengen F_j und offene Mengen G_j mit $F_j \subseteq A_j \subseteq G_j$ und $\lambda_d(G_j \setminus F_j) \leq \varepsilon/2^j$. Wir setzen

$$G := \bigcup_j G_j \quad \text{und} \quad F := \bigcup_j F_j.$$

Dann ist G offen (klar) und F abgeschlossen (jede kompakte Menge schneidet nur endlich viele der F_j), und es ist

$$\lambda_n(G \setminus F) \leq \sum_{j \geq 1} \lambda_n(G_j \setminus F_j) \leq \sum_{j \geq 1} \varepsilon/2^j = \varepsilon$$

da ja $G \setminus F \subseteq \bigcup_j (G_j \setminus F_j)$. ∎

Satz 3.18 (a) *Der Lebesguesche Maßraum* $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ *ist die Vervollständigung von* $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$.
(b) *Für jedes* $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ *gibt es eine* F_σ*-Menge* F *und eine* G_δ*-Menge* G *mit*

$$F \subseteq A \subseteq G \quad \textit{und} \quad \lambda_n(F) = \lambda_n(A) = \lambda_n(G).$$

(c) *Für jedes* $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ *ist*

$$\begin{aligned}\lambda_n(A) &= \inf\{\lambda_n(G) : G \textit{ offen}, A \subseteq G\} \\ &= \sup\{\lambda_n(K) : K \textit{ kompakt}, K \subseteq A\}.\end{aligned}$$

Beweis. Wir beginnen mit Aussage (b). Nach Satz 3.17 gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ offene Mengen G_k und abgeschlossene Mengen F_k mit

$$F_k \subseteq F_{k+1} \subseteq A \subseteq G_{k+1} \subseteq G_k \quad \text{und} \quad \lambda_n(G_k \setminus F_k) \leq 1/k.$$

Die Mengen $G := \bigcap G_k$ und $F := \bigcup F_k$ haben die gewünschten Eigenschaften. Aussage (a) folgt hieraus leicht: Es ist ja F eine Borelmenge und $A \setminus F$ eine Menge vom Maß 0. Also liegt jede Menge $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ in der Vervollständigung von $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$. Schließlich folgt (c) unmittelbar aus Satz 3.17. ∎

Satz 3.19 *Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn sie als $A = F \cup N$ mit einer Lebesgueschen Nullmenge N und einer abzählbaren Vereinigung kompakter Mengen F geschrieben werden kann.*

Beweis. Haben F und N die angegebenen Eigenschaften, dann ist $F \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ und $N \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, also $A = F \cup N \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$.

Sei umgekehrt $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben A als abzählbare Vereinigung $A = \bigcup_k A_k$ beschränkter Mengen $A_k \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ (z.B. kann A_k als Schnitt von A mit einer Kugel um 0 vom Radius k gewählt werden). Dann ist $\lambda_n(A_k) < \infty$, und nach Satz 3.18 (b) gibt es F_σ-Mengen F_k mit $F_k \subseteq A_k$ und $\lambda_n(F_k) = \lambda_n(A_k)$. Die F_k sind also abzählbare Vereinigungen abgeschlossener Mengen, die wegen der Beschränktheit sogar kompakt sind. Dann ist aber auch $F := \bigcup_k F_k$ eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.

Die Mengen $N_k := A_k \setminus F_k$ haben wegen $\lambda_n(F_k) = \lambda_n(A_k)$ das Lebesgue-Maß 0. Dann ist aber auch $N := \bigcup N_k$ eine Lebesguesche Nullmenge. Aus

$$A = \bigcup_k A_k = \bigcup_k (F_k \cup N_k) = \Big(\bigcup_k F_k\Big) \cup \Big(\bigcup_k N_k\Big) = F \cup N$$

folgt die Behauptung. ∎

Der folgende Satz stellt eine enge Beziehung her zwischen Borel-Messbarkeit und Stetigkeit.

Satz 3.20 (Luzin) *Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei $(\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-messbar, und $H \subseteq \mathbb{R}^n$ habe ein endliches Lebesgue-Maß. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $F \subseteq H$ mit*

$$\lambda_n(H \setminus F) < \varepsilon \quad \textit{und} \quad f : F \to \mathbb{R} \textit{ ist stetig.}$$

Beweis.$^\diamond$ Wir behandeln zunächst den Fall, dass f eine Stufenfunktion ist; sei also

$$f = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{A_j}$$

mit paarweise disjunkten Mengen $A_j \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ so, dass $\bigcup_{j=1}^k A_j = \mathbb{R}^n$. Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir mit Satz 3.18 (c) abgeschlossene Mengen F_j mit $F_j \subseteq A_j \cap H$ und $\lambda_n((A_j \cap H) \setminus F_j) < \varepsilon/k$. Dann ist $F := \bigcup_{j=1}^k F_j$ abgeschlossen,

$$\begin{aligned} \lambda_n(H \setminus F) &= \lambda_n\Big(\Big(\bigcup_j (A_j \cap H)\Big) \setminus F\Big) = \lambda_n\Big(\bigcup_j ((A_j \cap H) \setminus F)\Big) \\ &= \sum_j \lambda_n((A_j \cap H) \setminus F_j) < \varepsilon, \end{aligned}$$

und f ist stetig auf F, da f auf jeder der paarweise disjunkten Mengen F_j konstant ist.

Sei nun f eine beschränkte $(\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-messbare Funktion. Nach Satz 2.2 kann f gleichmäßig durch eine Folge von Stufenfunktionen f_k approximiert werden (in Satz 2.2 ist $f \geq 0$; durch Addition einer geeigneten Konstanten können wir den allgemeinen Fall darauf zurückführen).

Wir wenden das bereits Bewiesene auf jede der Funktionen f_k an. Genauer: zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sei $F_1 \subseteq H$ eine abgeschlossene Menge so, dass $f_1 : F_1 \to \mathbb{R}$ stetig und $\lambda_n(H \setminus F_1) < \varepsilon/2$ ist. Ist F_k bereits definiert, so sei $F_{k+1} \subseteq F_k$ eine abgeschlossene Menge so, dass $f_{k+1} : F_{k+1} \to \mathbb{R}$ stetig und $\lambda_n(F_k \setminus F_{k+1}) < \varepsilon/2^{k+1}$ ist. Die Menge $F := \bigcap_k F_k$ ist dann ebenfalls abgeschlossen, und es ist $\lambda_n(H \setminus F) < \varepsilon$. Außerdem ist jede der Funktionen f_k auf F stetig. Da die f_k auf F gleichmäßig gegen f konvergieren, ist auch $f : F \to \mathbb{R}$ stetig.

Schließlich sei noch f eine beliebige $(\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-messbare Funktion. Die Mengen $H_k := \{x \in X : |f(x)| \leq k\}$ bilden eine wachsende Folge mit $\bigcup_k H_k = H$. Nach Lemma 1.24 (c) ist dann $\lambda_n(H_k) \to \lambda_n(H)$, und da $\lambda_n(H)$ endlich ist, folgt $\lambda_n(H \setminus H_k) \to 0$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es somit ein H_k mit $\lambda_n(H \setminus H_k) < \varepsilon/2$. Auf H_k ist f beschränkt. Nach oben Bewiesenem gibt es daher eine abgeschlossene Menge $F \subseteq H_k$ mit $\lambda_n(H_k \setminus F) < \varepsilon/2$ und so, dass $f : F \to \mathbb{R}$ stetig ist. Wegen $\lambda_n(H \setminus F) < \varepsilon$ ist dies die gesuchte Menge. ■

3.7 Nicht Lebesgue-messbare Mengen$^\diamond$

Die Vitali-Menge aus Abschnitt 1.1 ist nicht Lebesgue-messbar; es *gibt* also nicht Lebesgue-messbare Mengen. In diesem Zusammenhang ist der folgende Satz bemerkenswert.

Satz 3.21 *Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathfrak{P}(H) \subseteq \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $\lambda_n(H) = 0$.*

Beweis. Sei $\lambda_n(H) = 0$. Dann sind die Teilmengen von H λ_n-Nullmengen. Da der Lebesguesche Maßraum vollständig ist, ist jede λ_n-Nullmenge auch Lebesgue-messbar.

Wir zeigen die umgekehrte Implikation. Dazu definieren wir auf $\mathbb{R}^n$ eine Äquivalenzrelation durch $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Q}^n$. Sei A eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält (Auswahlaxiom!). Dann ist

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}^n} (A + p) \quad \text{und} \quad H = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}^n} (H \cap (A + p)).$$

Für ein festes $p \in \mathbb{Q}^n$ sei $K \subseteq H \cap (A + p)$ eine kompakte Menge. Diese ist beschränkt, also in einer Kugel B_R um 0 vom Radius $R > 0$ enthalten, und wegen $K \subseteq A + p$ sind die Mengen $K + q$ mit $q \in \mathbb{Q}^n$ paarweise disjunkt. Daher ist

$$\lambda_n(B_{R+1}) \geq \lambda_n\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^n,\, |q|<1} (K + q)\Big) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^n,\, |q|<1} \lambda_n(K + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^n,\, |q|<1} \lambda_n(K).$$

Da $\lambda_n(B_{R+1})$ endlich ist (später rechnen wir dieses Volumen auch aus), folgt $\lambda_n(K) = 0$. Nach Satz 3.18 (*c*) ist dann $\lambda_n(H \cap (A+p)) = 0$ und somit $\lambda_n(H) = 0$. ∎

Man kann explizite Beispiele dafür angeben, dass nicht alle Lebesgue-messbaren Mengen Borelsch sind.

3.8 Lebesgue- und Riemann-Integral

Wir vergleichen in diesem Abschnitt das Riemann-Integral über Intervallen in $\mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Integral. Dabei legen wir den *vervollständigten* Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ zu Grunde, betrachten also messbare Funktionen

$$f : (\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})).$$

Die Resultate hängen davon ab, ob die Intervalle beschränkt oder unbeschränkt sind. Statt λ_1 schreiben wir im weiteren kurz λ.

Satz 3.22 *Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Dann ist jede auf $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktion f auch Lebesgue-integrierbar, und es ist*

$$\int_{[a,\,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Beweis. Ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, so gibt es für jedes $n \geq 1$ Treppenfunktionen $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ mit $\int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx < 1/n$ (Ana II, Folgerung 8.9). O.E.d.A. können wir die Folgen (φ_n) bzw. (ψ_n) als monoton wachsend bzw. fallend voraussetzen (andernfalls ersetzen wir φ_n durch $\max(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ und ψ_n durch $\min(\psi_1, \ldots, \psi_n)$). Nach den Integraldefinitionen stimmen Riemann- und Lebesgue-Integral für Treppenfunktionen überein. Es ist also auch

$$\int_{[a,\,b]} (\psi_n - \varphi_n)\, d\lambda < 1/n. \tag{3.7}$$

Die monotonen Funktionenfolgen (φ_n) und (ψ_n) konvergieren punktweise auf $[a, b]$ gegen messbare Funktionen φ und ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Aus $\varphi_1 \leq \varphi_n \leq \psi_n \leq \psi_1$ und der Lebesgue-Integrierbarkeit von φ_1 und ψ_1 folgt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz, dass $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^1(\lambda, [a, b])$ und dass

$$\int_{[a,\,b]} \varphi_n \, d\lambda \to \int_{[a,\,b]} \varphi \, d\lambda \quad \text{sowie} \quad \int_{[a,\,b]} \psi_n \, d\lambda \to \int_{[a,\,b]} \psi \, d\lambda.$$

Der gleiche Satz liefert mit (3.7), dass $\int_{[a,\,b]} (\psi - \varphi)\, d\lambda = 0$. Aus der Übung wissen wir, dass dann $\varphi = \psi$ fast überall, und wegen $\varphi \leq f \leq \psi$ ist auch $\varphi = f$ fast überall. Folglich ist auch $f \in \mathcal{L}^1(\lambda, [a, b])$, und

$$\int_{[a,\,b]} f\,d\lambda = \int_{[a,\,b]} \varphi\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,\,b]} \varphi_n\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

In diesem Zusammenhang erinnern wir an das *Lebesguesche Integrabilitätskriterium* (Ana II, Abschnitt 8.4).

Satz 3.23 *Eine beschränkte Funktion $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn ihre Unstetigkeitsstellen eine λ-Nullmenge bilden.*

Die Klasse der Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist aber wesentlich größer als die der Riemann-integrierbaren Funktionen. Ein einfaches Beispiel ist die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ der Menge der rationalen Zahlen, die nicht Riemann- aber Lebesgue-integrierbar ist (beachte: Mengen, die nur aus einem Punkt bestehen, sind Borelmengen vom Maß 0, und $\mathbb{Q}$ ist eine abzählbare Vereinigung solcher Mengen). Es folgt ein Beispiel einer Lebesgue-integrierbaren Funktion, die sich im Gegensatz zu $\chi_{\mathbb{Q}}$ nicht einmal durch Abändern auf einer Nullmenge zu einer Riemann-integrierbaren Funktion machen lässt.

Beispiel. Die Menge $Q := \mathbb{Q} \cap (0,1)$ ist abzählbar; wir schreiben sie als $Q = \{q_n : n \geq 1\}$. Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ und jedes n sei $U_n \subseteq (0,\,1)$ ein offenes Intervall einer Länge $\leq \varepsilon/2^n$, das q_n enthält. Dann ist

$$Q \subseteq U := \bigcup_{n\geq 1} U_n \subseteq (0,\,1) \quad \text{und} \quad \lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon\, 2^{-n} = \varepsilon.$$

Seien $f := \chi_U$ und $f_n := \chi_{U_1 \cup \ldots \cup U_n}$. Die Funktionen f_n sind Riemann–integrierbar, es gilt

$$\int_{[0,\,1]} f_n\,d\lambda = \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \varepsilon,$$

und die Folge (f_n) ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen f. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist f Lebesgue-integrierbar, und es ist

$$\int_{[0,\,1]} f\,d\lambda \leq \varepsilon.$$

Zeigen Sie als Übung, dass f die behauptete Eigenschaft hat. $\blacksquare$

Bei uneigentlichen Riemann–Integralen, die nicht absolut konvergieren, ist die Situation subtiler. Da die Lebesgue-Integrabilität die absolute Konvergenz des Integrals voraussetzt, können uneigentliche Riemann-Integrale existieren, die man nicht als Lebesgue-Integrale interpretieren kann. Bevor wir ein Beispiel geben, fassen wir diesen Zusammenhang präziser. Dazu benötigen wir folgenden Satz.

Satz 3.24 (Ausschöpfungssatz) *Sei $(X,\, \mathfrak{S},\, \mu)$ ein Maßraum, und sei (M_n) eine wachsende Folge messbarer Teilmengen von X, $M := \bigcup_{n\geq 1} M_n$ und $f : M \to$*

$\mathbb{R}$. Dann ist f genau dann in $\mathcal{L}^1(\mu, M)$, wenn $f \in \mathcal{L}^1(\mu, M_n)$ für jedes n und wenn die Folge der Integrale $\int_{M_n} |f| \, d\mu$ (gegen eine endliche Zahl) konvergiert. Ist dies der Fall, so ist

$$\int_M f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f \, d\mu.$$

Beweis. Aus $f \in \mathcal{L}^1(\mu, M)$ folgt $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu, M)$ (Satz 2.9) und damit $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu, M_n)$, und es gilt $\int_{M_n} |f| \, d\mu \leq \int_M |f| \, d\mu$.

Der interessante Teil des Beweises betrifft die Umkehrung dieser Aussage. Zunächst konvergiert die monoton wachsende Folge $(\chi_{M_n}|f|)$ punktweise gegen $\chi_M|f|$, so dass $\chi_M|f| \in \mathcal{L}^1(\mu, M)$ nach dem Satz über die monotone Konvergenz. Weiter ist $|\chi_{M_n} f| \leq \chi_M|f|$, und die Funktionen $\chi_{M_n} f$ konvergieren punktweise gegen $\chi_M f$, so dass wir mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz $f \in \mathcal{L}^1(\mu, M)$ sowie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \chi_{M_n} f \, d\mu = \int_X \chi_M f \, d\mu = \int_M f \, d\mu$$

erhalten. ■

Folgerung 3.25 *Seien $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$. Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf jedem kompakten Teilintervall von (a, b), so ist f genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^b |f(x)| \, dx$ konvergiert.*

Beweis. Wir wählen eine monoton fallende Folge (x_n) mit $a < x_n < b$ und $x_n \to a$ und eine monoton wachsende Folge (y_n) mit $x_n < y_n < b$ und $y_n \to b$, und wir setzen $M_n := [x_n, y_n]$. Dann ist $M := \bigcup_{n\geq 1} M_n = (a, b)$. Nach dem Ausschöpfungssatz ist f genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_n} |f| \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{x_n}^{y_n} |f(x)| \, dx$$

endlich ist. ■

Beispiel. Auf $[1, \infty)$ sei $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Wir wissen aus Ana II, Abschnitt 8.10.1, dass das uneigentliche Riemann-Integral $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$ konvergiert. Dieses Integral konvergiert aber nicht absolut, denn für $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ ist $|f(x)| \geq \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}$ und folglich

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)| \, dx \quad &\geq \quad \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} |\sin x| \, dx \\ &= \quad \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx \; = \; \frac{2}{(k+1)\pi}.\end{aligned}$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe konvergiert $\int_1^\infty |f(x)| \, dx$ nicht, und nach Folgerung 3.25 ist f *nicht* Lebesgue-integrierbar auf $[1, \infty)$. ■

Beispiel. Wir betrachten eine Funktionenfolge, auf die sich der Satz von der majorisierten Konvergenz *nicht* anwenden lässt („der gleitende Buckel"). Dazu sei $(X, \mathfrak{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ und $f_n := \chi_{[n,n+1]}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen f_n konvergieren punktweise gegen $f \equiv 0$, aber

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f d\,\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 1. \qquad \blacksquare$$

4 Satz von Fubini und Transformationsformel

Nachdem wir uns in den ersten Kapiteln mit recht abstrakten Konstruktionen beschäftigt haben, wenden wir uns nun der Berechnung konkreter Lebesgue–Integrale zu. Mit dem Satz von Fubini lernen wir ein Werkzeug kennen, das es erlaubt, Integrale über $\mathbb{R}^n$ auf Integrale über $\mathbb{R}$ zurückzuführen. Dann sehen wir uns das mehrdimensionale Analogon der Substitutionsregel – die Transformationsformel – an. In der Praxis ist die Transformationsformel oft nicht unmittelbar benutzbar, da die Transformationen Singularitäten aufweisen können (z.B. bei Polarkoordinaten). Andererseits liegen diese Singularitäten oft in Nullmengen und beeinflussen daher das Ergebnis einer Integration nicht. Wir diskutieren daher im dritten Abschnitt Methoden zum Nachweis, dass eine Menge eine Nullmenge ist. Schließlich ist der vierte Abschnitt einigen konkreten Beispielen gewidmet.

4.1 Das Prinzip von Cavalieri und der Satz von Fubini

Der Satz von Fubini, dessen einfachste Versionen wir schon in der Analysis II kennen gelernt haben, lässt sich allgemein für sogenannte *Produktmaße* formulieren und beweisen. Wir beschränken uns auf den einfacheren Kontext von Borelmengen. *Messbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}$ bedeutet daher in diesem Abschnitt stets Messbarkeit bezüglich der σ-Algebren $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n+m})$ bzw. $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$.*

Wir zeigen den Satz von Fubini als eine Folgerung des Prinzips von Cavalieri. Dieses besagt, dass man das Volumen einer messbaren Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ berechnen kann, indem man (anschaulich gesprochen) M in unendlich dünne Schichten niedrigerer Dimension zerschneidet und die Volumina der Schichten aufintegriert („Salami-Taktik“).

Satz 4.1 (Prinzip von Cavalieri) *Für jede Borelmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gilt:*
(a) Für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ ist

$$M_y := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in M\} \tag{4.1}$$

eine Borelmenge von $\mathbb{R}^n$.
(b) Die Funktion $h_M : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$, $h_M(y) := \lambda_n(M_y)$ ist messbar.
(c) Das Lebesgue-Maß von M kann wie folgt berechnet werden:

$$\lambda_{n+m}(M) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(M_y)\, d\lambda_m(y). \tag{4.2}$$

Beweis. (a) Da die Inklusionsabbildung $j_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $j_y(x) := (x, y)$ stetig und somit messbar ist, ist $M_y = (j_y)^{-1}(M)$ messbar als Urbild einer messbaren Menge.

(b) Mit $M_k := M \cap [-k, k)^{n+m} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ gilt $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$. Damit folgt

$$h_M(y) = \lambda_n(M_y) = \lim_{k\to\infty} \lambda_n(M_{k,y}) = \lim_{k\to\infty} h_{M_k}(y).$$

Können wir zeigen, dass jede der Funktionen h_{M_k} messbar ist, so ist nach Satz 1.22 auch h_M messbar. Wir dürfen daher o.E.d.A. annehmen, dass

$$M \subseteq [-k,\, k)^{n+m} =: Q \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Wenn wir zeigen können, dass das Mengensystem

$$\mathcal{D} := \{N \in \mathcal{B}(Q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})|_Q : h_N \text{ ist messbar}\}.$$

gleich $\mathcal{B}(Q)$ ist, so ist $M \in \mathcal{D}$ und somit gilt die Behauptung.

Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$ nach Lemma 1.5 von der Menge $\mathcal{R}$ aller halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}^{n+m}$ erzeugt wird, wird $\mathcal{B}(Q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)|_Q$ nach Folgerung 1.8 von $\mathcal{F} := \{Q \cap A : A \in \mathcal{R}\}$ erzeugt, was die Menge aller in Q enthaltenen halboffenen Intervalle ist. Um $\mathcal{D} = \mathcal{B}(Q)$ nachzuweisen, ist also nur zu zeigen: *$\mathcal{D}$ ist eine σ-Algebra auf Q mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$.*

Wir zeigen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$: Jedes halboffene Intervall $I \subseteq Q$ ist von der Gestalt $I = A \times B$ für gewisse halboffene Intervalle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann ist $I_y = A$ falls $y \in B$, $I_y = \emptyset$ falls $y \in \mathbb{R}^m \setminus B$ und somit

$$h_I(y) = \lambda_n(A) \cdot \chi_B(y) \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^m. \tag{4.3}$$

Folglich ist $h_I : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ messbar und somit $I \in \mathcal{D}$.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra auf Q ist. Da $\mathcal{F}$ offensichtlich $\cap$-stabil ist, brauchen wir wegen Satz 1.12 nur zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist.

Eigenschaft (a) eines Dynkin-Systems: Es ist $h_\emptyset = 0$ messbar, somit $\emptyset \in \mathcal{D}$.

Eigenschaft (b) eines Dynkin-Systems: Ist $A \in \mathcal{D}$, so ist $h_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ messbar. Für $y \in \mathbb{R}^m$ gilt $(Q \setminus A)_y = Q_y \setminus A_y$, wobei $Q_y = [-k,\, k)^n$ falls $y \in [-k,\, k)^m$ und $Q_y = \emptyset$ sonst. Folglich ist

$$h_{Q\setminus A}(y) = \lambda_n(Q_y \setminus A_y) = \lambda_n(Q_y) - \lambda_n(A_y) = (2k)^n \chi_{[-k,\,k)^m}(y) - h_A(y).$$

Also ist $h_{Q\setminus A} = (2k)^n \chi 1_{[-k,\,k)^m} - h_A$ messbar und damit $Q \setminus A \in \mathcal{D}$.

Eigenschaft (c) eines Dynkin-Systems: Ist $(A_j)_{j\geq 1}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{D}$ und $A := \bigcup_{j\geq 1} A_j$, so sind für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ die Mengen $(A_j)_y$ paarweise disjunkt, und es ist $A_y = \bigcup_{j\geq 1} (A_j)_y$. Daher ist

$$h_A(y) = \lambda_n(A_y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n\big((A_j)_y\big) = \sum_{j=1}^{\infty} h_{A_j}(y). \tag{4.4}$$

Nach Satz 1.22 ist h_A messbar und somit $A \in \mathcal{D}$.

(c) Als Konsequenz von (b) definiert die rechte Seite von (4.2) eine Funktion

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) \to [0,\, \infty], \quad \mu(M) := \int_{\mathbb{R}^m} h_M \, d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(M_y)\, d\lambda_m(y).$$

Diese Funktion ist ein Maß. Wegen $h_\emptyset = 0$ ist nämlich $\mu(\emptyset) = 0$. Weiter: ist $(A_j)_{j\geq 1}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$ und $A := \bigcup_{j\geq 1} A_j$, so erhält man wie in (4.4), dass $h_A = \sum_{j=1}^{\infty} h_{A_j}$ und somit

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^{\infty} h_{A_j}\, d\lambda_m = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} h_{A_j}\, d\lambda_m = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Wir zeigen noch, dass μ mit dem Lebesgue-Maß zusammenfällt. Für jedes halboffene Intervall $I = A \times B$ mit $A = [a, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B = [\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}^m$ erhalten wir mit (4.3):

$$\begin{aligned} \mu(I) &= \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(A)\chi_B(y)\, d\lambda_m(y) = \lambda_n(A)\lambda_m(B) \\ &= \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \cdot \prod_{j=1}^{m}(\beta_j - \alpha_j) = \lambda_{n+m}(I). \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 3.13 liefert $\mu = \lambda_{n+m}$. ∎

Mit dem Prinzip von Cavalieri können wir überprüfen, ob unsere naive Vorstellung aus der Analysis I gerechtfertigt ist, dass das Integral einer nichtnegativen Funktion die Fläche unter dem Funktionsgraphen beschreibt.

Folgerung 4.2 *Für jede messbare Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *ist die Menge*

$$M^f := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t < f(x)\}$$

messbar und hat das Maß

$$\lambda_{n+1}(M^f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda_n.$$

Beweis. Die Projektionen $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ (x, t) \mapsto x$ und $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, t) \mapsto t$ sind stetig und somit messbar. Folglich ist $g := f \circ \pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}},\ (x, t) \mapsto f(x)$ messbar. Nach Satz 1.20 ist $H := g - \pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}},\ (x, t) \mapsto f(x) - t$ messbar; es ist also

$$\begin{aligned} M^f &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq 0 \text{ und } f(x) - t > 0\} \\ &= \pi_2^{-1}\big([0, \infty)\big) \cap H^{-1}\big((0, \infty]\big) \end{aligned}$$

eine messbare Menge. Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$M_x^f := \{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in M^f\} = [0, f(x))$$

und daher $\lambda_1(M_x^f) = f(x)$. Mit Satz 4.1 (wobei nun die Rollen von x und y vertauscht sind) folgt

$$\lambda_{n+1}(M^f) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1(M_x^f)\, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda_n(x). \qquad ∎$$

Beispiel: Volumen der Einheitskugel. Als eine Anwendung wollen wir das Volumen $c_n := \lambda_n(B_n)$ der n-dimensionalen Einheitskugel $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ berechnen. Offenbar ist $c_1 = \lambda_1([-1, 1]) = 2$, und vom Schulwissen ausgehend erwarten wir, dass $c_2 = \pi$. Wir gehen nach dem Cavalierischen Prinzip vor und zerschneiden für $n > 1$ die Kugel B_n in die Scheiben

$$\begin{aligned} B_{n,s} &= \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', s) \in B_n\} \\ &= \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x'\|_2 \leq \sqrt{1-s^2}\} = \sqrt{1-s^2}\, B_{n-1} \end{aligned}$$

für $s \in [-1, 1]$ und $B_{n,s} = \emptyset$ sonst. Mit Folgerung 3.16 und Satz 4.1 erhalten wir

$$c_n = \int_{-1}^{1} \lambda_{n-1}(B_{n,s})\, ds = \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}} c_{n-1}\, ds = c_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\, ds.$$

Definieren wir für $n \geq 1$

$$I_n := \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\, ds,$$

so gilt also

$$c_n = c_{n-1}\, I_n \quad \text{für } n \geq 2,$$

und wir können die c_n mit Hilfe der Riemann-Integrale I_n rekursiv berechnen. Man beachte, dass $c_1 = I_1 = 2$. Mit der Substitution $s(t) = \sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, folgt

$$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^n\, dt.$$

Diese Integrale berechnen wir rekursiv mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^{n-1} \cdot \cos t\, dt \\ &= (\sin t)(\cos t)^{n-1}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin t)(n-1)(\cos t)^{n-2}(-\sin t)\, dt \\ &= (n-1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos^2 t)(\cos t)^{n-2}\, dt = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $n > 1$ die Rekursionsformel $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, und mit den bereits ermittelten Werten $I_0 = \pi$ und $I_1 = 2$ finden wir

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{(2n)(2n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}\, \pi$$

und

$$I_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \cdot \ \ldots \cdot 5 \cdot 3} \cdot 2.$$

Hieraus ergibt sich

$$I_{2n+1}I_{2n} = \frac{2\pi}{2n+1} \quad \text{und} \quad I_{2n}I_{2n-1} = \frac{\pi}{n},$$

woraus wir mit der Rekursionsbeziehung $c_n = c_{n-1}\, I_n$

$$\begin{aligned} c_{2n} &= I_{2n}c_{2n-1} = I_{2n}I_{2n-1}c_{2n-2} = \frac{\pi}{n}\, c_{2n-2} = \frac{\pi^{n-1}}{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2}c_2 \\ &= \frac{\pi^{n-1}}{n!}\, I_2 c_1 = \frac{\pi^{n-1}}{n!} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \frac{\pi^n}{n!} \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= I_{2n+1}I_{2n}c_{2n-1} = \frac{2\pi}{2n+1}\, c_{2n-1} \\ &= \frac{(2\pi)^n}{(2n+1)(2n-1)\cdot \ldots \cdot 3}\, c_1 = \frac{2^{n+1}\pi^n}{(2n+1)(2n-1)\cdot \ldots \cdot 3} \end{aligned}$$

erhalten. Insbesondere ist (wie erwartet) tatsächlich $c_2 = \pi$ und $c_3 = \frac{4}{3}\,\pi$. Mit Hilfe der Gammafunktion

$$\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

kann man die Formel für die Volumina c_n einheitlich als

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \tag{4.5}$$

schreiben. Dazu benutzt man die Rekursionsformel $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$ (vgl. Forster I, Abschnitt 20, Satz 2) und die Identität $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, die wir in Beispiel 2 in Abschnitt 4.4 beweisen werden. Mit diesen Hinweisen sollten Sie (4.5) leicht bestätigen können. ■

Bevor wir den Satz von Fubini formulieren und beweisen, klären wir noch, wann ein „Kästchen" in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ Borelsch ist.

Lemma 4.3 *Für nichtleere Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*
(a) $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$;
(b) $X \times Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Seien X, Y Borelsch. Da die Projektion $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x$ stetig und somit messbar ist, folgt

$$X \times \mathbb{R}^m = \pi_1^{-1}(X) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m).$$

Analog folgt $\mathbb{R}^n \times Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Also ist

$$X \times Y = (X \times \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^n \times Y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m).$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Sei nun $X \times Y$ Borelsch. Wir wählen eín $x \in X$. Da die Inklusion $i_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\ y \mapsto (x,\, y)$ stetig und somit messbar ist, folgt

$$Y = i_x^{-1}(X \times Y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

Analog sehen wir, dass $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. ∎

Satz 4.4 (Satz von Fubini für nicht-negative Funktionen) *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ Borelmengen und $f : X \times Y \to [0,\, \infty]$ messbar. Dann gilt:*
(a) Für jedes $y \in Y$ ist die Funktion

$$f_y := f(\cdot,\, y) : X \to [0, \infty], \quad x \mapsto f(x,\, y)$$

messbar, und für jedes $x \in X$ ist ${}_xf := f(x,\, \cdot) : Y \to [0,\, \infty]$ messbar.
(b) Die Funktionen

$$\begin{aligned} F \ &: \ Y \to [0,\, \infty], \quad F(y) := \int_X f_y \, d\lambda_n, \\ G \ &: \ X \to [0,\, \infty], \quad G(x) := \int_Y {}_xf \, d\lambda_m \end{aligned}$$

sind messbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f \, d\lambda_{n+m} &= \int_Y \Big(\int_X f(x,\, y) \, d\lambda_n(x) \Big) \, d\lambda_m(y) \\ &= \int_X \Big(\int_Y f(x,\, y) \, d\lambda_m(y) \Big) \, d\lambda_n(x). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Beweis. Nach Lemma 4.3 ist $X \times Y$ eine Borelmenge. Wenn wir f außerhalb von $X \times Y$ durch 0 fortsetzen, erhalten wir eine messbare Funktion. Da deren Integrale und die von f sich nicht unterscheiden, dürfen wir o.B.d.A. $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ annehmen. Dem Beweisprinzip der Integrationstheorie folgend beweisen wir die Behauptungen für Funktionen zunehmender Allgemeinheit.

Ist $f = \chi_M$ charakteristische Funktion einer Borelmenge $M \subseteq X \times Y$, so gilt $f_y(x) = (\chi_M)_y(x) = \chi_{M_y}(x)$ mit M_y wie in (4.1). Nach Satz 4.1 (a) ist f_y messbar. Wegen $\int_{\mathbb{R}^n} f_y \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{M_y} \, d\lambda_n = \lambda_n(M_y)$ folgt mit Satz 4.1 (b) die Messbarkeit von $F : y \mapsto \int_X f_y \, d\lambda_n$ und mit Satz 4.1 (c)

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \, d\lambda_{n+m} = \lambda_{n+m}(M) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(M_y) \, d\lambda_m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f_y \, d\lambda_n(x) \, d\lambda_m(y).$$

Ist $f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}$ *nicht-negative Stufenfunktion*, so ist $f_y = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (\chi_{A_j})_y$ messbar. Somit ist

$$F : Y \to [0,\,\infty], \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f_y \, d\lambda_n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{A_j})_y \, d\lambda_n$$

messbar und

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \, d\lambda_{n+m} &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_{A_j} \, d\lambda_{n+m} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_j}(x,\,y) \, d\lambda_n(x) \, d\lambda_m(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}(x,\,y) \, d\lambda_n(x) \, d\lambda_m(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,\,y) \, d\lambda_n(x) \, d\lambda_m(y).
\end{aligned}$$

Ist f *beliebig messbar* (und nicht-negativ), so finden wir mit Satz 2.2 eine monoton wachsende Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer Stufenfunktionen $s_k : \mathbb{R}^{n+m} \to [0,\,\infty)$ mit $s_k \to f$ punktweise. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist dann

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \, d\lambda_{n+m} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} s_k \, d\lambda_{n+m}. \tag{4.7}$$

Für jedes $y \in Y$ ist andererseits $((s_k)_y)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen mit punktweisem Grenzwert $f_y = \lim_{k\to\infty}(s_k)_y$. Also ist f_y messbar und nach dem Satz über monotone Konvergenz ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_y \, d\lambda_n = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (s_k)_y \, d\lambda_n.$$

Da jede der Funktionen $F_k : Y \to [0,\,\infty]$, $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (s_k)_y \, d\lambda_n$ messbar ist, ist auch der punktweise Grenzwert $F : Y \to [0,\,\infty]$, $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f_y \, d\lambda_n$ messbar. Da die Funktionenfolge F_k monoton wachsend in k ist, liefert der Satz über monotone Konvergenz:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f_y \, d\lambda_n \, d\lambda_m(y) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} (s_k)_y \, d\lambda_n \, d\lambda_m(y). \tag{4.8}$$

Wegen $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} s_k \, d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} (s_k)_y \, d\lambda_n \, d\lambda_m(y)$ folgt die erste Hälfte von (4.6) durch Vergleich der rechten Seiten von (4.7) und (4.8). Die zweite Hälfte zeigt man analog. ■

Satz 4.5 (Satz von Fubini für integrierbare Funktionen) *Seien* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ *Borelmengen und* $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *bzgl.* λ_{n+m} *über* $X \times Y$ *integrierbar. Dann gilt:*

(a) Die Mengen

$$\begin{aligned} X_0 &:= \{x \in X : {}_x f \textit{ ist bzgl. } \lambda_m \textit{ über } Y \textit{ integrierbar}\}, \\ Y_0 &:= \{y \in Y : f_y \textit{ ist bzgl. } \lambda_n \textit{ über } X \textit{ integrierbar}\} \end{aligned}$$

sind Borelsch mit $\lambda_n(X \setminus X_0) = \lambda_m(Y \setminus Y_0) = 0$*; es ist also* ${}_x f$ *für fast alle* $x \in X$ *bzgl.* λ_m *über* Y *und* f_y *für fast alle* $y \in Y$ *bzgl.* λ_n *über* X *integrierbar.*

(b) Die Funktionen

$$F : Y_0 \to \mathbb{R}, \quad F(y) := \int_X f_y \, d\lambda_n \quad \textit{und} \quad G : X_0 \to \mathbb{R}, \quad G(x) := \int_Y {}_x f \, d\lambda_m$$

sind integrierbar, und es gilt

$$\int_{X \times Y} f \, d\lambda_{n+m} = \int_{Y_0} F \, d\lambda_m = \int_{X_0} G \, d\lambda_n. \tag{4.9}$$

Beweis. Mit dem bereits bewiesenen Satz von Fubini für nicht-negative Funktionen erhalten wir nach Aufspaltung in Positiv- und Negativteil:

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f \, d\lambda_{n+m} &= \int_{X \times Y} f_+ \, d\lambda_{n+m} - \int_{X \times Y} f_- \, d\lambda_{n+m} \\ &= \int_Y \underbrace{\left(\int_X (f_+)_y \, d\lambda_n \right)}_{=:g(y)} d\lambda_m(y) - \int_Y \underbrace{\left(\int_X (f_-)_y \, d\lambda_n \right)}_{=:h(y)} d\lambda_m(y) \\ &= \int_Y g \, d\lambda_m - \int_Y h \, d\lambda_m. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Man beachte, dass wir die beiden Integrale in (4.10) nicht ohne weiteres zu einem Integral zusammenfassen dürfen (es könnte ja $g(y) = h(y) = \infty$ sein, so dass undefinierte Ausdrücke der Form „$\infty - \infty$“ auftreten würden). Dies ist jedoch ausgeschlossen, sobald $y \in Y_0$. Um von Integralen über Y zu Integralen über Y_0 übergehen zu können, zeigen wir, dass $Y \setminus Y_0$ eine Borelmenge vom Maß 0 ist.

Aus der Integrierbarkeit von f folgt, dass $\int_Y g \, d\lambda_m < \infty$ und $\int_Y h \, d\lambda_m < \infty$; daher sind die Funktionen g und h fast überall endlich. Dann ist aber $g^{-1}(\{\infty\}) \cup h^{-1}(\{\infty\})$ eine Borelmenge vom Maß 0, und diese Menge stimmt offenbar mit $Y \setminus Y_0$ überein.

Da man Mengen vom Maß 0 beim Integrieren weglassen darf, können wir (4.10) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f \, d\lambda_{n+m} &= \int_{Y_0} g \, d\lambda_m - \int_{Y_0} h \, d\lambda_m = \int_{Y_0} (g - h) \, d\lambda_m \\ &= \int_{Y_0} \left(\int_X f_y \, d\lambda_n \right) d\lambda_m(y) = \int_{Y_0} F \, d\lambda_m. \end{aligned}$$

Die übrigen Aussagen erhält man durch Vertauschen der Rollen von x und y. ∎

Anmerkung. Setzt man die Funktion F durch $F(y) := 0$ für $y \in Y \setminus Y_0$ zu einer Funktion $F : Y \to \mathbb{R}$ fort,[1] so ist F messbar, und wir erhalten einfach

$$\int_{X\times Y} f\, d\lambda_{n+m} = \int_Y F\, d\lambda_m.$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass Y_0 eine echte Teilmenge von Y sein kann. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,\, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y = 0 \text{ und } x \geq 0; \\ -1 & \text{falls } y = 0 \text{ und } x < 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $f_y = \chi_{[0,\,\infty)} - \chi_{(-\infty,\,0)}$ für $y = 0$ mit $\int_{\mathbb{R}} (f_0)_\pm\, d\lambda_1 = \infty$, ist $\int_{\mathbb{R}} f_0\, d\lambda_1$ nicht definiert. Es ist $Y_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda_2 = \int_{Y_0} \int_{\mathbb{R}} f_y\, d\lambda_1\, d\lambda_1(y) = 0$$

da $f_y = 0$ für $y \neq 0$. ∎

4.2 Der Transformationssatz

In diesem Abschnitt lernen wir das Analogon der eindimensionalen Substitutionsregel kennen, die wir uns zunächst noch einmal anschauen. Ist $\varphi : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare und streng wachsende Funktion und ist $f : \varphi([a,\, b]) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx.$$

Ist dagegen φ streng fallend, also orientierungsumkehrend, so ist

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\, dx.$$

Als Lebesgue-Integral geschrieben lassen sich diese beiden Identitäten zu

$$\int_{[a,\, b]} (f \circ \varphi)(t)|\varphi'(t)|\, dt = \int_{\varphi([a,\, b])} f(x)\, dx \tag{4.11}$$

zusammenfassen. Das ist die Transformationsformel, die wir auf höherdimensionale Situationen verallgemeinern wollen. Wir werden dabei die Schreibweise $\int_B f(x)\, dx$ statt $\int_B f\, d\lambda$ verwenden. Außerdem erinnern wir daran, dass eine bijektive Abbildung $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Mengen U und V ein *Diffeomorphismus* heißt, wenn φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind.

[1] Statt durch 0 darf man F hier beliebig fortsetzen, solange die Fortsetzung nur messbar bleibt.

Satz 4.6 (Transformationssatz) *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ genau dann über V integrierbar, wenn die Funktion $(f \circ \varphi)\,|\det \varphi'| : U \to \mathbb{R}$ über U integrierbar ist. In diesem Fall ist*

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\varphi(x))\,|\det \varphi'(x)|\,dx. \tag{4.12}$$

Insbesondere gilt für jede messbare Teilmenge $A \subseteq U$

$$\lambda_n(\varphi(A)) = \int_A |\det \varphi'(x)|\,dx. \tag{4.13}$$

Hier steht $\varphi'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ für die Ableitung von $\varphi : U \to V$ in $x \in U$. Vor dem Beweis von Satz 4.6 machen wir uns klar, was Formel (4.13) bedeutet. Diese Beziehung beschreibt, wie sich das Volumen des Bildes einer messbaren Menge A unter φ berechnet. Ist $|\det \varphi'(x)|$ eine von x unabhängige Konstante c, so reduziert sich (4.13) auf $\lambda_n(\varphi(A)) = c\lambda_n(A)$. Die Konstante c ist also ein Verzerrungsfaktor, der angibt, wie sich das Volumen einer Menge bei Anwendung von φ ändert. Ist beispielsweise $\varphi = T|_U$ mit einer linearen Abbildung T, so ist $\varphi'(x) = T$ und somit $\lambda_n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda_n(A)$. Für $U = \mathbb{R}^n$ und $A = [0, 1]^n$ (Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$) ergibt sich mit

$$\lambda_n(T([0, 1]^n)) = |\det T|$$

eine anschauliche Bedeutung der Determinante als Volumen des Bildes des Einheitswürfels. Eine Menge der Gestalt $T([0, 1]^n)$ heißt auch *Spat* oder *Parallelotop*. Man kann sie schreiben als

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j a_j : x_j \in [0, 1] \text{ für alle } j \right\},$$

wobei die a_j die Bilder der kanonischen Basisvektoren unter T sind.

Beweis der Transformationsformel. *1. Schritt: Es genügt,* (4.13) *zu beweisen.* Aus (4.13) folgt (4.12) für die Funktion $f := \chi_{\varphi(A)}$, denn es ist ja $\chi_{\varphi(A)} \circ \varphi = \chi_A$. Aus der Linearität des Integrals folgt damit (4.12) für alle nichtnegativen Stufenfunktionen f. Sei nun $f \geq 0$ messbar. Nach Satz 2.2 gibt es eine monoton wachsende Folge nichtnegativer Stufenfunktionen s_k, die punktweise gegen f konvergiert. Aus dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 2.11) folgt

$$\begin{aligned} \int_V f(y)\,dy &= \lim_{k\to\infty} \int_V s_k(y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int_U s_k(\varphi(x))\,|\det \varphi'(x)|\,dx \\ &= \int_U f(\varphi(x))\,|\det \varphi'(x)|\,dx, \end{aligned}$$

da auch die Folge $(s_k \circ \varphi)\,|\det \varphi'|$ monoton wachsend ist und punktweise gegen $(f \circ \varphi)\,|\det \varphi'|$ konvergiert. Insbesondere sehen wir, dass $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ genau dann auf U integrierbar ist, wenn f auf V integrierbar ist. Hieraus folgt sofort die Aussage für beliebige integrierbare Funktionen f. Es verbleibt, (4.13) zu zeigen.

2. Schritt: Es genügt zu zeigen, dass jeder Punkt $p \in U$ eine offene Umgebung $W_p \subseteq U$ hat, so dass (4.13) *für W_p und $\varphi|_{W_p}$ anstelle von U und φ gilt.* Für jeden Punkt $p \in U$ gibt es einen Punkt $q \in \mathbb{Q}^n$ und eine Kugel $U_r(q)$ mit rationalem Radius so, dass $p \in U_r(q) \subseteq W_p$. Die Behauptung (4.13) gilt für jede der Mengen $U_r(q)$, und diese Mengen überdecken U. Wir haben damit abzählbar viele Mengen $(M_k)_{k\geq 1}$ gefunden, für die (4.13) gilt und die U überdecken. Ist nun A messbar, so schreiben wir A als disjunkte Vereinigung der Mengen

$$A_1 := A \cap M_1 \quad \text{und} \quad A_k := (A \cap M_k) \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_{k-1}) \quad \text{für } k \geq 2.$$

Aus der σ-Additivität von λ_n und aus Satz 2.6 folgt nun

$$\lambda_n(\varphi(A)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(\varphi(A_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |\det \varphi'(x)|\, dx = \int_A |\det \varphi'(x)|\, dx.$$

3. Schritt: (4.13) *gilt, wenn φ eine Permutation der Koordinaten ist, d.h. wenn $\varphi(x) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ mit einer Bijektion $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.*

In diesem Fall ist $|\det \varphi'(x)| = 1$, und (4.13) gilt offenbar für alle Quader in $\mathbb{R}^n$. Nach dem Eindeutigkeitssatz für das Lebesgue-Maß (Satz 3.13 (h)) folgt (4.13) für beliebiges messbares A.

4. Schritt: Gilt (4.13) *für die Diffeomorphismen $\varphi_1 : U_1 \to U_2$ und $\varphi_2 : U_2 \to U_3$, so gilt* (4.13) *auch für den Diffeomorphismus $\varphi_2 \circ \varphi_1 : U_1 \to U_3$.* Aus Schritt 1 wissen wir, dass (4.13) die Formel (4.12) nach sich zieht. Nach der Kettenregel ist nun

$$\det\left((\varphi_2 \circ \varphi_1)'(x)\right) = \det\left(\varphi_2'(\varphi_1(x))\right) \cdot \det \varphi_1'(x). \tag{4.14}$$

Wenden wir (4.13) auf φ_2 und (4.12) auf φ_1 an, erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_n((\varphi_2 \circ \varphi_1)(A)) &= \int_{\varphi_1(A)} |\det \varphi_2'(y)|\, dy && \text{(nach (4.13))} \\ &= \int_A |\det \varphi_2'(\varphi_1(x))| \cdot |\det \varphi_1'(x)|\, dx && \text{(nach (4.12))} \\ &= \int_A |\det (\varphi_2 \circ \varphi_1)'(x)|\, dx && \text{(nach (4.14))}. \end{aligned}$$

5. Schritt: (4.13) *gilt, falls $n = 1$ und U ein Intervall ist.* Wir benutzen wieder den Eindeutigkeitssatz (Satz 3.13 (h)). Ist $B \subseteq V$ ein Intervall, so ist auch $\varphi^{-1}(B) \subseteq U$ ein Intervall (da φ^{-1} stetig ist), und eine Anwendung der Substitutionsregel (4.11) auf die Funktion $f \equiv 1$ liefert

$$\lambda(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} |\varphi'(x)|\, dx.$$

Da nach Satz 2.6 die Abbildungen

$$B \mapsto \lambda(B \cap V) \quad \text{und} \quad B \mapsto \int_{\varphi^{-1}(B\cap V)} |\varphi'(x)|\, dx$$

Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definieren und diese auf allen beschränkten Intervallen übereinstimmen, stimmen sie nach Satz 3.13 überein.

6. Schritt: Nun wird es ernst. *Wir zeigen die lokale Aussage aus Schritt 2 durch vollständige Induktion nach n.*
Der Induktionsanfang $n = 1$ ist in Schritt 5 abgehandelt. Für den Induktionsschritt betrachten wir φ in einer Umgebung von $p \in U$. Wegen $\det \varphi'(p) \neq 0$ gibt es ein j mit $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(p) \neq 0$. Indem wir φ mit einer Koordinatenpermutation verknüpfen, dürfen wir nach Schritt 3 und 4 o.E.d.A. annehmen, dass $j = 1$, d.h. dass $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$ ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi : U \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (\varphi_1(x), x_2, \ldots, x_n).$$

Die Jabocimatrix von ψ im Punkt x hat die Blockstruktur

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & * \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

ist also insbesondere in $x = p$ invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion (Analysis II, Satz 12.5) dürfen wir nach einer gegebenenfalls erforderlichen Verkleinerung von U annehmen, dass $\psi : U \to \psi(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir haben damit eine Zerlegung

$$\varphi = \rho \circ \psi : U \to V \quad \text{mit} \quad \rho = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to V.$$

Die erste Komponente von ρ ist dabei gegeben durch

$$\rho_1(y) = (\varphi_1 \circ \psi^{-1})(y) = (\psi_1 \circ \psi^{-1})(y) = y_1.$$

Nach Schritt 4 genügt es, die Behauptung für die Abbildungen ψ und ρ zu zeigen. Wegen der speziellen Struktur von ψ und ρ können wir annehmen, dass es ein j so gibt, dass $\varphi_j(x) = x_j$ für alle $x \in U$. Indem wir wieder geeignet permutieren, können wir nach Schritt 3 sogar $\varphi_1(x) = x_1$ für alle $x \in U$ annehmen. Wir können φ daher schreiben als

$$\varphi(t, x') = (t, \varphi_t(x')) \quad \text{mit} \quad (t, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1},$$

wobei

$$\varphi_t : U_t := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (t, x') \in U\} \to V_t := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (t, x') \in V\}$$

ein Diffeomorphismus ist. Die Jacobimatrix $J_x(\varphi)$ von φ in $x = (t, x')$ hat die Struktur

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & J_{x'}(\varphi_t) \end{pmatrix},$$

so dass gilt

$$\det \varphi'(x) = \det (\varphi_t)'(x'). \tag{4.15}$$

Für eine messbare Teilmenge A von U erhalten wir nun schrittweise

$$\begin{aligned}
\lambda_n(\varphi(A)) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi(A)_t)\, dt && \text{(Cavalieri)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi_t(A_t))\, dt && \text{(Definition von } \varphi_t\text{)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{A_t} |\det (\varphi_t)'(x')|\, dx' dt && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{A_t}(x') |\det (\varphi_t)'(x')|\, dx' dt && \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) |\det \varphi'(x)|\, dx && \text{(Fubini und (4.15))} \\
&= \int_A |\det \varphi'(x)|\, dx. && \blacksquare
\end{aligned}$$

Wir halten noch eine wichtige Folgerung fest. Ist $T \in L(\mathbb{R}^n)$ eine Isometrie (d.h. wird T durch eine orthogonale Matrix dargestellt), so heißt die Abbildung $x \mapsto Tx$ eine *Drehung* des $\mathbb{R}^n$.

Folgerung 4.7 (Drehungsinvarianz von λ_n.) *Für jede Drehung des $\mathbb{R}^n$ und jede Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda_n(T(A)) = \lambda_n(A)$.*

Beweis. Aus $TT^T = I$ folgt $(\det T)^2 = 1$. Also ist $|\det T| = 1$, und die Behauptung folgt sofort aus (4.13). $\blacksquare$

Diese Drehungsinvarianz ist nicht von vorherein klar, da wir ja das Lebesgue-Maß basisabhängig konstruiert haben (nämlich zunächst auf achsenparallelen Quadern). Weiter sei daran erinnert, dass wir die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes bereits in der Übung gezeigt haben. Zusammenfassend können wir feststellen, dass das Lebesgue-Maß unter Abbildungen der Gestalt $x \mapsto Tx + v$ mit einer linearen Isometrie $T \in L(\mathbb{R}^n)$ und einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ invariant ist.

4.3 Nullmengen$^\diamond$

Wir haben Nullmengen als Teilmengen von Borelmengen vom Lebesguemaß 0 definiert. Die Nullmengen des Maßraumes $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ kann man mit Satz

3.2 und der Definition von λ_n leicht charakterisieren: eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine λ_n-Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge halboffener Intervalle J_m so gibt, dass

$$N \subseteq \cup_{m \geq 1} J_m \quad \text{und} \quad \sum_{m \geq 1} \lambda_n(J_m) < \varepsilon. \tag{4.16}$$

Für $n = 1$ stimmt dies exakt mit dem Begriff einer Nullmenge überein, den wir in Analysis II eingeführt haben.

Wir wollen nun einige Kriterien kennenlernen (bzw. aus Analysis II wiederholen), die es uns erlauben, gewisse Nullmengen schnell als solche zu erkennen. Dies ist z.B. bei Anwendungen der Transformationsformel nützlich, bei denen man aus dem Definitionsgebiet gewisse Nullmengen herausschneiden muss, um die Transformation zu einem Diffeomorphismus zu machen.

Wir beginnen mit einer Verfeinerung der oben gegebenen Beschreibung von Nullmengen. Dazu nennen wir einen abgeschlossenen Quader $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ einen *Würfel*, wenn $b_1 - a_1 = \ldots = b_n - a_n$.

Lemma 4.8 *$N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine λ_n-Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(W_m)_{m \geq 1}$ von Würfeln gibt mit*

$$N \subseteq \bigcup_{m \geq 1} W_m \quad \textit{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n(W_m) < \varepsilon.$$

Beweis. N ist genau dann λ_n-Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ halboffene Quader $J_m = [a^{(m)}, b^{(m)})$ gibt, so dass (4.16) gilt. Für jedes m sei $c^{(m)} = (c_1^{(m)}, \ldots, c_n^{(m)})$ so, dass $c_j^{(m)} > b_j^{(m)}$ für alle j, dass $c^{(m)} - a^{(m)} \in \mathbb{Q}^n$, und dass

$$\lambda_n([a^{(m)}, c^{(m)})) < \lambda_n([a^{(m)}, b^{(m)})) + \varepsilon\, 2^{-m}.$$

Da alle Seitenlängen von $[a^{(m)}, c^{(m)})$ rational sind, gibt es endlich viele Würfel $W_1^{(m)}, \ldots, W_{k_m}^{(m)}$ mit

$$\bigcup_{j=1}^{k_m} W_j^{(m)} = [a^{(m)}, c^{(m)}] \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{k_m} \lambda_n(W_j^{(m)}) = \lambda_n([a^{(m)}, c^{(m)}]).$$

Dann ist $N \subseteq \bigcup_{j,m} W_j^{(m)}$, und wir erhalten

$$\sum_{m,j} \lambda_n(W_j^{(m)}) = \sum_m \lambda_n([a^{(m)}, c^{(m)})) \leq \sum_m (\lambda_n(Q_m) + \varepsilon\, 2^{-m}) < 2\varepsilon.$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Satz 4.9 *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $f : A \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig, so ist auch $f(A)$ eine Nullmenge.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $(W_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von Würfeln mit $A \subseteq \bigcup_{k\geq 1} W_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(W_k) < \varepsilon$. Wir dürfen annehmen, dass jeder Würfel W_k einen Punkt $a_k \in A$ enthält. Ist s_k die Kantenlänge von W_k, so ist $\lambda_n(W_k) = s_k^n$ und $\|x-a_k\| \leq \sqrt{n}\, s_k$ für alle $x \in W_k$ (warum?).

Da f Lipschitzstetig ist, gibt es ein $L > 0$ so, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x,\, y \in A.$$

Insbesondere ist für alle $x \in A \cap W_k$

$$\|f(x) - f(a_k)\| \leq L\|x - a_k\| \leq L\sqrt{n}\, s_k.$$

Also liegt $f(A\cap W_k)$ in einer Kugel vom Radius $L\sqrt{n}\, s_k$ und damit auch in einem Würfel $\widetilde{W}_k$ mit der Kantenlänge $2L\sqrt{n}\ , s_k$. Es ist also

$$f(A) = \bigcup_{k\geq 1} f(A \cap W_k) \subseteq \bigcup_{k\geq 1} \widetilde{W}_k$$

mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(\widetilde{W}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (2L\sqrt{n}\, s_k)^n = (2L\sqrt{n})^n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(W_k) \leq (2L\sqrt{n}\,)^n \cdot \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, ist $f(A)$ eine Nullmenge. ■

Folgerung 4.10 *Ist A Nullmenge in $\mathbb{R}^n, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $A \subseteq U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist $f(A)$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Da U offen ist, ist U eine abzählbare Vereinigung von Quadern der Gestalt $Q_k = [a_k,\, b_k]$ mit $a_k,\, b_k \in \mathbb{Q}^n$ (vgl. den Beweis von Lemma 1.5). Als stetige Funktion ist $f' : U \to L(\mathbb{R}^n)$ auf jedem der kompakten Quader Q_k beschränkt, d.h. es gibt ein $L_k > 0$ mit $\|f'(x)\| \leq L_k$ für alle $x \in Q_k$. Nach Satz 10.19 aus Analysis II folgt

$$\|f(y) - f(z)\| \leq L_k\|y - z\| \quad \text{für alle } y,\, z \in Q_k.$$

Also ist $f|_{Q_k}$ Lipschitzstetig, und nach Satz 4.9 ist $f(A \cap Q_k)$ eine Nullmenge. Dann ist auch $f(A) = \cup_{k=1}^{\infty} f(A \cap Q_k)$ eine Nullmenge (Lemma 8.13 aus Ana II). ■

Satz 4.9 und Folgerung 4.10 lassen sich *nicht* auf beliebige stetige Funktionen f verallgemeinern. Es gibt beispielsweise Kurven (sogenannte *Peano-Kurven*), die ein ganzes Quadrat im $\mathbb{R}^2$ ausfüllen.

Lemma 4.11 *Jeder echte affine Unterraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge.*

Beweis. Wir verschieben A so, dass $0 \in A$, und drehen dann A so, dass $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Nach Folgerung 4.7 und der Anmerkung danach dürfen wir also o.E.d.A. $A = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ annehmen. Wir können A dann schreiben als

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} ([-k,\, k]^{n-1} \times \{0\}).$$

Aus $\lambda_n([-k,\, k]^{n-1} \times \{0\}) = 0$ und der σ-Additivität folgt mit Lemma 1.24 (e), dass $\lambda_n(A) = 0$. ■

Folgerung 4.12 *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f : A \to \mathbb{R}$ messbar, so ist der Graph*

$$\Gamma(f) = \{(x,\, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in A\} \tag{4.17}$$

eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis. Wir setzen f durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fort. Diese Fortsetzung ist messbar, und ihr Graph enthält den Graphen (4.17) als Teilmenge. Wir können daher $A = \mathbb{R}^n$ annehmen. Dann ist der Graph $\Gamma(f) = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y - f(x) = 0\}$ als Nullstellenmenge einer messbaren Funktion messbar, und mit dem Prinzip von Cavalieri erhalten wir

$$\lambda_{n+1}(\Gamma(f)) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1(\{f(x)\})\, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} 0\, d\lambda_n = 0. \qquad ■$$

4.4 Koordinatentransformationen

Oft lassen sich vorhandene Symmetrien dadurch ausnutzen, dass man Integrationsbereiche durch Koordinatentransformationen (d.h. durch geeignete Parametrisierung) in achsenparallele Quader überführt, auf denen Integrale iterativ berechnet werden können. Aus der Fülle der möglichen Koordinatensysteme sehen wir uns hier nur Polarkoordinaten an. Zylinderkoordinaten haben wir bereits in Ana II kennengelernt.

Polarkoordinaten in der Ebene. Der Übergang von Polar- zu kartesischen Koordinaten in der Ebene wird beschrieben durch

$$P_2 : [0,\, \infty) \times [0,\, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad (r,\, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi,\, r\sin\varphi). \tag{4.18}$$

Die Jacobimatrix von P_2 in $(r,\, \varphi)$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

und ihre Determinante ist gleich r. Man beachte, dass nur die Einschränkung von P_2 auf die offene Menge $(0,\, \infty) \times (0,\, 2\pi)$ einen Diffeomorphismus auf die Menge

$\mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\})$ liefert. Um einen Diffeomorphismus zu erhalten, mussten wir also sowohl aus $[0, \infty) \times [0, 2\pi]$ als auch aus $\mathbb{R}^2$ eine Nullmenge herausnehmen. Daher ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach dem Transformationssatz 4.6 genau dann integrierbar, wenn die Funktion

$$(r, \varphi) \mapsto f(P_2(r, \varphi))\, |\det P_2'(r, \varphi)| = f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi) \cdot r$$

auf $[0, \infty) \times [0, 2\pi]$ integrierbar ist (Nullmengen dürfen wir unberücksichtigt lassen), und es gilt in diesem Fall

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, d\lambda_2(x, y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi) r\, d\varphi dr. \tag{4.19}$$

Beispiel 1. Als Anwendung von (4.19) berechnen wir das Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2}.$$

Diese ist rotationssymmetrisch, und mit Polarkoordinaten, (4.19) und der Substitution $s := r^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, d\varphi dr = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr = \pi \int_0^\infty e^{-s}\, ds \\ &= \pi \lim_{t\to\infty} -e^{-s}\big|_0^t = \pi \lim_{t\to\infty} (1 - e^{-t}) = \pi.\end{aligned}$$

Insbesondere ist also f integrierbar. Mit Fubini erhalten wir andererseits

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dxdy = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \Big) e^{-y^2}\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy = \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \Big)^2,\end{aligned}$$

so dass schließlich folgt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}. \tag{4.20}$$

Dieses Integral spielt eine zentrale Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie. ■

Beispiel 2: Die Beta-Funktion. Die Identität (4.20) eröffnet uns einen weiteren Weg, um $\Gamma(1/2)$ zu berechnen. Mit der Substitution $x = \sqrt{t}$ erhalten wir

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}\, 2x\, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Wir schauen uns an, was dieser Trick für allgemeinere Werte der Γ-Funktion liefert. Mit der Substitution $t = x^2/2$ bekommen wir

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t}\, dt = 2^{1-u} \int_0^\infty x^{2(u-1)} e^{-x^2/2}\, x\, dx = 2^{1-u} \int_0^\infty x^{2u-1} e^{-x^2/2}\, dx,$$

woraus folgt, dass

$$
\begin{aligned}
\Gamma(u)\Gamma(v) &= 2^{2-u-v}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2u-1}e^{-x^2/2}y^{2v-1}e^{-y^2/2}\,dxdy \\
&= 2^{2-u-v}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2u-1}y^{2v-1}e^{-(x^2+y^2)/2}\,dxdy \\
&= 2^{2-u-v}\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} r^{2u+2v-2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}e^{-r^2/2}r\,d\varphi dr \\
&= 2^{2-u-v}\int_0^\infty r^{2u+2v-1}e^{-r^2/2}\,dr\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}\,d\varphi \\
&= \Gamma(u+v)\cdot 2\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}\,d\varphi.
\end{aligned}
$$

Die Funktion

$$
B:(0,\,\infty)\times(0,\,\infty)\to\mathbb{R},\quad (u,\,v)\mapsto 2\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}\,d\varphi
$$

heißt die *Eulersche Betafunktion*; wir haben also soeben gesehen, dass

$$
B(u,\,v)=\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{4.21}
$$

Für $u=v=\frac{1}{2}$ erhalten wir insbesondere $B(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2})=2\int_0^{\pi/2}\,d\varphi=\pi$.

Für die Berechnung des Volumens c_n der n-dimensionalen Einheitskugel hatten wir mit dem Cavalierischen Prinzip die Rekursionsformel $c_n=c_{n-1}I_n$ mit

$$
I_n=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos t)^n\,dt=2\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\,dt=B\Big(\frac{n+1}{2},\,\frac{1}{2}\Big)
$$

gefunden. Mit (4.21) ergibt sich nun direkt

$$
I_n=B\Big(\frac{n+1}{2},\,\frac{1}{2}\Big)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
c_n &= c_{n-1}I_n=c_{n-2}I_nI_{n-1}=\ldots=c_1I_nI_{n-1}\ldots I_2 \\
&= 2\sqrt{\pi}^{\,n-1}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\,\ldots\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}=2\sqrt{\pi}^{\,n-1}\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}^{\,n}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}.
\end{aligned}
$$

■

Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$, $n>2$. Diese definieren wir rekursiv durch

$$
P_n:(0,\,\infty)\times[0,\,2\pi]\times[0,\,\pi]^{n-2}\to\mathbb{R}^n,
$$

wobei

$$P_n(r, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}) = (\sin\theta_{n-2} P_{n-1}(r, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{n-3}), r\cos\theta_{n-2})$$

für $n \geq 3$ und P_2 wie in (4.18) festgelegt ist. Insbesondere erhalten wir für die Kugelkoordinaten $P_3 : (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$

$$P_3(r, \varphi, \theta) = (\sin\theta P_2(r, \varphi), r\cos\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta).$$

Dabei misst r den Abstand zum Ursprung, φ den Längengrad und θ den Breitengrad.

Mit $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_{n-2})$ und $\theta' := (\theta_1, \ldots, \theta_{n-3})$ können wir die Jacobimatrix von P_n schreiben als

$$J_{(r,\varphi,\theta)}(P_n) = \begin{pmatrix} \sin\theta_{n-2} \cdot J_{(r,\varphi,\theta')}(P_{n-1}) & \cos\theta_{n-2} P_{n-1}(r, \varphi, \theta') \\ \cos\theta_{n-2} \;\; 0 \; \ldots \; 0 & -r\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Um davon die Determinante berechnen zu können, beachten wir, dass

$$P_{n-1}(r, \varphi, \theta') = r P_{n-1}(1, \varphi, \theta')$$

(was man leicht per vollständiger Induktion bestätigt). Damit ist

$$\frac{\partial P_{n-1}}{\partial r}(r, \varphi, \theta') = P_{n-1}(1, \varphi, \theta') = r^{-1} P_{n-1}(r, \varphi, \theta'),$$

und folglich stimmt die erste Spalte der Jacobimatrix von P_{n-1} mit $r^{-1}P_{n-1}$ überein. Also ist die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrix, die man aus $J_{(r,\varphi,\theta)}(P_n)$ durch Streichen der ersten Spalte und letzten Zeile erhält, gleich

$$r(\cos\theta_{n-2})(\sin\theta_{n-2})^{n-2}(-1)^{n-2} \det P'_{n-1}(r, \varphi, \theta').$$

Durch Entwicklung von $\det P'_n(r, \varphi, \theta)$ nach der letzten Zeile erhalten wir

$$\begin{aligned} &\det P'_n(r, \varphi, \theta) \\ &\quad = -r(\sin\theta_{n-2})^n \det P'_{n-1}(r, \varphi, \theta') \\ &\qquad\quad + (-1)^{n-1} r(\cos\theta_{n-2})^2 (\sin\theta_{n-2})^{n-2}(-1)^{n-2} \det P'_{n-1}(r, \varphi, \theta') \\ &\quad = -r(\sin\theta_{n-2})^{n-2} \det P_{n-1}(r, \varphi, \theta'). \end{aligned}$$

Induktiv folgt nun wegen $\det P'_3(r, \varphi, \theta) = -r^2 \sin\theta$, dass

$$\det P'_n(r, \varphi, \theta) = (-1)^n r^{n-1} (\sin\theta_{n-2})^{n-2} (\sin\theta_{n-3})^{n-3} \cdot \ldots \cdot (\sin\theta_1).$$

Diskutieren Sie als Übung zunächst für $n = 3$ und dann im allgemeinen Fall, welche Nullmengen man aus $[0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]^{n-2}$ bzw. aus dem $\mathbb{R}^n$ herausschneiden muss, damit die Einschränkung von P_n ein Diffeomophismus wird.

Als eine Anwendung berechnen wir Integrale über rotationssymmetrische Funktionen auf Kugelschalen.

Satz 4.13 *Sei $I \subseteq [0, \infty)$ ein Intervall, $K(I) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \in I\}$ die zugehörige Kugelschale und $h : I \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann ist die Funktion $H : K(I) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h(\|x\|_2)$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $I \to \mathbb{R}$, $r \mapsto r^{n-1}h(r)$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{K(I)} H\, d\lambda_n = nc_n \int_I h(r) r^{n-1}\, dr,$$

wobei c_n für das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel steht.

Beweis. Wir benutzen sphärische Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ und beachten, dass $K(I) = P_n(I \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]^{n-2})$ ist. Da die Transformation P_n außerhalb gewisser Nullmengen ein Diffeomorphismus ist, erhalten wir mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned}
&\int_{K(I)} H d\lambda_n \\
&\quad = \int_I \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} H(P_n(r, \varphi, \theta))\, |\det P_n'(r, \varphi, \theta)|\, d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} d\varphi dr \\
&\quad = \int_I \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} h(r) r^{n-1} (\sin\theta_{n-2})^{n-2} (\sin\theta_{n-3})^{n-3} \dots \\
&\qquad\quad \dots (\sin\theta_1) d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} d\varphi dr \qquad (4.22) \\
&\quad = 2\pi \int_I h(r) r^{n-1}\, dr \int_0^{\pi} (\sin\theta_{n-2})^{n-2}\, d\theta_{n-2} \cdot \ldots \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta_1\, d\theta_1.
\end{aligned}$$

Um die Integrale über die θ_j nicht explizit berechnen zu müssen, erinnern wir daran, dass das Integral $\int_{K(I)} H\, d\lambda_n$ für $I = [0, 1]$ und $H \equiv 1$ gerade das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel liefert. Es ist also

$$\begin{aligned}
c_n &= 2\pi \int_0^1 r^{n-1}\, dr \int_0^{\pi} (\sin\theta_{n-2})^{n-2}\, d\theta_{n-2} \cdot \ldots \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta_1\, d\theta_1 \\
&= \frac{2\pi}{n} \int_0^{\pi} (\sin\theta_{n-2})^{n-2}\, d\theta_{n-2} \cdot \ldots \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta_1\, d\theta_1. \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Ein Vergleich von (4.22) und (4.23) zeigt nun, dass

$$\int_{K(I)} H\, d\lambda_n = \int_{K(I)} h(\|x\|)\, d\lambda_n(x) = nc_n \int_I h(r) r^{n-1}\, dr,$$

wobei die Aussage über die Existenz der Integrale ebenfalls aus Satz 4.6 folgt. ∎

5 L^p-Räume

In diesem Abschnitt sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum, und $\mathbb{K}$ steht für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die Menge der messbaren Funktionen von X nach $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^0(X; \mathbb{K})$ oder kurz mit $\mathcal{L}^0$. Integrale über komplexwertige Funktionen haben wir in Abschnitt 2.2 erklärt.

5.1 Die Räume $\mathcal{L}^p$, $p < \infty$

Für $f \in \mathcal{L}^0(X; \mathbb{K})$ und $p \in (0, \infty)$ sei

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

und

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(X; \mathbb{K}) := \{ f \in \mathcal{L}^0(X; \mathbb{K}) : \|f\|_p < \infty \}.$$

Funktionen in $\mathcal{L}^p$ heißen *p-integrierbar*. Man beachte, dass wir zwar die Normschreibweise benutzen, $\|\cdot\|_p$ aber *keine* Norm auf $\mathcal{L}^p$ ist! Für $f \in \mathcal{L}^0$ und $p \in (0, \infty)$ ist nämlich $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ μ-fast überall, wie die folgenden Äquivalenzen zeigen:

$$\|f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_X |f|^p \, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f|^p = 0 \text{ f.ü.} \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ f.ü.}$$

Offenbar gilt aber für alle $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p.$$

Für weitere Eigenschaften der $\mathcal{L}^p$-Räume benötigen wir einige elementare Ungleichungen (Übung).

Lemma 5.1 *Seien $a, b \geq 0$.*
(a) **(Youngsche Ungleichung)** *Für alle $p, q \in (1, \infty)$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ist*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(b) Für $p \geq 1$ gilt $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.
(c) Für $p \in (0, 1)$ gilt $(a+b)^p \leq a^p + b^p$.
Gleichheit gilt in (a) genau dann, wenn $a^p = b^q$, in (b) genau dann, wenn $p = 1$ oder $a = b$, und in (c) genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$.

Satz 5.2 *Für $p \in [0, \infty)$ ist $\mathcal{L}^p(X; \mathbb{K})$ ein Vektorraum.*

Beweis. Für $p = 0$ ist dies Satz 1.20. Für $p \geq 1$ und $f,\, g \in \mathcal{L}^p$ erhalten wir mit Lemma 5.1 (b)

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu \leq \int_X (|f|+|g|)^p \, d\mu \leq \int_X 2^{p-1}|f|^p \, d\mu + \int_X 2^{p-1}|g|^p \, d\mu < \infty,$$

also $f + g \in \mathcal{L}^p$. Schließlich ist für $0 < p < 1$ und $f,\, g \in \mathcal{L}^p$ wegen Lemma 5.1 (c)

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu \leq \int_X (|f|+|g|)^p \, d\mu \leq \int_X |f|^p \, d\mu + \int_X |g|^p \, d\mu < \infty,$$

also ebenfalls $f + g \in \mathcal{L}^p$. ∎

Satz 5.3 (Hölder-Ungleichung.) (a) *Seien $p,\, q,\, r \in (0, \infty)$ mit $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$. Dann gilt für alle $f,\, g \in \mathcal{L}^0$ die Ungleichung*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(b) *Seien $p,\, q \in (1, \infty)$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Für $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^q$ ist dann*

$$fg \in \mathcal{L}^1 \quad \textit{und} \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Beweis. Aussage (b) ist ein Spezialfall von (a). Wir zeigen daher nur (a).

Nach Satz 1.20 ist fg messbar, d.h. $fg \in \mathcal{L}^0$. Gilt $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$, so ist $fg = 0$ fast überall, und die Aussage (a) ist richtig. Sind $\|f\|_p,\, \|g\|_q > 0$ und ist einer dieser Werte gleich ∞, so ist die Aussage ebenfalls trivial (da rechts ∞ steht). Seien also $\|f\|_p,\, \|g\|_q \in (0, \infty)$. Wir setzen $F := f/\|f\|_p$ und $G := g/\|g\|_q$. Anwenden der Youngschen Ungleichung in jedem Punkt $x \in X$ und anschließende Integration ergeben

$$\begin{aligned}\int_X \frac{|f(x)g(x)|^r}{\|f\|_p^r \, \|g\|_q^r} \, d\mu &= \int_X |F(x)G(x)|^r \, d\mu \\ &\leq \int_X \frac{r}{p} |F(x)|^{rp/r} \, d\mu + \int_X \frac{r}{q} |G(x)|^{rq/r} \, d\mu = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1,\end{aligned}$$

woraus die Behauptung leicht folgt. ∎

Satz 5.4 (Minkowski-Ungleichung.) *Für $p \in [1, \infty)$ und $f,\, g \in \mathcal{L}^p$ ist*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis. Es sei q der Hölger-konjugierte Index zu p, d. h. $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Mit Dreiecks- und Hölder-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &\leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu \\ &\leq \|f\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{p/q}.\end{aligned}$$

Wegen $p - p/q = 1$ folgt die Behauptung durch Division durch $\|f+g\|_p^{p/q}$ (für $\|f+g\|_p = 0$ ist die Behauptung offensichtlich richtig). ∎

Satz 5.5 *Für $p \in (0, 1)$ und $f, g \in \mathcal{L}^p$ ist*

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p.$$

Dies folgt wie im Beweis von Theorem 5.2 sofort aus Lemma 5.1 (c). ■

Satz 5.6 (Tschebyscheff-Ungleichung) *Sei $p \in [1, \infty)$, $f \in \mathcal{L}^p$ und $\alpha > 0$. Dann gilt*

$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big) \leq \frac{1}{\alpha^p}\|f\|_p^p.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_X |f|^p \, d\mu \geq \int_{\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}} |f|^p \, d\mu \geq \int_{\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}} \alpha^p \, d\mu \\
&= \alpha^p \mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Eine Folge (f_n) in $\mathcal{L}^p$ nennen wir eine *Cauchy-Folge*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert so, dass $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ (das ist insofern *nicht* die übliche Definition, als $\|.\|_p$ keine Norm ist).

Satz 5.7 *Für jede Cauchy-Folge (f_n) in $\mathcal{L}^p$ gibt es eine Teilfolge (f_{n_k}) und eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p$ so, dass*

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad \textit{für } \mu\textit{-fast alle } x \in X$$

und

$$\|f_{n_k} - f\|_p \to 0 \quad \textit{für } k \to \infty.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für $p \geq 1$; der Beweis für $p \in (0, 1)$ verläuft ähnlich. Sei $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^p$ eine Cauchyfolge. Zu $\varepsilon_k := 2^{-k}$ wählen wir $n_k \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f_n - f_m\|_p \leq 2^{-k}$ für $n, m \geq n_k$ und $n_{k+1} > n_k$. Die Teilfolge (f_{n_k}) hat dann die Eigenschaft

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wir setzen $g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$, $G_N := \sum_{j=1}^N |g_j|$ und $G := \sum_{j=1}^\infty |g_j|$. Dann ist

$$\|G_N\|_p \leq \sum_{j=1}^N \|g_j\|_p \leq \sum_{j=1}^\infty \|g_j\|_p \leq 1.$$

Da die G_N^p monoton wachsen und von unten punktweise gegen G^p konvergieren, folgt mit Satz 2.11 (Monotone Konvergenz) dass

$$\int_X G^p \, d\mu = \lim_{N \to \infty} \int_X G_N^p \, d\mu \leq 1.$$

Es ist also $G \in \mathcal{L}^p$ und somit

$$G(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x)| < \infty \quad \mu\text{-fast überall.}$$

Insbesondere konvergiert die Reihe

$$F(x) := \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in X.$$

Aus $|F(x)| \le G(x)$ folgt weiter $F \in \mathcal{L}^p$. Ferner ist

$$|F - f_{n_k} + f_{n_1}|^p = \left| F - \sum_{j=1}^{k-1} g_j \right|^p \le (2G)^p \in \mathcal{L}^1.$$

Mit Satz 2.15 (Majorisierte Konvergenz) erhalten wir hieraus

$$\|F - f_{n_k} + f_{n_1}\|_p^p = \left\| F - \sum_{j=1}^{k-1} g_j \right\|_p^p = \int_X \left| F - \sum_{j=1}^{k-1} g_j \right|^p d\mu \to 0$$

für $k \to \infty$. Mit $f(x) := F(x) + f_{n_1}(x)$ folgt die Behauptung. ∎

Satz 5.8 (Riesz-Fischer) *Sei $p \in (0, \infty)$ und $f_n \in \mathcal{L}^p$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) (f_n) ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p$.

(b) Es gibt ein $f \in \mathcal{L}^p$ mit $\|f_n - f\|_p \to 0$ für $n \to \infty$.

Beweis. (Wieder nur für $p \ge 1$.) $(b) \Rightarrow (a)$ ist die triviale Implikation: Es ist ja

$$\|f_n - f_m\|_p \le \|f_n - f\|_p + \|f - f_m\|_p.$$

$(a) \Rightarrow (b)$ Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p$. Nach Satz 5.7 gibt es eine Teilfolge (f_{n_k}) und ein $f \in \mathcal{L}^p$ mit $\|f_{n_k} - f\|_p \to 0$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir n_0 so, dass $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon/2$ für $m, n \ge n_0$ und dann $n_k \ge n_0$ so, dass $\|f_{n_k} - f\|_p < \varepsilon/2$. Dann ist

$$\|f_n - f\|_p \le \|f_n - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p < \varepsilon$$

für alle $n \ge n_0$. ∎

5.2 Der Raum $\mathcal{L}^\infty$

Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ heißt *wesentlich beschränkt*, falls ein $c \ge 0$ mit $\mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0$ existiert, d.h., falls $|f| \le c$ fast überall. Für jede solche Funktion definieren wir

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \ge 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0\}.$$

Ist f nicht wesentlich beschränkt, so setzen wir $\|f\|_\infty := \infty$. Die Menge aller wesentlich beschränkten Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^\infty(X;\mathbb{K})$ oder kurz $\mathcal{L}^\infty$. Der folgende Satz fasst wichtige Eigenschaften von $\mathcal{L}^\infty$ zusammen.

Satz 5.9 (a) *Es ist $|f| \le \|f\|_\infty$ μ-fast überall.*

(b) *Es ist $|f| \le c$ fast überall genau dann, wenn $\|f\|_\infty \le c$. Insbesondere ist $\|f\|_\infty = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall.*

(c) *$\mathcal{L}^\infty$ ist ein Vektorraum, und $\|.\|_\infty$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty$.*

(d) *Für Folgen (f_n), (g_m) in $\mathcal{L}^\infty$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(d_1) *$\|f_n - g_m\|_\infty \to 0$ für $m, n \to \infty$.*

(d_2) *Es gibt eine μ-Nullmenge $N \in \mathfrak{S}$, so dass*

$$|f_n(x) - g_m(x)| \to 0 \text{ für } m,\, n \to \infty \text{ gleichmäßig für } x \in X \setminus N.$$

(e) *Für Folgen (f_n) in $\mathcal{L}^\infty$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(e_1) *$\|f_n - f_m\|_\infty \to 0$ für $m, n \to \infty$.*

(e_2) *Es gibt ein $f \in \mathcal{L}^\infty$, so dass $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.*

Beweis. (a) Für

$$A := \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\} \quad \text{und} \quad A_n := \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty + 1/n\}$$

ist $A = \cup_n A_n$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\mu(A_n) = 0$ für alle n. Somit ist $\mu(A) = 0$ nach Lemma 1.24 (c), d.h. es ist $|f| \le \|f\|_\infty$ fast überall.

(b) Ist $|f| \le c$ fast überall, so ist $\|f\|_\infty \le c$ nach Definition. Die umgekehrte Implikation folgt aus Aussage (a), und die zweite Aussage von (b) folgt sofort aus der ersten.

(c) Für beliebige $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ gilt wegen (a)

$$|f+g| \le |f| + |g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty$$

fast überall. Hieraus folgt $f + g \in \mathcal{L}^\infty$ und $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Weiter sei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Wieder wegen (a) ist dann

$$|\alpha f| = |\alpha| \cdot |f| \le |\alpha| \cdot \|f\|_\infty \text{ f.ü. und daher } \|\alpha f\|_\infty \le |\alpha|\, \|f\|_\infty,$$

was

$$\|f\|_\infty = \|\alpha^{-1}\alpha f\|_\infty \le |\alpha^{-1}| \cdot \|\alpha f\|_\infty, \text{ also } |\alpha|\, \|f\|_\infty \le \|\alpha f\|_\infty$$

nach sich zieht. Somit ist $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\, \|f\|_\infty$ für alle $\alpha \ne 0$. Für $\alpha = 0$ ist dies ebenfalls richtig.

(d) $(d_1) \Rightarrow (d_2)$: Für jedes Paar $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es eine μ-Nullmenge $N_{m,n}$ so, dass

$$|f_n(x) - g_m(x)| \le \|f_n - g_m\|_\infty \quad \text{für alle } x \in X \setminus N_{m,n}.$$

Dann ist $N := \cup_{m,n\in\mathbb{N}} N_{n,m}$ ebenfalls eine μ-Nullmenge, und es ist

$$|f_n(x) - g_m(x)| \le \|f_n - g_m\|_\infty \quad \text{für alle } x \in X \setminus N \text{ und alle } m,\, n.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein n_0 so, dass $\|f_n - g_m\|_\infty \le \varepsilon$ für alle m, $n \ge n_0$. Dann ist aber auch

$$|f_n(x) - g_m(x)| \le \|f_n - g_m\|_\infty \le \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \setminus N$$

und für alle m, $n \ge n_0$, d.h. (d_2) ist erfüllt. Die umgekehrte Implikation ist klar.
(e) Die Implikation $(e_2) \Rightarrow (e_1)$ folgt wie in Satz 5.8. Für $(e_1) \Rightarrow (e_2)$ setzen wir $g_m := f_m$ und verwenden Aussage (d). Diese liefert eine Nullmenge N mit

$$|f_n(x) - f_m(x)| \to 0 \quad \text{gleichmäßig auf } X \setminus N \text{ für } m,\, n \to \infty.$$

Für jedes $x \in X \setminus N$ ist also $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$, deren Grenzwert wir $f(x)$ nennen. Für $x \in N$ setzen wir $f(x) := 0$. Dann ist f als Grenzwert messbarer Funktionen ebenfalls messbar. Es verbleibt zu zeigen, dass f wesentlich beschränkt ist. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 so, dass für $x \in X \setminus N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty \le \varepsilon$$

falls m, $n \ge n_0$. Grenzübergang $m \to \infty$ liefert

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \setminus N$$

und für $n \ge n_0$, d.h. es gilt $\|f - f_n\|_\infty \to 0$. Aus

$$|f| \le |f - f_{n_0}| + |f_{n_0}| \le \varepsilon + \|f_{n_0}\|_\infty < \infty$$

folgt schließlich $f \in \mathcal{L}^\infty$. ■

Die folgende Abschätzung ergibt sich unmittelbar aus Satz 5.9 (a).

Satz 5.10 *Für $f \in \mathcal{L}^1$ und $g \in \mathcal{L}^\infty$ gilt*

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

5.3 Die L^p-Räume

Wir haben bereits vermerkt, dass $\|\cdot\|_p$ *keine* Norm auf $\mathcal{L}^p$ ist: Für $f \in \mathcal{L}^p$ ist $\|f\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ μ-fast überall (und *nicht* genau dann, wenn $f = 0$). Um dieses Problem zu beheben, möchten wir Funktionen identifizieren, die fast überall gleich sind. Dazu führen wir eine Relation $\sim$ auf $\mathcal{L}^0$ ein: es ist $f \sim g$ genau dann, wenn $f = g$ fast überall. Es ist leicht zu zeigen, dass $\sim$

eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklasse von $f \in \mathcal{L}^0$ bezeichnen wir vorübergehend mit $[f]$, d.h. es ist

$$[f] := \{g \in \mathcal{L}^0 : f \sim g\},$$

und für $p \in [0, \infty]$ setzen wir $L^p := \mathcal{L}^p / \sim$, d.h. die Elemente von

$$L^p := L^p(X; \mathbb{K}) := \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(X; \mathbb{K})\}$$

sind Äquivalenzklassen von Funktionen aus $\mathcal{L}^p$.

Wir machen L^p zu einem normierten Raum. Dazu erklären wir für $f, g \in L^p(X; \mathbb{K})$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ die Summe und skalare Multiplikation durch

$$[f] + \alpha[g] := [f + \alpha g].$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Operationen wohldefiniert sind, d.h. $[f] + \alpha[g]$ hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten f, g der Nebenklassen $[f]$ und $[g]$ ab. Das macht L^p zu einem Vektorraum. Für $[f] \in L^p$ und $p \in (0, \infty]$ setzen wir weiter

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p.$$

Da je zwei Repräsentanten von $[f]$ fast überall gleich sind, ist $\|[f]\|_p$ nur von $[f]$ und nicht von f abhängig.

Anmerkung 1. Mit dem Begriff des Quotientenraumes kann man obige Definitionen wie folgt interpretieren. Es ist

$$\mathcal{N}(\mu) := \{f : f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\}$$

ein Unterraum von allen $\mathcal{L}^p$. Für $p \in [0, \infty]$ ist L^p dann der Quotientenraum $L^p(X; \mathbb{K}) := \mathcal{L}^p(X; \mathbb{K})/\mathcal{N}(\mu)$, und es ist $[f] = f + \mathcal{N}(\mu)$.

Die Bedeutung dieser Begriffe liegt darin, dass die erhaltenen Räume vollständig sind; insbesondere sind die L^p-Räume mit $p \geq 1$ Banachräume. Der folgende Satz präzisiert dies; sein Beweis folgt sofort aus den Resultaten der letzten beiden Abschnitte.

Satz 5.11 *(a) Für $p \in [1, \infty]$ ist $\|.\|_p$ eine Norm auf L^p, die L^p zu einem vollständigen normierten Raum macht.*
(b) Für $p \in (0, 1)$ ist $d(f, g) := \|f - g\|_p^p$ eine Metrik auf L^p, die L^p zu einem vollständigen metrischen Raum macht.

Wichtige Anmerkung 2. Ab sofort schreiben wir f statt $[f]$, behalten aber im Kopf, dass $f \in L^p$ für eine Äquivalenzklasse von Funktionen steht. Die Notation $f \in \mathcal{L}^p$ bedeutet dagegen, dass f wirklich eine Funktion ist, die auch p-integrierbar (oder wesentlich beschränkt) ist.

Wir werden auch (nicht ganz exakt) Ausdrücke wie „$f \in L^p(\mathbb{R})$ ist stetig“ verwenden. Darunter verstehen wir Folgendes: „$f \in L^p$ ist eine Äquivalenzklasse von Funktionen (die alle in $\mathcal{L}^p$ liegen), und diese Äquivalenzklasse enthält eine stetige Funktion“.

5.4 Vergleich von L^p-Räumen

Wir wissen, dass $\ell^p \subseteq \ell^r$ für $1 \leq p < r \leq \infty$ und $\|x\|_r \leq \|x\|_p$ für $x \in \ell^p$. Im Allgemeinen gibt es aber für $p < r$ keinen Zusammenhang zwischen L^p und L^r, d.h. es ist weder $L^p \subseteq L^r$ noch $L^p \supseteq L^r$ (Übung: belegen Sie das durch Beispiele). Für *endliche* Maßräume lassen sich solche Aussagen aber treffen.

Satz 5.12 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $0 \leq p < r \leq \infty$. Dann ist*

$$L^r(X; \mathbb{K}) \subseteq L^p(X; \mathbb{K}).$$

Beweis. Sei $f \in L^r$. Für $r = \infty$ folgt die Behauptung sofort aus

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^p \, d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(X).$$

Ist $r < \infty$ so wählen wir q so, dass $1/p = 1/r + 1/q$ gilt und wenden die Hölder-Ungleichung (Satz 5.3) auf f und $g = \chi_X$ an. Das ergibt $\|f\|_p = \|f\chi_X\|_p \leq \|f\|_r \, \|\chi_X\|_q = \|f\|_r \, \mu(X)^{1/q}$. ■

Satz 5.13 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Für $f \in L^\infty$ ist*

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Beweis. Die Aussage ist trivial, falls $f = 0$ fast überall oder wenn $\mu(X) = 0$. Sei also $\mu(X) > 0$ und $\|f\|_\infty > 0$. Wegen $f \in L^\infty$ ist

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty^p \, \mu(X), \quad \text{also} \quad \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \, \mu(X)^{1/p}.$$

Hieraus folgt

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \lim_{p\to\infty} \mu(X)^{1/p} = \|f\|_\infty.$$

Andererseits gilt für alle $0 < \alpha < \|f\|_\infty$

$$\int_X |f|^p \, d\mu \geq \alpha^p \mu(x \in X : |f(x)| > \alpha),$$

und somit wie oben $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \alpha$. Da dies für alle $\alpha < \|f\|_\infty$ gilt, folgt die Behauptung. ■

Satz 5.14 (Interpolationsungleichung) *Seien $p_0, p_1 \in (0, \infty]$, $s \in (0, 1)$ und*

$$\frac{1}{p_s} := \frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{p_1}.$$

Ist $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$, so ist $f \in L^{p_s}$, und es gilt die Interpolationsungleichung

$$\|f\|_{p_s} \leq \|f\|_{p_0}^{1-s} \, \|f\|_{p_1}^{s}.$$

Beweis. Für $g := |f|^{(1-s)p_s}$ und $h := |f|^{sp_s}$ ist $g \in L^{\frac{p_0}{(1-s)p_s}}$ und $h \in L^{\frac{p_1}{sp_s}}$ sowie

$$gh = |f|^{(1-s)p_s + sp_s} = |f|^{p_s}.$$

Hieraus folgt wegen $\frac{(1-s)p_s}{p_0} + \frac{sp_s}{p_1} = p_s(\frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{p_1}) = 1$

$$\|f\|_{p_s}^{p_s} = \|gh\|_1 \leq \|g\|_{\frac{p_0}{(1-s)p_s}} \cdot \|h\|_{\frac{p_1}{sp_s}} = \|f\|_{p_0}^{(1-s)p_s} \cdot \|f\|_{p_1}^{sp_s}$$

unter Verwendung der Hölder-Ungleichung. ∎

Satz 5.15 *Sei $p \in [1, \infty]$. Dann lässt sich jedes $f \in L^p$ zerlegen in $f = g + h$ mit $h \in L^1$ und $g \in L^\infty$.*

Beweis. Die Aussage ist trivial für $p = \infty$. Sei also $p < \infty$ und $f \in L^p$. Sei $A := \{x \in X : |f| \geq 1\}$. Dann ist offenbar $g := \chi_{X \setminus A} f \in L^\infty$, und für $h := \chi_A f$ folgt aus

$$\int_X |h|\, d\mu = \int_A |f|\, d\mu \leq \int_A |f|^p\, d\mu \leq \int_X |f|^p\, d\mu < \infty,$$

dass $h \in L^1$. Offenbar ist $f = g + h$. ∎

5.5 Berechnung der L^p-Norm

Hier stellen wir einige Aussagen zur L^p-Norm zusammen.

Satz 5.16 *Seien $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ σ-endlich, $p \in [1, \infty]$ und p, q* konjugierte Exponenten*, d.h. $1/p + 1/q = 1$. Für jedes $f \in L^p$ ist dann*

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \sup\left\{\left|\int_X fg\, d\mu\right| : g \in L^q,\ \|g\|_q \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_X f\overline{g}\, d\mu\right| : g \in L^q,\ \|g\|_q \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\int_X |fg|\, d\mu : g \in L^q,\ \|g\|_q \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

Beweis. Für $\|f\|_p = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also $\|f\|_p > 0$. Wir bezeichnen die drei Suprema der Reihe nach mit S_1, S_2 und S_3. Offenbar ist $S_1 = S_2$ und $S_1 \leq S_3$ wegen der Dreiecksungleichung. Ist $g \in L^q$ und $\|g\|_q \leq 1$, so liefert die Hölder-Ungleichung

$$\int_X |fg|\, d\mu = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \leq \|f\|_p.$$

Es ist also stets $S_3 \leq \|f\|_p$. Zum Beweis der noch ausstehenden Ungleichung $\|f\|_p \leq S_1$ unterscheiden wir drei Fälle.

Fall 1: Für $p = 1$ betrachten wir die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\overline{f}(x)}{|f|(x)} & \text{falls } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für diese ist $\|g\|_\infty \leq 1$ und

$$\int_X fg \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu = \|f\|_1.$$

Hieraus folgt $\|f\|_1 \leq S_1$.
Fall 2: Für $1 < p < \infty$ und $f \in L^p$ mit $\|f\|_p = 1$ setzen wir

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\overline{f}(x)}{|f|(x)} |f(x)|^{p-1} & \text{falls } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\int_X |g|^q \, d\mu = \int_X |f|^{(p-1)q} \, d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu = 1,$$

also $\|g\|_q = 1$, und

$$\int_X fg \, d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu = 1.$$

Somit ist für diese f wieder $S_1 \geq \|f\|_p = 1$. Für allgemeines $f \in L^p$ kann man durch Umskalieren mit $\|f\|_p$ die gewünschte Ungleichung beweisen.
Fall 3: Schließlich betrachten wir $p = \infty$. Sei $0 < \alpha < \|f\|_\infty$. Wegen der σ-Endlichkeit gibt es ein $A \in \mathfrak{S}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ und $|f(x)| \geq \alpha$ für $x \in A$. Die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\overline{f}(x)}{|f|(x)} \frac{1}{\mu(A)} & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es ist $\|g\|_1 = 1$. Ferner gilt

$$\int_X fg \, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f| \, d\mu \geq \alpha.$$

Dies zeigt, dass $S_1 \geq \alpha$ und folglich $S_1 \geq \|f\|_\infty$. ■

Anmerkung.$^\diamond$ Die Gleichheit

$$\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} = \sup \left\{ \int_X |fg| \, d\mu : g \in L^q, \ \|g\|_q \leq 1 \right\} =: S$$

gilt auch, wenn die linke Seite $+\infty$ ist.

Beweis. Sei $r > 0$. Wegen der σ-Endlichkeit existiert ein $A \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(A) < \infty$ und

$$\int_A |f|^p \, d\mu > r + 1.$$

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $B_m := \{x \in A : |f(x)| \leq m\}$. Die Folge (B_m) wächst monoton, und es ist $\cup_{m \in \mathbb{N}} B_m = A$. Für das Maß

$$\varphi(C) := \int_C |f|^p \, d\mu$$

gilt daher $\varphi(B_m) \nearrow \varphi(A)$. Insbesondere gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\infty > \int_{B_m} |f|^p \, d\mu > r.$$

Wegen $f \in L^p(B_m; \mathbb{K})$ gibt es (wie oben gezeigt) ein $g \in L^q(B_m; \mathbb{K})$ mit

$$\int_{B_m} fg \, d\mu = \int_{B_m} |f|^p \, d\mu \geq r.$$

Die Funktion

$$G(x) := \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \in B_m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gehört dann zu L^q, und

$$\int_X fg \, d\mu = \int_{B_m} fg \, d\mu \geq r.$$

Dies zeigt $S \geq r$, also $S = \infty$. ■

Satz 5.17 *Sei $f \in L^0$ und $p \in [1, \infty)$. Dann ist $f \in L^p$ genau dann, wenn*

$$p \int_{[0, \infty]} t^{p-1} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) \, dt < \infty.$$

In diesem Fall ist der Term auf der linken Seite der Ungleichung gleich $\|f\|_p^p$.

Beweisidee. Beide Aussagen implizieren, dass f außerhalb einer σ-endlichen Menge verschwindet. Wir beschränken uns daher von vornherein auf den Fall, dass X σ-endlich ist.

Sei zunächst $p = 1$ und $f \in L^p$. Wir betrachten das Produktmaß $\mu \otimes \lambda_1$ und die Menge

$$M := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq |f(x)|\}.$$

Nach dem Satz von Fubini ist

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &= \int_X |f|\,d\mu = (\mu\otimes\lambda)(M) = \int_{X\times\mathbb{R}} \chi_M\,d(\mu\otimes\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_X \chi_M(x,\,t)\,d\mu(x)d\lambda(t) \\
&= \int_{[0,\,\infty]} \mu(\{x\in X : |f(x)|\geq t\})\,dt.
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die Ungleichung

$$\mu(\{x\in X : |f(x)| = t\}) > 0 \tag{5.1}$$

nur für höchstens abzählbar viele $t\in[0,\,\infty]$ gelten kann. Da jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, erhalten wir hieraus

$$\int_{[0,\,\infty]} \mu(\{x\in X : |f(x)| > t\})\,dt = \int_{[0,\,\infty]} \mu(\{x\in X : |f(x)|\geq t\})\,dt = \|f\|_1,$$

also die Behauptung. Angenommen, (5.1) gelte für überabzählbar viele t. Dann findet man $n,\,k\in\mathbb{N}$ derart, dass

$$\mu(\{x\in X : |f(x)| = t\}) > 1/n$$

für unendlich viele $t\geq 1/k$. Dies steht aber im Widerspruch zu $\|f\|_1<\infty$.

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass $\int_{[0,\,\infty]}\mu(\{x\in X : |f(x)|>t\})\,dt<\infty$. Dann ist $\mu(\{x\in X : |f(x)|>t\})<\infty$ für alle $t>0$. Wir setzen

$$A_n := \{x\in X : 1/n < |f(x)| \leq n\}.$$

Dann ist $\mu(A_n)<\infty$ und $f_n := f\chi_{A_n}$ beschränkt, also $f_n\in L^1$. Nach dem schon bewiesenen Teil gilt somit

$$\begin{aligned}
\int_X |f_n|\,d\mu &= \int_{[0,\,\infty]} \mu(\{x\in X : |f_n(x)| > t\})\,dt \\
&\leq \int_{[0,\,\infty]} \mu(\{x\in X : |f(x)| > t\})\,dt < \infty.
\end{aligned}$$

Wegen $|f_n|\nearrow|f|$ liefert der Satz von der monotoner Konvergenz, dass

$$\int_X |f|\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X |f_n|\,d\mu \leq \int_{[0,\,\infty]} \mu(\{x\in X : |f(x)| > t\})\,dt < \infty.$$

Dies zeigt, dass $f\in L^1$.

Schließlich betrachten wir den Fall $p > 1$. Aus dem bereits Gezeigten folgt nach Substitution $t := s^p$

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p &= \int_X |f|^p\,d\mu = \int_{[0,\infty]} \mu(\{x\in X : |f(x)|^p > t\})\,dt \\ &= \int_{[0,\infty]} \underbrace{ps^{p-1}}_{\text{Jacobi-Det.}} \mu(\{x\in X : |f(x)|^p > s^p\})\,ds \\ &= \int_{[0,\infty]} ps^{p-1}\mu(\{x\in X : |f(x)| > s\})\,ds. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

5.6 Dichte Teilmengen in L^p

Oft möchte man L^p-Funktionen durch einfachere Funktionen approximieren. Die folgenden Sätze liefern dafür die Grundlage.

Satz 5.18 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum. Dann liegen für jedes $p \in [1,\infty]$ die L^p-Stufenfunktionen dicht in L^p, d.h. für jedes $f \in L^p$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Stufenfunktion $g \in L^p$ mit $\|f - g\|_p \le \varepsilon$.*

Beweis. Die Behauptung ist trivial für die Nullfunktion, und für $p = \infty$ folgt sie aus dem Approximationssatz 2.2: Jede beschränkte messbare Funktion kann gleichmäßig durch Stufenfunktionen approximiert werden. Wir können daher annehmen, dass $p \in [1, \infty)$ und $\|f\|_p > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \{x \in X : 1/n \le |f(x)|^p \le n\} \ (\in \mathfrak{S}).$$

Die A_n bilden eine monoton wachsende Folge, und es ist

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in X : 0 < |f(x)|^p < \infty\} =: A.$$

Mit dem Satz von der monotoner Konvergenz bekommen wir

$$\int_{A_n} |f|^p\,d\mu = \int_X |\chi_{A_n} f|^p\,d\mu \nearrow \int_X |\chi_A f|^p\,d\mu = \int_A |f|^p\,d\mu = \int_X |f|^p\,d\mu,$$

also $\int_{X\setminus A_n} |f|^p\,d\mu \to 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ ist dann $\mu(A_n) > 0$ und $\|f - f\chi_{A_n}\|_p \le \varepsilon/2$. Wegen $f \in L^p$ ist auch $\mu(A_n) < \infty$. Weiter: da die Funktion $f\chi_{A_n}$ beschränkt ist, finden wir eine Stufenfunktion $g : X \to \mathbb{C}$ mit

$$\|f\chi_{A_n} - g\chi_{A_n}\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2\mu(A_n)^{1/p}}.$$

Wählen wir außerdem $g = 0$ außerhalb von A_n, so liegt wegen $\mu(A_n) < \infty$ die Funktion g in L^p. Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}\|f-g\|_p &\leq \|f - f\chi_{A_n}\|_p + \|f\chi_{A_n} - g\chi_{A_n}\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_{A_n} |f-g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(A_n)^{1/p} \, \|f\chi_{A_n} - g\chi_{A_n}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

folgt dann die Behauptung. ■

Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definieren wir ihren *Träger* durch

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}},$$

und wir schreiben $C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ für die Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger.

Für jede Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ (d.h. es ist $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ und für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\int_K |f(x)| \, dx < \infty$) definieren wir ihren Träger durch

$$\operatorname{supp} f := \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup \{G : G \text{ offen und } f = 0 \text{ fast überall in } G\}\right),$$

Offenbar ist der Träger von f eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Satz 5.19 *Wir betrachten den Lebesgueschen Maßraum* $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$. *Für jedes $p \in [1, \infty)$ liegt $C_c(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$, d.h. für jedes $f \in L^n$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - h\|_p \leq \varepsilon$.*

Beweis. Für die Nullfunktion ist die Behauptung wieder trivial. Sei also $\|f\|_p > 0$ und $\varepsilon > 0$. Wie nunmehr bereits gewohnt schneiden wir f ab und betrachten die Mengen $A_k := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < k \text{ und } |f(x)| \leq k\}$. Für ein hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\lambda_n(A_k) > 0 \quad \text{und} \quad \|f - f\chi_{A_k}\|_p < \varepsilon/2.$$

Der Vorteil ist, dass $f\chi_{A_k}$ beschränkt ist und einen kompakten Träger hat. Satz 3.20 (Luzin) liefert daher eine abgeschlossene Menge $F \subseteq A_k$ derart, dass $f|_F : F \to \mathbb{C}$ stetig ist und $\lambda_n(A_k \setminus F) \leq \varepsilon^p (8k)^{-p}$.

Weiter: auf Grund der Regularität von $\mathbb{R}^n$ finden wir eine offene Menge G mit $A_k \subseteq G \subseteq B(0, k)$ und $\lambda_n(G \setminus F) < \varepsilon^p(4k)^{-p}$. Nun benötigen wir einen Import aus der Topologie: Der Ausdehnungssatz von Tietze besagt, dass es eine stetige Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$h(x) = f(x) \text{ für } x \in F, \quad h(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \setminus G,$$

und

$$\|h\|_\infty \leq \sup_{x \in F} |f(x)| \leq k.$$

Wegen $\operatorname{supp} h \subseteq \overline{B(0,\, k)}$ ist $h \in C_c(\mathbb{R}^n)$, und wegen

$$\begin{aligned}
\|f-h\|_p &\le \|f - f\chi_{A_k}\|_p + \|f\chi_{A_k} - h\|_p \le \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f\chi_{A_k} - h|^p \, d\lambda_n\right)^{1/p} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_{G\setminus F} |f\chi_{A_k} - h|^p \, d\lambda_n + \int_F |f\chi_{A_k} - h|^p \, d\lambda_n\right)^{1/p} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_{G\setminus F} |f\chi_{A_k} - h|^p \, d\lambda_n\right)^{1/p} \le \frac{\varepsilon}{2} + \lambda_n(G\setminus F)^{1/p}\, 2k \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ist h die gesuchte Funktion. ∎

5.7 Der Lebesguesche Differentiationssatz$^\diamond$

In diesem Abschnitt arbeiten wir im Lebesgueschen Maßraum $(\mathbb{R}^n,\, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n),\, \lambda_n)$. Für stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f \, d\lambda_n = f(x), \tag{5.2}$$

d.h. die Mittelwerte der Funktion konvergieren bei schrumpfender Kugel, über die gemittelt wird, gegen den Funktionswert im Kugelmittelpunkt. Dieser Effekt ist uns besonders im Eindimensionalen bekannt. Dort kennen Sie ihn als

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)\, dy = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\int_0^{x+h} f(y)\, dy - \int_0^x f(y)\, dy\Big) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x),
\end{aligned} \tag{5.3}$$

für eine Stammfunktion F einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Das Ziel dieses Abschnitts ist, den folgenden Satz zu beweisen, der besagt, dass für integrable Funktionen die Gleichheit in (5.2) zumindest fast überall richtig ist. Der Name des Satzes erklärt sich über den Zusammenhang in (5.3).

Satz 5.20 (Lebesguescher Differentiationssatz) *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f \, d\lambda_n = f(x). \tag{5.4}$$

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einige Vorbereitungen.

Definition 5.21 *Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\mathcal{B}_x$ die Menge aller offenen Kugeln in $\mathbb{R}^n$, die x enthalten. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt*

$$Mf(x) := \sup_{B \in \mathcal{B}_x} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f| \, d\lambda_n$$

die Hardy-Littlewood-Maximalfunktion (*oder kurz die* Maximalfunktion) *von f.*

Wir sammeln ein paar Eigenschaften dieser Maximalfunktion.

Satz 5.22 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $Mf : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, es gilt $Mf < \infty$ fast überall, und für jedes $\alpha > 0$ ist*

$$\lambda_n\big(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}\big) \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.5}$$

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf das folgende geometrische Lemma, welches wir hier ohne Beweis verwenden wollen (bzw. dessen Beweis als Übungsaufgabe verbleibt).

Lemma 5.23 *Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $B_1, B_2, \ldots, B_N$ Kugeln in $\mathbb{R}^n$. Dann existiert ein $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ und eine Auswahl $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_k}$ obiger Kugeln, so dass diese paarweise disjunkt sind und*

$$\lambda_n\Big(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\Big) \leq 3^n \sum_{j=1}^{k} \lambda_n(B_{i_j})$$

gilt.

Beweis von Satz 5.22. Für den Nachweis, dass Mf messbar ist, genügt es zu zeigen, dass für jedes $\alpha > 0$ die Menge

$$E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\} = (Mf)^{-1}((\alpha, \infty])$$

offen ist (warum?). Dazu sei $\alpha > 0$ und $x_0 \in E_\alpha$. Dann gilt $Mf(x_0) > \alpha$, d.h. es gibt eine offene Kugel $B_{x_0} \in \mathcal{B}_{x_0}$ mit

$$\frac{1}{\lambda_n(B_{x_0})} \int_{B_{x_0}} |f| \, d\lambda_n > \alpha.$$

Für alle $x \in B_{x_0}$ gilt dann ebenfalls

$$Mf(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}_x} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f| \, d\lambda_n \geq \frac{1}{\lambda_n(B_{x_0})} \int_{B_{x_0}} |f| \, d\lambda_n > \alpha.$$

Also ist $B_{x_0} \subseteq E_\alpha$, und E_α ist offen.

Wir zeigen nun die Abschätzung (5.5). Aus dieser folgt mit Hilfe eines Grenzübergangs $\alpha \to \infty$ auch, dass Mf fast überall endlich ist.

Sei $\alpha > 0$. Wie oben betrachten wir die Mengen E_α und wählen wie dort für jedes $x \in E_\alpha$ eine offene Kugel $B_x \in \mathcal{B}_x$ mit

$$\frac{1}{\lambda_n(B_x)} \int_{B_x} |f| \, d\lambda_n > \alpha. \tag{5.6}$$

Sei $K \subseteq E_\alpha$ eine kompakte Menge. Dann bildet $\{B_x : x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K, aus der man eine endliche Teilüberdeckung $\{B_{x_1}, B_{x_2}, \ldots, B_{x_N}\}$ von K auswählen kann. Von dieser wiederum können wir nach Lemma 5.23 eine paarweise disjunkte Teilauswahl $B_{x_{i_1}}, B_{x_{i_2}}, \ldots, B_{x_{i_k}}$ so treffen, dass

$$\lambda_n(K) \leq \lambda_n\Big(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_{x_\ell}\Big) \leq 3^n \sum_{j=1}^{k} \lambda_n(B_{x_{i_j}})$$

gilt. Wir verwenden nun (5.6) und die paarweise Disjunktheit der zuletzt ausgewählten Kugeln. Das liefert

$$\begin{aligned} \lambda_n(K) &\leq 3^n \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha} \int_{B_{x_{i_j}}} |f| \, d\lambda_n = \frac{3^n}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^{k} B_{x_{i_j}}} |f| \, d\lambda_n \\ &\leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\lambda_n = \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Da K eine beliebige kompakte Teilmenge von E_α war, folgt die Behauptung aus der Regularität des Lebesgue-Maßes in Satz 3.17. ■

Wir können nun den Lebesgueschen Differentiationssatz beweisen.

Beweis von Satz 5.20. Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zunächst beobachten wir, dass (5.4) genau dann gilt, wenn

$$\limsup_{r \to 0} \Big| \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f \, d\lambda_n - f(x) \Big| = 0. \tag{5.7}$$

Dazu zeigen wir: Für alle $\alpha > 0$ hat die Menge

$$F_\alpha := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r \to 0} \Big| \frac{1}{\lambda_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f \, d\lambda_n - f(x) \Big| > 2\alpha \Big\}$$

das Maß Null. Dann hat auch die Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$ das Maß Null. Diese Menge enthält gerade diejenigen Punkte in $\mathbb{R}^d$, für die (5.7) und damit auch (5.4) nicht gilt.

Seien $\alpha > 0$ und $\varepsilon > 0$. Mit Hilfe von Satz 5.19 bekommen wir eine Funktion $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Nun gilt mit ein paar nahrhaften Nullen und der Definition der Hardy-Littlewood-Maximalfunktion

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{\lambda_n(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f\,d\lambda_n - f(x)\Big| \\
&\qquad \leq \Big|\frac{1}{\lambda_n(B(x,r))}\int_{B(x,r)} (f-g)\,d\lambda_n\Big| + \Big|\frac{1}{\lambda_n(B(x,r))}\int_{B(x,r)} g\,d\lambda_n - g(x)\Big| \\
&\qquad\qquad\qquad + |g(x)-f(x)| \\
&\qquad \leq \big|[M(f-g)](x)\big| + \Big|\frac{1}{\lambda_n(B(x,r))}\int_{B(x,r)} g\,d\lambda_n - g(x)\Big| + |g(x)-f(x)|.
\end{aligned}$$

Werfen wir über diese Ungleichung den Limes superior für r gegen Null, so geht der zweite Summand gegen Null (g ist ja eine stetige Funktion), und wir erhalten

$$\limsup_{r\to 0}\Big|\frac{1}{\lambda_n(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f\,d\lambda_n - f(x)\Big| \leq |[M(f-g)](x)| + |g(x)-f(x)|.$$

Also haben wir

$$F_\alpha \subseteq \big\{x\in\mathbb{R}^n : |[M(f-g)](x)| + |f(x)-g(x)| > 2\alpha\big\}.$$

Damit eine Summe von zwei Summanden größer als 2α ist, muss zumindest einer der Summanden größer als α sein. Das bedeutet:

$$F_\alpha \subseteq \big\{x\in\mathbb{R}^n : |[M(f-g)](x)| > \alpha\big\} \cup \big\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)-g(x)| > \alpha\big\}.$$

Nun gilt nach Satz 5.22

$$\lambda_n\big(\big\{x\in\mathbb{R}^n : |[M(f-g)](x)| > \alpha\big\}\big) \leq \frac{3^n}{\alpha}\|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{3^n\varepsilon}{\alpha}$$

und nach der Tschebyscheff-Ungleichung (Satz 5.6)

$$\lambda_n\big(\big\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)-g(x)| > \alpha\big\}\big) \leq \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Zusammen liefert das

$$\lambda_n(F_\alpha) \leq \frac{3^n+1}{\alpha}\varepsilon.$$

Da ε beliebig war, folgt $\lambda_d(F_\alpha) = 0$. ■

6 Faltung und Fouriertransformation auf $\mathbb{R}^n$

6.1 Die Translation auf L^p

Viele Aussagen diese Kapitels sind verknüpft mit der Translationsinvarianz des Lebesgueschen Maßes und des Integrals

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

für $f \in L^0(\mathbb{R}^n, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Für $a \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit

$$(\tau_a f)(x) := f(x+a) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{f}(x) := f(-x)$$

die *Translation* von f um a bzw. die *Inversion* von f. Es ist klar, dass mit f auch $\tau_a f$ und $\tilde{f}$ in L^0 liegen und dass $f \mapsto \tau_a f$ und $f \mapsto \tilde{f}$ lineare Abbildungen sind.

Satz 6.1 *Sei $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p$. Dann ist $\|f\|_p = \|\tilde{f}\|_p = \|\tau_a f\|_p$ für alle $a \in \mathbb{R}^n$, und die Abbildung $\mathbb{R}^n \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $a \mapsto \tau_a f$ ist stetig.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt sofort aus der Translations- und Inversionsinvarianz von λ_n.
Wir zeigen die Stetigkeitsaussage zunächst für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Sei $a_0 \in \mathbb{R}^n$. Für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{supp} \tau_a f = \operatorname{supp} \tau_{a_0} f + (a_0 - a)$. Es gibt daher eine kompakte Menge K mit $\lambda_n(K) > 0$, die die Träger von $\tau_a f$ für alle $|a - a_0| < 1$ umfasst. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $1 > \delta > 0$ derart, dass

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x+a) - f(x+a_0)| < \frac{\varepsilon}{\lambda_n(K)^{1/p}}$$

für alle a mit $|a - a_0| < \delta$. Damit erhalten wir

$$\|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+a) - f(x+a_0)|^p\,dx \le \frac{\varepsilon^p}{\lambda_n(K)} \lambda_n(K) = \varepsilon^p$$

für alle $|a - a_0| < \delta$. Dies zeigt die Stetigkeit für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

Sei nun $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wegen Satz 5.19 finden wir $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. Auf g können wir das oben Bewiesene anwenden, d.h. wir finden ein passendes δ so, dass

$$\begin{aligned}
\|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_p &\le \|\tau_a f - \tau_a g\|_p + \|\tau_a g - \tau_{a_0} g\|_p + \|\tau_{a_0} g - \tau_{a_0} f\|_p \\
&\le \|f - g\|_p + \|\tau_a g - \tau_{a_0} g\|_p + \|g - f\|_p \\
&\le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon
\end{aligned}$$

für alle a mit $|a - a_0| < \delta$. ■

6.2 Die Faltung

Existiert für gewisse Funktionen f, $g \in L^0(\mathbb{R}^n)$ das Integral

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \tag{6.1}$$

wenigstens für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, so heißt $f * g$ die *Faltung* von f und g. Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Kriterien dafür, dass $f * g$ existiert und sogar in einem L^p-Raum liegt.

Satz 6.2 *Sind f, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so existiert für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ das Integral* (6.1). *Ferner ist $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.*

Beweis. Der Satz von Fubini liefert

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\cdot|g(y)|\,dy\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,dx\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\cdot\|f\|_1\,dy = \|f\|_1\cdot\|g\|_1.\end{aligned}$$

Hieraus folgen alle Behauptungen. ■

Satz 6.3 *Der Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$ versehen mit der Multiplikation $f * g$ (Faltung) ist eine kommutative Banachalgebra. Genauer: L^1 ist ein Banachraum, $f*g = g*f$, $f*(g*h) = (f*g)*h$, $(f+\alpha g)*h = f*h+\alpha(g*h)$ und $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1\cdot\|g\|_1$.*

Beweis. Seien f, g, $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mit Fubini, dem Transformationssatz und der Linearität des Integrals rechnet man leicht nach, dass $(f+\alpha g)*h = f*h+\alpha(g*h)$, $f*(g*h) = (f*g)*h$ und $f*g = g*f$. Die Submultiplikativität der Norm wurde in Satz 6.2 bewiesen, und aus Satz 5.8 (Riesz-Fischer) wissen wir, dass $L^1(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist. ■

Satz 6.4 *Für f, $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt* $\operatorname{supp}(f*g) \subseteq \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. *Insbesondere ist* $\operatorname{supp}(f*g)$ *kompakt.*

Beweis. Wir werden in Satz 6.5 unter allgemeineren Voraussetzungen sehen, dass $f * g$ stetig ist. Sei also $x \in \mathbb{R}^n$ so, dass $(f*g)(x) \neq 0$. Dann ist auch

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\operatorname{supp} g\cap(x-\operatorname{supp} f)} f(x-y)g(y)\,dy \neq 0,$$

und folglich ist die Menge $\operatorname{supp} g \cap (x - \operatorname{supp} f)$ nicht leer. Es gibt also ein $z \in \operatorname{supp} g \cap (x - \operatorname{supp} f)$, d.h. es ist $z \in \operatorname{supp} g$ und $z = x - y$ mit einem $y \in \operatorname{supp} f$. Somit ist $x = y + z \in \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ und daher

$$\operatorname{supp}(f*g) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : (f*g)(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} = \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$$

Bei der letzten Gleichheit haben wir benutzt, dass $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ bereits abgeschlossen ist (ÜA). ■

Satz 6.5 *Seien* $p, q \in [1, \infty]$ *mit* $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *und* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. *Dann existiert* $(f * g)(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, *und es ist* $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sowie $f * g = g * f$. *Ferner ist die Funktion* $f * g$ *gleichmäßig stetig auf* $\mathbb{R}^n$, *und für* $p, q > 1$ *gilt* $(f * g)(x) \to 0$ *für* $|x| \to \infty$.

Beweis. Mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| \, dy \leq \|\tau_{-x} \tilde{f}\|_p \cdot \|g\|_q = \|f\|_p \cdot \|g\|_q < \infty.$$

Dies impliziert, dass $(f * g)(x)$ existiert und $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ ist. Die Kommutativität $f * g = g * f$ folgt durch Variablensubstitution.

Wir zeigen die gleichmäßige Stetigkeit. Eine der Zahlen p, q ist endlich; sei dies z.B. die Zahl p. Dann schätzen wir ab

$$|(f*g)(z) - (f*g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(z-y)| \, |g(y)| \, dy \leq \|\tau_{x-z} f - f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da die Translation in $L^p(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 6.1 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass

$$\|\tau_{x-z} f - f\|_p \leq \varepsilon \quad \text{falls } |z - x| < \delta.$$

Mit der zuvor gezeigten Abschätzung folgt die gleichmäßige Stetigkeit von $f * g$.

Wir zeigen noch, dass $f * g$ im Unendlichen verschwindet, falls p und q endlich sind. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Falls $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$, so ist $f * g = 0$, und die Behauptung ist trivial. Wir können also $\|f\|_p > 0$, $\|g\|_q > 0$ annehmen. Wegen Satz 5.19 gibt es Funktionen $f_1, g_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f - f_1\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2\|g\|_q}, \quad \|g - g_1\|_q \leq \frac{\varepsilon}{2\|f_1\|_p}.$$

Damit erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq |((f - f_1) * g)(x)| + |(f_1 * (g - g_1))(x)| + |(f_1 * g_1)(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\|g\|_q} \|g\|_q + \|f_1\|_p \frac{\varepsilon}{2\|f_1\|_p} + |(f_1 * g_1)(x)|. \end{aligned}$$

Da $\operatorname{supp}(f_1 * g_1)$ nach Satz 6.4 kompakt ist, gibt es ein $R > 0$ mit $(f_1 * g_1)(x) = 0$ für $|x| > R$. Für alle $|x| > R$ ist daher $|(f * g)(x)| \leq \varepsilon$. ■

Satz 6.6 (Youngsche Ungleichung) *(a) Sei* $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *und* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Dann ist* $f * g \in L^p$ *mit*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \, \|g\|_1.$$

(b) Seien $p, q, r \in [1, \infty]$ *mit* $1/p + 1/q = 1/r + 1$ *(dies impliziert* $r \geq p, q$*). Ist* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *und* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *so existiert* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *mit*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Beweis. Wir zeigen nur Aussage (a). Der Beweis von (b) erfolgt mit ähnlichen Methoden (Siehe z.B. Grafakos: Classical Fourier Analysis, Theorem 1.2.12).

Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$ mit $\|h\|_q \leq 1$ und $1/p + 1/q = 1$. Unter Benutzung von Fubini und Satz 6.5 schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)h(x)|\,dy\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)h(x)|\,dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \,\big\||\tilde{f}| * |h|\big\|_\infty \,dy = \|g\|_1 \,\|\tilde{f}\|_p \,\|h\|_q \\
&\leq \|g\|_1 \,\|f\|_p.
\end{aligned}$$

Mit Satz 5.16 erhalten wir $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \,\|g\|_1$. ■

Anmerkung.$^\diamond$ Die Youngsche Ungleichung $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ kann verbessert werden zu

$$\|f * g\|_r \leq C_{p,q,r}^d \|f\|_p \|g\|_q$$

mit der Konstanten

$$C_{p,q,r} = (A_p A_q A_{r'})^{1/2} \quad \text{mit} \quad A_s := \frac{s^{1/s}}{s'^{1/s'}},$$

wobei s' den zu s konjugierten Exponenten bezeichnet. Die Konstante $C_{p,q,r}^d$ ist die bestmögliche. Dies ist ein tiefliegendes Resultat von Beckner. Man bemerke aber, dass für $r = 1$ und $r = \infty$ die optimale Konstante gleich 1 ist, also genau diejenige, welche wir in Satz 6.2 und Satz 6.5 gefunden haben. ■

6.3 Approximative Einsen und Mollifier

Satz 6.7 *Sei (φ_k) eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:*
(a) $\varphi_k \geq 0$,
(b) $\|\varphi_k\|_1 = 1$,
(c) für alle $r > 0$ ist $\lim_{k\to\infty} \int_{B(0,\,r)} \varphi_k \,dx = 1$.
Dann gilt $\|f * \varphi_k - f\|_p \to 0$ für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p \in [1, \infty)$.

Beweis. Die Aussage ist trivial für $\|f\|_p = 0$. Sei also $\|f\|_p > 0$. Nach Satz 6.1 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass $\|f - \tau_y f\|_p \leq \varepsilon/2$ falls $|y| \leq \delta$. Wir wählen $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $k \geq k_0$ gilt

$$\int_{B(0,\,\delta)} \varphi_k(x)\,dx \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4\|f\|_p}$$

(beachte Eigenschaft (c)). Für $k \geq k_0$ und $h \in L^q$ mit $\|h\|_q \leq 1$ und $1/p + 1/q = 1$

gilt dann

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|\,\varphi_k(y)\,|h(x)|\,dy\,dx \\
&\quad = \int_{|y|\le\delta}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|\,|h(x)|\,dx\,\varphi_k(y)\,dy \\
&\qquad + \int_{|y|>\delta}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|\,|h(x)|\,dx\,\varphi_k(y)\,dy \\
&\quad \le \int_{|y|\le\delta} \|\tau_{-y}f-f\|_p\,\|h\|_q\,\varphi_k(y)\,dy + 2\|f\|_p\,\|h\|_q \int_{|y|>\delta}\varphi_k(y)\,dy \\
&\quad \le \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mit Satz 5.16 erhalten wir $\|f*\varphi_k-f\|_p\le\varepsilon$ für alle $k\ge k_0$. ∎

Anmerkung 1. Der obige Satz zeigt, dass jede Folge (φ_k) mit den genannten Eigenschaften eine *approximative Eins* in der Banachalgebra $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist.

Anmerkung 2. Folgen mit Eigenschaften (a) - (c) aus obigem Satz können wie folgt konstruiert werden: Für $\varphi\ge 0$ mit $\|\varphi\|_1=1$ setze

$$\varphi_k(x) := k^n\varphi(kx).$$

Trivialerweise ist $\varphi_k\ge 0$, und mit einer Variablensubstitution $y=kx$ sieht man auch, dass $\|\varphi_k\|_1=1$. Schließlich ist für jedes $r>0$

$$\int_{B(0,r)}\varphi_k(x)\,dx=\int_{B(0,r)}k^n\varphi(kx)\,dx=\int_{B(0,rk)}\varphi(x)\,dx\to 1,$$

d.h. die Folge (φ_k) hat die gewünschten Eigenschaften. Beispielsweise erhalten wir aus

$$\varphi := \frac{\chi_{B(0,1)}}{\lambda_n(B(0,1))} \quad \text{die Funktionen} \quad \varphi_k=\frac{\chi_{B(0,1/k)}}{\lambda_n(B(0,1/k))}.$$

Ein weiteres wichtiges Beispiel wird durch die *Gauß-Funktion*

$$g(x) := \frac{1}{\pi^{n/2}}e^{-|x|^2}$$

gegeben. Ein Vorteil dieser Funktion ist, dass sie glatt ist (andere Vorteile werden wir später sehen). Mit einer einfachen Modifikation obiger Konstruktion ($\sqrt{k}$ statt k) sieht man, dass die Folge

$$g_k(x)=\frac{k^{n/2}}{\pi^{n/2}}e^{-k|x|^2}$$

die gewünschten Eigenschaften (a) - (c) aus Satz 6.7 hat. ∎

Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $C^k(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, für die die partiellen Ableitungen $\partial^\alpha f$ für jeden Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ existieren und stetig sind. Weiter setzen wir

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\mathbb{R}^n).$$

Schließlich bezeichnen wir die Menge der Funktionen in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger mit $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Eine Folge glatter Funktionen mit kompaktem Träger, die die Eigenschaften (a) - (c) aus Satz 6.7 hat, verdient einen eigenen Namen.

Definition 6.8 *Eine Folge $(\rho_k)_{k\geq 1}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften*

(a) $\rho_k \geq 0$,

(b) $\|\rho_k\|_1 = 1$,

(c) $\operatorname{supp} \rho_k \subseteq \overline{B(0, 1/k)}$,

(d) $\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

heißt ein Mollifier *(oder eine* Mollifier-Folge*).*

Beispiel. Sei $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit

$$\operatorname{supp} \rho \subseteq \overline{B(0, 1)}, \quad \rho \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1.$$

Dann definiert

$$\rho_k(x) := k^n \rho(kx)$$

eine Mollifier-Folge. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist

$$\rho(x) := \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1, \end{cases}$$

wobei c so bestimmt wird, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$ gilt. ■

6.4 Faltung und Ableitung

Satz 6.9 *Sei $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$, und*

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g \quad \textit{für alle } \alpha \textit{ mit } |\alpha| \leq k.$$

Insbesondere folgt für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dass $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Wie oben folgt, dass $(f * g)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert. Sei $e_j \in \mathbb{R}^n$ ein Standardbasisvektor und $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \le 1$. Setze $K := \operatorname{supp} f + \overline{B(0,\, 1)}$. Diese Menge ist offenbar kompakt, und es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\big((f * g)(x + he_j) - (f * g)(x)\big) \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{h}\big(f(x + he_j - y) - f(x - y)\big) g(y)\, dy \\
&\qquad = \int_{x-K} \frac{1}{h}\big(f(x + he_j - y) - f(x - y)\big) g(y)\, dy,
\end{aligned}$$

wobei der Integrand für $h \to 0$ gegen $\partial_j f(x - y) g(y)$ konvergiert. Außerdem ist

$$\left|\frac{1}{h}\big(f(x + he_j - y)g(y) - f(x - y)\big)g(y)\right| \le \|\partial_j f\|_\infty |g(y)|.$$

Mit dem Satz von Lebesgue erhalten wir $\partial_j (f * g)(x) = ((\partial_j f) * g)(x)$. Der allgemeine Fall folgt nun leicht mit vollständiger Induktion. ■

Folgerung 6.10 *Für $1 \le p < \infty$ ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Nach Satz 5.19 gibt es ein $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$. Wir wählen eine Mollifier-Folge (ρ_k) und glätten g durch $g_k := g * \rho_k$. Wegen Satz 6.4 und 6.9 ist $g_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, und Satz 6.7 liefert $g_k \to g$ in L^p. Für hinreichend große k ist also $\|g_k - g\|_p < \varepsilon/2$. Dies ergibt

$$\|f - g_k\|_p \le \|f - g\|_p + \|g - g_k\|_p \le \varepsilon. \qquad ■$$

Folgerung 6.11 (Urysohn-Lemma, C^∞-Version) *Sei $\emptyset \ne \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann gibt es ein $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq \Omega$, $0 \le f \le 1$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in K$.*

Beweis. Sei (ρ_k) eine Mollifier-Folge. Wir wählen k und ε so, dass $0 < 1/k < \varepsilon < \varepsilon + 1/k < \operatorname{dist}(K,\, \Omega^c)$ und setzen

$$U_\varepsilon := \{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y,\, K) < \varepsilon\} \quad \text{und} \quad f := \rho_k * \chi_{U_\varepsilon}.$$

Dann ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{supp}(\rho_k * \chi_{U_\varepsilon}) \subseteq \overline{B(0,\, 1/k)} + \overline{U}_\varepsilon \subseteq \Omega$. Also ist $\operatorname{supp} f \subseteq \Omega$ kompakt. Weiter: für $x \in K$ ist

$$f(x) = \int_{|y| \le 1/k} \chi_{U_\varepsilon}(x - y) \rho_k(y)\, dy = \int_{|y| \le 1/k} \rho_k(y)\, dy = 1.$$

Ferner gilt $\|f\|_\infty \le \|\rho_k\|_1 \, \|\chi_{U_\varepsilon}\|_\infty = 1$. Da $f \ge 0$ gilt, folgt $0 \le f \le 1$. ■

6.5 Das Fourier-Integral: L^1-Theorie

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,\, \xi\rangle}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

die *Fouriertransformierte* von f. Hier ist $\langle x,\, \xi\rangle := \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$. Wir führen noch die Notation

$$\check{f}(\xi) := \hat{f}(-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x,\, \xi\rangle}\, dx$$

ein. Die Voraussetzung $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ garantiert, dass die obigen Integrale existieren.

Satz 6.12 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ ist stetig, und*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1.$$

Beweis. Aus den Definitionen folgt für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1,$$

d.h. es ist $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit der gewünschten Normabschätzung. Wie zeigen noch die Stetigkeit. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $(\xi_k) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\xi_k \to \xi$. Dann ist

$$|\hat{f}(\xi_k) - \hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left| e^{-i\langle x,\, \xi_k\rangle} - e^{-i\langle x,\, \xi\rangle} \right| dx \to 0$$

nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Also ist $\hat{f}$ stetig. ■

Wir nennen die Abbildung

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \hat{f}$$

die *Fouriertransformation*. Der folgende Satz fasst einige Eigenschaften von $\mathcal{F}$ zusammen.

Satz 6.13 *(a) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist linear.*
(b) Für $f,\, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x)\, dx.$$

(c) Für $f,\, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}$.
(d) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$ gilt $\widehat{(\tau_a f)}(\xi) = e^{i\langle a,\, \xi\rangle} \hat{f}(\xi)$.

Beweis. Aussage (a) folgt sofort aus der Linearität des Integrals.
(b) Mit Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\,\xi\rangle}\,dx\,g(\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{-i\langle x,\,\xi\rangle}\,d\xi\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx.\end{aligned}$$

(c) Für $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt wieder mit Fubini:

$$\begin{aligned}\widehat{(f*g)}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy\,e^{-i\langle x,\,\xi\rangle}\,dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-i\langle y,\,\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-i\langle x-y,\,\xi\rangle}\,dx\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-i\langle y,\,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)\,dy = (2\pi)^{n/2}\hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

(d) Schließlich ist

$$\begin{aligned}\widehat{(\tau_a f)}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x+a)e^{-i\langle x,\,\xi\rangle}\,dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y-a,\,\xi\rangle}\,dy = e^{i\langle a,\,\xi\rangle}\hat{f}(\xi). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Satz 6.14 (Riemann-Lebesgue) *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, d.h. es ist $\hat{f}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.*

Beweis. Aus Satz 6.13 (d) wissen wir, dass

$$\widehat{(\tau_a f)}(\xi) = e^{i\langle a,\,\xi\rangle}\hat{f}(\xi).$$

Für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei $a = a(\xi) := \frac{\pi\xi}{|\xi|^2}$. Dann ist

$$\widehat{(\tau_a f)}(\xi) = e^{i\langle a,\,\xi\rangle}\hat{f}(\xi) = -\hat{f}(\xi),$$

woraus $2\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi) - \widehat{(\tau_a f)}(\xi)$ und somit nach Satz 6.12

$$|2\hat{f}(\xi)| \le \|\hat{f} - \widehat{(\tau_a f)}\|_\infty \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|f - \tau_a f\|_1$$

folgt. Für $|\xi| \to \infty$ ist offenbar $a(\xi) \to 0$. Aus der Stetigkeit der Translation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ (Satz 6.1) ergibt sich daher, dass $|\hat{f}(\xi)| \to 0$ für $|\xi| \to \infty$. $\blacksquare$

Wir sehen also, dass die Fouriertransformierte einer L^1-Funktion gegen 0 konvergiert. Wenn man mehr „Glattheit“ von f fordert, kann man dieses Abklingverhalten auch quantitativ charakterisieren und Konvergenzgeschwindigkeiten ableiten. Das ist das Thema des nächsten Abschnitts.

6.6 Fouriertransformation und Ableitung

Satz 6.15 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für ein $1 \leq j \leq n$. Dann existiert die partielle Ableitung $\partial_j \hat{f}$, diese ist stetig und genügt*

$$\partial_j \hat{f} = (\widehat{-ix_j f}).$$

Beweis. Es ist

$$\partial_j \hat{f}(\xi) = \partial_j \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx.$$

Zur Ableitung dieses Parameterintegrals verwenden wir Satz 2.16. Dazu brauchen wir eine integrable Majorante für die partielle Ableitung des Integranden. Tatsächlich gilt

$$\left|\partial_{\xi_j}\big(f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\big)\right| = \left|f(x)(-ix_j)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right| = |x_j f(x)|,$$

und diese Funktion ist nach Voraussetzung integrierbar. Also gilt

$$\begin{aligned} \partial_j \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_{\xi_j} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} -ix_j f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx = (\widehat{-ix_j f})(\xi). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Satzes beweist man das folgende Korollar induktiv. Zur Erinnerung: für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und für $x \in \mathbb{C}^n$ ist

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Folgerung 6.16 *Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$. Dann gilt $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\partial^\alpha \hat{f} = \mathcal{F}\big((-ix)^\alpha f\big) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq k.$$

Um wie angekündigt aus der „Glattheit" von f eine „Abfallrate" für $\hat{f}$ zu folgern, benötigen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 6.17 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit kompaktem Träger. Falls $\partial_j f$ existiert und $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, so gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x)\, dx = 0.$$

Dieses Lemma kann man leicht mit Fubini und dem klassischen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zeigen, falls $\partial_j f$ eine stetige Funktion ist. Dieselbe Beweisidee funktioniert auch in der hier vorliegenden allgemeineren Situation. Die dafür benötigte Verallgemeinerung das Hauptsatzes werden wir nur formulieren; einen Beweis finden Sie in Kapitel 7, Abschnitt 4 des Buches von Elstrodt.

Wir beginnen mit einer Definition. Eine Funktion $F : [a,\, b] \to \mathbb{K}$ heißt *absolut stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\sum_{k=1}^{m} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und für alle $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_m < b_m \leq b$ mit $\sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) < \delta$. Offenbar ist jede auf $[a,\, b]$ absolut stetige Funktion auch stetig; die Umkehrung gilt nicht. Eine wichtige Eigenschaft absolut stetiger Funktionen ist, dass sie fast überall differenzierbar sind. Außerdem ist jede absolut stetige Funktion $F : [a,\, b] \to \mathbb{K}$ mit $F'(x) = 0$ fast überall eine konstante Funktion (wogegen es stetige Funktionen gibt, die fast überall differenzierbar sind und die Ableitung 0 haben, die jedoch nicht konstant sind!).

Satz 6.18 (Hauptsatz für das Lebesgue-Integral) (*a*) *Ist $f : [a,\, b] \to \mathbb{K}$ Lebesgue-integrierbar, so ist die Funktion*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt, \quad a \leq x \leq b,$$

absolut stetig, und es gilt $F' = f$ fast überall.
(*b*) *Ist $F : [a,\, b] \to \mathbb{K}$ absolut stetig, und setzt man $F'(x) = 0$ in allen Punkten x, in denen F nicht differenzierbar ist, so ist F' Lebesgue-integrierbar auf $[a,\, b]$, und es gilt*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\, dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Mit diesem Hilfsmittel kann Lemma 6.17 wie im Fall stetiger Ableitungen gezeigt werden.

Lemma 6.19 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ so, dass $\partial_j f$ existiert und $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt. Dann existieren Funktionen $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\partial_j f_k \to \partial_j f$ und $f_k \to f$ in L^1.*

Beweis. Der Beweis benutzt eine Abschneidetechnik. Sei $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $\rho(x) = 1$ auf $B(0,\, 1)$ und $\rho(x) = 0$ für $|x| > 2$. Ansonsten sei $0 \leq \rho \leq 1$. Wir setzen $\rho_k(x) := \rho(x/k)$. Dann gilt $\rho_k(x) = 1$ für $x \in B(0,\, k)$ und $\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir zeigen, dass $f_k := \rho_k f$ die gewünschten Eigenschaften hat. Zunächst ist

$$\|f - f_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\, k)} |f(x) - \rho_k(x) f(x)|\, dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\, k)} |f(x)|\, dx \to 0$$

für $k \to \infty$. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}
&\|\partial_j f - \partial_j f_k\|_1 \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_j f(x) - \partial_j(\rho_k(x) f(x))|\, dx \\
&\quad \le \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_j f(x) - \rho_k(x)\partial_j f(x)|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\partial_j \rho_k(x)|\, dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\,k)} |\partial_j f(x) - \rho_k(x)\partial_j f(x)|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\,k)} |f(x)\partial_j \rho_k(x)|\, dx \\
&\quad \le 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\,k)} |\partial_j f(x)|\, dx + \frac{1}{k} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\partial_j \rho(y)| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\,k)} |f(x)|\, dx \to 0
\end{aligned}$$

für $k \to \infty$. ■

Satz 6.20 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ so, dass $\partial_j f$ existiert und $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt. Dann ist*

$$\widehat{(\partial_j f)}(\xi) = i\xi_j\, \hat{f}(\xi).$$

Beweis. Sei zunächst f eine Funktion mit kompaktem Träger. Dann gilt wegen Lemma 6.17 und mit partieller Integration (vgl. Übung)

$$\begin{aligned}
\widehat{(\partial_j f)}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j f)(x) e^{-i\langle x,\,\xi\rangle}\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(i\xi_j) e^{-i\langle x,\,\xi\rangle}\, dx = i\xi_j \hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, d.h. die Behauptung gilt. Für allgemeines $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nutzen wir Lemma 6.19 und approximieren f durch Funktionen f_k mit kompaktem Träger so, dass $f_k \to f$ in L^1 und $\partial_j f_k \to \partial_j f$ in L^1. Nach Satz 6.12 gilt dann

$$\widehat{\partial_j f_k} \to \widehat{\partial_j f} \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{sowie} \quad i\xi_j \hat{f}_k(\xi) \to i\xi_j \hat{f}(\xi) \text{ für } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Da nach dem ersten Teil $\widehat{\partial_j f_k}(\xi) = i\xi_j \hat{f}_k(\xi)$ gilt, folgt die Behauptung auch im allgemeinen Fall. ■

Den folgenden Satz kann man nun wieder leicht mittels Induktion beweisen.

Folgerung 6.21 *Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le k$. Dann gilt*

$$\widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

Beispiel. Wir berechnen die Fouriertransformierten von Gauß-Funktionen. Sei $a > 0$ und $f(x) = e^{-a|x|^2}$. Dann gilt:

$$\hat{f}(\xi) = (2a)^{-n/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

Wir zeigen dies zunächst für $n = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}(\hat{f})'(\xi) &= \mathcal{F}\Big((-ix)e^{-a|x|^2}\Big)(\xi) \;=\; \mathcal{F}\Big(\frac{i}{2a}(e^{-a|x|^2})'\Big)(\xi)\\ &= \frac{i}{2a}(i\xi)\hat{f}(\xi) \;=\; -\frac{1}{2a}\xi\hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Mit der Produktregel rechnet man nun leicht nach, dass

$$\frac{d}{d\xi}\Big(e^{\frac{|\xi|^2}{4a}}\hat{f}(\xi)\Big) = 0 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n;$$

also ist $\xi \mapsto e^{|\xi|^2/4a}\hat{f}(\xi)$ konstant. Die Konstante ergibt sich aus

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|^2}\, dx = (2a)^{-1/2}.$$

Dies ist die Behauptung für $d = 1$. Der allgemeine Fall folgt mit Fubini:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax_j^2} e^{-ix_j\xi_j}\, dx_j = (2a)^{-n/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}. \qquad \blacksquare$$

6.7 Fourier-Inversion

Unser Ziel ist nun, zu gegebenem $\hat{f}$ die Funktion f zu bestimmen. Dazu erinnern wir an die Notation

$$\check{f}(\xi) := \hat{f}(-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x,\, \xi\rangle}\, dx$$

für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Satz 6.22 (Inversionsformel der Fouriertransformation) *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ derart, dass auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt. Dann ist $\check{\hat{f}} = \hat{\check{f}} = f$ fast überall.*

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$g_k(x) := (2\pi)^{-n/2}\, e^{\frac{-|x|^2}{4k^2}}.$$

Wie wir im Beispiel am Ende des vorigen Abschnitts (mit $a = \frac{1}{4k^2}$) gesehen haben, gilt dann

$$\check{g}_k(\xi) = \frac{(2k^2)^{n/2}}{(2\pi)^{n/2}}\, e^{-k^2|\xi|^2} = \frac{k^n}{\pi^{n/2}}\, e^{-k^2|\xi|^2} = k^n g(k\xi)$$

mit $g(\xi) := \pi^{-n/2} e^{-|\xi|^2}$. Dabei ist $\|g\|_1 = 1$ (vgl. Beispiel 1 in Abschnitt 4.4 und Fubini) sowie $g \geq 0$. Somit erfüllt die Folge $(\check{g}_k)$ die Voraussetzungen von Satz 6.7, ist also eine approximative Eins (siehe auch Anmerkung 2 nach Satz 6.7).

Damit konvergiert $\check{g}_k * f$ nach Satz 6.7 in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen f, ist also insbesondere eine Cauchyfolge in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Nach Theorem 5.7 gibt es dann eine Teilfolge $\check{g}_{k_m} * f$, die außerdem punktweise fast überall gegen f konvergiert. Damit gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{m\to\infty} (\check{g}_{k_m} * f)(x) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\check{g}_{k_m}(x-y)\,dy \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\tau_x \check{g}_{k_m})(-y)\,dy. \end{aligned}$$

Ähnlich zu Satz 6.13 (d) gilt für $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Formel (nachrechnen!)

$$(\tau_x \check{h}) = \mathcal{F}^{-1}\big(e^{i\langle \cdot,\, x\rangle} h\big).$$

Damit und schließlich mit Satz 6.13 (b) erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathcal{F}^{-1}\big(e^{i\langle \cdot,\, x\rangle} g_{k_m}\big)(-y)\,dy \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathcal{F}\big(e^{i\langle \cdot,\, x\rangle} g_{k_m}\big)(y)\,dy \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{i\langle y,\, x\rangle} g_{k_m}(y)\,dy. \end{aligned}$$

Da g_k punktweise gegen $(2\pi)^{-n/2}$ konvergiert, folgt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz (mit $\hat{f} \in L^1$ als integrierbarer Majorante)

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{i\langle y,\, x\rangle} \lim_{m\to\infty} g_{k_m}\,dy = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{i\langle y,\, x\rangle}\,dy = \check{\hat{f}}(x).$$

Analog folgt auch $f = \hat{\check{f}}$. ∎

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satz ist

Folgerung 6.23 (a) *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} = 0$. Dann ist $f = 0$ fast überall.*
(b) *Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} = \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $f = g$ fast überall.*

6.8 Der Schwartz-Raum

Die Resultate aus Abschnitt 6.6 motivieren die folgende Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *schnellfallend*, falls

$$p_k(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^k\,|f(x)| < \infty \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dies ist trivialerweise äquivalent zu

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha|\,|f(x)| < \infty \quad \text{für jedes } \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Aus der Definition folgt sofort, dass

$$|x|^k |f(x)| \to 0 \quad \text{für } |x| \to \infty$$

für jedes k und für jede schnellfallende Funktion f. Dies erklärt die Bezeichnung „schnellfallend".

Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt eine *Schwartz-Funktion*, falls alle ihre partiellen Ableitungen schnellfallend sind, d.h., für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha| \, |\partial^\beta f(x)| < \infty,$$

was äquivalent ist zu

$$p_{m,k}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \, |\beta| \le k} |x|^m \, |\partial^\beta f(x)| < \infty.$$

Die Menge aller Schwartz-Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Der folgende Satz fasst einige Eigenschaften von Schwartz-Funktionen zusammen.

Satz 6.24 *(a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Vektorraum, genauer ein Unterraum von $C_0(\mathbb{R}^n)$.*
(b) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist für $p \in [1, \infty]$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ enthalten und liegt für $p \in [1, \infty)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
(c) Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so liegt für jedes $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ auch die Funktion $\partial^\beta f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
(d) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ liegt die Funktion $x^\gamma f(x)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
(e) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist auch das punktweise Produkt fg eine Schwartz-Funktion. Insbesondere ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit punktweisem Produkt eine Algebra.
(f) Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so ist auch $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere ist

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F}(f) = \hat{f}$$

eine lineare Abbildung. Diese ist invertierbar, und

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F}^{-1}(f) = \check{f}.$$

(g) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist die Faltung $f * g$ wieder eine Schwartz-Funktion.

Beweis. Aussage (a) folgt sofort aus den Definitionen.
(b) Der Fall $p = \infty$ ist klar: Schwartz-Funktionen konvergieren im Unendlichen gegen 0 und sind stetig, sind also insbesondere beschränkt. Sei nun $p < \infty$. Wir bemerken zunächst, dass $(1 + |x|)^{-m}$ für geeignet großes $m \in \mathbb{N}$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt. Für solche m erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p (1 + |x|)^{pm} \cdot \frac{1}{(1 + |x|)^{pm}} \, dx \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|)^{pm}} \, dx < \infty, \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $|f(x)|^p(1+|x|)^{pm} \leq C$, denn f ist ja schnellfallend.

Da offensichtlich $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist (Folgerung 6.10), liegt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(c) Dies folgt wieder unmittelbar aus den Definitionen.

(d) Für den Beweis benötigen wir die folgende allgemeine Form der *Produktregel* für partielle Ableitungen: Sind g und f genügend glatt und ist $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, so gilt

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha-\beta} g$$

mit den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

(Für uns ist nur wichtig, dass es solche Konstanten gibt; ihre Werte sind für uns uninteressant.) Eine Anwendung dieser Formel auf das Produkt $x^\gamma f(x)$ zeigt, dass $\partial^\beta(x^\gamma f(x))$ eine Linearkombination von Schwartz-Funktionen ist. Die Behauptung folgt nun aus Teil (a) dieses Satzes.

(e) Dies folgt aus der allgemeinen Binomialformel im Beweis von (d).

(f) Die Linearität ist klar, sofern wir $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zeigen. Dies folgt aber aus den Resultaten im Abschnitt 6.6 und aus den obigen Aussagen (a) - (d). Die Invertierbarkeit folgt aus der Inversions-Formel, Satz 6.22.

(g) Dies folgt aus (e) und (f) sowie aus Satz 6.13 (c). ■

6.9 Das Fourier-Integral: L^2-Theorie

Vorbemerkung: Die Abbildung

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

ist ein Skalarprodukt auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ (die Existenz des Integrals folgt aus der Hölderschen Ungleichung). Da

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

und $L^2(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist, ist $L^2(\mathbb{R}^n)$ ein *Hilbertraum* (dies gilt nicht nur für den Lebesgueschen Maßraum; L^2 ist auch für allgemeine Maßräume ein Hilbertraum).

Satz 6.25 (Plancherel) *Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle \check{f}, \check{g} \rangle \quad \textit{und insbesondere} \quad \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|\check{f}\|_2.$$

Beweis. Seien $f,\, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\hat{f},\, \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und man überlegt sich leicht, dass $\widehat{\overline{g}} = \overline{\check{g}}$. Satz 6.13 (b) und Satz 6.22 liefern dann wegen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f,\, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g}\, d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\check{f}}\overline{g}\, d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}\widehat{\overline{g}}\, d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}\overline{\check{g}}\, d\lambda_d = \langle \check{f},\, \check{g}\rangle.$$

Hieraus folgen auch alle übrigen Behauptungen. ■

Lemma 6.26 *Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ existiert eine Folge (f_k) in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $f_k \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und auch $f_k \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. In Folgerung 6.10 haben wir die Dichtheit von $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ gezeigt. Die dort konstruierte Folge (f_k) hat die gewünschten Eigenschaften. ■

Satz 6.27 *Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $(f_k) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*
(a) Es gibt ein $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f}_k \to g$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
(b) Ist $(g_k) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine weitere Folge mit $g_k \to f$, so gilt auch $\hat{g}_k \to g$.
(c) Ist zusätzlich $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt $g = \hat{f}$ fast überall.

Beweis. (a) und (b) Seien $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $f_k,\, g_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ und $g_k \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Wir zeigen, dass $(\hat{f}_k)$ eine Cauchyfolge ist. Nach dem Satz von Plancherel 6.25 ist

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_m\|_2 = \|f_k - f_m\|_2 \leq \|f_k - f\|_2 + \|f - f_m\|_2 \to 0 \quad \text{für } k,\, m \to \infty.$$

Also ist $(\hat{f}_k)$ eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sei g ihr Grenzwert. Dann ist $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Aus

$$\|\hat{f}_k - \hat{g}_k\|_2 = \|f_k - g_k\|_2 \leq \|f_k - f\|_2 + \|f - g_k\|_2 \to 0 \quad \text{für } k \to \infty$$

folgt, dass auch $\hat{g}_k \to g$ gilt.
(c) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ bzgl. der L^1- und der L^2-Norm (siehe Lemma 6.26). Dann gibt es nach Teil (a) ein $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f}_k \to g$ bzgl. der L^2-Norm. Mit Satz 5.7 gibt es eine Teilfolge $(k_m) \subseteq \mathbb{N}$ mit $\hat{f}_{k_m}(x) \to g(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da aber

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2}\, \|f_k - f\|_1 \to 0$$

wegen Satz 6.12, folgt $g(x) = \hat{f}(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Wegen Aussage (b) ist der Grenzwert in (a) von der Wahl der Folge $(f_k) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *unabhängig*. Dies erlaubt die folgende Definition der *Fouriertransformation in L^2*.

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen eine Folge $(f_k) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Die nach Satz 6.27 existierende und eindeutig bestimmte Funktion $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$

heißt die *Fouriertransformierte* der L^2-Funktion f. Wir behalten dafür die Notation $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ bei (was wegen Aussage (c) im genannten Satz mit unserer L^1-Notation konsistent ist) und setzen auch wieder

$$\check{f}(\xi) := \hat{f}(-\xi) \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 6.28 *Die Abbildung*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \mathcal{F}(f)$$

ist eine lineare und surjektive Isometrie. Insbesondere ist $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$, *und* $\mathcal{F}$ *ist injektiv. Weiterhin ist* $\mathcal{F}^{-1}(f) = \check{f}$ *und*

$$\langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle = \langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}(f), \mathcal{F}^{-1}(g) \rangle.$$

Beweis. Aus der Definition ist klar, dass $\mathcal{F}$ den Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ in sich abbildet. Auch die Linearität folgt sofort, da $\mathcal{F}$ auf dem Schwartz-Raum linear ist. Sei nun $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $(f_k) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Folge mit $f_k \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\|f\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|\hat{f}_k\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

Wir zeigen nun die Surjektivität von $\mathcal{F}$. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, und sei (f_k) eine Folge in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in L^2. Wie in Satz 6.27 (a) sieht man, dass die $\check{f}_k$ gegen ein $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ konvergieren. Wegen Satz 6.22 gilt $\hat{\check{f}}_k = f_k$. Da $\check{f}_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, gilt nach Definition von $\hat{g}$ auch

$$f_k = \hat{\check{f}}_k \to \hat{g},$$

d.h. es ist $\mathcal{F}(g) = f$. Schließlich folgt aus $\check{f}_k(\xi) = \hat{f}_k(-\xi)$, dass $g = \check{f}$, also $\mathcal{F}^{-1}(f) = \check{f}$. Die letzte Aussage folgt aus der Definition und der Stetigkeit des L^2-Skalarproduktes. ∎

Anmerkung. Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so ist $f\chi_{\mathrm{B}(0,R)} \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ für jedes $R > 0$. Satz 6.27 (c) liefert dann

$$\mathcal{F}(f\chi_{\mathrm{B}(0,R)})(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathrm{B}(0,R)} f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx.$$

Da $f\chi_{\mathrm{B}(0,R)} \to f$ in L^2 für $R \to \infty$, erhält man mit Satz 6.27

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathrm{B}(0,R)} f(x)\, e^{-i\langle x,\cdot\rangle}\, dx,$$

wobei die Konvergenz in der L^2-Norm zu verstehen ist. Es ist ein tiefliegendes Resultat, dass hier für $d = 1$ Konvergenz *punktweise fast überall* vorliegt. Ob dies auch für $d > 1$ gilt, ist eine offene Frage der Fourier-Analysis. ∎

6.10 Anwendungen

Die Poisson-Gleichung. Der *Laplace-Operator* Δ ist für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\Delta f := \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \cdots + \partial_n^2 f.$$

Wir suchen die Lösung der *Poisson-Gleichung* $f - \Delta f = g$, wobei g geeignet gegeben ist, z.B. $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Betrachten wir die Fouriertransformierte dieser Gleichung $\hat{f} - \widehat{\Delta f} = \hat{g}$ und schreiben deren linke Seite mit Hilfe von Abschnitt 6.6 als

$$\hat{f}(\xi) - \big((i\xi_1)^2 + (i\xi_2)^2 + \cdots + (i\xi_n)^2\big)\hat{f}(\xi) = (1 + |\xi|^2)\hat{f}(\xi),$$

so haben wir die Differentialgleichung $f - \Delta f = g$ auf die algebraische Gleichung

$$(1 + |\xi|^2)\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$$

zurückgeführt. Diese können wir leicht lösen: wir dividieren einfach durch $1 + |\xi|^2$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{1 + |\xi|^2},$$

und erhalten hieraus f mit der inversen Fouriertransformation:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{g}(\xi)}{1 + |\xi|^2}\right).$$

Aus dem Produkt wird dabei eine Faltung (Satz 6.13 (c)), und wir bekommen

$$f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} g * \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1 + |\xi|^2}\right).$$

Mit einer etwas trickreichen Rechnerei erhalten wir schließlich die explizite Form

$$f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} g * B_n$$

der Lösung der Poisson-Gleichung, wobei

$$B_n(x) := \frac{1}{2^{n/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-t - \frac{|x|^2}{4t}}}{t^{n/2}}\, dt \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

eine sogenannte *Bessel-Funktion* ist.

Die Wärmeleitungsgleichung. Mit ähnlichen Methoden kann man auch die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t u(t,\,x) = \Delta u(t,\,x) \quad \text{für } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$$

mit der *Anfangsbedingung* $u(0,\,x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ lösen. Die Funktion f ist gegeben und heißt *Anfangswert*. Wir wollen z.B. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ annehmen und suchen eine Funktion

$$u : [0,\,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},$$

welche diese Differentialgleichung löst und der Anfangsbedingung genügt. Dazu betrachten wir die Fouriertransformierte der Gleichung bzgl. der Raumvariable $x \in \mathbb{R}^n$ und erhalten die folgende äquivalente Form:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u}(t,\,\xi) &= -|\xi|^2 \hat{u}(t,\,\xi) && \text{für } t \geq 0,\, \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \hat{u}(0,\,\xi) &= \hat{f}(\xi) && \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

(Hier muss man sich noch überlegen, dass man ∂_t und $\mathcal{F}$ vertauschen kann.) Was wir erhalten haben ist eine *gewöhnliche Differentialgleichung* für $\hat{u}$. Diese können wir für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ explizit lösen:

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(\xi).$$

Jetzt müssen wir zurücktransformieren, und beachten, dass eine Gaußfunktion auftaucht. Da bei der inversen Fouriertransformation Produkte in Faltungen übergehen (Satz 6.13 (c)), erhalten wir mit dem Beispiel aus Abschnitt 6.6

$$u(t,\,x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(t,\,\xi)) = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}) = (f * g_t)(x),$$

wobei

$$g_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

der sogenannte *Gauß*- oder *Wärmeleitungskern* ist.

6.11 L^p-Theorie$^\diamond$

Wir haben oben gesehen, dass die Fouriertransformation $L^1(\mathbb{R}^n)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ abbildet, wobei

$$\|\mathcal{F} f\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1, \tag{6.2}$$

und dass sie auch $L^2(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ abbildet, wobei

$$\|\mathcal{F} f\|_2 = \|f\|_2. \tag{6.3}$$

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gelten beide Abschätzungen, und die Interpolationsungleichung (Satz 5.14 mit $\theta = 2/q$) liefert für $q \in [2,\,\infty]$

$$\|\mathcal{F}(f)\|_q \leq \|\mathcal{F}(f)\|_2^{2/q} \, \|\mathcal{F}(f)\|_\infty^{1-2/q} \leq (2\pi)^{n(1/2-1/q)} \, \|f\|_2^{2/q} \, \|f\|_1^{1-2/q}.$$

Wir möchten auf der rechten Seite an Stelle des Produktes $\|f\|_1 \|f\|_2$ *nur eine* Norm haben, also zeigen, dass für geeignetes p (für das mit $1/p + 1/q = 1$)

$$\|\hat{f}\|_q \leq (2\pi)^{n(1/2-1/q)} \|f\|_p$$

gilt. Wenn die „umgekehrte Interpolationsgleichung“ $\|f\|_2^{2/q} \|f\|_1^{1-2/q} \leq \|f\|_p$ korrekt wäre, wären wir damit fertig. **Diese Ungleichung stimmt aber leider nicht!**

Durch geeignetes „Mischen“ beider Abschätzungen (6.2) und (6.3) können wir auch auf der rechten Seite zwischen $p = 1$ und $p = 2$ interpolieren und so das folgende Resultat erzielen.

Satz 6.29 *Für $1 \leq p \leq 2$ und $q \in [2, \infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$ gibt es eine Konstante C_p so dass*

$$\|\hat{f}\|_q \leq C_p \|f\|_p \quad \textit{für alle } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Der folgende Beweis folgt Ideen von Marcinkiewicz und dient auch als Grundlage des Beweises des Interpolationssatzes von Marcinkiewicz.

Beweis. Die Fälle $p = 2$ und $p = 1$ haben wir bereits diskutiert. Sei also $p \in (1, 2)$, und sei q der zu p konjugierte Exponent. Weiter können wir $\|f\|_p = 1$ annehmen, denn für $\|f\|_p = 0$ ist die Ungleichung mit beliebiger Konstante C_p wahr. Aus Satz 5.17 wissen wir, dass

$$\|\hat{f}\|_q^q = q \int_0^\infty s^{q-1} \lambda_n(A(s))\, ds,$$

wobei $A(s) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\hat{f}(\xi)| > s\}$. Mit der Substitution $s = 2t$ wird hieraus

$$\|\hat{f}\|_q = q 2^q \int_0^\infty t^{q-1} \lambda_n(A(2t))\, ds.$$

Um die L^q-Norm von $\hat{f}$ möglichst scharf abschätzen zu können, benötigen wir gute Abschätzungen für das Lebesgue-Maß von $A(2t)$. Die Idee ist, die Funktion f (und damit auch $\hat{f}$) so in $f = f_1 + f_2$ zu zerlegen, dass wir auf f_1 die L^1-L^∞ Abschätzung (6.2) anwenden können. Dies liefert eine Abschätzung *nach oben* für $|\hat{f}_1(\xi)|$ und somit für $\xi \in A(2t)$ eine Abschätzung *nach unten* für $|\hat{f}_2(\xi)|$. So erhalten wir eine geeignete Abschätzung für $\lambda_n(A(2t))$ durch die L^2-Norm von $\hat{f}_2$. Mit der L^2-L^2 Abschätzung (6.3) können wir dann $\lambda_n(A(2t))$ durch die Norm von f_2 kontrollieren. Hier sind die Details:

Sei $M > 0$ eine Konstante, die wir später genau wählen. Wir setzen

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > M\}, \quad f_1 := f\chi_B, \quad f_2 := f\chi_{B^c}.$$

Dann ist offenbar $f = f_1 + f_2$ und, da $\mathcal{F}$ linear ist, $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$. Da $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, können wir für jedes M abschätzen

$$\begin{aligned}
|\hat{f}_1(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_B |f_1(x)|^p |f_1(x)|^{1-p}\,dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{M^{p-1}} \int_B |f_1(x)|^p\,dx \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{M^{p-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{M^{p-1}}.
\end{aligned}$$

Für $t > 0$ wählen wir nun M so, dass $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{M^{p-1}} = t$, d.h.

$$M = ((2\pi)^{n/2} t)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Für $t > 0$ möchten wir $\lambda_n(A(2t))$ abschätzen. Um deutlich zu machen, dass unsere Zerlegung und insbesondere die Menge B von M und damit von t abhängen, schreiben wir B_t an Stelle von B. Wir wir oben gesehen haben, ist $|\hat{f}_1(\xi)| \leq t$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Für $\xi \in A(2t)$ muss daher $|\hat{f}_2(\xi)| > t$ gelten. Unter Beachtung von $\|f_2\|_2 = \|\hat{f}_2\|_2$ nach (6.3) erlaubt dies die Abschätzung

$$\begin{aligned}
t^2 \lambda_n(A(2t)) &\leq \int_{A(2t)} |\hat{f}_2(\xi)|^2\,d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}_2(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^2\,dx \\
&= \int_{B_t^c} |f(x)|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Nach diesen Überlegungen können wir $\|\hat{f}\|_q$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}\|_q^q &= q2^q \int_0^\infty t^{q-1} \lambda_n(A(2t))\,dt \leq q2^q \int_0^\infty t^{q-3} \int_{B_t^c} |f(x)|^2\,dx\,dt \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} q2^q \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \int_0^{|f(x)|^{1-p}(2\pi)^{-n/2}} t^{q-3}\,dt\,dx \\
&= \frac{q2^q}{q-2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 t^{q-2}\Big|_{t=0}^{t=|f(x)|^{1-p}(2\pi)^{-n/2}}\,dx \\
&= \frac{q2^q}{q-2} \frac{1}{(2\pi)^{(q-2)n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 |f(x)|^{(1-p)(q-2)}\,dx.
\end{aligned}$$

Wegen $2 + (1-p)(q-2) = q - pq - 2 - 2p = p$ ist dies gleich

$$\frac{q2^q}{q-2} \frac{1}{(2\pi)^{(q-2)n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx = \frac{q2^q}{q-2} \frac{1}{(2\pi)^{(q-2)n/2}}.$$

Wir haben somit gezeigt, dass

$$\|\hat{f}\|_q \leq 2 \left(\frac{q}{q-2}\right)^{1/q} (2\pi)^{n(1/q-1/2)} \|f\|_p. \qquad \blacksquare$$

Anmerkungen. Mit etwas mehr Mühe und anderen Techniken lässt sich die Abschätzung

$$\|\hat{f}\|_q \leq (2\pi)^{n(1/q-1/2)} \|f\|_p$$

zeigen. Diese ist die bekannte *Hausdorff-Young-Ungleichung*. Die präzise Konstante C_p hat Beckner ausgerechnet:

$$\|\hat{f}\|_q \leq A_p(2\pi)^{n(1/q-1/2)}\|f\|_p$$

mit $A_p = \sqrt{p^{1/p}q^{-1/q}}$. Wir sehen, dass für $p = 1$ und $p = 2$ die optimalen Konstanten $(2\pi)^{n/2}$ bzw. 1 genau diejenigen sind, die wir aus (6.2) und (6.3) kennen.

Für $p > 2$ gibt es keine Konstante C_p mit der Eigenschaft, dass $\|\hat{f}\|_q \leq C_p\|f\|_p$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ebenso gibt es für $p, q \in [1, \infty]$ mit $1/p + 1/q \neq 1$ keine Konstante C_p derart, dass $\|\hat{f}\|_q \leq C_p\|f\|_p$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

6.12 Komplexe Theorie$^\diamond$

Wir haben oben gesehen, dass „Abklingen" von f „Glattheit" von $\hat{f}$ impliziert. Im Extremfall, wenn f einen kompakten Träger hat (also „sehr schnell" gegen 0 konvergiert), ist seine Fouriertransformierte sogar holomorph (unendlich oft $\mathbb{C}$-differenzierbar). Dies und eine Umkehrung möchten wir jetzt zeigen. Dazu benötigen wir einige Vorbemerkungen.

Für $\xi, x \in \mathbb{C}^n$ sei

$$\langle \xi, x\rangle := \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j.$$

Man beachte, dass dies NICHT das komplexe Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ ist, denn hier steht keine Konjugation der Komponenten x_j.

Eine Funktion $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ nennen wir *holomorph*, falls alle komplexen partiellen Ableitungen $\partial_{z_i} f$ mit $i = 1, \ldots, n$ existieren, d.h. falls f bezüglich jeder Variablen holomorph ist. Man kann zeigen, dass in diesem Fall die (totale) komplexe Ableitung von f existiert und dass f unendlich oft komplex differenzierbar ist. Dies ist wieder ein enormer Unterschied zum Reellen.

Satz 6.30 (Paley-Wiener) *(a) Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq \overline{\mathrm{B}(0, a)}$ für ein $a \geq 0$. Dann hat $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Fortsetzung g auf $\mathbb{C}^n$, und für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $c_m \geq 0$, so dass*

$$|g(z)| \leq c_m(1 + |z|)^{-m} e^{a|\operatorname{Im} z|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n. \tag{6.4}$$

(b) Sei $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion derart, dass ein $a \geq 0$ existiert, so dass es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $c_m \geq 0$ gibt mit (6.4). Dann gibt es ein $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq \overline{\mathrm{B}(0, a)}$ so, dass $\hat{f}(\xi) = g(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. (a) Hat $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ einen kompakten Träger innerhalb $\overline{\mathrm{B}(0,\, a)}$, so existiert das Fourier-Integral nicht nur für reelles $\xi \in \mathbb{R}^n$, sondern auch für $\xi \in \mathbb{C}^n$. Wir können daher setzen

$$g(z) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathrm{B}(0,\, a)} f(x) e^{-i\langle x,\, z\rangle}\, dx = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x,\, z\rangle}\, dx.$$

Offenbar ist $g(\xi) = \hat{f}(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$. Die Holomorphie von g folgt leicht durch Nachrechnen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen bezüglich jeder komplexen Variablen. Weiter: für $z \in \mathbb{C}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
|z_j^k g(z)| \quad &= \quad (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathrm{B}(0,\, a)} f(x) i^k \partial_j^k e^{-i\langle x,\, z\rangle}\, dx \right| \\
&\overset{\text{Part.Int.}}{=} \quad (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathrm{B}(0,\, a)} \partial_j^k f(x) i^k e^{-i\langle x,\, z\rangle}\, dx \right| \\
&\leq \quad (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathrm{B}(0,\, a)} |\partial_j f(x)| e^{-\mathrm{Im}\,\langle x,\, z\rangle}\, dx \\
&\leq \quad (2\pi)^{-n/2} e^{a|\mathrm{Im}\, z|} \int_{\mathrm{B}(0,\, a)} |\partial_j^k f(x)|\, dx =: C(k) e^{a|\mathrm{Im}\, z|}.
\end{aligned}$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$(1 + |z|)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} |z|^k,$$

und mit

$$c_m := \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} C(k)$$

folgt sofort

$$(1 + |z|)^m |g(z)| \leq c_m e^{a|\mathrm{Im}\, z|}.$$

Das ist aber die Behauptung.

(b) Wir beweisen die Aussage nur für $n = 1$. Für den Beweis des allgemeinen Falles kann man dies koordinatenweise verwenden.

Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften. Ihre Einschränkung $g|_{\mathbb{R}}$ bezeichnen wir ebenfalls mit g. Zunächst bemerken wir, dass $x^\alpha g(x) \in L^1(\mathbb{R})$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Für $\xi \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt nämlich nach Voraussetzung

$$|\xi^\alpha g(\xi)| \leq \frac{c_m |\xi|^k}{(1 + |\xi|)^m}$$

mit geeigneten Konstanten c_m. Die Funktion auf der rechten Seite liegt in L^1, falls m geeignet groß ist. Insbesondere können wir also $f := \check{g}$ definieren. Wegen Satz 6.16 gilt dann $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, und wir müssen nur noch $\operatorname{supp} f \subseteq \overline{\mathrm{B}(0,\, a)}$ zeigen.

Wir nutzen die komplexe Veränderliche aus, indem wir über geeignete Wege in der komplexen Ebene integrieren. Sei γ_1 die Kurve $(-\infty, \infty)$ und γ_2 die Kurve $(-\infty + i\delta, \infty + i\delta)$ mit einem Parameter $\delta \in \mathbb{R}$. Offenbar ist

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = (2\pi)^{-1/2} \int_{\gamma_1} g(z) e^{ixz}\, dz,$$

und wir werden gleich zeigen, dass

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{\gamma_1} g(z) e^{ixz}\, dz = (2\pi)^{-1/2} \int_{\gamma_2} g(z) e^{ixz}\, dz. \tag{6.5}$$

Nachdem dies gezeigt ist, können wir wie folgt argumentieren: Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} |f(x)| &= (2\pi)^{-1/2} \left| \int_{\mathbb{R}} g(\xi + i\delta) e^{ix(\xi + i\delta)}\, d\xi \right| \le \frac{e^{-x\delta}}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} |g(\xi + i\delta)|\, d\xi \\ &\le \frac{c_2 e^{-x\delta}}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^{-2} e^{a|\delta|}\, d\xi = C e^{-x\delta + a|\delta|}, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die exponentielle Abschätzung ausgenutzt haben. Wählen wir speziell $\delta := t \operatorname{sgn}(x)$ mit $t > 0$, so erhalten wir

$$|f(x)| \le C e^{t(a - |x|)}.$$

Lassen wir nun t gegen ∞ streben, bekommen wir $|f(x)| = 0$ für $|x| > a$, d.h. es ist $\operatorname{supp} f \subseteq \overline{\mathrm{B}(0, a)}$.

Wir haben noch (6.5) zu zeigen. Seien γ_1^R und γ_2^R die Kurven $[-R, R]$ und $[-R + i\delta, R + i\delta]$. Für $R \to \infty$ gilt offensichtlich

$$\int_{\gamma_1^R} g(z) e^{ixz}\, dz \to \int_{\gamma_1} g(z) e^{ixz}\, dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_2^R} g(z) e^{ixz}\, dz \to \int_{\gamma_2} g(z) e^{ixz}\, dz.$$

Weiter bezeichnen wir mit γ_3^R und γ_4^R die Kurven, welche zwischen R und $R + i\delta$ bzw. zwischen $-R + i\delta$ und $-R$ vertikal verlaufen. Dann ist $\Gamma := \gamma_1^R + \gamma_3^R - \gamma_2^R + \gamma_4^R$ ein geschlossener (und stückweise stetig differenzierbarer) Weg, und der Cauchysche Integralsatz liefert

$$\int_{\Gamma} g(z) e^{ixz}\, dz = 0.$$

Die Integrale entlang γ_3^R und γ_4^R lassen sich leicht abschätzen: für $k = 3, 4$ gilt wegen (6.4) mit $m = 1$

$$\left| \int_{\gamma_k^R} g(z) e^{ixz}\, dz \right| \le C|\delta|(1 + R)^{-1} \to 0 \quad \text{für } R \to \infty,$$

wobei δ die Länge des Integrationsweges ist. Somit gilt (6.5), und der Beweis ist beendet. ∎

7 Integration über Untermannigfaltigkeiten

Im vorigen Kapitel haben wir uns mit der Berechnung von Integralen über meßbaren Mengen im $\mathbb{R}^n$ befasst, wobei das zugrundeliegende Maß stets das n-dimensionale Lebensgue-Maß war. Betrachtet man nun Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$ oder Kurven in der Ebene, so verschwinden die Integrale über solchen Mengen, da die Integrationsbereiche Nullmengen sind. Andererseits ist es für viele Zwecke erforderlich, Integralen über niedriger-dimensionalen Gebilden einen Sinn zu geben. Beispielsweise haben wir bereits einer Kurve im $\mathbb{R}^n$ eine Länge zugeordnet (also ein "eindimensionales" Volumen), und wir haben Funktionen über Kurven integriert. Im gleichen Sinn würden wir gern die Größe von Oberflächen von Körpern im $\mathbb{R}^3$ (wie der Oberfläche der Einheitskugel) berechnen oder Integrale über Funktionen auf solchen Flächen betrachten.

7.1 Untermannigfaltigkeiten

Wir haben Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ bereits in der Analysis II kennengelernt, wobei der Schwerpunkt auf der Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten als Nullstellenmengen von Funktionen lag. In diesem Abschnitt wird der Schwerpunkt auf der Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten liegen. Beide Sichtweisen sind uns aus der linearen Algebra vertraut, wo man Untervektorräume zum einen als Lösungsmengen linearer homogener Gleichungssysteme und zum anderen durch eine Parameterdarstellung mittels einer Basis beschreibt.

Rufen wir uns zunächst in Erinnerung, was wir aus der Analysis II wissen. Wir betrachten einen stückweise differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Ist γ in t differenzierbar (was in allen bis auf endlich vielen Punkten der Fall ist), so deuten wir die Ableitung $\dot\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ von γ in t als den Geschwindigkeitsvektor und seine Länge

$$\|\dot\gamma(t)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(t)|^2\right)^{1/2}$$

als die Geschwindigkeit, mit der ein Punkt den Weg γ zum Zeitpunkt t durchläuft. Für die Länge des Weges γ haben wir die Beziehung

$$s(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_2 \, dt \tag{7.1}$$

gefunden. (Wir hatten die Länge für beliebige rektifizierbare Wege erklärt und (7.1) als Spezialfall erhalten. Man kann aber (7.1) auch als Definition der Länge eines stückweise stetig differenzierbaren Wegs γ benutzen.) Schließlich haben wir für stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Kurvenintegral (1. Art) über γ definiert durch

$$\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\dot\gamma(t)\|_2 \, dt. \tag{7.2}$$

Wir haben uns auch überlegt (Analysis II, Satz 11.6), dass das Integral in (7.1) nur von der durch γ definierten Kurve $\Gamma = \gamma([a,\, b])$ abhängt, dass es sich also nicht ändert, wenn man die Kurve Γ umparametrisiert, indem man γ durch $\gamma\circ\varphi$ ersetzt, wobei $\varphi : [\alpha,\, \beta] \to [a,\, b]$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in (\alpha,\, \beta)$ ist. Gleiches gilt für das Integral (7.2).

Wir wollen diese Konzepte verallgemeinern auf höherdimensionale Flächenstücke. Diese denken wir uns als gegeben durch differenzierbare Abbildungen $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen ist. Für $k = 1$ erhalten wir gerade Kurven.

Definition 7.1 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ heißt eine* Immersion*, wenn die lineare Abbildung $\varphi'(x) \in L(\mathbb{R}^k,\, \mathbb{R}^n)$ für jedes $x \in U$ injektiv ist, d.h. wenn* $\operatorname{rang} \varphi'(x) = k$ *für alle $x \in U$ ist.*

Ist $\varphi : \mathbb{R}^k \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, muss insbesondere $k \le n$ sein.

Wir betrachten wieder φ als eine Parametrisierung der Menge $\varphi(U)$. Mit solchen Parametrisierungen werden wir später Integrale über $\varphi(U)$ definieren, indem wir sie auf "gewöhnliche" Lebesgue-Integrale über $U \subseteq \mathbb{R}^k$ zurückführen. Im Fall $k = 1$ ist $\varphi(U)$ eine Kurve, und φ ist genau dann eine Immersion, wenn $\varphi'(x)$ für kein x die Nullabbildung ist.

Beispiel 1. Die Neilsche Parabel $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x^2,\, x^3)$ ist wegen $\varphi'(0) = (0,\, 0)$ *keine* Immersion. Die Singularität im Nullpunkt verhindert die Injektivität.

Beispiel 2. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^{k+1}, \quad x \mapsto (x,\, f(x))$$

eine Immersion. Tatsächlich erhalten wir für die Jacobimatrix $J_x(\varphi)$ der Ableitung $\varphi'(x) \in L(\mathbb{R}^k,\, \mathbb{R}^{k+1})$

$$J_x(\varphi) = \begin{pmatrix} I_{k\times k} \\ J_x(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix},$$

und diese Matrix hat offenbar für jedes $x \in U$ den Rang k. ■

Beispiel 3. Für die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r^2 \cos\varphi \\ r^2 \sin\varphi \\ r^3 \end{pmatrix}$$

ist die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $\varphi'(r,\, \varphi)$ gleich

$$J_{(r,\,\varphi)}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi & -r^2\sin\varphi \\ 2r\sin\varphi & r^2\cos\varphi \\ 3r^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man macht sich leicht klar, dass der Rang dieser Matrix genau dann gleich 2 ist, wenn $r \neq 0$. Die Einschränkung von Φ auf $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ ist also eine Immersion. (Die Abbildung Φ selbst ist aber offenbar nicht injektiv.) Die Menge $\Phi(\mathbb{R}^2)$ entsteht durch Rotation der Kurve $\{(r^2, 0, r^3) : r \in \mathbb{R}\}$ (die man sich als Neilsche Parabel in der xz-Ebene vorstellen kann) um die z-Achse (vgl. auch das folgende Beispiel). Die "obere Schale" dieser Fläche berührt die untere (ihr Spiegelbild an der xy-Ebene) im Nullpunkt. Derartige Singularitäten werden durch die Forderung der Injektivität von $\varphi'(x)$ in jedem Punkt vermieden. ■

Beispiel 4. Wir sehen uns nun allgemeine Rotationsflächen an. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$$

eine stetig differenzierbare Funktion (deren Bild in der xz-Ebene liegt). Wir nehmen weiter an, dass $r(t) > 0$ für alle $t \in I$ ist (so dass das Bild von γ in der rechten Halbebene der xz-Ebene liegt). Nun betrachten wir die stetig differenzierbare Abbildung

$$\Phi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (t, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix}$$

mit dem Bild

$$\Phi(I \times \mathbb{R}) = \{(x, y, z(t)) : x^2 + y^2 = r(t)^2, \, t \in I\}.$$

Das Bild von Φ entsteht also durch Rotation des Bildes von γ um die z-Achse. Die Jacobi-Matrix von Φ in (t, φ) ist

$$J_{(t,\varphi)}(\Phi) = \begin{pmatrix} r'(t)\cos\varphi & -r(t)\sin\varphi \\ r'(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi \\ z'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir $r(t) > 0$ für alle $t \in I$ angenommen haben, hat diese Matrix genau dann den Rang 2, wenn $r'(t) \neq 0$ oder $z'(t) \neq 0$, d.h. wenn $\gamma'(t) \neq 0$. Ist also γ eine Immersion, so ist auch Φ eine Immersion. ■

Beispiel 5. Schließlich sehen wir uns noch eine Parametrisierung der zweidimensionalen Sphäre an. Wir betrachten die Abbildung

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

mit der Jacobimatrix

$$J_{(\varphi,\theta)}(P) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat genau dann den Rang 2, wenn $\cos\theta \neq 0$. Die Einschränkung von P auf die offene Menge $\mathbb{R} \times (-\pi/2,\, \pi/2)$ ist also eine Immersion, und ihr Bild

$$P(\mathbb{R} \times (-\pi/2,\, \pi/2)) = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ |z| \neq 1\}$$

ist die Einheitsphäre ohne Nord- und Südpol. ■

Wir diskutieren nun, wie der Begriff der Immersion zum Begriff der k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ steht. Hier ist noch einmal die Definition.

Definition 7.2 *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, *wenn für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von p, eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\Phi : V \to W$ so existieren, dass*

$$\Phi(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

(wobei wir $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ schreiben).

Die Menge M sieht also lokal aus wie $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^n$. Weiter benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition 7.3 *Seien X, Y metrische Räume. Eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt* Einbettung, *wenn sie injektiv ist und wenn die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \varphi(X) \to X$ (bzgl. der von Y auf $\varphi(X)$ induzierten Metrik) ebenfalls stetig ist.*

Beispiel 6. Die Abbildung $\gamma : [0,\, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t,\, \sin t)$ ist stetig und injektiv, und ihr Bild ist die Einheitskreislinie $\mathbb{S}^1$. Die Umkehrabbildung $\eta : \mathbb{S}^1 \to [0,\, 2\pi)$, $\gamma(t) \mapsto t$ ist jedoch nicht stetig, denn es ist zwar $\gamma(2\pi - \frac{1}{n}) \to \gamma(0)$, aber $2\pi - \frac{1}{n} = \eta(\gamma(2\pi - \frac{1}{n}))$ konvergiert nicht gegen $0 = \eta(\gamma(0))$. Die Abbildung γ ist also keine Einbettung. ■

Satz 7.4 (Parametrisierungssatz) *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U) = V \cap M$ gibt, die eine Einbettung ist.*

Beweis. Sei zunächst M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es offene Mengen V, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $p \in V$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : V \to W$ so, dass

$$\Phi(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^k : (x, 0) \in W\}$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \Phi^{-1}(\eta(x))$, wobei $\eta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung $x \mapsto (x, 0)$ ist. Dann ist U offen, $\varphi(U) = V \cap M$, und

$$\varphi'(x) = (\Phi^{-1})'(\eta(x)) \circ \eta.$$

Als Produkt injektiver Abbildungen ist $\varphi'(x)$ für jedes $x \in U$ injektiv, d.h. φ ist eine Immersion. Schließlich ist die inverse Abbildung zu $\varphi : U \to \varphi(U)$ durch $\varphi^{-1} = \pi \circ \Phi|_{\varphi(U)}$ gegeben, wobei $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Projektion $(x, y) \mapsto x$ ist. Aus der Stetigkeit von Φ und π folgt, dass φ eine Einbettung ist.

Wir zeigen die umgekehrte Richtung. Sei $p \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von p, eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U) = V \cap M$, die eine Einbettung ist. Sei $w := \varphi^{-1}(p)$. Wir schreiben $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Wegen $\operatorname{rang} \varphi'(w) = k$ können wir nach Umnummerierung der Koordinaten annehmen, dass die Matrix

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(w)\right)_{i,j=1}^{k}$$

invertierbar ist (das ist gerade der obere $k \times k$-Block der Jacobimatrix von φ in w). Sei $\tilde{\varphi} := (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) : U \to \mathbb{R}^k$. Dann ist also $\tilde{\varphi}'(w)$ invertierbar, und mit dem Satz über die Umkehrfunktion finden wir eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von w so, dass $\tilde{\varphi}|_W$ ein Diffeomorphismus ist. Wir definieren

$$\begin{aligned} \Phi : W \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n, \quad & (u, x) = (u_1, \ldots, u_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \\ & \mapsto \varphi(u) + (0, x) = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_k(u), \varphi_{k+1}(u) + x_{k+1}, \ldots, \varphi_n(u) + x_n). \end{aligned}$$

Dann ist Φ ein Diffeomorphismus von $W \times \mathbb{R}^{n-k}$ auf $\tilde{\varphi}(W) \times \mathbb{R}^{n-k}$, denn Φ und

$$\Phi^{-1}(v, y) = \big(\tilde{\varphi}^{-1}(v), y_{k+1} - \varphi_{k+1}(\tilde{\varphi}^{-1}(v)), \ldots, y_n - \varphi_n(\tilde{\varphi}^{-1}(v))\big)$$

sind stetig differenzierbar. Weiter ist $\Phi^{-1}(\varphi(u)) = (u, 0)$ für $u \in W$ und somit

$$\Phi^{-1}(\varphi(W)) = W \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n.$$

Da φ eine Einbettung ist, ist $\varphi(W)$ offen in $M \cap V$. Es gibt also eine offene Teilmenge $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass $\varphi(W) = M \cap V_p$, und wegen $\varphi(W) \subseteq \tilde{\varphi}(W) \times \mathbb{R}^{n-k}$ kann V_p in $\tilde{\varphi}(W) \times \mathbb{R}^{n-k}$ gefunden werden (gegebenenfalls ersetzen wir V_p durch $V_p \cap (\tilde{\varphi}(W) \times \mathbb{R}^{n-k})$). Wir haben somit für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus Φ^{-1} von V_p in $\mathbb{R}^n$ gefunden, so dass

$$\Phi^{-1}(M \cap V_p) = \Phi^{-1}(\varphi(W)) = W \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Also ist M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit. ■

Die Immersionen $\varphi : U \to M$, deren Existenz wir soeben gezeigt haben, nennen wir *Parametrisierungen* oder *Karten* der Menge $\varphi(U) \subseteq M$. Oft schreibt man auch (φ, U) für eine Karte $\varphi : U \to M$. Die Funktionen $(\varphi^{-1})_j : \varphi(U) \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$, stellt man sich als *Koordinaten* eines Punktes $p \in \varphi(U)$ vor. Für $p = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ sind also $x_1, \ldots, x_k$ die Koordinaten bezüglich der Karte (φ, U). Offenbar kann ein Punkt für verschiedene Karten verschiedene Koordinaten besitzen. Man hat sich daher zu überlegen, was beim Wechsel von Koordinatensystemen passiert.

Satz 7.5 (Parameter-Transformation) *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und*

$$\varphi_j : U_j \to V_j = \varphi_j(U_j) \subseteq M, \quad j = 1, 2,$$

seien Karten mit $V_1 \cap V_2 =: V \neq \emptyset$. Dann sind $W_j := \varphi_j^{-1}(V)$ offene Teilmengen von U_j, und

$$\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{W_1} : W_1 \to W_2$$

ist ein Diffeomorphismus.

Beweis. Da V eine offene Teilmenge von V_j und φ_j stetig ist, ist W_j als Urbild einer offenen Teilmenge von V_j offen. Aus den Definitionen ist auch klar, dass ψ bijektiv und stetig ist und eine stetige Umkehrfunktion besitzt. Wir zeigen, dass ψ stetig differenzierbar ist.

Sei $x_0 \in W_1$. Nach Definition einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\varphi_1(x_0)$ mit $M \cap U \subseteq V$ (das dürfen wir zusätzlich annehmen) und einen Diffeomorphismus $\Phi : U \to \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\Phi(M \cap U) = \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Dann ist

$$\Phi \circ \varphi_1 = (g_1, \ldots, g_k, 0, \ldots, 0) \quad \text{und} \quad \Phi \circ \varphi_2 = (h_1, \ldots, h_k, 0, \ldots, 0)$$

mit gewissen stetig differenzierbaren Funktionen $g_i : \varphi_1^{-1}(M \cap U) \to \mathbb{R}$ und $h_j : \varphi_2^{-1}(M \cap U) \to \mathbb{R}$. Folglich sind auch die Funktionen

$$G := (g_1, \ldots, g_k) : \varphi_1^{-1}(M \cap U) \to \mathbb{R}^k, \quad H := (h_1, \ldots, h_k) : \varphi_2^{-1}(M \cap U) \to \mathbb{R}^k$$

stetig differenzierbar. Bezeichnet π wieder die im Beweis von Satz 7.4 eingeführte Projektion, so erhalten wir mit der Kettenregel für alle $x \in \varphi_1^{-1}(M \cap U)$

$$\begin{aligned} G'(x) &= (\pi \circ \Phi \circ \varphi_1)'(x) = \pi'(\Phi(\varphi_1(x))) \circ \Phi'(\varphi_1(x)) \circ \varphi_1'(x) \\ &= \pi \circ \Phi'(\varphi_1(x)) \circ \varphi_1'(x). \end{aligned}$$

Als Produkt injektiver Abbildungen ist $G'(x)$ injektiv (beachte: φ_1' ist injektiv, da φ_1 eine Immersion ist, $\Phi'(\varphi_1(x))$ ist sogar invertierbar, und die Projektion π wirkt hier nur auf Vektoren der Gestalt $(y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ und ist auf dieser Menge injektiv) und folglich invertierbar (da $G'(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$).

Nach Folgerung 12.6 aus Analysis II ist $G : \varphi_1^{-1}(M \cap U) \to \pi(\Phi(M \cap U))$ ein Diffeomorphismus. Ebenso ist $H : \varphi_2^{-1}(M \cap U) \to \pi(\Phi(M \cap U))$ ein Diffeomorphismus. Auf der Umgebung $\varphi_1^{-1}(M \cap U)$ von x_0 haben wir nun

$$\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ \eta \circ \pi \circ \Phi \circ \varphi_1 = (\pi \circ \Phi \circ \varphi_2)^{-1} \circ (\pi \circ \Phi \circ \varphi_1) = H^{-1} \circ G,$$

d.h. ψ ist auf dieser Umgebung stetig differenzierbar. Da $x_0 \in W_1$ beliebig war, ist ψ auf W_1 stetig differenzierbar. Entsprechend erhält man die stetige Differenzierbarkeit von $\psi^{-1} : W_2 \to W_1$. ■

7.2 Integration über Untermannigfaltigkeiten, Teil 1

Wir wollen nun das Integral von Funktionen über k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten M von $\mathbb{R}^n$ definieren und beginnen mit dem einfachsten Fall, wenn M durch eine einzige injektive Immersion beschrieben werden kann. Zur Motivation betrachten wir zunächst wieder eine lineare Version.

Sei $k < n$, $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ linear und $W := [0, 1]^k$ der k-dimensionale Einheitswürfel. Dann ist das n-dimensionale Volumen von AW gleich Null nach Folgerung 4.12 (und wenig interessant). Wir wollen ein "k-dimensionales Volumen" von AW definieren. Dieses soll sich nicht ändern, wenn eine orthogonale Abbildung (= Drehung) B auf AW angewendet wird. Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, kann B so gewählt werden, dass $\operatorname{Im} BA \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist $P : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $(x, y) \mapsto x$, so ist es weiter vernünftig anzunehmen, dass BAW und $PBAW$ gleiche k-dimensionale Volumina besitzen. Nun ist aber PBA eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^k$ und daher

$$\lambda_k(PBAW) = |\det(PBA)|$$

(vgl. Abschnitt 4.2). Diese Formel ist noch nicht sehr hilfreich, da sie die Matrix B enthält (die wir irgendwie wählen mussten). Nun ist aber

$$\begin{aligned} |\det(PBA)|^2 &= \det(A^T B^T P^T) \det(PBA) = \det(A^T B^T P^T PBA) \\ &= \det(A^T B^T BA) = \det(A^T A) \end{aligned}$$

(beachte: $P^T P$ ist der Orthoprojektor von $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ auf $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, und wegen $\operatorname{Im} BA \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\}$ ist $P^T PBA = BA$). Damit haben wir eine brauchbare Formel für das k-dimensionale Volumen von AW gefunden:

$$\operatorname{vol}_k(AW) = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

(Die Matrix $A^T A$ ist positiv semidefinit und hat daher eine nichtnegative Determinante.) Damit ist der Weg zur Definition des k-dimensionalen Volumens von parametrisierten Untermannigfaltigkeiten vorgezeichnet.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $J_x(\varphi)$ ihre Jacobimatrix im Punkt $x \in U$. Die $k \times k$-Matrix

$$G(x) := J_x(\varphi)^T J_x(\varphi)$$

heißt der *Maßtensor von* φ, und die durch $g(x) := \det G(x)$ definierte Funktion heißt die *Gramsche Determinante* von φ. Diese Bezeichnung rührt daher, dass

$$G(x) = (g_{ij}(x))_{i,j=1}^k \quad \text{mit} \quad g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle$$

ist, wobei $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i})$. Es ist $G(x)$ also die *Gramsche Matrix* der Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)$, d.h. der Spalten von $J_x(\varphi)$. Wegen $\operatorname{rang} J_x(\varphi) = k$ sind diese Spalten linear unabhängig, d.h. $G(x)$ ist positiv definit. Insbesondere ist $g(x) > 0$ für alle $x \in U$.

Definition 7.6 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und (φ, U) eine Karte von M mit $\varphi(U) = M$. Eine Teilmenge $E \subseteq M$ heißt* messbar *(bzgl. φ), wenn ihr Urbild $\varphi^{-1}(E)$ messbar ist. Ist $E \subseteq M$ messbar, so heißt*

$$S_M(E) := \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{g(x)}\, d\lambda_k(x) \tag{7.3}$$

das k-dimensionale Volumen von E *(bzgl. φ). Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt* integrierbar *(bzgl. φ), wenn die Funktion*

$$U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(\varphi(x))\sqrt{g(x)}$$

Lebesgue-integrierbar auf U ist. In diesem Fall heißt

$$\int_M f\, dS_M := \int_U f(\varphi(x))\sqrt{g(x)}\, d\lambda_k(x) \tag{7.4}$$

das Integral von f über M.

Wir erklären also das Integral $\int_M f\, dS_M$ einfach durch (7.4). Man kann auch auf anderem Weg zu diesem Integral gelangen. Nach Satz 2.6 ist nämlich

$$\mu : A \mapsto \int_A \sqrt{g(x)}\, d\lambda_k(x)$$

ein Maß auf der σ-Algebra $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^k)$ der erweiterten Borelmengen. Hiermit kann man zeigen, dass die Menge der messbaren Teilmengen von M ebenfalls eine σ-Algebra bildet und dass S_M ein vollständiges Maß auf dieser σ-Algebra ist, das sogenannte *Oberflächenmaß von M*. Das bezüglich dieses Maßes erklärte Integral stimmt mit (7.4) überein (was wir uns vielleicht in der Übung ansehen werden).

Man beachte, dass aus Folgerung 1.16 und der Stetigkeit von φ folgt, dass jede Borelmenge des metrischen Raumes M messbar ist. Weiter nennen wir eine messbare Menge $E \subseteq M$ eine *Nullmenge*, wenn $S_M(E) = 0$ ist. Wie in Abschnitt 2.2 zeigt man: wird eine integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf einer Nullmenge abgeändert, so bleibt sie integrierbar mit dem gleichen Integral.

Wir zeigen nun, dass die in Definition 7.6 erklärten Volumina bzw. Integrale nicht von der Parametrisierung φ abhängen. Bemerkungen wie "*bzgl.* φ" in Definition 7.6 dürfen also weggelassen werden.

Lemma 7.7 *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\tau : V \to U$ ein Diffeomorphismus, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion und $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$. Weiter seien*

$$g_\varphi(x) := \det(J_x(\varphi)^T J_x(\varphi)) \quad \textit{bzw.} \quad g_{\varphi\circ\tau}(x) := \det(J_x(\varphi\circ\tau)^T J_x(\varphi\circ\tau))$$

die Gramschen Determinanten von φ bzw. $\varphi\circ\tau$. Ist eine der Funktionen

$$x \mapsto f(\varphi(x))\sqrt{g_\varphi(x)} \quad \textit{bzw.} \quad y \mapsto f\left((\varphi\circ\tau)(y)\right)\sqrt{g_{\varphi\circ\tau}(y)}$$

auf U bzw. V Lebesgue-integrierbar, so ist es auch die andere, und es gilt

$$\int_U f(\varphi(x))\sqrt{g_\varphi(x)}\,d\lambda_k(x) = \int_V f\left((\varphi\circ\tau)(y)\right)\sqrt{g_{\varphi\circ\tau}(y)}\,d\lambda_k(y).$$

Beweis. Mit der Kettenregel $(\varphi\circ\tau)'(y) = \varphi'(\tau(y))\circ\tau'(y)$ folgt

$$J_y(\varphi\circ\tau)^T J_y(\varphi\circ\tau) = J_y(\tau)^T J_{\tau(y)}(\varphi)^T J_{\tau(y)}(\varphi) J_y(\tau)$$

und damit $g_{\varphi\circ\tau}(y) = (\det\tau'(y))^2 g_\varphi(\tau(y))$. Mit der Transformationsformel erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
&\int_V f\left((\varphi\circ\tau)(y)\right)\sqrt{g_{\varphi\circ\tau}(y)}\,d\lambda_k(y)\\
&\quad= \int_V f\left(\varphi(\tau(y))\right)\sqrt{g_\varphi(\tau(y))}|\det\tau'(y)|\,d\lambda_k(y)\\
&\quad= \int_U f(\varphi(x))\sqrt{g_\varphi(x)}\,d\lambda_k(x).
\end{aligned}$$

Der Transformationssatz liefert auch die Aussage über die Integrierbarkeit. ∎

Beispiel. Wir betrachten den Fall $k = 1$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^1$ ein offenes Intervall und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive Immersion. Dann ist $M := \varphi(U)$ eine Kurve in $\mathbb{R}^n$. Aus

$$G(x) = J_x(\varphi)^T J_x(\varphi) = \langle\varphi'(x),\, \varphi'(x)\rangle = \|\varphi'(x)\|_2^2$$

erhalten wir $g(x) = \|\varphi'(x)\|_2^2$ und damit

$$S_M(M) = \int_U \|\varphi'(t)\|_2\,d\lambda_1(t).$$

Das ist exakt die Formel, die wir in Satz 11.5 (Ana II) für die Länge der Kurve M gefunden haben. Das Integral von $f : M \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\int_M f\, dS_M = \int_U f(\varphi(t))\|\varphi'(t)\|_2\, d\lambda_1(t),$$

und das ist genau die Definition des Kurvenintegrals (1. Art) aus Abschnitt 11.2 (Ana II). ∎

7.3 Integration über Untermannigfaltigkeiten, Teil 2

Wir schauen uns nun Untermannigfaltigkeiten an, die nicht mehr durch eine einzige Karte beschrieben werden können. Zuerst überlegen wir uns, dass man für jede Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Familie $(\varphi_j, U_j)_{j\geq 1}$ von Karten so findet, dass

$$M = \bigcup_{j\geq 1} \varphi_j(U_j). \tag{7.5}$$

Nach dem Parametrisierungssatz gibt es nämlich zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass $V_p \cap M = \varphi_p(U_p)$ für eine Karte (φ_p, U_p) von M. Durch Verkleinern von V_p kann man erreichen, dass

$$V_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - q\|_2 < r_q\}$$

mit $q \in \mathbb{Q}^n$ und $r_q \in \mathbb{Q}$. Da es nur abzählbar viele solcher Mengen gibt und da jeder Punkt $p \in M$ in einer solchen Menge liegt, erhalten wir (7.5). In praktischen Anwendungen genügen oft bereits endlich viele Karten, um M zu überdecken.

Lemma 7.8 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, und seien $(\varphi_j, U_j)_{j\geq 1}$ und $(\tilde{\varphi}_i, \tilde{U}_i)_{i\geq 1}$ abzählbare Familien von Karten von M mit*

$$M = \bigcup_{j\geq 1} \varphi_j(U_j) = \bigcup_{i\geq 1} \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i).$$

Wir setzen $M_j := \varphi_j(U_j)$, $\tilde{M}_i := \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i)$ sowie $N_1 := M_1$, $\tilde{N}_1 := \tilde{M}_1$ und

$$N_j := M_j \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_{j-1}), \quad \tilde{N}_i := \tilde{M}_i \setminus (\tilde{M}_1 \cup \ldots \cup \tilde{M}_{i-1})$$

für $i, j > 1$ und erhalten so zwei jeweils paarweise disjunkte und abzählbare Familien $(N_j)_{j\geq 1}$, $(\tilde{N}_i)_{i\geq 1}$ von Borelmengen, die M überdecken. Ist $E \subseteq M$ eine Menge, für die jeder Durchschnitt $E \cap N_j$ (bzgl. φ_j) messbar ist, so ist auch jeder Durchschnitt $E \cap \tilde{N}_i$ (bzgl. $\tilde{\varphi}_i$) messbar, und es gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j) = \sum_{i=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap \tilde{N}_i).$$

Beweis. Wir schreiben

$$E \cap N_j = \bigcup_{i \geq 1} (E \cap N_j \cap \tilde{N}_i).$$

Die Menge $E \cap N_j$ ist bzgl. S_{M_j} messbar, und da $\tilde{N}_i$ Borelmenge ist, ist auch $E \cap N_j \cap \tilde{N}_i$ bzgl. S_{M_j} messbar. Nach Satz 7.5 (Parameter-Transformation), den wir auf die offene Menge $M_j \cap \tilde{M}_i$ anwenden, erhalten wir mit Lemma 7.7

$$S_{M_j}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) = S_{\tilde{M}_i}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i).$$

Schließlich folgt mit dem Doppelreihensatz (Satz 9.19, Ana II), den wir hier nur in einer einfachen Version benötigen, da alle Summanden nichtnegativ sind,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap \tilde{N}_i). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Definition 7.9 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $(\varphi_j, U_j)_{j \geq 1}$ eine Familie von Karten von M mit $M = \bigcup_{j \geq 1} \varphi_j(U_j)$. Weiter seien M_j und N_j wie in Lemma 7.8 erklärt. Eine Teilmenge E von M heißt messbar, wenn jeder Durchschnitt $E \cap N_j$ (bzgl. φ_j) messbar ist. Für jede messbare Menge $E \subseteq M$ definieren wir*

$$S_M(E) := \sum_{j=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j). \tag{7.6}$$

Lemma 7.8 garantiert, dass diese Definitionen nicht von den gewählten Karten abhängen. Man kann zeigen, dass durch (7.6) ein Maß S_M auf der σ-Algebra der messbaren Teilmengen von M definiert wird und dass das zugehörige Integral einer integrierbaren Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$\int_M f \, dS_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\varphi_j^{-1}(N_j)} f(\varphi_j(x)) \sqrt{g_{\varphi_j}(x)} \, d\lambda_k(x). \tag{7.7}$$

Das Maß S_M heißt das Oberflächenmaß *auf M.*

Einige der in dieser Definition formulierten Aussagen werden Sie sich in der Übung ansehen.

Mit der Definition des Oberflächenmaßes haben wir Integralen über Untermannigfaltigkeiten einen präzisen Sinn gegeben. Wir betrachten einige Beispiele.

Beispiel 1. Hier betrachten wir die Rotationsflächen aus Beispiel 4 in Abschnitt

7.1. Die Parametrisierung $\Phi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (mit einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$) und ihre Jacobimatrix in $(t,\, \varphi)$ sind also gegeben durch

$$\Phi(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_{(t,\,\varphi)}(\Phi) = \begin{pmatrix} r'(t)\cos\varphi & -r(t)\sin\varphi \\ r'(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi \\ z'(t) & 0 \end{pmatrix},$$

und für den Maßtensor und die Gramsche Determinante findet man

$$G(t,\, \varphi) = \begin{pmatrix} r'(t)^2 + z'(t)^2 & 0 \\ 0 & r^2(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(t,\, \varphi) = r(t)^2\, \|\gamma'(t)\|_2^2$$

mit $\gamma(t) = (r(t),\, 0,\, z(t))$ (wir hatten $r(t) > 0$ in Beispiel 4 vorausgesetzt). Für $M := \Phi(I \times (0,\, 2\pi))$ erhält daher das Oberflächenintegral die Form

$$\int_M f\, dS_M = \int_I \int_0^{2\pi} f(\Phi(t,\, \varphi)) r(t) \|\gamma'(t)\|_2\, d\varphi dt.$$

Für $f \equiv 1$ ergibt sich insbesondere für das 2-dimensionale Volumen von M

$$S_M(M) = \int_I \int_0^{2\pi} r(t)\|\gamma'(t)\|_2\, d\varphi dt = 2\pi \int_I r(t)\|\gamma'(t)\|_2\, dt.$$

Für die zweidimensionale Sphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ist $I = (-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2})$, $r(t) = \cos t$, $z(t) = \sin t$ und damit $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$ sowie

$$S_{\mathbb{S}^2}(\mathbb{S}^2) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, dt = 4\pi. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 2. Hier sehen wir uns Funktionsgraphen an (vgl. Beispiel 2 aus Abschnitt 7.1). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist $\varphi : U \to \mathbb{R}^{k+1}$, $x \mapsto (x,\, f(x))$ eine injektive Immersion, und die Umkehrfunktion $\varphi(U) \to U$, $(x,\, f(x)) \mapsto x$ ist offenbar stetig (Projektion auf die erste Komponente). Also ist $M := \varphi(U)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{k+1}$. Weiter haben wir

$$J_x(\varphi) = \begin{pmatrix} I \\ J_x(f) \end{pmatrix}$$

und

$$G(x) = \begin{pmatrix} I\, J_x(f)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J_x(f) \end{pmatrix} = I + J_x(f)^T J_x(f),$$

wobei I die $k \times k$-Einheitsmatrix ist. Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $G(x)$. Ist $v \in \ker f'(x)$, so ist $J_x(f)v = 0$ und somit $G(x)v = v$. Alle Vektoren $\neq 0$ aus dem (mindestens $k-1$-dimensionalen) Kern von $f'(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ sind also Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Außerdem ist für den Vektor $(\operatorname{grad} f)(x) \in \mathbb{R}^k$, den wir uns als Zeilenvektor denken,

$$\begin{aligned} G(x)(\operatorname{grad} f)(x)^T &= (\operatorname{grad} f)(x)^T + (\operatorname{grad} f)(x)^T (\operatorname{grad} f)(x) (\operatorname{grad} f)(x)^T \\ &= (1 + \|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2^2)\, (\operatorname{grad} f)^T(x), \end{aligned}$$

sodass (für $f'(x) \neq 0$) $(\operatorname{grad} f)^T(x)$ Eigenvektor zum Eigenwert $1+\|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2^2$ ist. Da $(\operatorname{grad} f)^T(x)$ senkrecht auf $\ker(f'(x))$ steht, haben wir (egal, ob $f'(x) \neq 0$ oder nicht) damit k paarweise orthogonale Eigenvektoren gefunden. Da die Determinante von $G(x)$ das Produkt der Eigenwerte dieser Matrix ist, folgt:

$$g(x) = 1 + \|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2^2. \tag{7.8}$$

Für $M = \varphi(U)$ ist also das k-dimensionale Volumen gleich

$$S_M(M) = \int_U \sqrt{1 + \|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2^2}\, d\lambda_k(x).$$

Insbesondere ist für $n > 1$ die obere Halbsphäre vom Radius $r > 0$, d.h.

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = r,\, x_n > 0\},$$

der Graph der Funktion $F : \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\|_2 < r\} \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$x \mapsto \sqrt{r^2 - \|x\|_2^2} = \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2}.$$

Aus $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = -\frac{x_j}{F(x)}$ folgt mit (7.8)

$$g(x) = 1 + \|(\operatorname{grad} F)(x)\|_2^2 = 1 + \frac{\|x\|_2^2}{F(x)^2} = \frac{F(x)^2 + \|x\|_2^2}{F(x)^2} = \frac{r^2}{r^2 - \|x\|_2^2}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_M f\, dS_M &= \int_{\|x\|_2 < r} f\left(x,\, \sqrt{r^2 - \|x\|_2^2}\right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|x\|_2^2}}\, d\lambda_{n-1}(x) \\ &= \int_{\|y\|_2 < 1} f\left(ry,\, r\sqrt{1 - \|y\|_2^2}\right) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - \|y\|_2^2}}\, d\lambda_{n-1}(y), \end{aligned} \tag{7.9}$$

wobei wir $x = ry$ substituiert haben. ∎

Beispiel 3. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $r > 0$. Ist $\varphi : U \to M$ eine Karte von M, so ist $r\varphi : U \to rM$ eine Karte von rM. Hieraus folgt, dass rM ebenfalls eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Weiter folgt aus $(r\varphi)'(x) = r\varphi'(x)$ für die Gramschen Determinanten von φ bzw. $r\varphi$, dass $g_{r\varphi}(x) = r^{2k} g_\varphi(x)$, d.h. $\sqrt{g_{r\varphi}(x)} = r^k \sqrt{g_\varphi(x)}$. Folglich gilt

$$S_{rM}(rE) = r^k S_M(E)$$

für jede messbare Teilmenge $E \subseteq M$ und

$$\int_{rM} f(x) dS_{rM}(x) = r^k \int_M f(rx)\, dS_M(x) \tag{7.10}$$

für jede integrierbare Funktion $f : rM \to \mathbb{R}$ ∎

Satz 7.10 *Sei $n > 1$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Dann ist für fast jedes $r > 0$ die Funktion f über der Sphäre $S_r := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = r\}$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda_n = \int_0^\infty \int_{S_r} f(x)\,dS_{S_r}(x)\,dr = \int_0^\infty \int_{S_1} f(ry)\,dS_{S_1}(y) r^{n-1} dr. \tag{7.11}$$

Beweis. Sei $H_\pm := \{x \in \mathbb{R}^n : \pm x_n > 0\}$. Dann ist $f = f\chi_{H_+} + f\chi_{H_-}$ fast überall, denn $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ ist eine Nullmenge. Da $S_r \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Nullmenge ist, genügt es, die Behauptung für jede der Funktionen $f\chi_\pm$ zu zeigen. Wir tun dies für $f\chi_+$ und nehmen gleich an, dass f außerhalb von H_+ verschwindet.

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\| < 1\}$. Die Abbildung

$$\Phi : U \times (0, \infty) \to H_+ \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, \quad (x, r) \mapsto \left(rx,\, r\sqrt{1 - \|x\|_2^2}\right)$$

ist bijektiv und hat die stetige Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{\|y\|_2}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{\|y\|_2}, \|y\|_2\right)$$

(Nachrechnen!). Also ist Φ ein Diffeomorphismus.

Sei $F(x) := \sqrt{1 - \|x\|_2^2}$. Dann ist $(\operatorname{grad} F)(x) = -\frac{x}{F(x)}$ (als Zeilenvektor) sowie $\Phi(x, r) = (rx, rF(x)) = r(x, F(x))$. Folglich ist

$$J_{(x,r)}(\Phi) = \begin{pmatrix} r & 0 & \ldots & 0 & x_1 \\ 0 & r & \ldots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & r & x_{n-1} \\ \multicolumn{4}{c}{r(\operatorname{grad} F)(x)} & F(x) \end{pmatrix}.$$

Ausklammern von r und Subtraktion des x_j-fachen der j-ten Spalte von der letzten Spalte liefern

$$\det J_{(x,r)}(\Phi) = r^{n-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & x_{n-1} \\ \multicolumn{4}{c}{(\operatorname{grad} F)(x)} & F(x) \end{pmatrix}$$

$$= r^{n-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{(\operatorname{grad} F)(x)} & F(x) - \langle (\operatorname{grad} F)(x), x \rangle \end{pmatrix}$$

$$= r^{n-1}\left(F(x) - \langle(\operatorname{grad} F)(x),\, x\rangle\right) \;=\; r^{n-1}\Big(F(x) + \frac{\|x\|_2^2}{F(x)}\Big)$$
$$= \frac{r^{n-1}}{F(x)}\left(F(x)^2 + \|x\|_2^2\right) \;=\; \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|x\|_2^2}}.$$

Mit dem Transformationssatz und dem Satz von Fubini ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\int_{H_+} f\, d\lambda_n &= \int_{U\times(0,\infty)} f\left(rx,\, r\sqrt{1-\|x\|_2^2}\right) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|x\|_2^2}}\, d\lambda_{n-1}(x)\, dr \\ &= \int_0^\infty \int_U \frac{f(rx,\, r\sqrt{1-\|x\|_2^2})}{\sqrt{1-\|x\|_2^2}}\, r^{n-1} d\lambda_{n-1}(x)\, dr.\end{aligned}$$

Nach (7.9) ist das innere Integral gleich $\int_{S_r} f\, dS_{S_r}$. Hieraus folgt die erste Gleichheit in (7.11), und die zweite bekommt man mit (7.10). ■

Beispiel 4. Sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ und $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_n$. Wir wollen das $(n-1)$-dimensionale Volumen $w_n := \mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ der $(n-1)$-dimensionalen Einheitsphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ berechnen. Es sei daran erinnert, dass das ("gewöhnliche") n-dimensionale Volumen von B_n durch $c_n = \mathrm{vol}_n(B_n) = \pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ gegeben ist. Wir wenden nun Satz 7.10 auf die charakteristische Funktion von B_n an und finden

$$c_n = \int_{\|x\|_2\leq 1} d\lambda_n(x) = \int_0^1 \int_{\|x\|=1} dS_{\mathbb{S}^{n-1}}(y) r^{n-1} dr = w_n \int_0^1 r^{n-1}\, dr = \frac{w_n}{n}.$$

Somit ist

$$w_n = nc_n = n\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = 2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Insbesondere erhalten wir

- $w_2 = 2\pi$ (Länge des Einheitskreisbogens),
- $w_3 = 4\pi$ (Oberfläche der zweidimensionalen Einheitssphäre),
- $w_4 = 2\pi^2$ (dreidimensionales Volumen von $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$).

8 Integralsätze

Das zentrale Resultat der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Variablen ist der Hauptsatz, wonach

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt$$

für jede stetig differenzierbare Funktion $F : [a,\, b] \to \mathbb{R}$. Wir können diesen Satz betrachten als eine Beziehung zwischen den Werten von F auf dem Rand $\partial[a,\, b] = \{a,\, b\}$ von $[a,\, b]$ und den Werten von F' im Inneren von $[a,\, b]$. Thema dieses Kapitels sind Verallgemeinerungen dieser Beziehung. Die allgemeine Stokessche Formel

$$\int_{\partial M} w = \int_M dw$$

(die wir hier nicht behandeln) liefert eine weitreichende und elegante Verallgemeinerung des Hauptsatzes. Wir betrachten lediglich Spezialfälle dieser Formel: den Gaußschen Integralsatz, den Stokesschen Integralsatz im Raum und die Greensche Formel in der Ebene.

8.1 Kompakta mit glattem Rand

Der Gaußsche Integralsatz ist wohl das wichtigste Resultat der Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$. Er beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über einen Bereich im $\mathbb{R}^n$ und einem Oberflächenintegral über dem Rand des Bereiches. Wir beweisen ihn nur für spezielle Bereiche: *Kompakta mit glattem Rand.*

Definition 8.1 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge (ein* Kompaktum*). Das Kompaktum A hat einen* glatten Rand*, wenn es zu jedem Randpunkt $p \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ so gibt, dass*

(a) $A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$,

(b) $\psi'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in U$.

Lemma 8.2 *Im Kontext von Definition* 8.1 *gilt*

$$\partial A \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

Beweis. Sei zunächst $x \in \partial A \cap U$. Da A kompakt ist, ist A abgeschlossen. Damit ist $x \in A$ und $\psi(x) \leq 0$. Wäre $\psi(x) < 0$, so wäre $\{y \in U : \psi(y) < 0\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die in A liegt und x enthält. Das steht im Widerspruch zu $x \in \partial A$. Also ist $\psi(x) = 0$.

Sei nun $x \in U$ und $\psi(x) = 0$. Dann ist $x \in A$, und wir zeigen, dass x ein Randpunkt von A ist. Wegen $\psi'(x) \neq 0$ ist die lineare Abbildung $\psi'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ surjektiv. Es gibt also ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$ und $\psi'(x)v > 0$. Nun ist

$$0 < \psi'(x)v = \lim_{t \to 0} \frac{\psi(x + tv) - \psi(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\psi(x + tv)}{t}.$$

Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\psi(x + tv) > 0$ für alle $t \in (0, \varepsilon)$. Folglich liegen für hinreichend große n die Punkte $x + \frac{1}{n}v$ nicht in A. Es gilt aber $x + \frac{1}{n}v \to x$ und daher $x \in \partial A$. ■

Folgerung 8.3 *Der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Nach Lemma 8.2 ist ∂A lokal die Nullstellenmenge der Funktion ψ, und 0 ist ein regulärer Wert von ψ. Die Behauptung folgt also aus dem Rangsatz (Satz 12.10 in Ana II). ■

Für den Gaußschen Integralsatz benötigen wir das *Normalenfeld* von ∂A. Dazu definieren wir zunächst allgemein Tangential- und Normalvektoren.

Definition 8.4 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$.*

(a) *Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt* Tangentialvektor an M in p, *wenn ein $\varepsilon > 0$ und ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$ existieren. Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p bezeichnen wir mit $T_p(M)$.*

(b) *Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt* Normalenvektor an M in p, *wenn er auf $T_p(M)$ senkrecht steht (d.h. wenn $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in T_p(M)$). Die Menge aller Normalenvektoren an M in p bezeichnen wir mit $N_p(M)$.*

Für den Tangentialraum hat man die folgende Beschreibung.

Lemma 8.5 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : U \to M$ eine Karte von M. Dann ist*

$$T_{\varphi(x)}(M) = \operatorname{Im} \varphi'(x) \quad \textit{für alle } x \in U.$$

Beweis. Sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^k$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $x + tv \in U$ für alle t aus $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Wir betrachten den Weg

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \quad t \mapsto \varphi(x + tv).$$

Für diesen ist $\gamma(0) = \varphi(x)$ und $\gamma'(0) = \varphi'(x)v$. Also ist $\operatorname{Im} \varphi'(x) \subseteq T_{\varphi(x)}(M)$. Für die umgekehrte Inklusion wählen wir wie im Beweis von Satz 7.4 eine offene

Umgebung $W \subseteq U$ von x und einen Diffeomorphismus Φ auf $W \times \mathbb{R}^{n-k}$ so, dass $\Phi^{-1}(\varphi(w)) = (w, 0)$ für alle $w \in W$. Mit der Projektion

$$\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k, \quad (x, y) \mapsto x,$$

haben wir dann $\pi(\Phi^{-1}(\varphi(w))) = w$ und $\varphi(\pi(\Phi^{-1}(\varphi(w)))) = \varphi(w)$ für alle $w \in W$. Sei nun $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = \varphi(x)$. Ist ε hinreichend klein, so ist $\gamma(t) \in \varphi(W)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und folglich

$$\varphi(\pi(\Phi^{-1}(\gamma(t)))) = \gamma(t) \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Differentiation nach t an der Stelle $t = 0$ liefert $\varphi'(x)v = \gamma'(0)$ mit einem Vektor $v \in \mathbb{R}^k$. Also ist $\gamma'(0) \in \operatorname{Im} \varphi'(x)$ und damit $T_{\varphi(x)}(M) \subseteq \operatorname{Im} \varphi'(x)$. ■

Insbesondere stellen wir fest, dass $T_p(M)$ ein k-dimensionaler und $N_p(M)$ ein $(n-k)$-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist und dass

$$T_p(M) \oplus N_p(M) = \mathbb{R}^n.$$

Ist $M = \partial A$ der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand, so ist $N_p(\partial A)$ für jeden Punkt $p \in M$ ein eindimensionaler Vektorraum. Es gibt also genau zwei Normalenvektoren der Länge 1. Wir wollen denjenigen auszeichnen, der „nach außen" zeigt.

Satz 8.6 *Sei A ein Kompaktum mit glattem Rand ∂A. Dann gilt*
(a) *Für jedes $p \in \partial A$ gibt es genau einen Vektor $\nu(p) \in N_p(\partial A)$ der Länge 1 mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass $p + t\nu(p) \notin A$ für alle $t \in (0, \varepsilon)$.*
(b) *Die Abbildung $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.*

Der Vektor $\nu(p)$ heißt *der äußere Normalenvektor an ∂A* in p, und ν heißt das *äußere Normalenfeld von A*.

Beweis. *Existenz eines äußeren Normalenvektors*: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von p und $\psi : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\psi'(p) \neq 0$ und $U \cap A = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$. Außerdem wollen wir $\psi'(q) \neq 0$ für alle $q \in U$ annehmen (anderenfalls verkleinern wir U entsprechend).

Wir zeigen, dass für jedes $q \in U$ (insbesondere für $q = p$)

$$\nu(q) := \frac{1}{\|(\operatorname{grad} \psi)(q)\|_2} (\operatorname{grad} \psi)(q) \tag{8.1}$$

ein äußerer Normalenvektor an ∂A in q ist. Ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial A$ ein Weg mit $\gamma(0) = q$ und ist ε so klein, dass $\gamma(t) \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, so ist nach Lemma 8.2

$$\psi(\gamma(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Differentiation nach t an der Stelle $t = 0$ liefert $\psi'(q)\gamma'(0) = 0$. Folglich steht der Vektor $(\operatorname{grad}\psi)(q)$ und damit auch $\nu(q)$ senkrecht auf $T_q(\partial A)$. Klar ist auch, dass $\|\nu(q)\|_2 = 1$. Die außerdem geforderte Eigenschaft folgt wegen

$$\psi'(q)(\nu(q)) = \frac{\langle(\operatorname{grad}\psi)(q),\, (\operatorname{grad}\psi)(q)\rangle}{\|(\operatorname{grad}\psi)(q)\|_2} = \|(\operatorname{grad}\psi)(q)\|_2 > 0$$

wie im Beweis von Lemma 8.2.

Eindeutigkeit des äußeren Normalenvektors: Wir haben bereits bemerkt, dass es genau zwei Normalenvektoren der Länge 1 gibt und dass einer davon der Vektor $\nu(p)$ aus (8.1) ist. Wie im Beweis von Lemma 8.2 sieht man nun, dass $\psi(p - t\nu(p)) < 0$ für $t > 0$ hinreichend klein. Für solche t ist also $p - t\nu(p) \in A$, d.h. der Vektor $-\nu(p)$ erfüllt nicht die zusätzliche Bedingung aus (a).

Stetigkeit von ν: Diese folgt sofort aus Darstellung (8.1). ■

Beispiel 1. Sei $r > 0$. Die Kugel $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq r\}$ ist ein Kompaktum mit glattem Rand, denn die Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2^2 - r^2$, hat die geforderten Eigenschaften. Für $p \in \partial A$ ist $(\operatorname{grad}\psi)(p) = 2p$, und wegen (8.1) ist $\nu(p) = \frac{2}{\|2p\|}p = \frac{1}{r}p$ der zugehörige Normalenvektor. ■

Beispiel 2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Immersion. Wir interessieren uns für die Normalenvektoren an die Fläche $\varphi(U)$. Für $x \in U$ haben wir $T_{\varphi(x)}(\varphi(U)) = \operatorname{Im}\varphi'(x)$, und da φ eine Immersion ist, ist dies ein zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Es gibt im Punkt $\varphi(x)$ also genau 2 Normalenvektoren der Länge 1. Wir legen einen Normalenvektor $\nu(\varphi(x))$ fest, indem wir

$$\det\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x),\, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x), \nu(\varphi(x))\Big) > 0$$

verlangen, d.h. die Vektoren

$$X_1(p) := \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \quad X_2(p) := \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x) \quad \text{und} \quad \nu(\varphi(x))$$

sollen in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Mit dieser Information können wir $\nu(\varphi(x))$ direkt berechnen:

$$\nu(\varphi(x)) = \frac{X_1(p) \times X_2(p)}{\|X_1(p) \times X_2(p)\|},$$

wobei $v \times w$ für das Vektorprodukt der Vektoren v, $w \in \mathbb{R}^3$ steht, d.h.

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2w_3 & - & v_3w_2 \\ v_3w_1 & - & v_1w_3 \\ v_1w_2 & - & v_2w_1 \end{pmatrix}.$$

Ist speziell $\varphi(x) = (x,\, f(x))$ mit einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, so ist

$$X_1(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix}, \quad X_2(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix},$$

also

$$X_1(p) \times X_2(p) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ -\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ 1 \end{pmatrix},$$

und daher

$$\nu(p) = \nu(\varphi(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x))^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2}(x))^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ -\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist $\nu(\varphi(x))$ der obere Normalenvektor an den Graphen von f. ■

Beispiel 3. In diesem Beispiel geht es darum, den Rand eines Kompaktums mit glattem Rand lokal als Graphen einer Funktion g darzustellen und den äußeren Normalenvektor mit Hilfe von g zu beschreiben. Die Details schauen wir uns bei ausreichend Zeit in der Übung an.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $p \in \partial A$. Wir wählen eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von p und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ mit $A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$ und $\psi'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Nach Lemma 8.2 ist dann

$$\partial A \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

Wegen $\psi'(p) \neq 0$ dürfen wir o.E.d.A. annehmen, dass $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(p) \neq 0$ ist. Mit dem Satz über implizite Funktionen finden wir dann eine offene Menge $U_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, eine stetig differenzierbare Funktion $g : U_1 \to \mathbb{R}$ und ein Intervall $(b,\, c)$ mit $V := U_1 \times (b,\, c) \subseteq U$ so, dass

$$\partial A \cap V = \partial A \cap (U_1 \times (b,\, c)) = \{(x',\, g(x')) \in \mathbb{R}^n : x' \in U_1\},$$

d.h. $\partial A \cap V$ ist der Graph von g. Ist $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(p) > 0$, so ist

$$A \cap (U_1 \times (b,\, c)) = \{x \in V : x_n \leq g(x')\},$$

wobei wir $x = (x',\, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ geschrieben haben. Weiter ist

$$\nu(p) = \frac{(-(\operatorname{grad} g)(p'),\, 1)}{\sqrt{1 + \|(\operatorname{grad} g)(p')\|_2^2}} \tag{8.2}$$

mit $p = (p',\, p_n)$. ■

Schließlich vermerken wir eine weitere Eigenschaft kompakter Mengen. Zur Erinnerung: Der *Durchmesser* einer Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) ist erklärt durch

$$\operatorname{diam} M := \sup\{d(x, y) : x, y \in M\}.$$

Satz 8.7 (Lebesguesches Überdeckungslemma) *Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein $\lambda > 0$ (eine sogenannte* Lebesguesche Zahl der Überdeckung) *derart, dass jede Teilmenge M von X mit* $\operatorname{diam} M \leq \lambda$ *und $M \cap K \neq \emptyset$ in einer der Mengen U_i enthalten ist.*

Beweis. Zu jedem Punkt $k \in K$ gibt es ein $i \in I$ mit $k \in U_i$. Da U_i offen ist, findet man ein $\varepsilon(k) > 0$ mit $U_{2\varepsilon(k)}(k) \subseteq U_i$. Nun bildet die Familie $(U_{\varepsilon(k)}(k))_{k\in K}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, lässt sich hieraus eine endliche Teilüberdeckung auswählen, d.h. es gibt Punkte $k_1, \ldots, k_m \in K$ mit

$$K \subseteq \cup_{j=1}^m U_{\varepsilon(k_j)}(k_j).$$

Wir setzen $\lambda := \min(\varepsilon(k_1), \ldots, \varepsilon(k_m))$. Offenbar ist $\lambda > 0$.

Sei nun $M \subseteq X$ eine Teilmenge mit $M \cap K \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam} M \leq \lambda$. Dann gibt es ein $x \in K$ mit $x \in M \cap K$ und ein j mit $d(x, k_j) < \varepsilon(k_j)$. Für jedes $y \in M$ ist

$$d(y, k_j) \leq d(y, x) + d(x, k_j) < \lambda + \varepsilon(k_j) \leq 2\varepsilon(k_j),$$

d.h. $M \subseteq U_{2\varepsilon(k_j)}(k_j)$. Nach Konstruktion ist aber jede der Kugeln $U_{2\varepsilon(k)}(k)$ (und damit auch die Menge M) in einer der Mengen U_i enthalten. ■

8.2 Der Gaußsche Integralsatz

Zur Erinnerung: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so heißt

$$\operatorname{div} F : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)$$

die *Divergenz desVektorfeldes F*.

Satz 8.8 (Gaußscher Integralsatz) *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ das äußere Normalenfeld und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die A umfasst. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$*

$$\int_A \operatorname{div} F \, d\lambda_n = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_{\partial A}(x). \tag{8.3}$$

Der Gaußsche Integralsatz gilt auch noch für Kompakta, deren Rand niedrigdimensionale Singularitäten wie Ecken und Kanten aufweist. Auch die Voraussetzung, dass F auf einer ganzen Umgebung von A definiert ist, lässt sich abschwächen.

Da $\nu(x)$ ein Einheitsvektor ist, haben wir $\langle F(x), \nu(x)\rangle = \|F(x)\| \cdot \cos(\alpha(x))$, wobei $\alpha(x) \in [0, \pi]$ den Winkel zwischen $F(x)$ und $\nu(x)$ bezeichnet. Es ist also $\langle F(x), \nu(x)\rangle$ die Länge der orthogonalen Projektion von $F(x)$ auf $\nu(x)$. Ein Physiker stellt sich $\langle F(x), \nu(x)\rangle dS(x)$ als den durch das Oberflächenelement $dS(x)$ austretenden Fluss des Vektorfeldes F vor. Demzufolge wird das Integral

$$\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS(x)$$

als Gesamtfluss durch die Oberfläche von A interpretiert. Ist das Vektorfeld F *divergenzfrei* (auch *quellenfrei* genannt), d.h. ist $\operatorname{div} F = 0$, so ergibt sich

$$\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS(x) = 0,$$

d.h. der Gesamtfluss durch den Rand des Kompaktums verschwindet. Diese Situation tritt z.B. auf, wenn F den Fluss einer inkompressiblen Flüssigkeit beschreibt. Die Inkompressibilität entspricht der Bedingung $\operatorname{div} F = 0$. Das Verschwinden des Gesamtflusses durch ∂A kann man sich in diesem Fall so veranschaulichen, dass die Flüssigkeitsmenge, die sich innerhalb von A befindet, wegen der Inkompressibilät dem Volumen von A entspricht, also konstant ist. Daher ist die Flüssigkeitsbilanz in A ausgewogen: zu jedem Zeitpunkt fließt gleichviel rein wie raus.

Wir bereiten den Beweis des Gaußschen Integralsatzes vor, indem wir einige weitere Werkzeuge bereitstellen und zwei Lemmas beweisen, die Spezialfälle behandeln und die Teile des eigentlichen Beweises vorwegnehmen.

Zunächst erinnnern wir an einige Begriffe. Sei M ein metrischer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für den *Träger* von f

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}.$$

Wir schreiben $C(M)$ für den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf M und $C_c(M)$ für den Raum der Funktionen aus $C(M)$, deren Träger kompakt ist. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so bezeichne $C_c^k(U)$ den Raum der k-mal stetig diffenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in U. Beachten Sie: $f \in C(\mathbb{R}^n)$ liegt genau dann in $C_c(\mathbb{R}^n)$, wenn $\operatorname{supp} f$ beschränkt ist (da Träger per Definition abgeschlossen sind), und $f \in C((a, b))$ liegt genau dann in $C_c((a, b))$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, für das $\operatorname{supp} f \subseteq (a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ gilt.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C_c^k(U)$, so liegt die durch

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in U \\ 0 & \text{für } x \neq U \end{cases}$$

definierte *Fortsetzung von f durch* 0 in $C_c^k(\mathbb{R}^n)$. Ist nämlich $x \in U$, so stimmen f und F in einer Umgebung von x überein. Ist dagegen $x \notin U$, so ist $x \notin \operatorname{supp} f$, und da $\operatorname{supp} f$ abgeschlossen ist, ist das Komplement dieser Menge offen, und F verschwindet auf einer Umgebung von x.

Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Diese ist beliebig oft differenzierbar (Warum?), und ihr Träger ist $[-1,\, 1]$ (so dass $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$). Da g einen kompakten Träger hat, ist die Funktion

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k)$$

wohldefiniert (für jedes t hat die Reihe nur endlich viele Summanden ungleich Null). Nun ist klar, dass G positiv, 1-periodisch und beliebig oft differenzierbar ist. Also wird auch durch $h(t) := g(t)/G(t)$ eine Funktion aus $C_c^\infty(\mathbb{R})$ definiert. Für diese ist $\operatorname{supp} h = [-1,\, 1]$ und

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(t-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t-k)} = \frac{1}{G(t)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k) = \frac{G(t)}{G(t)} = 1.$$

Für $p = (p_1,\, \ldots,\, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir nun $a_{p,\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch

$$a_{p,\varepsilon}(x) := \prod_{j=1}^n h(x_j/\varepsilon - p_j).$$

Dann ist $\operatorname{supp} a_{p,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \varepsilon p\|_\infty \leq \varepsilon\}$, und man hat

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} a_{p,\varepsilon}(x) = 1 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Familie $(a_{p,\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$ heißt eine *glatte Zerlegung der Eins*. Nun zu den angekündigten Lemmas.

Lemma 8.9 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq j \leq n$. Dann ist*

(a) $\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, d\lambda_n = 0 \quad$ *für alle $\varphi \in C_c^1(U)$.*

(b) $\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \psi\, d\lambda_n = -\int_U \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\, d\lambda_n \quad$ *für alle $\varphi \in C_c^1(U)$ und $\psi \in C^1(U)$.*

Beweis. (a) O.E.d.A. dürfen wir $U = \mathbb{R}^n$ annehmen, da φ durch 0 zu einer Funktion in $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden kann.

Da $\operatorname{supp} \varphi$ kompakt ist, gibt es ein $R > 0$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [-R,\, R]^n$. Insbesondere verschwindet φ auf dem Rand des Würfels $[-R,\, R]^n$. Sei nun z.B. $j = 1$ (für die übrigen j verläuft der Beweis analog). Für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ ist dann

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\, dx_1 = \varphi(R, x_2, \ldots, x_n) - \varphi(-R, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\, d\lambda_n(x) &= \int_{[-R,\,R]^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\, d\lambda_n(x)\\ &= \int_{[-R,\,R]^{n-1}} \int_{-R}^{R} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\, dx_1\, d\lambda_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) = 0.\end{aligned}$$

Das liefert Aussage (a). Für (b) wenden wir (a) auf die Funktion $\varphi\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ an. Die Behauptung folgt dann aus der Produktregel

$$\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,\psi + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_j}.$$ ■

Lemma 8.10 *Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ und $g : U' \to I$ stetig differenzierbar. Wir setzen*

$$A := \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \le g(x')\} \text{ und } M := \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n = g(x')\}.$$

Dann gilt für jede Funktion $f \in C_c^1(U' \times I)$ und jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, d\lambda_n(x) = \int_M f(x)\nu_j(x)\, dS_M(x),$$

wobei $\nu_j(x)$ die j-te Komponente des Normalenvektors

$$\nu(x) := \frac{(-(\operatorname{grad} g)(x'),\, 1)}{\sqrt{1 + \|(\operatorname{grad} g)(x')\|_2^2}} \quad \text{mit } x = (x', x_n) \in M \tag{8.4}$$

ist (beachte Beispiel 2 in Abschnitt 8.1).

Beweis. Sei $f \in C_c^1(U' \times I)$. Wir erinnern zunächst daran, dass für das Oberflächenmaß von M bezüglich der Parametrisierung $x' \mapsto (x', g(x'))$ gilt

$$\int_M f(x)\, dS_M(x) = \int_{U'} f\big(x', g(x')\big) \sqrt{1 + \|(\operatorname{grad} g)(x')\|_2^2}\, d\lambda_{n-1}(x') \tag{8.5}$$

(vgl. Beispiel 2 aus Abschnitt 7.3). Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall 1: Sei $1 \le j < n$. Für die Funktion

$$F : U' \times I \to \mathbb{R}, \quad (x', z) \mapsto \int_{\alpha}^{z} f(x', x_n)\, dx_n$$

gilt nach Satz 2.16

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x',\, z) = f(x',\, z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(x',\, z) = \int_\alpha^z \frac{\partial f}{\partial x_j}(x',\, x_n)\, dx_n.$$

Hieraus folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}\int_\alpha^{g(x')} f(x',\, x_n)\, dx_n &= \frac{\partial}{\partial x_j} F(x',\, g(x')) \\ &= \frac{\partial F}{\partial z}(x',\, g(x'))\, \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') + \frac{\partial F}{\partial x_j}(x',\, g(x')) \\ &= f(x',\, g(x'))\frac{\partial g}{\partial x_j}(x') + \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x',\, x_n)\, dx_n.\end{aligned}$$

Da die Funktion $x' \mapsto \int_\alpha^{g(x')} f(x',\, x_n)\, dx_n$ einen kompakten Träger hat (Warum?), folgt aus Lemma 8.9 (a)

$$\int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x',\, x_n)\, dx_n\, d\lambda_{n-1}(x') = 0.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}&\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, d\lambda_n(x) = \int_{U'} \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x',\, x_n)\, dx_n\, d\lambda_{n-1}(x') \\ &\quad = \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x',\, x_n) dx_n\, d\lambda_{n-1}(x') - \int_{U'} f(x',\, g(x'))\frac{\partial g}{\partial x_j}(x')\, d\lambda_{n-1}(x') \\ &\quad = \int_M f(x)\nu_j(x)\, dS_M(x)\end{aligned}$$

wegen (8.4), (8.5) und der Definition des Oberflächenintegrals.

Fall 2: Sei $j = n$. Da für jedes $x' \in U'$ die Funktion $x_n \mapsto f(x',\, x_n)$ einen kompakten Träger hat, folgt mit dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x',\, x_n)\, dx_n = f(x',\, g(x')),$$

also wieder

$$\begin{aligned}&\int_A \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, d\lambda_n(x) = \int_{U'} \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x',\, x_n)\, dx_n\, d\lambda_{n-1}(x') \\ &\quad = \int_{U'} f(x',\, g(x'))\, d\lambda_{n-1}(x') = \int_M f(x)\nu_n(x)\, dS_M(x).\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Lemmas komplett. ■

Beweis des Gaußschen Integralsatzes. Wir haben in Beispiel 3 aus Abschnitt 8.1 gesehen, dass jeder Punkt $a \in \partial A$ eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ hat, in der sich ∂A als Graph einer Funktion darstellen lässt sowie $A \cap U$ als die Menge der Punkte, die unter diesem Graphen liegen. Es existiert daher eine Familie $(U_j)_{j\in J}$ offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit $A \subseteq \cup_{j\in J} U_j$, so dass jedes U_j genau eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $U_j \subseteq A \setminus \partial A = \operatorname{int} A$.

(ii) Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten hat U_j die Gestalt $U_j = U' \times (a,\, b)$, wobei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen ist und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$U_j \cap A = \{(x',\, x_n) \in U' \times (a,\, b) : x_n \leq g(x')\}.$$

Sei λ eine Lebesguesche Zahl der Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ des Kompaktums A (vgl. Satz 8.7) und $\varepsilon := \frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$. Zu diesem ε betrachten wir die oben konstruierte glatte Zerlegung der Eins $(a_{p,\,\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}^n}$. Der Träger jeder Funktion $a_{p,\,\varepsilon}$ ist ein Würfel der Seitenlänge 2ε und hat somit den Durchmesser $2\varepsilon\sqrt{n} = \lambda$. Jeder Träger $\operatorname{supp} a_{p,\,\varepsilon}$, der mit A wenigstens einen Punkt gemeinsam hat, ist also in einer der Mengen U_j enthalten (Satz 8.7). Sei

$$P := \{p \in \mathbb{Z}^n : \operatorname{supp} a_{p,\,\varepsilon} \cap A \neq \emptyset\}.$$

Da A beschränkt ist, ist P eine endliche Menge. Wir benutzen nun die Zerlegung der Eins, um den Gaußschen Integralsatz auf die Fälle zurückzuführen, in denen sich alles in einer der Mengen U_j abspielt. Nun ist

$$\int_A \operatorname{div} F \, d\lambda_n = \int_A \operatorname{div}\Big(\sum_{p\in P} a_{p,\,\varepsilon} F\Big)\, d\lambda_n = \sum_{p\in P} \int_A \operatorname{div}(a_{p,\,\varepsilon} F)\, d\lambda_n$$

und analog

$$\int_{\partial A} \langle F(x),\, \nu(x)\rangle \, dS_{\partial A}(x) = \sum_{p\in P} \int_{\partial A} \langle (a_{p,\,\varepsilon} F)(x),\, \nu\rangle \, dS_{\partial A}(x).$$

Wir müssen daher den Satz für jede der Funktionen $a_{p,\,\varepsilon} F$ zeigen. Gemäß unserer Konstruktion ist für jedes $p \in \mathbb{Z}^n$ der Träger von $a_{p,\,\varepsilon}$ in einer der Mengen U_j enthalten. Ist $U_j \subseteq \operatorname{int} A$, so ist

$$\int_{\partial A} \langle (a_{p,\,\varepsilon} F)(x),\, \nu(x)\rangle \, dS_{\partial A}(x) = 0,$$

da $a_{p,\,\varepsilon}$ auf ∂A verschwindet. Die Behauptung folgt in diesem Fall aus

$$\int_A \operatorname{div}\,(a_{p,\,\varepsilon} F)\, d\lambda_n = \int_{U_j} \operatorname{div}\,(a_{p,\,\varepsilon} F)\, d\lambda_n = \sum_{i=1}^n \int_{U_j} \frac{\partial(a_{p,\,\varepsilon} F_i)}{\partial x_i}\, d\lambda_n = 0$$

nach Lemma 8.9 (a). Genügt dagegen U_j der Bedingung (ii), so folgt die Behauptung durch Anwendung von Lemma 8.10 auf die Komponentenfunktionen $f_i := a_{p,\varepsilon} F_i$, $i = 1, \ldots, n$, von $a_{p,\varepsilon} F$ und durch Summation. ■

Anwendung 1: Oberfläche der Einheitssphäre. Für das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$ ist $(\operatorname{div} F)(x) = n$. Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt daher für jedes Kompaktum A mit glattem Rand

$$n \operatorname{vol}_n(A) = \int_A \operatorname{div} F \, d\lambda_n = \int_{\partial A} \langle x, \nu(x) \rangle \, dS_{\partial A}(x),$$

also

$$\operatorname{vol}_n(A) = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \langle x, \nu(x) \rangle \, dS_{\partial A}(x).$$

Ist speziell A die n-dimensionale Einheitskugel B_n, so ist ∂B_n die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1}$. Weiter ist $\nu(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ und daher

$$c_n = \operatorname{vol}_n(B_n) = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \|x\|^2 \, dS_{\partial A}(x) = \frac{1}{n} \int_{\partial A} dS_{\partial A}(x) = w_n / n.$$

Wir erhalten also erneut die Beziehung $w_n = n c_n$, die wir bereits früher abgeleitet hatten. ■

Anwendung 2: Die Greensche Formel. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand und ν das äußere Normalenfeld von A. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ definieren wir ihre *Ableitung in Normalenrichtung im Punkt* $a \in \partial A$ durch

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(a) := \langle (\operatorname{grad} f)(a), \nu(a) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \nu_j(a).$$

Weiter definieren wir für $f \in C^2(U)$ den *Laplace-Operator* Δ durch

$$\Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

Lemma 8.11 *Für $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, $g \in C^2(U, \mathbb{R})$ und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ gilt*
(a) $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + \langle \operatorname{grad} f, F \rangle$.
(b) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} g) = \Delta g$.

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen.

Satz 8.12 (Greensche Formel) *Für $f, g \in C^2(U)$ und A wie oben gilt*

$$\int_A (f \Delta g - g \Delta f) \, d\lambda_n = \int_{\partial A} \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dS_{\partial A}.$$

Beweis. Wir wenden den Gaußschen Satz auf das Vektorfeld $F := f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f$ an und erhalten mit Lemma 8.11

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) - \operatorname{div}(g \operatorname{grad} f) \\ &= f \operatorname{div}(\operatorname{grad} g) + \langle \operatorname{grad} f,\, \operatorname{grad} g\rangle - g \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\ &\quad - \langle \operatorname{grad} g,\, \operatorname{grad} f\rangle = f\Delta g - g\Delta f. \end{aligned}$$

Auf ∂A ergibt sich

$$\langle F,\, \nu\rangle = f\langle \operatorname{grad} g,\, \nu\rangle - g\langle \operatorname{grad} f,\, \nu\rangle = f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu},$$

und die Behauptung folgt aus dem Gaußschen Integralsatz. ■

8.3 Der Greensche Integralsatz in der Ebene

Wir sehen uns nun den Gaußschen Integralsatz für $n = 2$ genauer an. Da der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand im $\mathbb{R}^2$ eine Kurve ist, versuchen wir, das Randintegral aus dem Gaußschen Satz als ein Wegintegral zu interpretieren.

Sei also $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist ∂A eine kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Wir können ∂A also in endlich viele Stücke zerlegen, die wir jeweils durch Karten (= injektive Wege, die Immersionen sind) $\gamma_j : (a_j,\, b_j) \to \partial A$ parametrisieren können (Parametrisierungssatz). Dabei wollen wir nur solche Wege γ_j betrachten, für die A links der Kurve $\gamma_j((a_j,\, b_j))$ liegt. Letzteres bedeutet für einen Weg $\gamma : (a,\, b) \to \partial A$, dass der Normalenvektor $\nu(\gamma(t))$ im Randpunkt $\gamma(t)$ durch

$$\nu(\gamma(t)) := \frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|_2} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

gegeben ist. Dann ist nämlich

$$\det(\nu(\gamma(t)),\, \dot\gamma(t)) = \frac{\|\dot\gamma(t)\|_2^2}{\|\dot\gamma(t)\|_2} = \|\dot\gamma(t)\|_2 > 0,$$

d.h. die Normale $\nu(\gamma(t))$ und die Tangente $\dot\gamma(t)$ bilden ein Rechtssystem.

Sind alle Wege γ_j so orientiert und überlappen sich zwei Bereiche $\gamma_i((a_i,\, b_i))$ und $\gamma_j((a_j,\, b_j))$, so ist die zugehörige Parametertransformation

$$\varphi_{ij} : U_{ij} := \gamma_j^{-1}\left(\gamma_i((a_i,\, b_i))\right) \to \gamma_i^{-1}\left(\gamma_j((a_j,\, b_j))\right) =: U_{ji}$$

streng monoton wachsend. Wegen $\gamma_j \circ \varphi_{ij} = \gamma_i$ ist nämlich

$$\gamma_i'(t) = (\gamma_j \circ \varphi_{ij})'(t) = \gamma_j'(\varphi_{ij}(t))\, \varphi_{ij}'(t),$$

und da γ_i' und γ_j' wegen (8.6) in die gleiche Richtung zeigen, ist $\varphi_{ij}'(t) > 0$. Für jedes auf einer offenen Umgebung von A stetige Vektorfeld w ist daher

$$\int_{\gamma_j \circ \varphi_{ij}} w = \int_{\gamma i} w.$$

Wir definieren nun wie in Kapitel 7

$$\int_{\partial A} w := \sum_{j=1}^{k} \int_{I_j} \langle w(\gamma_j(t)),\, \gamma_j'(t)\rangle\, dt,$$

wobei die Intervalle $I_j \subseteq (a_j,\, b_j)$ so gewählt sind, dass $\partial A = \cup_{j=1}^{k} \gamma_j(I_j)$ und dass die Kurven $\gamma_j(I_j)$, $j = 1, \ldots, k$, paarweise disjunkt sind. Ähnlich wie in Lemma 7.8 sieht man, dass dieses Integral nicht von den gewählten Wegen γ_j bzw. Mengen I_j abhängt.

Satz 8.13 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^2$ gilt dann*

$$\int_A \operatorname{div} F\, d\lambda_2 = \int_{\partial A} F_1\, dx_2 - F_2\, dx_1.$$

Beweis. Wegen des Gaußschen Integralsatzes ist noch zu zeigen, dass

$$\int_{\partial A} F_1\, dx_2 - F_2\, dx_1 = \int_{\partial A} \langle F(x),\, \nu(x)\rangle\, dS_{\partial A}(x). \tag{8.7}$$

Dazu verwenden wir eine Karte $\gamma : (a,\, b) \to \partial A$, wie wir sie oben diskutiert haben, und berechnen die beiden Integrale. Zunächst ist

$$\int_\gamma F_1\, dx_2 - F_2\, dx_1 = \int_a^b (F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t))\, dt$$

das Integral auf der linken Seite. Wegen (8.6) ist der Integrand des zugehörigen Teiles des rechten Integrals

$$\int_{\gamma((a,\, b))} \langle F(x),\, \nu(x)\rangle\, dS_{\partial A}(x) = \int_a^b \langle F(\gamma(t)),\, \nu(\gamma(t))\rangle \|\dot\gamma(t)\|_2\, dt$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle F(\gamma(t)),\, \nu(\gamma(t))\rangle \|\dot\gamma(t)\|_2 &= \left\langle F(\gamma(t)),\, \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t). \end{aligned}$$

Da beide Integranden übereinstimmen, folgt (8.7) und die Behauptung. ∎

8.4 Der Stokessche Integralsatz im Raum

Im letzten Abschnitt betrachten wir einen einfachen Spezialfall des allgemeinen Stokeschen Satzes. In vielen Anwendungen tritt das Problem auf, den Fluss eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Kurve im Raum zu berechnen. Wir wollen zunächst diese Begriffe präzisieren. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Immersion, die eine Einbettung ist. Dann ist $M := \varphi(U)$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Sei nun $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist $G := \varphi(A) \subseteq M$ eine kompakte Menge, die von der Kurve $\partial G = \varphi(\partial A)$ berandet wird. Wir definieren den *Fluss eines stetigen Vektorfeldes F durch die Kurve ∂G* als das Integral

$$\int_G \langle F(x), \nu(x)\rangle \, dS_M(x), \tag{8.8}$$

wobei wir die Richtung des Normalenvektors so festlegen, dass

$$\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(p), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(p), \nu(\varphi(p))\right) > 0.$$

Man beachte, dass wir dem anschaulichen Konzept des Flusses eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Kurve im Raum einen mathematischen Sinn gegeben haben, indem wir „in diese Kurve eine Fläche $G = \varphi(A)$ eingespannt“ haben und den Fluss durch (8.8), also als „Fluss durch eine Fläche“ definiert haben.

Wir zeigen nun, dass für spezielle Felder (Rotationsfelder) das Integral (8.8) tatsächlich nur von der Randkurve ∂G abhängt, und stellen das Integral (8.8) als Kurvenintegral über diesem Rand dar. Zur Erinnerung: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so ist das Vektorfeld $\operatorname{rot} F : U \to \mathbb{R}^3$, die *Rotation* von F, definiert durch

$$\operatorname{rot} F = \det\begin{pmatrix} e_1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & F_1 \\ e_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & F_2 \\ e_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

(wobei die Determinantenschreibweise nur symbolisch zu verstehen ist).

Satz 8.14 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine injektive Immersion, die eine Einbettung ist. Weiter sei $G \subseteq \varphi(U)$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Ist F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^3$ von G, so gilt mit $M := \varphi(U)$*

$$\int_G \langle \operatorname{rot} F, \nu\rangle \, dS_M = \int_{\partial G} F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + F_3\, dx_3.$$

Beweis. Wir bezeichnen die Koordinaten in U mit $u = (u_1, u_2)$. In Beispiel 2 in Abschnitt 8.1 haben wir gesehen, dass

$$\nu(\varphi(u)) = \frac{X_1(u) \times X_2(u)}{\|X_1(u) \times X_2(u)\|_2},$$

wobei

$$X_1(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X_2(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}.$$

Die Fläche des von den Vektoren $X_1(u)$ und $X_2(u)$ aufgespannten Parallelogramms ist gleich $\|X_1(u) \times X_2(u)\|$, so dass wir für das Oberflächenmaß S_M auf $M = \varphi(U)$ die Beziehung

$$dS_M(u) = \|X_1(u) \times X_2(u)\| \, d\lambda_2(u)$$

erhalten. Hiermit ergibt sich für das Oberflächenintegral (mit $A := \varphi^{-1}(G)$)

$$\int_G \langle (\operatorname{rot} F)(x), \, \nu(x) \rangle \, dS_M(x) = \int_A \langle (\operatorname{rot} F)(\varphi(u)), \, X_1(u) \times X_2(u) \rangle \, d\lambda_2(u).$$

Bevor wir weiterrechnen, beachten wir, dass beide Seiten der Stokesschen Integralformel linear von F abhängen. Wir können daher die Fälle, in denen F nur eine von Null verschiedene Komponente hat, getrennt betrachten und nehmen o.E.d.A. $F_2 = F_3 = 0$ an. Dann ist

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Mit den Bezeichnungen $\partial_j \varphi_k := \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j}$ vereinfacht sich der Integrand des Oberflächenintegrals, geschrieben als Integral über A, zu

$$\begin{aligned}
&\langle \operatorname{rot} F, \, X_1 \times X_2 \rangle \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial x_3} (\partial_1 \varphi_3 \, \partial_2 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_1 \, \partial_2 \varphi_3) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} (\partial_1 \varphi_1 \, \partial_2 \varphi_2 - \partial_1 \varphi_2 \, \partial_2 \varphi_1) \\
&= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} \, \partial_1 \varphi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \, \partial_1 \varphi_2 \right) \partial_2 \varphi_1 - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} \, \partial_2 \varphi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \, \partial_2 \varphi_2 \right) \partial_1 \varphi_1 \\
&= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} \, \partial_1 \varphi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \, \partial_1 \varphi_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \, \partial_1 \varphi_1 \right) \partial_2 \varphi_1 \\
&\qquad - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \, \partial_2 \varphi_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \, \partial_2 \varphi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \, \partial_2 \varphi_2 \right) \partial_1 \varphi_1 \\
&= \frac{\partial (F_1 \circ \varphi)}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial (F_1 \circ \varphi)}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}.
\end{aligned}$$

Für das Kurvenintegral auf der rechten Seite der Stokesschen Formel erhalten wir mit einer geeigneten Parametrisierung $\gamma : [a, b] \to \partial A$ des Randes von A

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi\circ\gamma} F_1\, dx_1 &= \int_a^b F_1((\varphi\circ\gamma)(t))(\varphi_1\circ\gamma)'(t)\, dt \\
&= \int_a^b F_1((\varphi\circ\gamma)(t)) \left(\frac{\partial\varphi_1(\gamma(t))}{\partial u_1}\gamma_1'(t) + \frac{\partial\varphi_1(\gamma(t))}{\partial u_2}\gamma_2'(t)\right) dt \\
&= \int_\gamma (F_1\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}\, du_1 + (F_1\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2}\, du_2.
\end{aligned}$$

Wir wollen den Greenschen Satz benutzen und betrachten dazu die beiden Integranten dieses Wegintegrals als Komponenten eines Vektorfeldes $H = (H_1,\, H_2)$:

$$H_1 := (F_1\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2}, \quad H_2 := -(F_1\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} H &= \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} + (F_1\circ\varphi)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u_1\partial u_2} - \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} - (F_1\circ\varphi)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u_1\partial u_2} \\
&= \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1},
\end{aligned}$$

also

$$\langle(\operatorname{rot} F)\circ\varphi,\, X_1\times X_2\rangle = \operatorname{div} H.$$

Der Greensche Integralsatz liefert nun

$$\int_{\partial A} H_1\, du_2 - H_2\, du_1 = \int_A \operatorname{div} H\, d\lambda_2.$$

Setzen wir hier obige Formeln ein, erhalten wir den Stokesschen Satz. ■