

Funktionalanalysis

Wintersemester 2026/27

T. Böhnlein, M. Egert, R. Haller

Version vom 29. September 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Hilberträume	1
1.1	Grundbegriffe	1
1.2	Der Projektionssatz und Orthogonalprojektionen	4
1.3	Orthonormalbasen	8
2	Lineare Operatoren auf Hilberträumen	15
2.1	Grundlagen	15
2.2	Funktionale auf Hilberträumen	20
2.3	Hilbertraum-Adjungierte	24
3	Variationelle Methoden – ein Anwendungsbeispiel	29
3.1	Das Problem	29
3.2	Schwache Ableitungen und der Sobolew-Raum $H^1(I)$	31
3.3	Der Hauptsatz und stetige Repräsentanten	34
3.4	Lösung der variationellen Formulierung	37
3.5	Regularität der schwachen Lösung	39
4	Lineare Operatoren auf Banachräumen	43
4.1	Grundlagen	43
4.2	Funktionale auf Banachräumen und Dualraum	46
4.3	Das Hahn-Banach-Theorem: Algebraische Version	49
4.4	Das Hahn-Banach-Theorem: Analytische Version	53
4.5	Das Hahn-Banach-Theorem: Trennungsversion	56
4.6	Adjungierte Operatoren	59
5	Bestimmung wichtiger Dualräume	63
5.1	Dualräume von Folgenräumen	63
5.2	Signierte Maße	67
5.3	Der Satz von Radon-Nikodým	69
5.4	Der Dualraum von L^p	73
5.5	Der Dualraum von $C([a, b])$	77
5.6	Das Hausdorff'sche Momentenproblem	83
6	Die Hauptsätze der Funktionalanalysis	85
6.1	Der Satz von Baire	85

Inhaltsverzeichnis

6.2	Der Satz von der offenen Abbildung	89
6.3	Der Satz vom abgeschlossenen Graphen	94
6.4	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	96
7	Reflexive Räume	101
7.1	Reflexivität	101
7.2	Schwache Konvergenz	104
7.3	Der Satz von Banach-Alaoglu	109
8	Kompakte Operatoren	113
9	Das Bochner-Integral	121
9.1	Messbare Funktionen	121
9.2	Das Bochner-Integral	125
9.3	Eigenschaften des Bochner-Integrals	127
10	Banachraum-wertige Funktionentheorie	133
10.1	Holomorphie und schwache Holomorphie	133
10.2	Übertragung der zentralen Sätze	135
11	Spektraltheorie	139
11.1	Spektrum und Resolvente	139
11.2	Unterteilung des Spektrums	143
11.3	Das Spektrum der Adjungierten	146
12	Der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren	149
12.1	Der numerische Wertebereich	149
12.2	Selbstadjungierte Operatoren	151
12.3	Der Spektralsatz	154
12.4	Rückkehr zum schwachen Poisson-Problem	159
13	Dunford-Kalkül	163
13.1	Der Kalkül	163
13.2	Spektraler Abbildungssatz und Spektralradius	167
13.3	Spektraler Zerlegungssatz	169
	Bibliography	173
	Index	175

1 Hilberträume

Hilberträume sind die normierten Vektorräume mit der reichsten Struktur und damit auch der ergiebigsten Theorie. Wir erkunden zunächst diese besonders schönen Räume und werden dann in Kapitel 3 schnell sehen, dass man aus diesen abstrakten Betrachtungen auch ganz handfeste Folgerungen ziehen kann.

1.1 Grundbegriffe

Zu Beginn sollten wir uns an alles erinnern, was wir über Hilberträume schon aus der Analysis II und der Linearen Algebra wissen. Wir betrachten dazu normierte Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und verwenden wieder die Notation $\mathbb{K}$ als Kurzschreibweise, wenn eine Aussage sowohl im reellen wie auch im komplexen Fall gilt.

Erinnerung 1.1. (a) Einen normierten Vektorraum, dessen Norm durch ein Skalarprodukt als $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ induziert wird, nennt man einen *Prähilbertraum*. Ist ein Prähilbertraum zusätzlich vollständig, d. h. jede Cauchyfolge ist konvergent, so bezeichnet man ihn als *Hilbertraum*.

(b) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist genau dann ein Prähilbertraum, wenn die Norm die *Parallelogrammgleichung* erfüllt, d. h. wenn für alle $u, v \in X$ gilt

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

(c) Zwei Vektoren u, v aus einem Prähilbertraum X mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißen *orthogonal* oder *senkrecht* zueinander (Notation: $u \perp v$), wenn $\langle u, v \rangle = 0$ ist. Sind M und N zwei Teilmengen von X mit $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $u \in M$ und $v \in N$, so nennt man auch M und N zueinander *orthogonal* oder *senkrecht* und schreibt $M \perp N$. Ist $M = \{u_0\}$ einelementig, so schreiben wir kurz $u_0 \perp N$ statt $\{u_0\} \perp N$.

Ist schließlich $M \subseteq X$ so bezeichnet man mit

$$M^\perp := \{u \in X : \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\} = \{u \in X : u \perp M\}$$

das *orthogonale Komplement* von M .

1 Hilberträume

- (d) In jedem Prähilbertraum X mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\| \cdot \|$ gilt die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \quad u, v \in X,$$

und der *Satz von Pythagoras*:

$$\left\| \sum_{j=1}^n u_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|u_j\|^2 \quad \text{für } u_1, u_2, \dots, u_n \in X \text{ paarweise orthogonal.}$$

- (e) Für jeden Prähilbertraum X sind die Normabbildung $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ und das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ stetige Abbildungen.

Beispiel 1.2. Bekannte Beispiele von Hilberträumen sollten sein:

- (a) Der Standardvektorraum $\mathbb{K}^d$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^d x_n \overline{y_n}, \quad x, y \in \mathbb{K}^d.$$

- (b) Der Folgenraum ℓ^2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}, \quad (a_n), (b_n) \in \ell^2.$$

- (c) Der Lebesgueraum $L^2(\mu, \Omega) = L^2(\Omega)$ auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} f \overline{g} \, d\mu, \quad f, g \in L^2(\Omega).$$

Wir sammeln ein paar grundlegende analytische Eigenschaften von Prähilberträumen und Hilberträumen, die immer wieder hilfreich sein werden.

Lemma 1.3. *Es sei X ein Prähilbertraum. Dann gilt für alle $u \in X$*

$$\|u\| = \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\|=1}} |\langle u, v \rangle| = \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\| \leq 1}} |\langle u, v \rangle|.$$

Beweis. Die Behauptung gilt offensichtlich für $u = 0$, sei also ab jetzt $u \in X \setminus \{0\}$ gegeben. Dann gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für alle $v \in X$ mit $\|v\| \leq 1$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \leq \|u\|$$

und für $v := u/\|u\|$ ist $\|v\| = 1$ und

$$|\langle u, v \rangle| = \left| \left\langle u, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \right| = \frac{1}{\|u\|} \langle u, u \rangle = \|u\|.$$

Zusammen zeigt das die Behauptung. □

Satz 1.4. *Es sei H ein Hilbertraum und V ein linearer Teilraum von H . Dann ist V , ausgestattet mit der Einschränkung des Skalarprodukts aus H , genau dann ein Hilbertraum, wenn V abgeschlossen in H ist.*

Beweis. Ist V ein Hilbertraum, so ist dieser bzgl. seiner Norm, also hier der Norm aus H abgeschlossen. Ist umgekehrt V ein abgeschlossener Teilraum von H , so ist die Einschränkung des Skalarprodukts von H nach V dort ein Skalarprodukt. Ist außerdem (v_n) eine Cauchyfolge in V , so ist diese auch eine Cauchyfolge in H . Dort existiert also ein Grenzelement und wegen der Abgeschlossenheit von V ist dieses auch in V . $\square$

Wir sammeln ein paar einfache Eigenschaften des orthogonalen Komplements.

Satz 1.5. *Es seien X ein Prähilbertraum und $M, N \subseteq X$. Dann gilt:*

- (a) $N \subseteq M \implies M^\perp \subseteq N^\perp$.
- (b) $M^\perp$ ist ein abgeschlossener Teilraum von X .
- (c) $M^\perp = (\overline{\text{span}(M)})^\perp$.
- (d) $\overline{\text{span}(M)} \subseteq (M^\perp)^\perp$.

Beweis. (a) Ist $u \in M^\perp$, so gilt $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $v \in M$. Insbesondere gilt das für alle $v \in N$, also ist $u \in N^\perp$.

- (b) Sind $u, v \in M^\perp$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, dann gilt für alle $w \in M$

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle = 0,$$

also ist auch $\alpha u + \beta v \in M^\perp$. Ist weiter (u_n) eine Folge in $M^\perp$, die in X gegen $u \in X$ konvergiert, so gilt dank der Stetigkeit des Skalarprodukts für alle $w \in M$

$$\langle u, w \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, w \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Also ist $M^\perp$ abgeschlossen.

- (c) Wegen $M \subseteq \overline{\text{span}(M)}$ folgt $(\overline{\text{span}(M)})^\perp \subseteq M^\perp$ direkt aus (a). Wir zeigen also noch die umgekehrte Inklusion. Sei dazu $u \in M^\perp$, $v \in \overline{\text{span}(M)}$ und (v_n) eine Folge in $\text{span}(M)$, die in X gegen v konvergiert. Dann kann jedes v_n mit geeigneten Koeffizienten $\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{N_n}^{(n)} \in \mathbb{K}$ und Elementen $m_1^{(n)}, \dots, m_{N_n}^{(n)} \in M$ als $v_n = \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k^{(n)} m_k^{(n)}$ geschrieben werden und es gilt wieder mit der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$\langle v, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k^{(n)} m_k^{(n)}, u \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k^{(n)} \underbrace{\langle m_k^{(n)}, u \rangle}_{=0} = 0.$$

Das liefert $u \in (\overline{\text{span}(M)})^\perp$ und der Beweis ist fertig.

1.2 Der Projektionssatz und Orthogonalprojektionen

Wir kommen zum ersten wichtigen Satz über Hilberträume, der sagt, dass es in einer gegebenen konvexen und abgeschlossenen Teilmenge eines Hilbertraums zu jedem Punkt u_0 des Raumes einen eindeutigen Punkt der Bestapproximation gibt, also einen Punkt in der Menge mit minimalem Abstand zu u_0 .

Theorem 1.6 (Projektionssatz). *Sei H ein Hilbertraum, $K \subseteq H$ eine konvexe, abgeschlossene und nicht-leere Menge und $u_0 \in H$. Dann existiert ein eindeutiges $v_* \in K$ mit*

$$\|u_0 - v_*\| = \min_{v \in K} \|u_0 - v\|.$$

Beweis. Wir setzen $\delta := \inf_{v \in K} \|u_0 - v\|$.

Um zunächst die Eindeutigkeit zu zeigen, seien v_* und v_{**} zwei bestapproximierende Punkte in K mit $v_* \neq v_{**}$. Dann gilt

$$\|u_0 - v_*\| = \|u_0 - v_{**}\| = \delta.$$

Da $v_* - v_{**} \neq 0$ ist, erhalten wir zusammen mit der Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned} \left\|u_0 - \frac{v_* + v_{**}}{2}\right\|^2 &< \left\|u_0 - \frac{v_* + v_{**}}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{v_* - v_{**}}{2}\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\left\|u_0 - \frac{v_* + v_{**}}{2} + \frac{v_* - v_{**}}{2}\right\|^2 + \left\|u_0 - \frac{v_* + v_{**}}{2} - \frac{v_* - v_{**}}{2}\right\|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} [\|u_0 - v_{**}\|^2 + \|u_0 - v_*\|^2] = \delta^2. \end{aligned}$$

Wegen der Konvexität von K liegt $v_* + v_{**}/2$ ebenfalls in K und obige Ungleichung bedeutet, dass $v_* + v_{**}/2$ echt näher an u_0 liegt als v_* und v_{**} . Das ist ein Widerspruch.

Für den Nachweis der Existenz wählen wir eine Folge (v_n) in K mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_0 - v_n\| = \delta$. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt mit derselben Rechnung wie oben dank der Parallelogrammgleichung

$$\left\|u_0 - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{v_n - v_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2} [\|u_0 - v_n\|^2 + \|u_0 - v_m\|^2],$$

also ist wegen $v_n + v_m/2 \in K$

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= 2\|u_0 - v_n\|^2 + 2\|u_0 - v_m\|^2 - 4\left\|u_0 - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 \\ &\leq 2\|u_0 - v_n\|^2 + 2\|u_0 - v_m\|^2 - 4\delta^2. \end{aligned}$$

1.2 Der Projektionssatz und Orthogonalprojektionen

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ob der Konvergenz von $\|u_0 - v_n\|$ gegen δ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|u_0 - v_n\|^2 - \delta^2 < \varepsilon/4$ für alle $n \geq N$ und damit gilt für alle $n, m \geq N$

$$\|v_n - v_m\|^2 \leq 2(\|u_0 - v_n\|^2 - \delta^2) + 2(\|u_0 - v_m\|^2 - \delta^2) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist (v_n) eine Cauchyfolge in H und dank der Vollständigkeit von H existiert $v_* := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Da K abgeschlossen ist, gilt v_* in K und die Stetigkeit der Norm liefert uns

$$\|u_0 - v_*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_0 - v_n\| = \delta = \inf_{v \in K} \|u_0 - v\| = \min_{v \in K} \|u_0 - v\|. \quad \square$$

Besonders wichtig ist der Spezialfall, dass K ein abgeschlossener Teilraum von H ist. Man beachte, dass dieser dann schon von selbst konvex ist, der Projektionssatz ist also anwendbar. Es stellt sich in diesem Fall heraus, dass der Punkt der Bestapproximation immer durch eine orthogonale Projektion auf den Teilraum gefunden werden kann. Das wollen wir als nächstes herausarbeiten.

Satz 1.7. *Es sei H ein Hilbertraum, $V \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum von H und $u_0 \in H$. Ist $v_* \in V$ der Punkt der Bestapproximation in V an u_0 , so gilt $u_0 - v_* \perp V$.*

Beweis. Wir nehmen an die Aussage sei falsch, d. h. es gibt einen Ausreißer $v_1 \in V$ mit $\langle u_0 - v_*, v_1 \rangle = \beta \neq 0$. Dann muss insbesondere $v_1 \neq 0$ sein und für $w := u_0 - v_*$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \|w - \lambda v_1\|^2 &= \langle w - \lambda v_1, w - \lambda v_1 \rangle = \langle w, w \rangle - \bar{\lambda} \langle w, v_1 \rangle - \lambda \langle v_1, w \rangle + |\lambda|^2 \langle v_1, v_1 \rangle \\ &= \|w\|^2 - \bar{\lambda} \beta - \lambda (\bar{\beta} - \bar{\lambda} \|v_1\|^2). \end{aligned}$$

Setzt man speziell $\lambda_0 := \beta / \|v_1\|^2$ für λ ein, so verschwindet genau die hintere Klammer und es bleibt

$$\|u_0 - v_* - \lambda_0 v_1\|^2 = \|u_0 - v_*\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\|v_1\|^2} < \|u_0 - v_*\|^2.$$

Das kann aber nicht sein, denn wegen der Voraussetzung, dass V ein linearer Teilraum ist, gilt $v_* + \lambda_0 v_1 \in V$ und dieser Punkt kann keinen echt kleineren Abstand von u_0 als die Bestapproximation haben. Also war unsere Annahme falsch und $u_0 - v_*$ steht senkrecht auf V . $\square$

Das liefert uns den folgenden Satz.

Satz 1.8. *Ist H ein Hilbertraum und V ein abgeschlossener Teilraum von H , so ist $H = V \oplus V^\perp$ eine orthogonale, direkte Zerlegung, d. h. $H = V + V^\perp$, $V \cap V^\perp = \{0\}$ und $V \perp V^\perp$. Weiter ist die Abbildung $P : H \rightarrow V$, die jedem $u \in H$ seine Bestapproximation $v_* \in V$ zuordnet, eine lineare Projektion, die sogenannte Orthogonalprojektion auf V . Für diese gilt $\ker(P) = V^\perp$ und $\text{ran}(P) = V$.*

1 Hilberträume

Beweis. Sei $u \in H$ und v_* die Bestapproximation an u in V nach dem Projektionssatz. Dann haben wir in Satz 1.7 gesehen, dass $u = v_* + u - v_*$ mit $v_* \in V$ und $u - v_* \in V^\perp$ gilt. Also ist $H = V + V^\perp$ und die Zerlegung ist auch direkt, denn für $u \in V \cap V^\perp$ gilt $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = 0$, also ist dann $u = 0$. Das zeigt $H = V \oplus V^\perp$.

Zum Beweis der Aussagen über P beobachten wir zuerst, dass für jedes $v \in V$ die Bestapproximation von v in V natürlich durch v selbst gegeben ist, also ist $\text{ran}(P) = V$ und für alle $u \in H$ gilt wegen $Pu \in V$ auch $P^2u = P(Pu) = Pu$, d. h. es ist $P^2 = P$ und P ist eine Projektion. Zum Nachweis der Linearität von P seien $u_1, u_2 \in H$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda u_1 + u_2 &= \lambda(Pu_1 + (u_1 - Pu_1)) + Pu_2 + (u_2 - Pu_2) \\ &= \underbrace{\lambda Pu_1 + Pu_2}_{\in V} + \underbrace{\lambda(u_1 - Pu_1) + u_2 - Pu_2}_{\in V^\perp}. \end{aligned}$$

Da die Zerlegung des Elements $\lambda u_1 + u_2$ in die Räume V und $V^\perp$ nach dem oben gezeigten eindeutig ist und wir hier eine solche haben, gilt $P(\lambda u_1 + u_2) = \lambda Pu_1 + Pu_2$ und wir haben Linearität von P gezeigt.

Sei $u \in \ker(P)$. Dann gilt nach Satz 1.7 sofort $u = u - Pu \perp V$, also $u \in V^\perp$. Ist umgekehrt $u \in V^\perp$, so ist $u = 0 + u$ eine Zerlegung von u in Elemente in V und $V^\perp$ und da diese nach dem oben gezeigten eindeutig ist, bekommen wir $Pu = 0$, also $u \in \ker(P)$. Zusammen ist $\ker(P) = V^\perp$ und alle Behauptungen sind gezeigt. $\square$

Als direkte Schlussfolgerung aus diesem Satz können wir festhalten, dass in Satz 1.5 (d) tatsächlich sogar Gleichheit gilt.

Satz 1.9. Ist H ein Hilbertraum und $M \subseteq H$. Dann gilt $(M^\perp)^\perp = \overline{\text{span}(M)}$. Für einen Teilraum $U \subseteq H$ gilt also insbesondere $(U^\perp)^\perp = \overline{U}$ und ist U sogar ein abgeschlossener Teilraum von H , so ist $(U^\perp)^\perp = U$.

Warnung 1.10. Man beachte, dass für einen Untervektorraum U eines Prähilbertraums damit im Allgemeinen *nicht* wie aus dem endlichdimensionalen gewohnt $(U^\perp)^\perp = U$, sondern $(U^\perp)^\perp = \overline{U}$ gilt! Merke: Ein doppeltes orthogonales Komplement produziert einen Abschluss. In endlichdimensionalen Räumen fällt das nicht auf, denn dort ist jeder Teilraum automatisch eine abgeschlossene Menge.

Diesen Effekt werden Sie in der Funktionalanalysis oder allgemeiner bei der Beschäftigung mit im Allgemeinen unendlich-dimensionalen Vektorräumen immer wieder erleben: Immer wenn man denkt, dass das doch gerade alles genauso ist wie im $\mathbb{R}^d$, kommt ein kleiner aber biestiger Effekt um die Ecke, in dem die unendliche Dimension dann doch eine unerwartete Auswirkung hat. Und hier ist der Unterschied unter Umständen gewaltig! So gilt beispielsweise im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^d)$ die Gleichheit $(C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^\perp)^\perp = L^2(\mathbb{R}^d)$ (warum?), bei der das doppelte orthogonale Komplement den Raum wirklich dramatisch vergrößert.

1.2 Der Projektionssatz und Orthogonalprojektionen

Es wird eines der immer wiederkehrenden Themen dieser Vorlesung werden, dass Sie ein gutes Gespür dafür entwickeln wie sich unendlich-dimensionale Hilbert- und Banachräume anfühlen und wo die Fußangeln im Vergleich zum endlich-dimensionalen Fall liegen.

Beweis. Wir wenden Satz 1.8 auf den abgeschlossenen Teilraum $V := \overline{\text{span}(M)}$ und auf den nach Satz 1.5 (b) ebenfalls abgeschlossenen Teilraum $V^\perp = (\text{span}(M))^\perp$ an und erhalten

$$V \oplus V^\perp = H = (V^\perp)^\perp \oplus V^\perp.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung ist dann $V = (V^\perp)^\perp$. Also gilt mit zweimaliger Anwendung von Satz 1.5 (a)

$$(M^\perp)^\perp \subseteq ((\overline{\text{span}(M)})^\perp)^\perp = (V^\perp)^\perp = V = \overline{\text{span}(M)}$$

und zusammen mit der Inklusion aus Satz 1.5 (d) sind wir fertig. $\square$

Wir können damit schnell das folgende Dichtheitskriterium beweisen.

Lemma 1.11. *Sei H ein Hilbertraum. Ein Teilraum $D \subseteq H$ ist genau dann dicht in H , wenn $D^\perp = \{0\}$ gilt.*

Beweis. Es sei D ein dichter Teilraum von H . Dann ist $D^\perp$ ein abgeschlossener Teilraum von H , mit den Sätzen 1.8 und 1.9 gilt also

$$H = D^\perp \oplus (D^\perp)^\perp = D^\perp \oplus \overline{D} = D^\perp \oplus H,$$

und das liefert $D^\perp = \{0\}$. Ist umgekehrt $D^\perp = \{0\}$, so gilt $(\overline{D})^\perp = D^\perp = \{0\}$ nach Satz 1.5 (c) und Satz 1.8 liefert

$$H = \overline{D} \oplus (\overline{D})^\perp = \overline{D} \oplus \{0\} = \overline{D},$$

d. h. D ist dicht in H . $\square$

Bemerkung 1.12. Die Aussage des vorstehenden Satzes beinhaltet insbesondere $H^\perp = \{0\}$ und das liefert sofort die folgende oft nützliche Aussage: Ist $u \in H$ so, dass $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $v \in H$ ist, so ist $u = 0$. Besonders häufig braucht man das in folgender Version: Sind $u_1, u_2 \in H$ so, dass $\langle u_1, v \rangle = \langle u_2, v \rangle$ für alle $v \in H$ gilt, so ist $u_1 = u_2$.

Die Erkenntnis ist hier also, dass die Auswertung der Skalarprodukte mit allen Elementen des Hilbertraums genug Informationen enthält, um jeden Punkt in H zu identifizieren.

1.3 Orthonormalbasen

Jeder Hilbertraum hat natürlich als Vektorraum eine Basis im Sinne der Linearen Algebra, d. h. jeder Vektor des Hilbertraums lässt sich als Linearkombination, also als *endliche* Summe von Vielfachen der Basisvektoren, darstellen. Im Hilbertraum haben wir aber zusätzlich einen Konvergenzbegriff und können insofern auch „abzählbare Linearkombinationen“, d. h. Reihenentwicklungen aus Vielfachen von Basisvektoren zulassen. Dadurch kann man die Größe der benötigten Basen massiv reduzieren und bekommt ein deutlich handlicheres Konzept, das wir uns in diesem Abschnitt anschauen wollen.

Definition 1.13. Es sei X ein normierter Raum und H ein Hilbertraum.

- (a) Eine Basis von X im Sinne der Linearen Algebra wird auch Hamelbasis genannt.
- (b) Eine höchstens abzählbare Teilmenge $(e_j)_{j \in I}$ von X heißt Schauderbasis von X , wenn es für jedes $u \in X$ eindeutige Koeffizienten $(\alpha_j)_{j \in I}$ in $\mathbb{K}$ gibt mit

$$\sum_{j \in I} \alpha_j e_j = u.$$

(Das beinhaltet im Falle das I unendlich ist insbesondere, dass die entstehende Reihe in H gegen u konvergieren muss.)

- (c) Ein Teilmenge $S \subseteq H$ heißt Orthogonalsystem, falls $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ für alle $e_1, e_2 \in S$ mit $e_1 \neq e_2$ gilt, d. h. wenn alle Elemente paarweise orthogonal stehen.
- (d) Ein Orthogonalsystem S in H heißt Orthonormalsystem, falls auch $\|e\| = 1$ für jedes $e \in S$ gilt.
- (e) Ist S ein Orthonormalsystem von H , dass außerdem eine Schauderbasis von H ist, so nennt man S eine Orthonormalbasis von H .

Beispiel 1.14. (a) Im Hilbertraum ℓ^2 bilden die Folgen $e_n = (e_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $e_j^{(n)} = \delta_{jn}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Orthonormalbasis, denn zum Einen bilden diese Elemente von ℓ^2 ein Orthogonalsystem wegen

$$\langle e_n, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{jn} \overline{\delta_{jk}} = \delta_{kn}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Zum anderen gilt für jedes $a = (a_n) \in \ell^2$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| a - \sum_{n=1}^N a_n e_n \right\|_{\ell^2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| (0, 0, \dots, 0, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots) \right\|_{\ell^2} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} = 0, \end{aligned}$$

denn das ist (die Wurzel) eines Reihenrestes einer konvergenten Reihe. Damit konvergiert $\sum_{n=1}^N a_n e_n$ für $N \rightarrow \infty$ in ℓ^2 gegen a und es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Folge (a_n) die einzig mögliche Koeffizientenfolge ist, für die das gilt. Ist also (b_n) eine andere Koeffizientenfolge mit $b_{n_0} \neq a_{n_0}$, so gilt für $N \geq n_0$

$$\left\| a - \sum_{n=1}^N b_n e_n \right\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^N |a_n - b_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \geq |a_{n_0} - b_{n_0}|,$$

und der Ausdruck kann damit für $N \rightarrow \infty$ nicht nach Null konvergieren.

- (b) Eine weitere Orthonormalbasis in diesem Sinne haben wir schon in Analysis II kennengelernt, auch wenn wir es dort nicht so genannt haben. Im Hilbertraum $L^2([-\pi, \pi])$ mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ haben wir dort in den Betrachtungen zu Fourierreihen gezeigt, dass für die Funktionen $e_n(x) := e^{inx}$ für $n \in \mathbb{Z}$ folgende Resultate gelten:

- Sie bilden ein Orthonormalsystem (Satz II.1.3)
- Für jede sprungstetige Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es eindeutige Zahlen $\hat{f}(n)$ mit $f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e_n(x)$, wobei der Grenzwert bezüglich der Norm in $L^2([-\pi, \pi])$, die sich aus obigem Skalarprodukt ergibt, zu verstehen ist. (Parsevalsche Gleichung, Satz II.3.9)

Wenn Sie sich den Beweis des zweiten Punktes jetzt noch einmal anschauen, werden Sie feststellen, dass das Argument genauso für jedes $f \in L^2([-\pi, \pi])$ durchgeht. Zusammen bilden also die Basisfunktionen der Fourierreihen eine abzählbare Orthonormalbasis dieses Lebesgue-Raums.

Satz 1.15. Sei $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ein Orthonormalsystem eines Hilbertraums H . Dann gilt für jedes $u \in H$

$$\|u\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle u, e_k \rangle|^2 = \left\| u - \sum_{k=1}^n \langle u, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \text{dist}(u, \text{span}(\{e_1, \dots, e_n\}))^2 \geq 0.$$

Insbesondere gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n |\langle u, e_k \rangle|^2 \leq \|u\|^2.$$

1 Hilberträume

Beweis. Für jede Wahl von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \left\| u - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 &= \left\langle u - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, u - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\rangle \\
 &= \|u\|^2 - \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \langle u, e_k \rangle - \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle e_k, u \rangle + \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \\
 &= \|u\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle u, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n \left[|\langle u, e_k \rangle|^2 - \overline{\alpha_k} \langle u, e_k \rangle - \alpha_k \overline{\langle u, e_k \rangle} + |\alpha_k|^2 \right] \\
 &= \|u\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle u, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n \left(\langle u, e_k \rangle - \alpha_k \right) \overline{\left(\langle u, e_k \rangle - \alpha_k \right)} \\
 &= \|u\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle u, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle u, e_k \rangle - \alpha_k|^2.
 \end{aligned}$$

Setzt man hier speziell $\alpha_k = \langle u, e_k \rangle$, $k = 1, \dots, n$, ein, so folgt die erste behauptete Gleichheit. Außerdem wird am letzten Term dieser Gleichungskette ersichtlich, dass der betrachtete Ausdruck genau dann minimal wird, wenn $\alpha_k = \langle u, e_k \rangle$ für $k = 1, \dots, n$ gilt. Das liefert die zweite behauptete Gleichheit. Schließlich ist die Distanz eines Punktes von einer Menge natürlich positiv und die Besselsche Ungleichung entsteht einfach durch Umstellen der damit bewiesenen Ungleichung. $\square$

Beim Nachweis, dass eine gegebene Menge eine Orthonormalbasis ist, liegt die Schwierigkeit meist darin, zu zeigen, dass wirklich der gesamte Raum aufgespannt wird. Wir sammeln einige Charakterisierungen dafür.

Satz 1.16. *Sei (e_n) ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (a) (e_n) ist eine Orthonormalbasis von H .
- (b) $\text{span}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$ ist dicht in H .
- (c) Für alle $u \in H$ gilt $u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n$.
- (d) Für alle $u, v \in H$ gilt $\langle u, v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle \overline{\langle v, e_n \rangle}$ (Parsevalsche Gleichung).
- (e) Für alle $u \in H$ gilt $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2$.

Beweis. Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) folgt direkt aus der Definition einer Orthonormalbasis. Für den Beweis von (b) $\Rightarrow$ (c) sei $u \in H$, $u_n = \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j^{(n)} e_j$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in $\text{span}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$, die in H gegen u konvergiert und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$

mit $\|u - u_{n_0}\| < \varepsilon$. Für jedes $N \geq N_{n_0}$ gilt dann nach Satz 1.15

$$\begin{aligned} \left\| u - \sum_{k=1}^N \langle u, e_k \rangle e_k \right\| &= \text{dist}(u, \text{span}(\{e_1, \dots, e_N\})) \leq \text{dist}(u, \text{span}(\{e_1, \dots, e_{N_{n_0}}\})) \\ &\leq \|u - u_{n_0}\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit gilt $u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k \rangle e_k$.

Für den Beweis von (c) $\Rightarrow$ (d) nutzen wir die Stetigkeit des Skalarprodukts: Für alle $u, v \in H$ gilt damit nach (c)

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=1}^N \langle u, e_n \rangle e_n, v \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle u, e_n \rangle \langle e_n, v \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle u, e_n \rangle \overline{\langle v, e_n \rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle \overline{\langle v, e_n \rangle}. \end{aligned}$$

Um von (d) nach (e) zu gelangen, setzt man einfach $u = v$ und die Implikation (e) $\Rightarrow$ (c) folgt mit der Hilfe von Satz 1.15 aus

$$\left\| u - \sum_{n=1}^N \langle u, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle u, e_n \rangle|^2 \xrightarrow{(e)} 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Damit bleibt noch (c) $\Rightarrow$ (a) zu zeigen und da (e_n) schon ein Orthonormalsystem ist und wir (c) voraussetzen, bleibt nur noch zu zeigen, dass die Koeffizienten in der Basisdarstellung eindeutig sind. Seien dazu $u \in H$ und $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$, gegeben mit $u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ wieder dank der Stetigkeit des Skalarprodukts und Orthogonalität

$$0 = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k \rangle e_k - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_n \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (\langle u, e_k \rangle - \alpha_k) \langle e_k, e_n \rangle = \langle u, e_n \rangle - \alpha_n,$$

also ist $\alpha_n = \langle u, e_n \rangle$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und wir sind fertig. $\square$

Als offensichtliche Frage bleibt, welche Hilberträume eine Orthonormalbasis besitzen. Eine offensichtlich notwendige Voraussetzung ist, dass der Raum so „klein“ sein muss, dass es eine abzählbare Schauderbasis gibt. Das erheben wir zu einer Definition.

Definition 1.17. Ein normierter Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare Teilmenge besitzt, deren lineare Hülle dicht in ihm liegt.

Bemerkung 1.18. (a) Ist H ein separabler Hilbertraum, so gibt es sogar eine abzählbare Teilmenge von H , die selbst schon dicht in H liegt. Das sieht man, indem man für eine Teilmenge D von H , die $\text{span}(D) = H$ erfüllt, alle rationalen Linearkombinationen aus ihren Elementen betrachtet. Das ist immer noch eine abzählbare Menge und liegt nun selbst dicht in H .

1 Hilberträume

- (b) Wir haben bereits nicht-triviale Beispiele von separablen Hilberträumen gesehen: Nach Beispiel 1.14 haben ℓ^2 und $L^2([-\pi, \pi])$ abzählbare Orthonormalbasen, sind also insbesondere separabel.

Tatsächlich besitzt jeder separable Hilbertraum eine abzählbare Orthonormalbasis. Das wollen wir jetzt nachweisen. Dazu nutzen wir den folgenden Import aus der Linearen Algebra.

Satz 1.19 (Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt). *Es sei H ein Hilbertraum, I eine abzählbare Indexmenge und $\{e_n : n \in I\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von H . Dann existiert ein abzählbares Orthonormalsystem S in H mit $\text{span}(S) = \text{span}(\{e_n : n \in I\})$.*

Theorem 1.20. (a) *Jeder separable Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

- (b) *Jeder unendlich-dimensionale, separable Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu ℓ^2 .*

Beweis. (a) Es sei H ein separabler Hilbertraum und (v_n) eine Folge in H , deren lineare Hülle in H dicht liegt. Durch Weglassen von Folgengliedern können wir eine Menge D von Elementen von H mit $\text{span}(D) = \text{span}(\{v_n : n \in \mathbb{N}\})$ erreichen, deren Elemente alle linear unabhängig sind. Wendet man auf diese Elemente das Gram-Schmidt-Verfahren an, erhält man ein Orthonormalsystem S von H mit $\text{span}(S) = \overline{\text{span}(D)} = \overline{\text{span}(\{v_n\})} = H$, also eine Orthonormalbasis von H .

- (b) Es sei H ein unendlich-dimensionaler, separabler Hilbertraum. Dann existiert nach dem eben bewiesenen eine abzählbar unendliche Orthonormalbasis (b_n) von H . Damit definieren wir die Abbildung

$$T : \begin{cases} H \rightarrow \ell^2 \\ u \mapsto (\langle u, b_n \rangle_H)_{n \in \mathbb{N}}. \end{cases}$$

Wegen Satz 1.16 (e) ist die Folge $(\langle u, b_n \rangle_H)$ tatsächlich in ℓ^2 mit $\|(\langle u, b_n \rangle)\|_{\ell^2} = \|u\|_H$, so dass T vernünftig definiert ist und wir schon $\|Tu\|_{\ell^2} = \|u\|_H$, d. h. die Isometrie-Eigenschaft, auf der Haben-Seite verbuchen können. Damit folgt auch Injektivität und da T offensichtlich linear ist, bleibt nur noch die Surjektivität zu zeigen.

Gibt man eine Folge $a = (a_n) \in \ell^2$ vor, so ist die offensichtliche Idee $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ zu setzen um $Tu = a$ zu erreichen. Zuerst müssen wir aber klären, dass diese Reihe in H konvergiert. Sei dazu $u_N := \sum_{n=1}^N a_n b_n$, $N \in \mathbb{N}$, die Folge der Partialsummen. Dann gilt mit dem Satz von Pythagoras, vgl. Erinnerung 1.1 (d), für alle $N, M \in \mathbb{N}$ mit $N < M$

$$\|u_M - u_N\|_H^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^M a_n b_n \right\|_H^2 = \sum_{n=N+1}^M |a_n|^2 \|b_n\|_H^2 = \sum_{n=N+1}^M |a_n|^2.$$

1.3 Orthonormalbasen

Da $a \in \ell^2$ ist, konvergiert die Reihe über $|a_n|^2$, also ist nach dem Cauchy Kriterium für Reihen die Folge $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in H und damit konvergent. Für den Grenzwert $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \in H$ gilt dann

$$Tu = \left(\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, b_k \right\rangle_H \right)_{k \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots) = a$$

und wir sind fertig. □

Bemerkung 1.21. Tatsächlich kann man zeigen, dass es zu jedem beliebigen Hilbertraum H einen geeigneten Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gibt, so dass H zu $L^2(\Omega)$ isomorph ist. Dieses Resultat werden wir hier aber nicht beweisen und uns mit obigem Ergebnis zufrieden geben.

2 Lineare Operatoren auf Hilberträumen

2.1 Grundlagen

Wir beginnen wieder mit ein paar Erkenntnissen aus der Analysis II zu stetigen linearen Abbildungen auf normierten Vektorräumen.

Erinnerung 2.1. (a) Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Vektorräume, so schreiben wir

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{T: X \rightarrow Y : T \text{ linear und stetig}\}$$

für den Vektorraum aller stetigen und linearen Abbildungen (oft auch *Operatoren* genannt) von X nach Y . Im häufigen Spezialfall, dass $X = Y$ ist, schreiben wir kurz $\mathcal{L}(X)$ statt $\mathcal{L}(X, X)$.

Weiter bezeichnen

$$\ker(T) := \{u \in X : Tu = 0\} \quad \text{den Kern und}$$

$$\operatorname{ran}(T) := T(X) \quad \text{das Bild}$$

von T .

(b) Auf dem Raum $\mathcal{L}(X, Y)$ gibt es mit der *Operatornorm*

$$\|T\|_{X \rightarrow Y} := \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X = 1}} \|Tu\|_Y = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X \leq 1}} \|Tu\|_Y$$

eine natürliche Norm, die auch diesen wieder zu einem normierten Vektorraum macht. Weiter gilt für jedes $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und alle $u \in X$ die Abschätzung $\|Tu\|_Y \leq \|T\|_{X \rightarrow Y} \|u\|_X$ und die Operatornorm ist *submultiplikativ*, d. h. für zwei Operatoren $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ mit einem weiteren normierten Vektorraum Z gilt $\|ST\|_{X \rightarrow Z} \leq \|S\|_{Y \rightarrow Z} \cdot \|T\|_{X \rightarrow Y}$.

(c) Dass die Operatornorm wohldefiniert ist, liegt an einem wichtigen Satz aus der Analysis II (Satz II.8.12), den wir sehr oft brauchen werden: Ist $T: X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung so sind äquivalent:

2 Lineare Operatoren auf Hilberträumen

- (i) T ist stetig im Nullpunkt.
- (ii) T ist stetig auf X .
- (iii) T ist Lipschitz-stetig auf X .
- (iv) T ist beschränkt, d. h. es gibt ein $C \geq 0$ mit $\|Tu\|_Y \leq C\|u\|_X$ für alle $u \in X$.

Darauf fußt auch die übliche Methode, um Stetigkeit eines linearen Operators T nachzuweisen und die Operatornorm zu bestimmen: Man zeigt zunächst Beschränktheit, d. h. man schätzt $\|Tu\|_Y \leq C\|u\|_X$ für alle $u \in X$ mit einer geeigneten Konstante C ab. Dann weiß man schon, dass der Operator stetig ist und dass $\|T\|_{X \rightarrow Y} \leq C$ gilt. Um $\|T\|_{X \rightarrow Y} = C$ zu zeigen, kann man dann im besten Fall ein spezielles $u_0 \in X$ finden mit $\|Tu_0\|_Y = C\|u_0\|_X$ oder Elemente, für die die Konstante C in der Abschätzung beliebig gut approximiert wird.

Beispiel 2.2. Die bekannten linearen Abbildungen in $\mathbb{C}^d$ aus der Linearen Algebra sind natürlich Beispiele von linearen Operatoren auf Hilberträumen. Darüber hinaus sammelt dieses Beispiel ein paar weitere Beispiele in unendlicher Dimension. Es handelt sich dabei um sehr wichtige Standardbeispiele, die man kennen und immer zur Hand haben sollte, um sich Zusammenhänge zu veranschaulichen oder Gegenbeispiele zu konstruieren.

- (a) (Multiplikationsoperator auf ℓ^2)

Ist $m = (m_n)$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$, so ist für jedes $(a_n) \in \ell^2$ auch die Folge $(m_n a_n)$ in ℓ^2 , denn mit $\|m\|_{\ell^\infty} = \sup_{n=1}^\infty |m_n|$ gilt

$$\|(m_n a_n)\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^\infty |m_n a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^\infty \|m\|_{\ell^\infty}^2 |a_n|^2 \right)^{1/2} = \|m\|_{\ell^\infty} \|(a_n)\|_{\ell^2}.$$

Die lineare Abbildung

$$M_m : \begin{cases} \ell^2 & \rightarrow \ell^2 \\ (a_n) & \mapsto (m_n a_n) = (m_1 a_1, m_2 a_2, m_3 a_3, \dots), \end{cases}$$

heißt *Multiplikationsoperator* mit *Multiplikatorfolge* m . Nach obiger Rechnung ist dieser stetig mit $\|M_m\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} \leq \|m\|_{\ell^\infty}$. Um zu zeigen, dass sogar $\|M_m\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \|m\|_{\ell^\infty}$ gilt, geben wir $\varepsilon > 0$ beliebig vor. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq \|m\|_{\ell^\infty} - |m_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$ und für die Folge $(e_{n_\varepsilon}) \in \ell^2$, die nur an der n_ε -ten Stelle eine Eins und sonst nur Nullen als Folgenglieder hat, gilt

$$\|M_m e_{n_\varepsilon}\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^\infty |m_n e_n^{(n_\varepsilon)}|^2 \right)^{1/2} = |m_{n_\varepsilon}| \geq \|m\|_{\ell^\infty} - \varepsilon = (\|m\|_{\ell^\infty} - \varepsilon) \|e_{n_\varepsilon}\|_{\ell^2}.$$

Da ε beliebig war, folgt daraus die behauptete Gleichheit.

(b) (Shiftoperatoren auf ℓ^2)

Die Abbildungen

$$L : \begin{cases} \ell^2 & \rightarrow \ell^2 \\ (a_n) & \mapsto (a_{n+1}) = (a_2, a_3, a_4, \dots) \end{cases} \quad (\text{Linksshift})$$

$$R : \begin{cases} \ell^2 & \rightarrow \ell^2 \\ (a_n) & \mapsto (0, (a_{n-1})_{n \geq 2}) = (0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \end{cases} \quad (\text{Rechtsshift})$$

sind linear und stetig mit $\|L\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = \|R\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 1$. Der Linksshift ist surjektiv, aber nicht injektiv und der Rechtsshift ist umgekehrt injektiv aber nicht surjektiv.

(c) (Fouriertransformation in $L^2(\mathbb{R}^d)$)

Wir haben bereits in der Vorlesung Integrationstheorie bewiesen, dass die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ein stetiger, isometrischer und stetig invertierbarer linearer Operator auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ ist. Damit ist insbesondere $\|\mathcal{F}\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 1$.

(d) (Multiplikationsoperator auf L^2)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $m \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist

$$M_m : \begin{cases} L^2(\Omega) & \rightarrow L^2(\Omega) \\ f & \mapsto mf \end{cases}$$

ein stetiger linearer Operator mit $\|M_m\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \|m\|_{L^\infty}$. Auch dieser heißt *Multiplikationsoperator* mit *Multiplikator* m .

(e) (Shiftoperator auf $L^2(\mathbb{R}^d)$)

Ist $b \in \mathbb{R}^d$, so ist der *Shiftoperator* S_b gegeben durch $(S_b f)(x) = f(x + b)$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Auch dieser ist stetig mit $\|S_b\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 1$.

(f) (Faltungsoperator auf $L^2(\mathbb{R}^d)$)

Für $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definieren wir den *Faltungsoperator* $K_k : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ durch $K_k f = k * f$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dieser ist ebenfalls ein stetiger Operator mit $\|K_k\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \|\mathcal{F}k\|_{L^\infty}$.

(g) (Orthogonalprojektionen)

Es sei H ein Hilbertraum und $V \neq \{0\}$ ein abgeschlossener Teilraum von H . Dann ist die Orthogonalprojektion P auf V aus Satz 1.8 ein stetiger Operator mit $\|P\|_{H \rightarrow H} = 1$.

Übungsaufgabe 2.3. Begründen Sie alle unbewiesenen Behauptungen in Beispiel 2.2 und rechnen Sie insbesondere alle angegebenen Operatornormen nach.

2 Lineare Operatoren auf Hilberträumen

Es gibt viele Dinge über lineare Abbildungen vor allem aus der Linearen Algebra, die wir wieder aufgreifen werden, ohne sie hier alle im Detail zu wiederholen. Stattdessen sammeln wir ein paar eher analytische Eigenschaften, die für das weitere wichtig werden.

Lemma 2.4. *Sind X und Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, so ist $\ker(T)$ ein abgeschlossener Teilraum von X .*

Beweis. Ist (u_n) eine Folge in $\ker(T)$, die in X konvergiert, so gilt wegen der Stetigkeit von T sofort

$$Tu = T(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

d. h. $u \in \ker(T)$. □

Satz 2.5 (Dichtheitsargument: Fortsetzung von Operatoren). *Es seien X ein normierter Raum, H ein Hilbertraum und $D \subseteq X$ ein dichter Teilraum von X , der ebenfalls mit der X -Norm ausgestattet sei. Wenn $T : D \rightarrow H$ ein beschränkter Operator ist, dann gibt es ein eindeutiges $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, H)$ mit $\tilde{T} = T$ auf D und $\|\tilde{T}\|_{X \rightarrow H} = \|T\|_{D \rightarrow H}$.*

Beweis. Die behauptete Eindeutigkeit folgt aus der Dichtheit von D in X und der behaupteten Stetigkeit von $\tilde{T}$: Sind $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2 \in \mathcal{L}(X, H)$ zwei Fortsetzungen von T , so gilt für jedes $u \in X$ mit einer Folge (u_n) in D , die in X gegen u konvergiert

$$\tilde{T}_1 u = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_1 u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_2 u_n = \tilde{T}_2 u.$$

Wir wenden uns also der Existenz von $\tilde{T}$ zu. Sei dazu $u \in X$ und (u_n) eine Folge in D , die in X gegen u konvergiert. Dann ist mit Hilfe von

$$\|T u_n - T u_m\|_H = \|T(u_n - u_m)\|_H \leq \|T\|_{D \rightarrow H} \|u_n - u_m\|_X$$

wegen der Konvergenz von (u_n) in X auch $(T u_n)$ eine Cauchyfolge in H . Da H vollständig ist, existiert also $v := \lim_{n \rightarrow \infty} T u_n$. Bevor wir jetzt voreilig $\tilde{T}u = v$ setzen, sollten wir klären, dass dieser Grenzwert v nicht von der Wahl der approximierenden Folge (u_n) abhängt. Ist also $(\hat{u}_n)$ eine weitere Folge in D , die in X gegen u konvergiert und setzen wir dank desselben Arguments wie eben $\hat{v} := \lim_{n \rightarrow \infty} T \hat{u}_n$, so gilt

$$\begin{aligned} \|\hat{v} - v\|_H &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} (T \hat{u}_n - T u_n) \right\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(\hat{u}_n - u_n)\|_H \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\|_{D \rightarrow H} \|\hat{u}_n - u_n\|_X \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\|_{D \rightarrow H} (\|\hat{u}_n - u\|_X + \|u_n - u\|_X) = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\hat{v} = v$ und wir können wirklich gefahrlos $\tilde{T}u = v$ definieren.

Dann gilt offensichtlich $\tilde{T}u = Tu$ für alle $u \in D$, denn man kann schlicht die konstante Folge $u_n = u$, $n \in \mathbb{N}$, wählen. Für $u_1, u_2 \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ wählen wir Approximationen

2.1 Grundlagen

$(u_{1,n})$ von u_1 und $(u_{2,n})$ von u_2 aus Elementen von D . Dann konvergiert $(\lambda u_{1,n} + u_{2,n})$ in X gegen $\lambda u_1 + u_2$ und wir erhalten

$$\tilde{T}(\lambda u_1 + u_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\lambda u_{1,n} + u_{2,n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda T u_{1,n} + T u_{2,n}) = \lambda \tilde{T} u_1 + \tilde{T} u_2,$$

also ist auch $\tilde{T}$ linear.

Der Nachweis der Beschränktheit gelingt dank

$$\|\tilde{T}u\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T u_n\|_H \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\|_{D \rightarrow H} \|u_n\|_X = \|T\|_{D \rightarrow H} \|u\|_X, \quad u \in X,$$

und das liefert auch gleich $\|\tilde{T}\|_{X \rightarrow H} \leq \|T\|_{D \rightarrow H}$. Die umgekehrte Ungleichung folgt aber sofort wegen der Fortsetzerei aus

$$\|\tilde{T}\|_{X \rightarrow H} = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X=1}} \|\tilde{T}u\|_H \geq \sup_{\substack{u \in D \\ \|u\|_X=1}} \|\tilde{T}u\|_H = \sup_{\substack{u \in D \\ \|u\|_X=1}} \|Tu\|_H = \|T\|_{D \rightarrow H}. \quad \square$$

Satz 2.6 (Dichtheitsargument: Fortsetzung von Operatorenfolgen). *Es sei X ein normierter Raum, H ein Hilbertraum und D ein dichter Teilraum von X . Weiter sei (T_n) eine Folge in $\mathcal{L}(X, H)$ mit $C := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{X \rightarrow H} < \infty$. Wenn für jedes $u \in D$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n u$ in H existiert, dann existiert $Tu := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n u$ sogar für jedes $u \in X$, der Operator $T : X \rightarrow H$ ist linear und beschränkt und $\|T\|_{X \rightarrow H} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{X \rightarrow H}$.*

Dieser Beweis ist ein typisches Beispiel eines 3ε -Arguments.

Beweis. Sei $u \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wegen der Dichtheit von D können wir ein $u_\varepsilon \in D$ wählen mit $\|u - u_\varepsilon\|_X < \varepsilon/C$. Dann existiert nach Voraussetzung der Grenzwert von $(T_n u_\varepsilon)$, dies ist also eine Cauchyfolge in H . Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n u_\varepsilon - T_m u_\varepsilon\|_H < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Für all diese $n, m \geq n_0$ gilt dann auch

$$\begin{aligned} \|T_n u - T_m u\|_H &\leq \|T_n u - T_n u_\varepsilon\|_H + \|T_n u_\varepsilon - T_m u_\varepsilon\|_H + \|T_m u_\varepsilon - T_m u\|_H \\ &\leq \|T_n\|_{X \rightarrow H} \|u - u_\varepsilon\|_X + \varepsilon + \|T_m\|_{X \rightarrow H} \|u - u_\varepsilon\|_X \\ &\leq C \frac{\varepsilon}{C} + \varepsilon + C \frac{\varepsilon}{C} = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass auch für jedes $u \in X$ die Folge $(T_n u)$ eine Cauchyfolge in H ist. Da H ein Hilbertraum ist, hat diese einen Grenzwert und dieser definiert uns nun unseren Grenzoperator T durch $Tu := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n u$, $u \in X$. Dieser ist wegen

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda u_1 + u_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda T_n u_1 + T_n u_2) = \lambda T u_1 + T u_2$$

linear und für die Beschränktheit schätzen wir für alle $u \in X$ ab:

$$\|Tu\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n u\|_H = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n u\|_H \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{X \rightarrow H} \|u\|_X.$$

Das liefert auch gleich die behauptete Abschätzung für die Operatornorm von T . $\square$

2.2 Funktionale auf Hilberträumen

Wir kommen nun zum namensgebenden Konzept der Funktionalanalysis, den Funktionalen. Funktionale sind stetige lineare Abbildungen vom betrachteten normierten Vektorraum in den Skalkörper und wenn man die Philosophie der Funktionalanalysis in einem Satz zusammenfassen soll, dann beschäftigt diese sich mit Methoden wie man durch das Studium der Funktionale Erkenntnisse über den Raum selbst gewinnen kann.

In diesem ganzen Abschnitt sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\| \cdot \|$.

Definition 2.7. Jede lineare und stetige Abbildung von H nach $\mathbb{K}$ wird (lineares) Funktional genannt und

$$H' := \{ \varphi : H \rightarrow \mathbb{K} : \varphi \text{ linear und stetig} \} = \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$$

heißt Dualraum von H .

Der Dualraum ist ebenfalls ein Vektorraum, der mit der Operatornorm $\| \cdot \|_{H'} := \| \cdot \|_{H \rightarrow \mathbb{K}}$ zu einem normierten Raum wird. Wie wir feststellen werden, gilt sogar noch mehr und wir werden in der Lage sein, H' sehr genau zu beschreiben. Dazu schauen wir uns die Funktionale auf H genauer an.

Beispiel 2.8. Ist $v \in H$ fix, so ist die Bildung $\varphi_v : H \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\varphi_v(u) = \langle u, v \rangle$, $u \in H$, ein lineares Funktional auf H mit $\| \varphi_v \|_{H'} = \| v \|$. Tatsächlich gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$| \varphi_v(u) | = | \langle u, v \rangle | \leq \| u \| \| v \|, \quad u \in H,$$

also ist φ_v stetig mit $\| \varphi_v \|_{H'} \leq \| v \|$ und wegen $\varphi_v(v) = \langle v, v \rangle = \| v \|^2$ gilt auch $\| \varphi_v \|_{H'} \geq \| v \|$ und damit $\| \varphi_v \|_{H'} = \| v \|$.

Bemerkung 2.9. Bemerkung 1.12 hat festgestellt, dass die Kenntnis der Skalarprodukte mit allen Elementen des Hilbertraums ausreicht, um einen Punkt eindeutig zu identifizieren. Dieses Beispiel zeigt damit, dass es in H' in jedem Fall genug Funktionale gibt, um jede Ecke des Raumes punktgenau auszuleuchten. Die oben beschriebene Grundidee der Funktionalanalysis kann hier also gut funktionieren.

Obiges Beispiel sieht nach dem klassischen erst-mal-ein-Trivialbeispiel-hinschreiben-Vorlesungs-Move aus, aber das ist weit gefehlt. Der folgende Darstellungssatz von Riesz-Fréchet besagt nämlich, dass wir damit schon alle Elemente von H' beschrieben haben! Wir formalisieren ein wenig das Beispiel: Demnach ist die Abbildung $\Phi : H \rightarrow H'$ mit $\Phi(v) = \varphi_v$ eine isometrische Abbildung, insbesondere also auch injektiv. Außerdem gilt für alle $v, w \in H$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\Phi(\lambda v + w) = \langle \cdot, \lambda v + w \rangle = \bar{\lambda} \langle \cdot, v \rangle + \langle \cdot, w \rangle = \bar{\lambda} \Phi(v) + \Phi(w),$$

d. h. Φ ist anti-linear, bzw. linear für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Die entscheidende Eigenschaft von Φ kommt aber nun.

Theorem 2.10 (Darstellungssatz von Riesz-Fréchet). *Für jedes $\varphi \in H'$ existiert ein eindeutiges $v \in H$ mit*

$$\varphi(u) = \varphi_v(u) = [\Phi(v)](u) = \langle u, v \rangle, \quad u \in H.$$

Anders formuliert: Φ ist eine anti-lineare (bzw. lineare für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) und isometrische Bijektion.

Bemerkung 2.11. Die Abbildung Φ wird auch oft *Riesz-Isomorphismus* genannt. Man beachte aber, dass sie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ganz streng genommen kein Isomorphismus ist, da sie anti-linear und nicht linear ist. Das macht aber nicht viel kaputt, man sollte sich trotzdem den Dualraum eines Hilbertraums immer als isomorph zum Hilbertraum vorstellen. Zuweilen kann es auch sinnvoll sein, den Dualraum H' als die Menge aller anti-linearen Funktionale zu definieren, dann wird der Riesz-Isomorphismus linear. Irgendwo muss der Querstrich halt hin.

Beweis von Theorem 2.10. Es ist nur noch die Existenz von v zu zeigen. Sei dazu $\varphi \in H'$. Ist $\varphi = 0$, setzen wir $v = 0$ und sind fertig. Für $\varphi \neq 0$ ist $\ker(\varphi) \neq H$ und nach Lemma 2.4 ist dieser Teilraum von H abgeschlossen. Nach Satz 1.8 ist $H = \ker(\varphi) \oplus \ker(\varphi)^\perp$, also gibt es ein $v_0 \in \ker(\varphi)^\perp$ mit $\|v_0\| = 1$. Wir zeigen, dass

$$v := \overline{\varphi(v_0)} v_0$$

das gewünschte tut. Zunächst beobachten wir, dass für alle $u \in H$ gilt

$$\varphi(\varphi(u)v_0 - \varphi(v_0)u) = \varphi(u)\varphi(v_0) - \varphi(v_0)\varphi(u) = 0,$$

d. h. $\varphi(u)v_0 - \varphi(v_0)u \in \ker(\varphi)$. Da v_0 auf diesem Kern senkrecht steht, ist also weiter

$$0 = \langle \varphi(u)v_0 - \varphi(v_0)u, v_0 \rangle = \varphi(u) \langle v_0, v_0 \rangle - \langle \varphi(v_0)u, v_0 \rangle = \varphi(u) - \varphi(v_0) \langle u, v_0 \rangle$$

und das liefert für alle $u \in H$

$$\varphi(v_0) \langle u, v_0 \rangle = \varphi(u).$$

Also ist immer noch für alle $u \in H$

$$\langle u, v \rangle = \left\langle u, \overline{\varphi(v_0)} v_0 \right\rangle = \varphi(v_0) \langle u, v_0 \rangle = \varphi(u). \quad \square$$

Eine machtvolle ziemlich direkte Folgerung aus dem Rieszschen Darstellungssatz ist das nun folgende Lemma von Lax-Milgram. Für dieses müssen wir aber zunächst ein paar Begriffe einführen.

2 Lineare Operatoren auf Hilberträumen

Definition 2.12. (a) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt eine Abbildung $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, die in beiden Argumenten linear ist, Bilinearform. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt eine Abbildung $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, die im ersten Argument linear und im zweiten Argument anti-linear ist, Sesquilinearform.

(b) Eine Bilinear- bzw. Sesquilinearform a ist stetig, wenn es ein $C \geq 0$ gibt, so dass für alle $u, v \in H$ gilt

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|.$$

(c) Eine Bilinear- bzw. Sesquilinearform a ist koerziv, wenn es ein $\kappa > 0$ gibt, so dass für alle $u \in H$ gilt

$$\operatorname{Re}(a(u, u)) \geq \kappa \|u\|^2.$$

In der Linearen Algebra wird gezeigt, dass jede Bilinearform $a : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit Hilfe einer darstellenden Matrix A geschrieben werden kann als $a(u, v) = \langle u, Av \rangle$. Ein analoges und sogar ein wenig weitergehendes Resultat wollen wir nun mit dem Lemma von Lax-Milgram beweisen. Wir beweisen es hier für den komplexen Fall, also für Sesquilinearformen. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind einfach alle Querstriche zu ignorieren.

Satz 2.13 (Lemma von Lax-Milgram). Sei $a : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ eine stetige Bi-/Sesquilinearform. Dann gibt es genau ein $A \in \mathcal{L}(H)$, so dass gilt

$$a(u, v) = \langle u, Av \rangle, \quad u, v \in H,$$

und es ist $\|A\|_{H \rightarrow H} \leq C$. Ist a zusätzlich koerziv, so ist A bijektiv und A^{-1} ist ebenfalls stetig mit $\|A^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq 1/\kappa$. Hierbei sind C und κ die Konstanten aus Definition 2.12.

Beweis. Wir zeigen zunächst Eindeutigkeit. Sind $A, B \in \mathcal{L}(H)$ mit $a(u, v) = \langle u, Av \rangle = \langle u, Bv \rangle$ für alle $u, v \in H$, so folgt $\langle u, Av - Bv \rangle = 0$ für alle $u \in H$. Nach Bemerkung 1.12 gilt $Av = Bv$ für jedes $v \in H$, also ist $A = B$.

Für ein fixes $v \in H$ ist $\psi_v := a(\cdot, v)$, eine lineare Abbildung von H nach $\mathbb{K}$, die dank der Stetigkeit von a wegen

$$|\psi_v(u)| = |a(u, v)| \leq C \|v\| \|u\|, \quad u \in H, \quad (2.1)$$

stetig und damit ein Element von H' ist. Nach dem Darstellungssatz von Riesz-Fréchet 2.10 gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $w = \Phi^{-1}(\psi_v) \in H$ mit $a(u, v) = \psi_v(u) = \langle u, w \rangle$ für alle $u \in H$. Wir definieren die Abbildung $A : H \rightarrow H$ damit durch $Av := w = \Phi^{-1}(\psi_v)$, d. h. es gilt

$$a(u, v) = \langle u, Av \rangle, \quad u, v \in H.$$

Für den Nachweis, dass A linear ist, seien $v, w \in H$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt mit der Anti-Linearität des Riesz-Isomorphismus

$$\begin{aligned} A(\lambda v + w) &= \Phi^{-1}(\psi_{\lambda v + w}) = \Phi^{-1}(a(\cdot, \lambda v + w)) = \Phi^{-1}(\bar{\lambda} a(\cdot, v) + a(\cdot, w)) \\ &= \lambda \Phi^{-1}(\psi_v) + \Phi^{-1}(\psi_w) = \lambda Av + Aw. \end{aligned}$$

2.2 Funktionale auf Hilberträumen

Da Φ^{-1} eine Isometrie ist und dank (2.1) erhalten wir

$$\|Av\| = \|\Phi^{-1}(\psi_v)\| = \|\psi_v\|_{H'} \leq C\|v\|, \quad v \in H.$$

Also gilt tatsächlich $\|A\|_{H \rightarrow H} \leq C$.

Sei ab nun a zusätzlich koerziv. Dann gilt für alle $u \in H$ mit der Definition von A und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\kappa\|u\|^2 \leq \operatorname{Re}(a(u, u)) \leq |a(u, u)| = |\langle u, Au \rangle| \leq \|u\|\|Au\|, \quad (2.2)$$

bzw. nach dem Kürzen eines $\|u\|$:

$$\kappa\|u\| \leq \|Au\|, \quad u \in H. \quad (2.3)$$

Das impliziert sofort, dass A injektiv ist, wir wenden uns also der Surjektivität zu.

Diese erledigen wir in zwei Schritten, indem wir zeigen, dass das Bild $\operatorname{ran}(A)$ von A sowohl abgeschlossen als auch dicht in H ist, denn dann gilt $\operatorname{ran}(A) = \overline{\operatorname{ran}(A)} = H$. Für die Abgeschlossenheit sei $(v_n) = (Au_n)$ eine Folge in $\operatorname{ran}(A)$, die in H gegen ein $v \in H$ konvergiert. Dann gilt nach (2.3) für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{\kappa}\|Au_n - Au_m\| = \frac{1}{\kappa}\|v_n - v_m\|,$$

also ist mit (v_n) auch (u_n) eine Cauchyfolge in H . Wir nennen deren Grenzwert u . Da A stetig ist, gilt

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Au_n = Au \in \operatorname{ran}(A).$$

Zum Nachweis, dass $\operatorname{ran}(A)$ dicht in H ist, sei $v \in \operatorname{ran}(A)^\perp$. Dann gilt wie in (2.2) die Ungleichung $\kappa\|v\|^2 \leq |\langle v, Av \rangle|$ und da $Av \in \operatorname{ran}(A)$ und $v \in \operatorname{ran}(A)^\perp$ ist, ist dieses Skalarprodukt Null. Also ist $v = 0$ und das liefert $\operatorname{ran}(A)^\perp = \{0\}$, was nach Satz 1.11 bedeutet, dass $\operatorname{ran}(A)$ dicht in H liegt.

Damit ist $A^{-1} : H \rightarrow H$ wohldefiniert und nach (2.3) bekommen wir für alle $u \in H$

$$\|A^{-1}u\| \leq \frac{1}{\kappa}\|AA^{-1}u\| = \frac{1}{\kappa}\|u\|,$$

also ist schließlich $\|A^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq 1/\kappa$ wie behauptet. $\square$

Häufig wird der Satz von Lax-Milgram in der folgenden Form verwendet.

Korollar 2.14. *Es sei $a : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ eine stetige und koerzive Bi-/Sesquilinearform und $\varphi \in H'$. Dann gibt es genau ein $v \in H$ mit $a(u, v) = \varphi(u)$ für alle $u \in H$ und es gilt $\|v\| \leq 1/\kappa\|\varphi\|_{H'}$.*

2 Lineare Operatoren auf Hilberträumen

Beweis. Nach dem Darstellungssatz von Riesz-Fréchet gibt es genau ein $w = \Phi^{-1}(\varphi)$ mit $\varphi(u) = \langle u, w \rangle$ für alle $u \in H$ und nach Lax-Milgram gibt es genau ein invertierbares $A \in \mathcal{L}(H)$ mit $a(u, \hat{u}) = \langle u, A\hat{u} \rangle$ für alle $u, \hat{u} \in H$. Setzen wir also $v := A^{-1}w = A^{-1}\Phi^{-1}(\varphi)$ so ist das ein eindeutiges Element von H mit

$$a(u, v) = \langle u, Av \rangle = \langle u, \Phi^{-1}(\varphi) \rangle = \langle u, w \rangle = \varphi(u), \quad u \in H,$$

und die Normabschätzung folgt aus unserer Abschätzung für A^{-1} aus dem Lax-Milgram-Lemma und der Isometrie-Eigenschaft des Riesz-Isomorphismus' Φ . $\square$

2.3 Hilbertraum-Adjungierte

Aus der Linearen Algebra kennen Sie die adjungierte A^* einer Matrix mit der definierenden Gleichung $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$. Ein entsprechendes Konzept für Hilberträume schauen wir uns jetzt genauer an. Dazu seien in diesem Abschnitt stets H und K zwei Hilberträume mit Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$, bzw. Normen $\| \cdot \|_H$ und $\| \cdot \|_K$.

Satz 2.15. *Zu jedem $T \in \mathcal{L}(H, K)$ gibt es einen eindeutigen Operator $T^* \in \mathcal{L}(K, H)$ mit*

$$\langle Tu, v \rangle_K = \langle u, T^*v \rangle_H, \quad u \in H, v \in K.$$

Weiterhin gilt $\|T\|_{H \rightarrow K} = \|T^*\|_{K \rightarrow H} = \|T^*T\|_{H \rightarrow H}^{1/2}$.

Beweis. Wir zeigen wieder zuerst Eindeutigkeit. Sind $T_1^*, T_2^* \in \mathcal{L}(K, H)$ stetige Operatoren mit

$$\langle Tu, v \rangle_K = \langle u, T_1^*v \rangle_H = \langle u, T_2^*v \rangle_H, \quad u \in H, v \in K,$$

so ist nach Bemerkung 1.12 sofort $T_1^*v = T_2^*v$ für alle $v \in K$, und die beiden Operatoren sind damit gleich.

Wir konstruieren einen solchen Operator T^* . Dazu betrachten wir für gegebenes $v \in K$ die lineare Abbildung $\psi_v : H \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\psi_v(u) = \langle Tu, v \rangle_K$, $u \in H$. Wegen

$$|\psi_v(u)| = |\langle Tu, v \rangle_K| \leq \|Tu\|_K \|v\|_K \leq \|T\|_{H \rightarrow K} \|v\|_K \|u\|_H, \quad u \in H, v \in K,$$

ist diese stetig, also ein Funktional in H' dessen Norm höchstens $\|T\|_{H \rightarrow K} \|v\|_K$ ist. Also liefert der Darstellungssatz von Riesz-Fréchet 2.10 ein eindeutiges Element $T^*v \in H$ mit

$$\langle Tu, v \rangle_K = \psi_v(u) = \langle u, T^*v \rangle_H, \quad u \in H, v \in K,$$

und

$$\|T^*v\|_H = \|\psi_v\|_{H'} \leq \|T\|_{H \rightarrow K} \|v\|_K. \quad (2.4)$$

2.3 Hilbertraum-Adjungierte

Das ergibt eine Abbildung $T^* : K \rightarrow H$, von der wir jetzt zeigen müssen, dass sie linear ist. Seien dazu $v, w \in K$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt für alle $u \in H$

$$\begin{aligned}\langle u, T^*(\lambda v + w) \rangle_H &= \langle Tu, \lambda v + w \rangle_K = \bar{\lambda} \langle Tu, v \rangle_K + \langle Tu, w \rangle_K \\ &= \bar{\lambda} \langle u, T^*v \rangle_H + \langle u, T^*w \rangle_H = \langle u, \lambda T^*v + T^*w \rangle_H\end{aligned}$$

und Bemerkung 1.12 liefert $T^*(\lambda v + w) = \lambda T^*v + T^*w$. Die Ungleichung in (2.4) ergänzt das sofort um die Information, dass T^* auch stetig ist mit $\|T^*\|_{K \rightarrow H} \leq \|T\|_{H \rightarrow K}$.

Für die umgekehrte Ungleichung bilden wir $T^{**} := (T^*)^* \in \mathcal{L}(H, K)$. Für diesen Operator gilt

$$\langle T^{**}u, v \rangle_K = \overline{\langle v, T^{**}u \rangle_K} = \overline{\langle T^*v, u \rangle_H} = \langle u, T^*v \rangle_H = \langle Tu, v \rangle_K, \quad u \in H, v \in K,$$

also sagt wiederum Bemerkung 1.12, dass $T^{**} = T$ gilt. Die obigen Erkenntnisse, nun angewendet auf T^* , führen also auf die umgekehrte Ungleichung

$$\|T\|_{H \rightarrow K} = \|T^{**}\|_{H \rightarrow K} \leq \|T^*\|_{K \rightarrow H},$$

sodass wir zusammen nun $\|T^*\|_{K \rightarrow H} = \|T\|_{H \rightarrow K}$ haben.

Als letztes bleibt die Gleichheit $\|T^*T\|_{H \rightarrow H} = \|T\|^2$ zu zeigen. Dank der Submultiplikativität der Operatornorm gilt sofort

$$\|T^*T\|_{H \rightarrow H} \leq \|T^*\|_{K \rightarrow H} \|T\|_{H \rightarrow K} = \|T\|_{H \rightarrow K}^2.$$

Umgekehrt gilt mit Hilfe von Lemma 1.3

$$\begin{aligned}\|T^*T\|_{H \rightarrow H} &= \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} \|T^*Tu\|_H = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|_H=1}} |\langle T^*Tu, v \rangle_H| \\ &= \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|_H=1}} |\langle Tu, Tv \rangle_K| \\ &\geq \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} |\langle Tu, Tu \rangle_K| = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} \|Tu\|_K^2 = \|T\|_{H \rightarrow K}^2. \quad \square\end{aligned}$$

Definition 2.16. Es sei $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Der Operator T^* aus Satz 2.15 heißt Hilbertraum-Adjungierte von T .

Offensichtlich gilt für die Adjungierte der Identität $I^* = I$. Wir sammeln weitere einfache Eigenschaften und Rechenregeln für die Hilbertraum-Adjungierte im folgenden Satz, dessen Beweis als Übungsaufgabe verbleibt.

Satz 2.17. Es seien L ein weiterer Hilbertraum, $S, T \in \mathcal{L}(H, K)$, $U \in \mathcal{L}(K, L)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- (a) $(T^*)^* = T$.

2 Lineare Operatoren auf Hilberträumen

$$(b) (\alpha S + \beta T)^* = \bar{\alpha} S^* + \bar{\beta} T^*.$$

$$(c) (UT)^* = T^* U^*.$$

Beispiel 2.18. Es ist sehr sinnvoll für alle Operatoren in Beispiel 2.2 die Hilbertraum-Adjungierten zu bestimmen. Beispielhaft wird das hier für die Faltungsoperatoren aus Beispiel 2.2 (f) gemacht. Sei also $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und wie dort $K_k : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ gegeben durch $K_k f = k * f$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \langle K_k f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} (k * f)(x) \overline{g(x)} \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} k(x-y) f(y) \, dy \overline{g(x)} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) k(x-y) \overline{g(x)} \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \overline{\int_{\mathbb{R}^d} k(x-y) g(x) \, dx} \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \overline{(k^* * g)(y)} \, dy = \langle f, K_k^* g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

mit $k^*(z) = \overline{k(-z)}$, $z \in \mathbb{R}^d$.

Also ist die Hilbertraum-Adjungierte von K_k wieder ein Faltungsoperator mit dem oben angegebenen Faltungskern k^* , d. h. $(K_k)^* = K_{k^*}$.

Übungsaufgabe 2.19. Zeigen Sie für die anderen Operatoren aus Beispiel 2.2, dass mit der dortigen Notation $(M_m)^* = M_{\bar{m}}$, $L^* = R$, $R^* = L$, $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ und $S_b^* = S_{-b}$ gilt.

Hat man einen Operator T in der Hand, kann das Studium der Adjungierten durchaus auch Erkenntnisse über T bringen. Hier ist ein erstes solches Resultat.

Satz 2.20. Sei $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Dann gilt

- (a) $\text{ran}(T^*)^\perp = \ker(T)$.
- (b) $H = \ker(T) \oplus \overline{\text{ran}(T^*)}$ und $K = \ker(T^*) \oplus \overline{\text{ran}(T)}$.
- (c) T ist genau dann injektiv, wenn das Bild von T^* dicht ist.
- (d) T hat genau dann ein dichtes Bild, wenn T^* injektiv ist.

Beweis. (a) Sei $u \in \text{ran}(T^*)^\perp$. Dann gilt für alle $v \in K$

$$\langle Tu, v \rangle_K = \langle u, T^* v \rangle_H = 0,$$

denn $T^* v \in \text{ran}(T^*)$. Das bedeutet aber, dass $Tu = 0$ ist, also $u \in \ker(T)$.

Ist umgekehrt $u \in \ker(T)$, so gilt für alle $v \in K$

$$\langle u, T^* v \rangle_H = \langle Tu, v \rangle_K = \langle 0, v \rangle_K = 0,$$

also haben wir $u \in \text{ran}(T^*)^\perp$.

- (b) Der Teilraum $\overline{\text{ran}(T^*)}$ ist offensichtlich abgeschlossen in H und nach Satz 1.5 (c) und (a) gilt

$$\overline{\text{ran}(T^*)}^\perp = \text{ran}(T^*)^\perp = \ker(T).$$

Das liefert die erste Zerlegung und die zweite folgt dann sofort dank $T^{**} = T$ durch Anwendung der ersten auf T^* :

$$K = \ker(T^*) \oplus \overline{\text{ran}(T^{**})} = \ker(T^*) \oplus \overline{\text{ran}(T)}.$$

Die beiden Aussagen in (c) und (d) kann man dann direkt aus den Zerlegungen in (b) ablesen. □

3 Variationelle Methoden – ein Anwendungsbeispiel

3.1 Das Problem

Ein wichtiger Anwendungsbereich der Funktionalanalysis innerhalb der Analysis liegt in der Theorie partieller Differentialgleichungen und diese gab auch umgekehrt immer wieder Impulse, die erst zur Entwicklung der Funktionalanalysis geführt haben. Ein sehr erfolgreiches Kapitel dieses Zusammenspiels ist die Variationsrechnung, in die wir hier einen winzig kleinen Einblick nehmen wollen, damit sichtbar wird, welche Kraft schon hinter dem kleinen bisschen Funktionalanalysis steckt, das wir bisher entwickelt haben.

Wir betrachten dazu eine Differentialgleichung, die als *Poissongleichung* bekannt ist und in weiten Teilen der Physik und Mechanik immer wieder vorkommt. Damit die Darstellung einfach bleibt, beschränken wir uns auf den eindimensionalen Fall, was den Vorteil hat, dass wir im Bereich gewöhnlicher Differentialgleichungen bleiben, den Sie aus früheren Vorlesungen kennen.

In diesem ganzen Kapitel seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I := (a, b)$. Für eine gegebene Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ suchen wir ein $u : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{auf } I \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (\text{PP})$$

Es handelt sich hier um ein *Randwertproblem* und nicht um ein in der Vorlesung gewöhnliche Differentialgleichungen vor allem behandeltes Anfangswertproblem. Trotzdem kann man dieses, zumindest für stetiges f , brute force durch zweimaliges Aufintegrieren und Einstellen der Integrationskonstanten lösen. Wir wollen aber einen völlig neuen Weg gehen, der den klassischen Lösungsbegriff für solche Differentialgleichungen erweitert und damit auch in deutlich komplizierteren Situationen einen Ansatz liefert, der sehr erfolgreich ist. Eine ausführlichere Darstellung der gleichen Methode für partielle Differentialgleichungen und in größerer Allgemeinheit bleibt dann späteren Master-Vorlesungen vorbehalten.

Eine Lösung dieser Gleichung im Sinne der Vorlesung gewöhnliche Differentialgleichungen wird auch *klassische Lösung* genannt und besteht in einer Funktion

3 Variationelle Methoden – ein Anwendungsbeispiel

$u \in C(\bar{I}) \cap C^2(I)$, die (PP) erfüllt.

Lemma 3.1 (Variationelle Formulierung von (PP)). *Es sei u eine klassische Lösung von (PP). Dann gilt für jede Funktion $\phi \in C_c^\infty(I)$*

$$\int_I u' \phi' = \int_I f \phi.$$

Beweis. Sei u eine klassische Lösung von (PP) und $\phi \in C_c^\infty(I)$. Dann gilt mit partieller Integration und wegen $\phi(a) = \phi(b) = 0$

$$\int_a^b u' \phi' = u'(b)\phi(b) - u'(a)\phi(a) - \int_a^b u'' \phi = 0 - 0 + \int_a^b (-u'')\phi = \int_a^b f \phi. \quad \square$$

Die variationelle Formulierung ist eine für eine Lösung von (PP) notwendige Bedingung, die besagt, dass für jede Testfunktion ϕ eine Integralgleichung erfüllt sein muss. Wenn wir irgendeine Chance haben wollen, von dieser Formulierung wieder zur Differentialgleichung zurückzukommen, müssen wir die Integrale wieder loswerden. Das ist das Thema des folgenden für diese Theorie fundamentalen Satzes.

Lemma 3.2 (Fundamentallemma der Variationsrechnung). *Es sei $u \in L_{\text{loc}}^1(I)$. Dann ist $u = 0$ genau dann, wenn gilt*

$$\int_I u \phi = 0, \quad \phi \in C_c^\infty(I). \quad (3.1)$$

Beweis. Zu beweisen ist nur, dass aus der Integralbedingung schon $u = 0$ fast überall folgt. Sei also $u \in L_{\text{loc}}^1(I)$ eine Funktion, die (3.1) erfüllt. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir $I_m := [a + 1/m, b - 1/m]$ und zeigen im Folgenden, dass $u = 0$ fast überall auf I_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt. Durch Vereinigen von abzählbar vielen Nullmengen gilt dann auch $u = 0$ fast überall auf I .

Wir fixieren also ein $m \in \mathbb{N}$ und betrachten die Funktion $u|_{I_{m+1}}$. Da I_{m+1} kompakt ist, ist diese in $L^1(I_{m+1})$ und wir setzen diese Einschränkung von u durch Null zu einer Funktion $\tilde{u} \in L^1(\mathbb{R})$ fort. Weiter wählen wir einen Mollifier (ϕ_n) mit $\text{supp}(\phi_n) \subseteq U_{1/n}(0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen ausnutzen, dass $\tilde{u} * \phi_n$ für $n \rightarrow \infty$ in $L^1(\mathbb{R})$ gegen $\tilde{u}$ konvergiert und daher die Voraussetzung (3.1) auf $\phi = \phi_n(x - \cdot)$ für $x \in I_m$ und große n anwenden.

Sei $x \in I_m$. Dann ist die Funktion $\phi_n(x - \cdot)$ beliebig oft differenzierbar und es ist $\text{supp}(\phi_n(x - \cdot)) \subseteq U_{1/n}(x)$. Wählt man nun $n > m(m+1)$, so ist $1/(m+1) + 1/n < 1/m$, sodass $\text{supp}(\phi_n(x - \cdot)) \subseteq U_{1/n}(x) \subseteq I_{m+1}$ gilt. Insbesondere ist $\phi_n(x - \cdot) \in C_c^\infty(I)$ und wir können (3.1) anwenden. Das liefert für jedes $n > m(m+1)$ mit der Voraussetzung (3.1),

3.2 Schwache Ableitungen und der Sobolew-Raum $H^1(I)$

den Trägereigenschaften von $\phi_n(x - \cdot)$ und $\tilde{u}$ und der Definition der Faltung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_I u(y) \phi_n(x - y) \, dy = \int_{I_{m+1}} u(y) \phi_n(x - y) \, dy = \int_{I_{m+1}} \tilde{u}(y) \phi_n(x - y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(y) \phi_n(x - y) \, dy = \tilde{u} * \phi_n(x) \end{aligned}$$

für jedes $x \in I_m$. Bilden wir nun den Grenzwert $n \rightarrow \infty$, so bekommen wir mit Konvergenz in $L^1(\mathbb{R})$

$$\tilde{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u} * \phi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Also ist $u = \tilde{u} = 0$ fast überall auf I_m und der Beweis ist vollbracht. $\square$

3.2 Schwache Ableitungen und der Sobolew-Raum $H^1(I)$

Die Erkenntnis aus Lemma 3.1 sieht reichlich banal aus, aber darin steckt der Keim für alles folgende. Der Punkt ist, dass die in diesem Lemma gefundene notwendige Bedingung dafür, dass u eine Lösung von (PP) ist, für viel allgemeinere Funktionen Sinn ergibt als nur für zwei Mal stetig differenzierbares u . Offensichtlich reicht schon mal nur eine Differenzierbarkeitsordnung, denn zweite Ableitungen tauchen keine mehr auf. Da die Funktion außerdem nur im Integral ausgewertet wird, können wir noch viel weiter gehen. Dazu werden wir jetzt unseren Differenzierbarkeitsbegriff aus der Analysis I deutlich aufweichen.

Ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.1 gilt für $u \in C^1(\bar{I})$, mit partieller Integration für alle $\phi \in C_c^\infty(I)$

$$\int_a^b u \phi' = u(b)\phi(b) - u(a)\phi(a) - \int_a^b u' \phi = - \int_a^b u' \phi.$$

Diese Gleichheit erheben wir jetzt umgekehrt zur Definition.

Definition 3.3. (a) Ein $u \in L_{\text{loc}}^1(I)$ heißt schwach differenzierbar, wenn es ein $v \in L_{\text{loc}}^1(I)$ gibt mit

$$\int_I u \phi' = - \int_I v \phi, \quad \phi \in C_c^\infty(I).$$

Die Funktion v heißt dann schwache Ableitung von u und wir schreiben dafür weiter $u' = v$.

(b) Der Vektorraum

$$H^1(I) := \{u \in L^2(I) : u \text{ schwach differenzierbar mit } u' \in L^2(I)\}$$

heißt Sobolew-Raum (erster Ordnung über $L^2(I)$).

3 Variationelle Methoden – ein Anwendungsbeispiel

Wir haben oben bereits gesehen, dass jede klassisch differenzierbare Funktion auch schwach differenzierbar ist und dass in diesem Fall die klassische Ableitung auch eine schwache Ableitung ist. Damit das alles sauber definiert ist, sollten wir noch schnell klären, dass die schwache Ableitung eindeutig ist.

Satz 3.4. *Die schwache Ableitung ist, wenn sie existiert, eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es seien $v_1, v_2 \in L^1_{\text{loc}}(I)$ zwei schwache Ableitungen einer Funktion $u \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Dann gilt für alle $\phi \in C_c^\infty(I)$

$$\int_I (v_1 - v_2)\phi = \int_I (v_1\phi - v_2\phi) = - \int_I (u\phi' - u\phi') = 0,$$

also ist mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung 3.2 sofort $v_1 - v_2 = 0$, d. h. $v_1 = v_2$. $\square$

Beispiel 3.5. (a) Die Betragsfunktion $|\cdot| : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ist schwach differenzierbar mit der Signumfunktion sign , die für negative Argumente -1 und für positive Argumente 1 ist, als schwache Ableitung, denn für alle $\phi \in C_c^\infty((-1, 1))$ ist

$$\int_{-1}^1 |t|\phi'(t) dt = \int_{-1}^0 (-t\phi'(t)) dt + \int_0^1 t\phi'(t) dt$$

und mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned} &= \underbrace{-t\phi(t)}_{=0} \Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \phi(t) dt + \underbrace{t\phi(t)}_{=0} \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi(t) dt \\ &= - \int_{-1}^1 \text{sign}(t)\phi(t) dt. \end{aligned}$$

(b) Dagegen ist die Signumfunktion selbst nicht wieder schwach differenzierbar. Dazu nehmen wir an, das wäre doch der Fall mit einer hypothetischen schwachen Ableitung sign' . Dann gilt für alle $\phi \in C_c^\infty(I)$ mit dem Hauptsatz

$$\int_{-1}^1 \text{sign}' \cdot \phi = - \int_{-1}^1 \text{sign} \cdot \phi' = \int_{-1}^0 \phi' - \int_0^1 \phi' = 2\phi(0).$$

Insbesondere gilt für alle $\phi \in C_c^\infty((-1, 0))$ die Gleichheit $\int_{-1}^0 \text{sign}' \cdot \phi = 0$ und nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung 3.2 folgt $\text{sign}' = 0$ fast überall auf $(-1, 0)$. Analog kann man auf $(0, 1)$ vorgehen und es folgt $\text{sign}' = 0$ fast überall auf $(-1, 1)$.

Nehmen wir nun ein $\phi \in C_c^\infty(I)$ mit $\phi(0) = 1$ her, so führt das auf den Widerspruch

$$2 = 2\phi(0) = \int_{-1}^1 \text{sign}' \cdot \phi = \int_{-1}^1 0 \cdot \phi = 0.$$

3.2 Schwache Ableitungen und der Sobolew-Raum $H^1(I)$

Erfreulicherweise fühlt sich die schwache Ableitung in vielen Belangen sehr ähnlich an, wie die, die Sie schon länger kennen. Wir sammeln ein paar der üblichen Rechenregeln für die Ableitung. Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe stehen.

Satz 3.6 (Rechenregeln schwache Ableitung). *Es seien $u, v \in L^1_{\text{loc}}(I)$ schwach differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- (a) $\lambda u + v$ ist schwach differenzierbar mit $(\lambda u + v)' = \lambda u' + v'$.
- (b) Ist $u' = 0$, so ist u konstant.
- (c) $\bar{u}$ ist schwach differenzierbar mit $(\bar{u})' = \overline{u'}$.

Nun kommt die Funktionalanalysis ins Spiel. Dazu versehen wir den Sobolew-Raum $H^1(I)$ mit einem passenden Skalarprodukt.

Satz 3.7. *Versehen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2} = \int_I (u\bar{v} + u'\bar{v}'), \quad u, v \in H^1(I),$$

ist $H^1(I)$ ein Hilbertraum.

Beweis. Es lässt sich ohne Überraschungen nachrechnen, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$ ein Skalarprodukt auf $H^1(I)$ ist, so dass die eigentliche Substanz darin liegt, die Vollständigkeit bezüglich der durch dieses Skalarprodukt gegebenen Norm

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2}, \quad u \in H^1(I),$$

nachzuweisen. Sei dazu (u_n) eine Cauchyfolge in $H^1(I)$, dann gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|u_n - u_m\|_{L^2} \leq (\|u_n - u_m\|_{L^2}^2 + \|u'_n - u'_m\|_{L^2}^2)^{1/2} = \|u_n - u_m\|_{H^1}$$

und genauso $\|u'_n - u'_m\|_{L^2} \leq \|u_n - u_m\|_{H^1}$. Also sind sowohl (u_n) als auch (u'_n) Cauchyfolgen in $L^2(I)$. Da dieser Raum wiederum vollständig ist, existieren $u, v \in L^2(I)$ mit $u_n \rightarrow u$ und $u'_n \rightarrow v$ ($n \rightarrow \infty$) in $L^2(I)$.

Als nächstes zeigen wir, dass u schwach differenzierbar ist mit $u' = v$. Tatsächlich gilt für alle $\phi \in C_c^\infty(I)$ mit der Stetigkeit des L^2 -Skalarprodukts als Abbildung von $L^2(I)$ nach $\mathbb{C}$

$$\int_I u\phi' = \langle u, \phi' \rangle_{L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, \phi' \rangle_{L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u_n \phi' = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u'_n \phi = - \int_I v\phi.$$

Damit ist nun $u \in H^1(I)$ mit $u' = v$ und es gilt

$$\|u_n - u\|_{H^1} = (\|u_n - u\|_{L^2}^2 + \|u'_n - u'\|_{L^2}^2)^{1/2} = (\|u_n - u\|_{L^2}^2 + \|u'_n - v\|_{L^2}^2)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

was den Beweis beendet. $\square$

3 Variationelle Methoden – ein Anwendungsbeispiel

Wir haben $H^1(I)$ damit als einen Hilbertraum identifiziert, der in $L^2(I)$ enthalten ist, aber mit einer größeren Norm versehen ist: Für alle $u \in H^1(I)$ gilt $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$. Funktionalanalytisch formuliert bedeutet das, dass die Einbettungsabbildung $j : H^1(I) \rightarrow L^2(I)$ mit $j(u) = u$ eine stetige lineare Abbildung ist. In diesem Fall sogar mit Operatornorm Eins.

Diese Situation taucht oft auf und wird daher jetzt formal gefasst.

Definition 3.8. Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume mit $Y \subseteq X$ und existiert eine Konstante mit $\|u\|_X \leq C\|u\|_Y$ für alle $u \in Y$, dann sagt man, dass Y stetig nach X einbettet und schreibt dafür $Y \hookrightarrow X$.

3.3 Der Hauptsatz und stetige Repräsentanten

In Lemma 3.1 haben wir unser Differentialgleichungsproblem (PP) in die variationelle Formulierung

$$\int_I u' \phi' = \int_I f \phi, \quad \phi \in C_c^\infty(I),$$

umgeschrieben und stellen nun fest, dass wir die Frage, ob diese Gleichheit erfüllt ist oder nicht, an jedes $u \in H^1(I)$ stellen können. Wenn wir allerdings ein u in $H^1(I)$ haben, das diese Gleichheit erfüllt, so ist in keiner Weise offensichtlich, dass dieses das Randwertproblem (PP) lösen sollte. Das fängt schon auf der ganz banalen Ebene an, dass die Punktauswertungen in a und b , die in der Randwertvorgabe vorkommen, für Elemente von $H^1(I)$, die ja immer noch L^2 -Restklassen sind, überhaupt keinen Sinn ergeben! Darum wollen wir uns nun kümmern, denn auch dieses scheinbar unüberwindliche Hindernis lässt sich aus dem Weg räumen.

Satz 3.9 (Hauptsatz für Sobolew-Funktionen). Sei $u \in L^2(I)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $u \in H^1(I)$.
- (b) Es gibt ein $v \in L^2(I)$ und ein $c \in \mathbb{K}$ mit

$$u(t) = c + \int_a^t v(s) \, ds \quad \text{für fast alle } t \in \bar{I}.$$

In diesem Falle gilt $u' = v$, die rechte Seite in (b) ist ein (eindeutiger) Repräsentant $\tilde{u}$ von u , der in $C(\bar{I})$ liegt, und es ist $c = \tilde{u}(a)$

Beweis. Wir zeigen zuerst (b) $\Rightarrow$ (a). Da I ein beschränktes Intervall ist, ist v als L^2 -Funktion insbesondere integrierbar auf I , also stellt $\tilde{u}(t) = c + \int_a^t v(s) \, ds$, $t \in \bar{I}$ nach

3.3 Der Hauptsatz und stetige Repräsentanten

dem Satz von Lebesgue eine stetige Funktion auf $\bar{I}$ dar. Weiter gilt für jedes $\phi \in C_c^\infty(I)$ mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_a^b u(t)\phi'(t) dt &= c \int_a^b \phi'(t) dt + \int_a^b \int_a^t v(s) ds \phi'(t) dt \\ &= 0 + \int_a^b v(s) \int_s^b \phi'(t) dt ds = - \int_a^b v(s)\phi(s) ds \end{aligned}$$

und das bedeutet nichts anderes, als $u' = (\tilde{u})' = v$ im schwachen Sinne. Insbesondere ist $u' \in L^2(I)$ und damit $u \in H^1(I)$. Außerdem gilt $\tilde{u}(a) = c + 0 = c$.

Sei umgekehrt $u \in H^1(I)$. Dann ist $v := u' \in L^2(I) \subseteq L^1(I)$ und für $f(t) := \int_a^t u'(s) ds$, $t \in I$, gilt mit einer analogen Rechnung wie oben $u' = f'$. Also gibt es nach Satz 3.6 (b) eine Konstante $c \in \mathbb{K}$ mit $u = c + f$ und wir sind fertig. $\square$

Eine wichtige Konsequenz dieses Resultats ist, dass man jede Sobolew-Funktion auf einem Intervall ohne Einschränkung der Allgemeinheit als stetig annehmen darf. Tatsächlich kann man, indem man jedes $u \in H^1(I)$ auf seinen nach diesem Satz existenten stetigen Repräsentanten abbildet, den Raum $H^1(I)$ als Teilraum von $C(\bar{I})$ auffassen und redet damit wieder über Funktionen und nicht mehr wie in $L^2(I)$ eigentlich über Restklassen von Funktionen. Das werden wir im Weiteren auch jeweils tun und notationell nicht mehr zwischen u und $\tilde{u}$ unterscheiden. Auf diese Weise können wir für $u \in H^1(I)$ beispielsweise den Hauptsatz direkt wie gewohnt als

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s) ds, \quad t_0, t \in \bar{I}, \quad (3.2)$$

hinschreiben.

Tatsächlich sind Sobolew-Funktionen in einer Dimension sogar noch ein wenig schöner. Falls Sie diesen noch nicht gesehen haben, sei hier der Begriff der Hölder-Stetigkeit eingeführt:

Definition 3.10. $f : \bar{I} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Hölder-stetig vom Exponent $\alpha \in (0, 1)$, wenn es ein $C \geq 0$ gibt mit

$$|f(s) - f(t)| \leq C|s - t|^\alpha, \quad s, t \in \bar{I}.$$

Der normierte Raum aller Hölder-stetigen Funktionen vom Exponent α auf $\bar{I}$ wird mit $C^\alpha(\bar{I}; \mathbb{K})$ oder kurz $C^\alpha(\bar{I})$ bezeichnet. Die Norm ist gegeben durch

$$\|f\|_{C^\alpha} := \|f\|_\infty + \sup_{\substack{s, t \in \bar{I} \\ s \neq t}} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^\alpha}.$$

Der Fall $\alpha = 1$ ist hier auch interessant, und diesen sollten Sie in jedem Fall kennen. Das sind nämlich genau die Lipschitz-stetigen Funktionen. Er ist in dieser Definition

3 Variationelle Methoden – ein Anwendungsbeispiel

ausgespart, da dann erstens üblicherweise von „Lipschitz-stetig“ und nicht von „Hölder-stetig vom Exponenten 1“ die Rede ist und zweitens, weil man auf keinen Fall die Notation C^α mit $\alpha = 1$ für die Lipschitz-stetigen Funktionen verwenden sollte. Zwischen stetig differenzierbar und Lipschitz ist dann doch noch eine deutliche Lücke.

Wir können jetzt die Glattheit der Sobolew-Funktionen genau quantifizieren.

Satz 3.11. *Jedes $u \in H^1(I)$ ist Hölder-stetig vom Exponenten $1/2$ auf $\bar{I}$ und es gilt $H^1(I) \hookrightarrow C^{1/2}(\bar{I})$, d. h. es existiert ein $C \geq 0$ mit*

$$\|u\|_{C^{1/2}} \leq C \|u\|_{H^1}, \quad u \in H^1(I).$$

Beweis. Sei $u \in H^1(I)$ gegeben. Dann gilt nach dem Hauptsatz für Sobolew-Funktionen, vgl. (3.2) und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für alle $s, t \in \bar{I}$

$$|u(s) - u(t)| = \left| \int_s^t u'(r) \, dr \right| \leq \left| \int_s^t |u'|^2 \right|^{1/2} \left| \int_s^t 1^2 \right|^{1/2} \leq |s - t|^{1/2} \|u'\|_{L^2(I)}.$$

Damit ist schon mal

$$\sup_{\substack{s, t \in \bar{I} \\ s \neq t}} \frac{|u(s) - u(t)|}{|s - t|^{1/2}} \leq \|u'\|_{L^2}$$

und der zweite Teil der Hölder-Norm erledigt. Wir brauchen noch eine entsprechende Abschätzung für $\|u\|_\infty$.

Auch diese steckt in obiger Rechnung, wenn man es geschickt anstellt. Für alle $s, t \in \bar{I}$ gilt wieder mit dem Hauptsatz

$$|u(t)| = \left| u(s) + \int_s^t u'(r) \, dr \right| \leq |u(s)| + |s - t|^{1/2} \|u'\|_{L^2} \leq |u(s)| + (b - a)^{1/2} \|u'\|_{L^2}.$$

Wir mitteln nun diese Ungleichung über alle $s \in I$ und bekommen für alle $t \in \bar{I}$

$$|u(t)| = \frac{1}{b - a} \int_I |u(t)| \, ds \leq \frac{1}{b - a} \int_I |u(s)| \, ds + (b - a)^{1/2} \|u'\|_{L^2}.$$

Auch den folgenden Trick, wie wir mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus dem Integral über $|u|$ nun eine 2-Norm von u bekommen, hatten wir gerade schon:

$$\leq \frac{1}{b - a} (b - a)^{1/2} \|u\|_{L^2} + (b - a)^{1/2} \|u'\|_{L^2}.$$

Zusammen ist damit

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{1/2}} &= \|u\|_\infty + \sup_{\substack{s, t \in \bar{I} \\ s \neq t}} \frac{|u(s) - u(t)|}{|s - t|^{1/2}} \\ &\leq \frac{1}{(b - a)^{1/2}} \|u\|_{L^2} + (1 + (b - a)^{1/2}) \|u'\|_{L^2} \leq C \|u\|_{H^1} \end{aligned}$$

mit einem geeignet gewählten C . □

3.4 Lösung der variationellen Formulierung

Zum Abschluss dieses Abschnitts folgt noch die Produktregel und eine Partielle-Integration-Formel für Sobolew-Funktionen. Der Beweis verbleibt als Übungsaufgabe.

Korollar 3.12 (Partielle Integration). *Seien $u, v \in H^1(I)$. Dann gilt $uv \in H^1(I)$ mit $(uv)' = u'v + uv'$ und es ist*

$$\int_s^t u'v = u(t)v(t) - u(s)v(s) - \int_s^t uv', \quad s, t \in I.$$

3.4 Lösung der variationellen Formulierung

Unsere Erkenntnis, dass jede Sobolew-Funktion einen stetigen Repräsentanten hat, bedeutet auch, dass die Punktauswertungen in a und b , die in der Randbedingung von (PP) auftauchen, für Funktionen in $H^1(I)$ Sinn ergeben! Damit können wir nun, aufbauend auf Lemma 3.1, einen schwächeren Lösungsbegriff für unser Randwertproblem (PP) definieren.

Definition 3.13. (a) *Der Sobolew-Raum mit Nullrandbedingung ist*

$$H_0^1(I) := \{u \in H^1(I) : u(a) = u(b) = 0\}.$$

(b) *Eine Funktion $u \in H_0^1(I; \mathbb{R})$ heißt schwache Lösung von (PP), wenn gilt*

$$\int_I u' \phi' = \int_I f \phi, \quad \phi \in C_c^\infty(I). \quad (\text{schwachPP})$$

Bemerkung 3.14. (a) Der Raum $H_0^1(I)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $H^1(I)$, was sich folgendermaßen ergibt. Für eine Folge (u_n) in $H_0^1(I)$, die in $H^1(I)$ gegen ein $u \in H^1(I)$ konvergiert, gilt nach Satz 3.11 wegen $u_n(a) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|u(a)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |u(a) - u_n(a)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_\infty \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \|u - u_n\|_{H^1(I)} = 0.$$

Also ist $u(a) = 0$ und genauso $u(b) = 0$, d. h. $u \in H_0^1(I)$.

Insbesondere ist also nach Satz 1.4 auch der Raum $H_0^1(I)$, versehen mit dem H^1 -Skalarprodukt aus Satz 3.7, ein Hilbertraum.

(b) Man beachte beim Begriff der schwachen Lösung, dass die Randbedingung aus (PP) in die Definition des Raums $H_0^1(I)$ eingebaut wurde. Sie taucht dadurch nicht mehr als Bedingung in der Gleichung auf und ergibt sich von selbst, wenn wir eine Lösung in $H_0^1(I)$ gefunden haben.

3 Variationelle Methoden – ein Anwendungsbeispiel

Nun können wir zeigen, dass sich dieses Problem mit unseren funktionalanalytischen Mitteln sehr elegant lösen lässt. Dazu brauchen wir nur noch eine berühmte Ungleichung.

Satz 3.15 (Poincaré-Ungleichung). *Es existiert ein $C \geq 0$ mit*

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|u'\|_{L^2}, \quad u \in H_0^1(I).$$

Beweis. Sei $u \in H_0^1(I)$. Dann gilt für alle $t \in I$ dank des Hauptsatzes (3.2), $u(a) = 0$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 &= \left| u(a) + \int_a^t u'(s) \, ds \right|^2 \leq \left(\int_a^t |u'(s)| \, ds \right)^2 \leq \left(\int_a^b |u'(s)| \cdot 1 \, ds \right)^2 \\ &\leq \left((b-a)^{1/2} \|u'\|_{L^2} \right)^2 = (b-a) \|u'\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Durch Integration über t erhält man

$$\|u\|_{L^2}^2 = \left(\int_I |u(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_I (b-a) \|u'\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} = (b-a) \|u'\|_{L^2}. \quad \square$$

Satz 3.16 (Schwache Lösung von (PP)). *Für jedes $f \in L^2(I)$ gibt es genau ein $u \in H_0^1(I)$, das (schwachPP) erfüllt und es gilt*

$$\|u\|_{H^1} \leq 2 \max\{1, C^2\} \|f\|_{L^2}$$

mit der Konstanten C aus der Poincaré-Ungleichung in Satz 3.15.

Beweis. Wir definieren

$$a : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mit } a(u, v) = \int_I u'v' = \langle u', v' \rangle_{L^2}, \quad u, v \in H_0^1(I).$$

Dann ist a eine Bilinearform auf dem reellen Hilbertraum $H_0^1(I)$, die wegen

$$|a(u, v)| = |\langle u', v' \rangle_{L^2}| \leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \quad u, v \in H_0^1(I)$$

stetig ist.

Außerdem ist a auch koerziv, denn für alle $u \in H_0^1(I)$ gilt mit der Poincaré-Ungleichung aus Satz 3.15

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_I (u')^2 = \|u'\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \|u'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2C^2} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|u'\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{1}{2 \max\{1, C^2\}} (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2) = \frac{1}{2 \max\{1, C^2\}} \|u\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

3.5 Regularität der schwachen Lösung

Wir wenden uns der rechten Seite der Gleichung zu. Dazu betrachten wir für die gegebene Funktion $f \in L^2(I)$ die Abbildung $\varphi_f : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi_f(v) = \int_I f v$, $v \in H_0^1(I)$. Diese ist offensichtlich linear und sogar ein Funktional auf $H_0^1(I)$, denn für alle $v \in H_0^1(I)$ gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\varphi_f(v)| = \left| \int_I f v \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1},$$

so dass $\|\varphi_f\|_{(H_0^1)'} \leq \|f\|_{L^2}$ ist.

Nach dem Satz von Lax-Milgram in der Form von Korollar 2.14 gibt es also genau ein $u \in H_0^1(I)$ mit

$$\int_I u' \phi' = a(\phi, u) = \varphi_f(\phi) = \int_I f \phi, \quad \phi \in H_0^1(I),$$

insbesondere gilt diese Gleichheit also für alle $\phi \in C_c^\infty(I) \subseteq H_0^1(I)$, so dass u wirklich eine schwache Lösung von (PP) ist. Schließlich sagt Korollar 2.14 auch, dass

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq \frac{1}{\kappa} \|\varphi_f\|_{(H_0^1)'} \leq 2 \max\{1, C^2\} \|f\|_{L^2}$$

gilt und wir sind fertig. □

3.5 Regularität der schwachen Lösung

Was haben wir erreicht? Wir können das Randwertproblem (PP) für jede rechte Seite $f \in L^2(I)$ eindeutig schwach lösen. Diese Lösung ist aber erst einmal nur in $H_0^1(I)$ und damit nicht einmal im schwachen Sinne zwei Mal differenzierbar. Das ist einigermaßen unbefriedigend und wir schauen uns in diesem Abschnitt an, wie gut die gefundene schwache Lösung tatsächlich ist. Dazu definieren wir erst einmal höhere schwache Ableitungen. Das birgt keine weiteren Überraschungen.

Definition 3.17. (a) Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Ein $u \in L_{\text{loc}}^1(I)$ ist k -mal schwach differenzierbar auf I , wenn u schon $(k-1)$ -mal schwach differenzierbar ist und die $(k-1)$ -te Ableitung $u^{(k-1)}$ noch einmal schwach differenzierbar ist. Dann heißt $u^{(k)} := (u^{(k-1)})'$ die k -te schwache Ableitung von u .

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ heißt der Vektorraum

$$H^k(I) := \{u \in H^{k-1}(I) : u' \in H^{k-1}(I)\}$$

Sobolew-Raum (k -ter Ordnung über $L^2(I)$)

3 Variationelle Methoden – ein Anwendungsbeispiel

Tatsächlich stellt sich heraus, dass unsere schwache Lösung im schwachen Sinne auch zweimal differenzierbar ist. Das folgt aus der folgenden Charakterisierung von $H^1(I)$.

Lemma 3.18. *Es sei $u \in L^2(I)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) $u \in H^1(I)$.
- (b) *Es gibt eine Konstante $C \geq 0$, so dass für alle $\phi \in C_c^\infty(I)$ gilt*

$$\left| \int_I u \phi' \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(I)}.$$

Beweis. Der Beweis von (a) nach (b) ergibt sich durch eine Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\left| \int_I u \phi' \right| = \left| \int_I u' \phi \right| \leq \|u'\|_{L^2(I)} \|\phi\|_{L^2(I)}, \quad \phi \in C_c^\infty(I).$$

Wir wenden uns also der umgekehrten Implikation zu. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\psi : C_c^\infty(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(\phi) := \int_I u \phi', \quad \phi \in C_c^\infty(I).$$

Diese ist offensichtlich linear und es gilt nach Voraussetzung

$$|\psi(\phi)| = \left| \int_I u \phi' \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(I)},$$

d. h. ψ ist von $(C_c^\infty(I), \|\cdot\|_{L^2(I)})$ nach $\mathbb{R}$ stetig. Nach Satz 2.5 hat ψ also eine stetige Fortsetzung $\tilde{\psi}$ zu einem Funktional auf $L^2(I)$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz-Fréchet 2.10 gibt es also ein $v \in L^2(I)$ mit $\langle w, v \rangle = \tilde{\psi}(w)$ für alle $w \in L^2(I)$. Insbesondere gilt für alle $\phi \in C_c^\infty(I)$

$$\int_I u \phi' = \psi(\phi) = \tilde{\psi}(\phi) = \langle \phi, v \rangle = \int_I v \phi,$$

und das bedeutet gerade, dass $u \in H^1(I)$ ist mit $u' = -v$. □

Satz 3.19. *Es sei $f \in L^2(I)$ und $u \in H_0^1(I)$ die zugehörige eindeutige schwache Lösung von (PP). Dann gilt $u \in H^2(I)$.*

Beweis. Für alle $\phi \in C_c^\infty(I)$ gilt, da u die schwache Lösung zu f ist und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left| \int_I u' \phi' \right| = \left| \int_I f \phi \right| \leq \|f\|_{L^2(I)} \|\phi\|_{L^2(I)}.$$

Damit folgt aus Lemma 3.18 dass $u' \in H^1(I)$ und damit $u \in H^2(I)$ ist. □

3.5 Regularität der schwachen Lösung

Nun können wir auch zeigen, dass wir für stetige rechte Seiten f die klassische Lösung wiedergefunden haben.

Satz 3.20. *Es sei $f \in C(\bar{I})$ und $u \in H_0^1(I)$ die zugehörige eindeutige schwache Lösung von (PP). Dann gilt $u \in C(\bar{I}) \cap C^2(I)$, d. h. u ist eine klassische Lösung von (PP).*

Beweis. Zunächst wissen wir nach Satz 3.9 bzw. Satz 3.11, dass $u \in C(\bar{I})$ ist und es gilt $u(a) = u(b) = 0$. Es bleibt also sicherzustellen, dass u zweimal stetig differenzierbar ist. Wir wissen nach dem eben gezeigten, dass $u \in H^2(I)$ ist, also gilt für jede Funktion $\phi \in C_c^\infty(I)$ nach der Definition der schwachen Ableitung und wegen (schwachPP)

$$\int_I (u'' + f)\phi = \int_I (u')'\phi + \int_I f\phi = - \int_I u'\phi' + \int_I f\phi = - \int_I f\phi + \int_I f\phi = 0.$$

Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung 3.2 gilt also $u'' + f = 0$, d. h. $-u'' = f$ fast überall. Da f stetig ist, hat auch u'' einen stetigen Repräsentanten, also liegt $u \in C^2(I)$. Damit muss $-u'' = f$ sogar überall auf I gelten und u ist eine klassische Lösung von (PP). $\square$

4 Lineare Operatoren auf Banachräumen

Wir haben in den bisherigen Kapiteln gesehen, dass die Untersuchung von Funktionalen, Dualräumen und Adjungierten uns einiges über die Eigenschaften von Hilberträumen verraten kann und dass mit den daraus entwickelten Werkzeugen auch ganz handfeste und schwierige Probleme sehr elegant und allgemein gelöst werden können. Wenn Sie beispielsweise an die L^p -Skala denken, sind Hilberträume aber ein zwar sehr schöner aber doch eher seltener Spezialfall. Eine naheliegende Frage ist es daher, wie viele der bisher hier entwickelten Konzepte und Methoden wirklich die Hilbertraum-Struktur brauchen und wie viel davon sich auch allgemeiner in Banachräumen umsetzen lässt. Das wollen wir in diesem Kapitel genauer untersuchen.

4.1 Grundlagen

Erinnerung 4.1. Ein vollständiger normierter Vektorraum wird *Banachraum* genannt. Jeder Hilbertraum ist auch ein Banachraum.

Übungsaufgabe 4.2. Es seien X, Y zwei normierte Räume. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Der Vektorraum $X \times Y$ ist mit der Norm

$$\|(u, v)\|_{X \times Y} := \|u\|_X + \|v\|_Y, \quad (u, v) \in X \times Y,$$

ebenfalls ein normierter Raum.

- (b) Sind X und Y Banachräume, so ist auch $X \times Y$ ein Banachraum.

Beispiel 4.3. Bekannte Beispiele von Banachräumen sollten sein:

- (a) Der Standardvektorraum $\mathbb{K}^d$ mit irgendeiner Norm, beispielsweise einer p -Norm

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^d |x_n|^p \right)^{1/p} \text{ für } 1 \leq p < \infty, \text{ bzw. } \|x\|_\infty = \sup_{n=1}^d |x_n|.$$

4 Lineare Operatoren auf Banachräumen

- (b) Der Raum $C(K)$ aller stetigen Funktionen $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge K mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

- (c) Die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$ für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $p \in [1, \infty]$ mit der p -Norm

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \text{ für } 1 \leq p < \infty, \text{ bzw. } \|f\|_{L^\infty} = \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Darüber hinaus sind hier noch ein paar interessante Banachräume, die Sie vielleicht noch nicht kennen.

- (d) Der in Definition 3.10 eingeführte Raum $C^\alpha(I)$ der Hölder-stetigen Funktionen zum Exponenten $\alpha \in (0, 1)$ auf einem Intervall I ist auch ein Banachraum.
- (e) Analog zu ℓ^2 gibt es eine p -Version der Folgenräume. So ist

$$\|(a_n)\|_{\ell^p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \text{ für } 1 \leq p < \infty, \text{ bzw. } \|(a_n)\|_{\ell^\infty} = \sup_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

und der Raum

$$\ell^p := \{(a_n) \text{ Folge in } \mathbb{K} : \|(a_n)\|_{\ell^p} < \infty\}$$

ist für jedes $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum.

- (f) Die Folgenräume

$$c := \{(a_n) \text{ Folge in } \mathbb{K} : (a_n) \text{ konvergent}\} \text{ und } c_0 := \{(a_n) \in c : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0\}$$

sind mit der ℓ^∞ -Norm ausgestattet jeweils Banachräume. Das kann man beispielsweise sehen, indem man zeigt, dass ℓ^∞ ein Banachraum ist, dass c und c_0 abgeschlossene Teilräume von ℓ^∞ sind und dass Satz 1.4 genauso für Banachräume gilt.

Übungsaufgabe 4.4. Schauen Sie sich die Operatoren in Beispiel 2.2 auf ℓ^2 bzw. L^2 an und versuchen Sie sie jeweils auch auf ℓ^p , c , c_0 bzw. L^p zu definieren und bestimmen Sie gegebenenfalls dort die Operatornormen.

Bevor wir in das in der Einleitung dieses Kapitels skizzierte Programm einsteigen, wiederholen wir zwei wesentliche Techniken, die wir in Satz 2.5 und Satz 2.6 schon für Hilberträume gezeigt haben. Es ist eine gute Übung, wenn Sie die Beweise noch einmal durchgehen und sicherstellen, dass sie auch für Banachräume genauso funktionieren.

Satz 4.5 (Dichtheitsargument: Fortsetzung von Operatoren). *Es seien X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und $D \subseteq X$ ein dichter Teilraum von X , der ebenfalls mit der X -Norm ausgestattet sei. Wenn $T : D \rightarrow Y$ ein beschränkter Operator ist, dann gibt es ein eindeutiges $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\tilde{T} = T$ auf D und $\|\tilde{T}\|_{X \rightarrow Y} = \|T\|_{D \rightarrow Y}$.*

Satz 4.6 (Dichtheitsargument: Fortsetzung von Operatorenfolgen). *Es sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und D ein dichter Teilraum von X . Weiter sei (T_n) eine Folge in $\mathcal{L}(X, Y)$ mit $C := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{X \rightarrow Y} < \infty$. Wenn für jedes $u \in D$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n u$ in Y existiert, dann existiert $Tu := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n u$ sogar für jedes $u \in X$, der Operator $T : X \rightarrow Y$ ist linear und beschränkt und $\|T\|_{X \rightarrow Y} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{X \rightarrow Y}$.*

Schließlich zeigen wir noch, dass für vollständigen Zielraum auch der Raum der linearen Operatoren wieder ein Banachraum ist.

Satz 4.7. *Es seien X ein normierter Raum und Y ein Banachraum. Dann ist der normierte Raum $\mathcal{L}(X, Y)$ auch ein Banachraum.*

Beweis. Sei (T_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt für jedes $u \in X$ wegen

$$\|T_n u - T_m u\|_Y = \|(T_n - T_m)u\|_Y \leq \|T_n - T_m\|_{X \rightarrow Y} \|u\|_X,$$

dass auch $(T_n u)$ eine Cauchyfolge in Y ist. Da Y vollständig ist, existiert deren Grenzwert $v \in Y$ und wir können als Kandidaten für den Grenzooperator das $T : X \rightarrow Y$ definieren mit $Tu := v = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n u$. Diese Abbildung ist wieder linear, denn für alle $u_1, u_2 \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda u_1 + u_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda T_n u_1 + T_n u_2) = \lambda T u_1 + T u_2.$$

Für die Stetigkeit von T beobachten wir, dass (T_n) als Cauchyfolge in jedem Fall beschränkt in $\mathcal{L}(X, Y)$ ist und setzen $C := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{X \rightarrow Y}$. Dann gilt dank der Stetigkeit der Normabbildung $\|\cdot\|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|Tu\|_Y = \|\lim_{n \rightarrow \infty} T_n u\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n u\|_Y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \|u\|_X = C \|u\|_X.$$

Also ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und wir müssen nur noch $T_n \rightarrow T$ ($n \rightarrow \infty$) in $\mathcal{L}(X, Y)$ zeigen. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n, m \geq N$ gilt $\|T_n - T_m\|_{X \rightarrow Y} \leq \varepsilon$. Dann gilt für alle $u \in X$ und alle $n, m \geq N$

$$\|T_n u - T_m u\|_Y = \|(T_n - T_m)u\|_Y \leq \|T_n - T_m\|_{X \rightarrow Y} \|u\|_X \leq \varepsilon \|u\|_X$$

und mit dem Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ in dieser Ungleichung erhalten wir

$$\|T_n u - Tu\|_Y = \|T_n u - \lim_{m \rightarrow \infty} T_m u\|_Y = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n u - T_m u\|_Y \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon \|u\|_X = \varepsilon \|u\|_X$$

für alle $u \in X$. Das bedeutet aber gerade, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\|T_n - T\|_{X \rightarrow Y} \leq \varepsilon$$

und damit haben wir Konvergenz von (T_n) gegen T in $\mathcal{L}(X, Y)$. □

4.2 Funktionale auf Banachräumen und Dualraum

Die Definition von Funktionalen und des Dualraums lässt sich schon mal problemlos vom Hilbertraum verallgemeinern.

Definition 4.8. Sei X ein normierter Raum. Jedes $\varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ heißt (lineares) Funktional auf X und $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ heißt Dualraum von X .

Auch der Dualraum eines normierten Raums ist mit der Operatornorm immer ein normierter Raum, aber es gilt noch mehr: Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, ist der Dualraum nach Satz 4.7 immer ein Banachraum. Das ist so wichtig, dass wir es in einem eigenen Satz festhalten.

Satz 4.9. Der Dualraum jedes normierten Raumes ist ein Banachraum.

Wir schauen uns ein paar Beispiele von Funktionalen an.

Beispiel 4.10. (a) Auf dem Raum c der konvergenten Folgen in $\mathbb{K}$ gibt es ein Funktional, mit dem Sie schon viel zu tun hatten, nämlich den Grenzwert $\lim : c \rightarrow \mathbb{K}$. Dieser ist bekanntermaßen linear und wegen

$$|\lim((a_n))| = |\lim_{n \rightarrow \infty} a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = \|(a_n)\|_{\ell^\infty}$$

auch stetig.

(b) Ein anderes mathematisches „Alltags-Funktional“ ist das bestimmte Integral, also beispielsweise für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Abbildung $\varphi : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\varphi(f) = \int_a^b f(t) dt$. Diese ist bekanntermaßen linear und sie ist stetig wegen

$$|\varphi(f)| = \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b - a) \|f\|_\infty.$$

Schauen Sie dieses Funktional auf anderen Räumen an! Für welche $p \in [1, \infty]$ ist es beispielsweise stetig auf $L^p([a, b])$? Was ist jeweils die Operatornorm?

(c) Geben Sie Beispiele von Banachräumen von Funktionen auf $[0, 2]$ an, in denen die Punktauswertung $f \mapsto f(1)$ ein stetiges Funktional ist und welche, wo es das nicht ist.

Etwas genauer anschauen wollen wir uns nun Funktionale auf den Lebesgue-Räumen $L^p(\Omega)$.

Satz 4.11. Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum und $p, p' \in [1, \infty]$ mit $1/p + 1/p' = 1$ mit der üblichen Konvention, dass $1' = \infty$ und $\infty' = 1$ ist. Weiter sei für $g \in L^{p'}(\Omega)$ die Abbildung $\varphi_g : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$\varphi_g(f) := \int_{\Omega} f g d\mu, \quad f \in L^p(\Omega),$$

definiert. Dann gilt

4.2 Funktionale auf Banachräumen und Dualraum

(a) Für jedes $g \in L^{p'}(\Omega)$ ist φ_g ein stetiges Funktional auf $L^p(\Omega)$.

(b) Für jedes $f \in L^p(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p} &= \sup\{|\varphi_g(f)| : g \in L^{p'}(\Omega), \|g\|_{L^{p'}} = 1\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_{\Omega} f g \, d\mu\right| : g \in L^{p'}(\Omega), \|g\|_{L^{p'}} = 1\right\}.\end{aligned}$$

(c) Für jedes $g \in L^{p'}(\Omega)$ gilt $\|\varphi_g\|_{L^p(\Omega)'} = \|g\|_{L^{p'}}$.

Bemerkung 4.12. Man beachte, dass wegen $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$ mit dem Zählmaß ζ all dies auch für ℓ^p und $\ell^{p'}$ richtig ist.

Beweis. Der Nachweis von (a) beruht auf einer einfachen Anwendung der Hölder-Ungleichung:

$$|\varphi_g(f)| = \left|\int_{\Omega} f g \, d\mu\right| \leq \int_{\Omega} |f g| \, d\mu = \|f g\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p}$$

und diese Rechnung zeigt auch gleich, dass das in Teil (b) gegebene Supremum immer kleiner gleich $\|f\|_{L^p}$ ist.

Wir zeigen als nächstes die umgekehrte Ungleichung. Im Fall $f = 0$ ist die Aussage wahr, so dass wir ab jetzt $\|f\|_{L^p} > 0$ voraussetzen. Außerdem behandeln wir zuerst nur den Fall $1 \leq p < \infty$. Dazu betrachten wir die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}\right)^{p/p'} & \text{falls } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei für $p = 1$ der Exponent p/p' als Null zu betrachten ist. Dann ist

$$\int_{\Omega} |g|^{p'} \, d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu = 1,$$

bzw. $\|g\|_{L^\infty} = 1$ für $p = 1$. Also haben wir $\|g\|_{L^{p'}} = 1$, und dank $1 + \frac{p}{p'} = 1 + p(1 - \frac{1}{p}) = p$ und $p - \frac{p}{p'} = 1$ finden wir

$$\int_{\Omega} f g \, d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^{p/p'}} \int_{\Omega} |f|^{1+p/p'} \, d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^{p/p'}} \|f\|_p^p = \|f\|_p.$$

Damit ist das Supremum sogar ein Maximum und wird für diese Funktion g angenommen.

Es bleibt noch der Fall $p = \infty$ übrig. Sei $0 < \alpha < \|f\|_{L^\infty}$ gegeben. Dann gibt es eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$, so dass $|f(x)| \geq \alpha$ für alle $x \in A$ gilt und dank der σ -Endlichkeit von Ω , können wir diese Menge auch so wählen, dass $\mu(A) < \infty$ gilt.

4 Lineare Operatoren auf Banachräumen

Damit definieren wir wieder eine Funktion g durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} \frac{1}{\mu(A)} & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im gleichen Fahrwasser wie oben finden wir $\|g\|_{L^1} = 1$ und

$$\int_{\Omega} fg \, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f| \, d\mu \geq \alpha.$$

Damit ist das untersuchte Supremum größer oder gleich α . Da wir das für jedes $\alpha < \|f\|_{L^\infty}$ gezeigt haben, ist es auch größer oder gleich $\|f\|_{L^\infty}$ und wir haben (b) gezeigt.

Zum Nachweis von (c) beobachten wir, dass mit der Definition der Operatornorm und durch umgekehrte Betrachtung des Ergebnisses aus (b) folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi_g\|_{L^p(\Omega)'} &= \sup\{|\varphi_g(f)| : f \in L^p(\Omega), \|f\|_{L^p} = 1\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_{\Omega} fg \, d\mu\right| : f \in L^p(\Omega), \|f\|_{L^p} = 1\right\} = \|g\|_{L^{p'}}. \quad \square \end{aligned}$$

Zum Abschluss dieses einführenden Abschnitts über Dualräume wollen wir uns noch damit beschäftigen, wie die Separabilität, vgl. Definition 1.17, von Raum und Dualraum zusammenhängt.

Satz 4.13. *Sei X ein normierter Raum und X' separabel. Dann ist auch X separabel.*

Beweis. Da X' separabel ist, finden wir eine abzählbare dichte Teilmenge $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ von X' . Das steht in Bemerkung 1.18 (a), die problemlos auch in Banachräumen statt nur in Hilberträumen funktioniert. Weiterhin finden wir nach der Definition der Norm auf X' zu jedem φ_n ein normiertes $u_n \in X$ mit $|\varphi_n(u_n)| \geq 1/2 \|\varphi_n\|_{X'}$. Wir zeigen nun, dass $U := \text{span}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})$ dicht in X ist, was die Separabilität von X liefert.

Dazu nehmen wir an, dass $\overline{U}$ ein echter Teilraum von X ist und wählen dementsprechend ein $v_0 \in X \setminus \overline{U}$. Aus der Babyversion des geometrischen Hahn-Banach in Übungsaufgabe 4.25 bekommen wir dann ein Funktional $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_U = 0$ und $\varphi(v_0) \neq 0$. Dank der Dichtheit aller φ_n , können wir eine Teilfolge $(\varphi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (φ_n) wählen, die gegen φ in X' konvergiert. Dann folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\|\varphi_{n_k}\|_{X'} \leq 2|\varphi_{n_k}(u_{n_k})| = 2|\varphi_{n_k}(u_{n_k}) - \varphi(u_{n_k})| \leq 2\|\varphi_{n_k} - \varphi\|_{X'} \|u_{n_k}\|_X = 2\|\varphi_{n_k} - \varphi\|_{X'}.$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichungskette gegen Null geht, muss die Folge $(\varphi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen Null konvergieren, aber das liefert den Widerspruch

$$0 \neq \varphi(v_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(v_0) = 0. \quad \square$$

Bemerkung 4.14. Die Umkehrung der Aussage des letzten Satzes stimmt im Allgemeinen nicht. Man kann zum Beispiel $X = \ell^1$ wählen. Dann ist die $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ -lineare Hülle von $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit den Folgen $e_n, n \in \mathbb{N}$, aus Beispiel 1.14 (a), die nur an der n -ten Stelle eine Eins enthalten, eine abzählbare und dichte Teilmenge von ℓ^1 , also ist ℓ^1 separabel.

Andererseits werden wir in Satz 5.1 (d) sehen, dass $(\ell^1)'$ isomorph zu ℓ^∞ ist und dieser Raum ist nicht separabel. Um das einzusehen, kann man beispielsweise die Menge $\{a \in \ell^\infty : a_n \in \{0, 1\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ betrachten. Diese ist offenbar überabzählbar und es gilt für zwei verschiedene Folgen a, b aus dieser Menge stets $\|a - b\|_{\ell^\infty} = 1$. Damit lässt sich zeigen, dass ℓ^∞ nicht separabel ist.

4.3 Das Hahn-Banach-Theorem: Algebraische Version

Wenn die Grundphilosophie der Funktionalanalysis (Erkunde den Raum, indem Du die Funktionale auf dem Raum studierst) weiter Bestand haben soll, muss der Dualraum den Raum selbst möglichst genau beschreiben, d. h. wir haben ein Interesse daran, dass der Dualraum einigermaßen groß ist. Eine Mindestanforderung ist es, dass die Funktionale jeden einzelnen Punkt des Raums von den anderen unterscheiden können, wie es nach Bemerkung 2.9 im Hilbertraum der Fall ist. Dort war das einfach einzusehen, da man mit Hilfe des Skalarproduktes eine große Menge von Funktionalen direkt hinschreiben konnte: für jedes $v \in H$ bekommt man mit $u \mapsto \langle u, v \rangle$ ein solches geschenkt. Für einen beliebigen Banachraum gibt es außer dem Nullfunktional erst mal kein weiteres, dass einem ins Auge springen würde. Im Moment können wir also noch nicht mal ausschließen, dass es einen Banachraum X gibt, für den $X' = \{0\}$ gilt. Abhilfe schafft hier das Hahn-Banach-Theorem, dass wir in diesem und dem folgenden Abschnitt in verschiedenen Formulierungen kennenlernen werden.

Die erste Instanz des Hahn-Banach-Theorems, die wir anschauen, hat den Vorteil, dass Sie sehr allgemein ist. Es wird nicht einmal vorausgesetzt, dass der betrachtete Vektorraum normiert ist. Wir behandeln zuerst nur den reellen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definition 4.15. Sei X ein reeller Vektorraum. Man nennt eine Abbildung $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear, wenn gilt

- (a) $p(\lambda u) = \lambda p(u), \quad u \in X, \lambda \in [0, \infty) \text{ und}$
- (b) $p(u + v) \leq p(u) + p(v), \quad u, v \in X.$

Typische Beispiele für sublineare Abbildungen sind Normen, bzw. sogar Halbnormen.

4 Lineare Operatoren auf Banachräumen

Theorem 4.16 (Hahn-Banach, algebraische Version). *Es sei X ein reeller Vektorraum, U ein Untervektorraum von X , $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(u) \leq p(u)$ für alle $u \in U$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi} : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$ und $\tilde{\varphi}(u) \leq p(u)$ für alle $u \in X$.*

Beweis. Wir betrachten die Menge aller linearen Fortsetzungen von φ auf Unterräume von X , die die Dominierung durch p erfüllen:

$$M := \{(V, \psi) : V \text{ UVR von } X, U \subseteq V, \psi : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear, } \psi|_U = \varphi, \psi \leq p \text{ auf } V\}.$$

Man beachte, dass $(U, \varphi) \in M$ gilt und damit M nicht leer ist.

Nun werden wir zum Einen zeigen, dass diese Menge die Voraussetzungen des Lemmas von Zorn erfüllt, d. h. sie besitzt ein maximales Element und zum Anderen, dass wann immer $(V, \psi) \in M$ ist mit $V \neq X$, wir noch eine echte Fortsetzung von ψ auf einen größeren Teilraum von X finden, die sich auch für M qualifiziert. Damit kann das maximale Element nur auf ganz X definiert sein und wir sind fertig.

Schritt 1: Jedes $(V, \psi) \in M$ mit $V \neq X$ lässt sich echt zu $(V_1, \psi_1) \in M$ fortsetzen

Sei also $(V, \psi) \in M$ mit $V \neq X$. Wir fixieren ein $w \in X \setminus V$ und betrachten $u, v \in V$. Dann gilt wegen der Eigenschaften von ψ und p

$$\psi(u) + \psi(v) = \psi(u + v) \leq p(u + v) = p(u - w + w + v) \leq p(u - w) + p(w + v).$$

Umstellen dieser Ungleichung zeigt

$$\psi(u) - p(u - w) \leq p(w + v) - \psi(v), \quad u, v \in V, w \in X \setminus V. \quad (4.1)$$

Damit existiert $\alpha_w := \sup_{u \in V} (\psi(u) - p(u - w))$ und wir haben

$$\psi(v) - \alpha_w \leq \psi(v) - (\psi(v) - p(v - w)) = p(v - w), \quad v \in V, w \in X \setminus V. \quad (4.2)$$

Außerdem folgt durch Bildung des Supremums über u in (4.1)

$$\psi(v) + \alpha_w \leq p(v + w), \quad v \in V, w \in X \setminus V. \quad (4.3)$$

Es sei nun $V_1 := V \oplus \text{span}(\{w\})$ und $\psi_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\psi_1(v + tw) := \psi(v) + t\alpha_w, \quad v \in V, t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist V_1 ein Teilraum von X , der echt größer als V ist, wir müssen also nur noch zeigen, dass (V_1, ψ_1) wirklich in M liegt. Offensichtlich ist ψ_1 linear und es gilt $\psi_1|_V = \psi$, so dass nur die Dominierung durch p einer genaueren Betrachtung bedarf.

4.3 Das Hahn-Banach-Theorem: Algebraische Version

Sei also $v + tw \in V_1$ mit einem $v \in V$ und einem $t \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden die drei Fälle $t < 0$, $t = 0$ und $t > 0$. Für $t = 0$ ist nichts zu zeigen, denn dann sind wir in V , und es ist $\psi_1(v) = \psi(v) \leq p(v)$. Ist $t > 0$, so gilt mit der Linearität von ψ und (4.3)

$$\psi_1(v + tw) = \psi(v) + t\alpha_w = t(\psi(v/t) + \alpha_w) \leq tp(v/t + w) = p(v + tw).$$

Für $t < 0$ betrachten wir $s := -t > 0$ und finden in ähnlicher Weise mit (4.2)

$$\psi_1(v + tw) = \psi(v) - s\alpha_w = s(\psi(v/s) - \alpha_w) \leq sp(v/s - w) = p(v - sw) = p(v + tw).$$

Schritt 2: Verifiziere Voraussetzungen für das Zornsche Lemma

Wir müssen zeigen, dass M eine partiell geordnete Menge ist, in der jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt. Als Ordnungsrelation auf M betrachten wir sinnvollerweise

$$(V_1, \psi_1) \leq (V_2, \psi_2) \iff V_1 \subseteq V_2 \text{ und } \psi_2|_{V_1} = \psi_1.$$

Sei also $K \subseteq M$ eine totalgeordnete Teilmenge von M . Dann setzen wir

$$V_* := \bigcup_{(V, \psi) \in K} V.$$

Ist nun $u \in V_*$, so existiert ein $(V, \psi) \in K$ mit $u \in V$ und für alle anderen $(\hat{V}, \hat{\psi}) \in K$ mit $u \in \hat{V}$ gilt wegen der Totalordnung von K entweder $V \subseteq \hat{V}$ oder $\hat{V} \subseteq V$. In beiden Fällen gilt dann aber $\psi(u) = \hat{\psi}(u)$. Also können wir für $u \in V_*$ in der Wahl von V willkürlich definieren:

$$\psi_*(u) := \psi(u) \text{ für ein } (V, \psi) \in K \text{ mit } u \in V.$$

Das Ziel ist nun $(V_*, \psi_*) \in M$ zu zeigen. Zunächst ist $U \subseteq V$ für jedes $(V, \psi) \in K$, also ist auch $U \subseteq V_*$. Genauso offensichtlich ist für jedes $(V, \psi) \in K$ die Funktion ψ eine Fortsetzung von φ , die durch p beschränkt ist, also ist $\psi_*|_U = \varphi$ und ψ_* ist durch p beschränkt.

Als nächstes vergewissern wir uns, dass V_* auch wirklich ein UVR von X ist. Seien dazu $v_1, v_2 \in V_*$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2) \in K$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$. Da K total geordnet ist, gilt entweder $V_1 \subseteq V_2$ oder $V_2 \subseteq V_1$. Dann ist entweder $\lambda v_1 + v_2$ in V_1 oder in V_2 , in jedem Fall landet die Linearkombination in V_* .

Mit exakt demselben Trick können wir schließlich die Linearität von ψ_* nachweisen. Sind $v_1, v_2 \in V_*$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gibt es dank der Totalordnung ein $(V, \psi) \in K$ mit $v_1, v_2, \lambda v_1 + v_2 \in V$ und die Linearität von ψ_* folgt aus der von ψ durch

$$\psi_*(\lambda v_1 + v_2) = \psi(\lambda v_1 + v_2) = \lambda\psi(v_1) + \psi(v_2) = \lambda\psi_*(v_1) + \psi_*(v_2). \quad \square$$

4 Lineare Operatoren auf Banachräumen

Um auch Funktionale auf komplexen Räumen behandeln zu können, komplexifizieren wir das reelle Resultat. Dazu fassen wir den komplexen Vektorraum X als reellen Vektorraum auf. Es stellt sich heraus, dass es einen engen Zusammenhang zwischen $\mathbb{R}$ -linearen Funktionalen und $\mathbb{C}$ -linearen Funktionalen auf X gibt, den wir zuerst herausarbeiten.

Lemma 4.17. *Es sei X ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.*

(a) *Ist $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, d. h.*

$$\varphi(\lambda u + v) = \lambda \varphi(u) + \varphi(v), \quad u, v \in X, \lambda \in \mathbb{R},$$

dann ist $\varphi_{\mathbb{C}}: X \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\varphi_{\mathbb{C}}(u) = \varphi(u) - i\varphi(iu), \quad u \in X,$$

$\mathbb{C}$ -linear auf X mit $\varphi = \operatorname{Re}(\varphi_{\mathbb{C}})$.

Ist zusätzlich X ein normierter Raum und φ stetig, so ist $\varphi_{\mathbb{C}} \in X'$ und es gilt $\|\varphi\|_{X'} = \|\varphi_{\mathbb{C}}\|_{X'}$.

(b) *Ist $\psi: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung, so ist $\operatorname{Re}(\psi)$ eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung und es gilt für die Konstruktion aus Teil (a) die Identität $[\operatorname{Re}(\psi)]_{\mathbb{C}} = \psi$.*

Beweis. (a) Zunächst ist nach Konstruktion sofort

$$[\operatorname{Re}(\varphi_{\mathbb{C}})](u) = \operatorname{Re}(\varphi(u) - i\varphi(iu)) = \varphi(u), \quad u \in X.$$

Weiter ist die Abbildung $u \mapsto iu$, $u \in X$, ebenfalls $\mathbb{R}$ -linear, deshalb ist $\varphi_{\mathbb{C}}$ als Hintereinanderausführung von $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen $\mathbb{R}$ -linear. Um sicherzustellen, dass sie auch $\mathbb{C}$ -linear ist, muss also nur noch $\varphi_{\mathbb{C}}(iu) = i\varphi_{\mathbb{C}}(u)$ gezeigt werden. Das lässt sich aber direkt nachrechnen, denn für alle $u \in X$ gilt

$$\varphi_{\mathbb{C}}(iu) = \varphi(iu) - i\varphi(i^2u) = -i(\varphi(-u) + i\varphi(iu)) = i(\varphi(u) - i\varphi(iu)) = i\varphi_{\mathbb{C}}(u).$$

Es bleibt der Zusatz für normierte Räume zu bewisen. Sei dazu $u \in X$ und $re^{i\theta}$ die Polardarstellung der komplexen Zahl $\varphi_{\mathbb{C}}(u)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\varphi_{\mathbb{C}}(u)| &= r = e^{-i\theta} \varphi_{\mathbb{C}}(u) = \varphi_{\mathbb{C}}(e^{-i\theta}u) = |\operatorname{Re}(\varphi_{\mathbb{C}}(e^{-i\theta}u))| = |\varphi(e^{-i\theta}u)| \\ &\leq \|\varphi\|_{X'} \|e^{-i\theta}u\|_X = \|\varphi\|_{X'} \|u\|_X. \end{aligned}$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt direkt wegen

$$\|\varphi\|_{X'} = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X=1}} |\varphi(u)| = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X=1}} |\operatorname{Re}(\varphi_{\mathbb{C}}(u))| \leq \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X=1}} |\varphi_{\mathbb{C}}(u)| = \|\varphi_{\mathbb{C}}\|_{X'}.$$

4.4 Das Hahn-Banach-Theorem: Analytische Version

- (b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Re}(iz)$. Diese Identität liefert zusammen mit der $\mathbb{C}$ -Linearität von ψ

$$\begin{aligned} [\operatorname{Re}(\psi)]_{\mathbb{C}}(u) &= [\operatorname{Re}(\psi)](u) - i[\operatorname{Re}(\psi)](iu) = \operatorname{Re}(\psi(u)) - i\operatorname{Re}(\psi(iu)) \\ &= \operatorname{Re}(\psi(u)) - i\operatorname{Re}(i\psi(u)) = \operatorname{Re}(\psi(u)) + i\operatorname{Im}(\psi(u)) = \psi(u). \quad \square \end{aligned}$$

Das liefert mit nicht mehr allzu viel Aufwand die folgende komplexe Version von Theorem 4.16, deren Beweis als Übungsaufgabe verbleibt.

Theorem 4.18 (Hahn-Banach, algebraische Version in $\mathbb{C}$). *Sei X ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum und U ein Teilraum von X . Ist $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ linear mit $\operatorname{Re}(\varphi(u)) \leq p(u)$ für alle $u \in U$, so gibt es eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi} : X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$ und $\operatorname{Re}(\tilde{\varphi}(u)) \leq p(u)$ für alle $u \in X$.*

4.4 Das Hahn-Banach-Theorem: Analytische Version

Nun kommen Normen ins Spiel und wir wenden uns der analytischen Version von Hahn-Banach zu, die besagt, dass man jedes auf einem Teilraum gegebene stetige Funktional normgleich auf den ganzen Raum fortsetzen kann.

Theorem 4.19 (Hahn-Banach, analytische Version). *Sei X ein normierter $\mathbb{K}$ -Vektorraum und U ein Untervektorraum von X . Dann existiert zu jedem Funktional $\varphi : U \rightarrow \mathbb{K}$ eine Fortsetzung $\tilde{\varphi} \in X'$ mit $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$ und $\|\tilde{\varphi}\|_{X'} = \|\varphi\|_{U'}$.*

Bemerkung 4.20. (a) Beachten Sie, dass es keinen Grund gibt, warum das durch den Satz von Hahn-Banach erzeugte Funktional im Allgemeinen eindeutig bestimmt sein sollte. Der Satz ist ein reines Existenzresultat. Wenn Sie eine eindeutige Fortsetzung eines Funktionals benötigen, sollten Sie dringend sicherstellen, dass es auf einem dichten Teilraum definiert ist, und dann Satz 4.5 verwenden.

- (b) Die große Stärke dieses Satzes ist es, dass an den Untervektorraum U überhaupt keine weiteren Bedingungen gestellt werden. Er ist damit ein sehr vielseitiger und talentierter Maßschneider für Funktionale aller Art. Wenn man auf einem normierten Raum ein Funktional mit einer gewissen wünschenswerten Eigenschaft sucht, und diese lässt sich irgendwie auf einem Unterraum realisieren, dann bekommt man mit Hahn-Banach sofort ein maßgeschneidertes Funktional auf ganz X geschenkt. Das ist oft ein beweisentscheidender Vorteil.
- (c) Wie wertvoll das ist, merkt man wie so oft in der Mathematik so richtig erst, wenn man ein entsprechendes Resultat nicht hat. Deshalb sei hier gleich gewarnt: Ein entsprechendes Resultat für stetige lineare Operatoren ist im Allgemeinen falsch, sogar wenn diese zwischen zwei Banachräumen definiert sind. So gibt es beispielsweise keinen stetigen linearen Operator von ℓ^∞ nach c_0 , der die Identität auf c_0 fortsetzt. Hahn-Banach braucht wirklich den Körper $\mathbb{K}$ als Zielraum.

4 Lineare Operatoren auf Banachräumen

Beweis von Satz 4.19. Wir unterscheiden wieder die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein gegebenes Funktional auf U , so definieren wir zur Anwendung der algebraischen Version von Hahn-Banach aus Theorem 4.16 die Funktion $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$p(u) := \|\varphi\|_{U'} \|u\|_X, \quad u \in X.$$

Dann ist p als (Vielfaches einer) Norm eine sublineare Abbildung und es gilt für alle $u \in U$

$$\varphi(u) \leq |\varphi(u)| \leq \|\varphi\|_{U'} \|u\|_X = p(u).$$

Damit sind alle Voraussetzungen der algebraischen Version von Hahn-Banach erfüllt und es existiert eine lineare Fortsetzung $\tilde{\varphi} : X \rightarrow \mathbb{R}$ von φ mit $\tilde{\varphi}(u) \leq p(u)$ für alle $u \in X$. Das liefert

$$|\tilde{\varphi}(u)| = \pm \tilde{\varphi}(u) = \tilde{\varphi}(\pm u) \leq p(\pm u) = \|\varphi\|_{U'} \|\pm u\|_X = \|\varphi\|_{U'} \|u\|_X,$$

und wir haben genau die Stetigkeit von $\tilde{\varphi}$ dastehen. Es gilt also $\tilde{\varphi} \in X'$ und außerdem haben wir schon $\|\tilde{\varphi}\|_{X'} \leq \|\varphi\|_{U'}$ bewiesen. Die umgekehrte Abschätzung ergibt sich analog zum Beweis von Theorem 2.5 wieder direkt aus der Fortsetzung:

$$\|\tilde{\varphi}\|_{X'} = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X=1}} |\tilde{\varphi}(u)| \geq \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\|_X=1}} |\tilde{\varphi}(u)| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\|_X=1}} |\varphi(u)| = \|\varphi\|_{U'}.$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt für das $\mathbb{R}$ -lineare Funktional $\operatorname{Re}(\varphi)$ die Abschätzung

$$[\operatorname{Re}(\varphi)](u) = \operatorname{Re}(\varphi(u)) \leq |\varphi(u)| \leq \|\varphi\|_{U'} \|u\|_X = p(u), \quad u \in U.$$

Dieses hat also wieder nach der algebraischen Version von Hahn-Banach aus 4.16 eine $\mathbb{R}$ -lineare, stetige Fortsetzung $\operatorname{Re}(\varphi) : X \rightarrow \mathbb{R}$ und wir setzen $\tilde{\varphi} := (\operatorname{Re}(\varphi))_{\mathbb{C}}$ mit der Komplexifizierung aus Lemma 4.17 (a). Damit gilt mit den Ergebnissen aus Lemma 4.17 und dem ersten Teil dieses Beweises für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\|\tilde{\varphi}\|_{X'} = \|[\operatorname{Re}(\varphi)]_{\mathbb{C}}\|_{X'} = \|\operatorname{Re}(\varphi)\|_{X'} = \|\operatorname{Re}(\varphi)\|_{U'} = \|[\operatorname{Re}(\varphi)]_{\mathbb{C}}\|_{U'} = \|\varphi\|_{U'}$$

und der Beweis ist beendet. □

Hier sind einige fundamentale Folgerungen aus dieser Version von Hahn-Banach.

Korollar 4.21. *Es sei X ein normierter Vektorraum und $u \in X$. Dann gelten die folgenden Aussagen für alle $u \in X$:*

- (a) *Ist $u \neq 0$, so existiert ein Funktional $\varphi_u \in X'$ mit $\|\varphi_u\|_{X'} = 1$ und $\varphi_u(u) = \|u\|_X$.*
- (b) $\|u\|_X = \sup_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\|_{X'}=1}} |\varphi(u)|.$
- (c) *Ist $\varphi(u) = 0$ für alle $\varphi \in X'$, so folgt $u = 0$.*
- (d) *Ist $v \in X$ so, dass $\varphi(u) = \varphi(v)$ für alle $\varphi \in X'$ gilt, so ist $u = v$.*

4.4 Das Hahn-Banach-Theorem: Analytische Version

Beweis. (a) Man wendet Theorem 4.19 auf den eindimensionalen Unterraum $U := \text{span}(\{u\})$ und das Funktional $\psi : U \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$\psi(\lambda u) = \lambda \|u\|_X, \quad \lambda \in \mathbb{K},$$

an. Für dieses gilt $\psi(u) = \psi(1 \cdot u) = 1 \cdot \|u\|_X = \|u\|_X$ und

$$\|\psi\|_{U'} = \sup_{\substack{v \in U \\ \|v\|_X=1}} |\psi(v)| = \sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ |\lambda|=1}} \left| \psi\left(\lambda \frac{u}{\|u\|_X}\right) \right| = \sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ |\lambda|=1}} \left| \frac{\lambda}{\|u\|_X} \|u\|_X \right| = 1.$$

Eine Fortsetzung $\varphi := \tilde{\psi}$ von ψ nach Theorem 4.19 tut dann das gewünschte.

(b) Für jedes $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\|_{X'} = 1$ gilt sofort

$$|\varphi(u)| \leq \|\varphi\|_{X'} \|u\|_X = \|u\|_X$$

und damit gilt diese Ungleichung auch für das Supremum über all diese Funktionale. Die umgekehrte Ungleichung gilt für $u = 0$ banalerweise und folgt für $u \neq 0$ mit dem Funktional φ_u aus Teil (a) durch

$$\|u\|_X = |\varphi_u(u)| \leq \sup_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\|_{X'}=1}} |\varphi(u)|.$$

(c) Das folgt sofort aus (b).

(d) Anwendung von (c) auf $u - v$ liefert auch hier sofort die Behauptung. □

Bemerkung 4.22. (a) Die Aussage in Teil (d) des obigen Korollars gibt uns auch in normierten Räumen die Gewissheit, dass es immer genug Funktionale gibt, um alle Punkte voneinander unterscheiden zu können, so wie im Hilbertraumfall, vgl. Bemerkung 2.9. Wir haben damit das zu Beginn dieses Abschnitts formulierte Ziel erreicht.

(b) Die Aussage in Teil (b) sieht aus wie die Definition der Operatornorm, ist aber genau die umgekehrte Aussage. Während dort die Norm des Funktional durch die Beträge aller dessen Bilder ausgedrückt wird, steht hier, dass man die Norm eines Banachraumelements bestimmen kann, indem man alle Funktionale auf es anwendet. Man vergleiche genau:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{X'} &= \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X=1}} |\varphi(u)| \quad \text{und} \\ \|u\|_X &= \sup_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\|_{X'}=1}} |\varphi(u)|. \end{aligned}$$

4 Lineare Operatoren auf Banachräumen

In vielen Fällen braucht man gar nicht alle Funktionalen des Dualraums, um die Norm zu rekonstruieren, z.B. stellt sich heraus, dass in separablen Räumen schon eine geeignet gewählte Folge von Funktionalen ausreicht. Das wollen wir jetzt zeigen.

Satz 4.23. *Sei X ein separabler normierter Raum. Dann existiert eine Folge (φ_n) in X' mit $\|\varphi_n\|_{X'} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\|u\|_X = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(u)|$ für alle $u \in X$.*

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass wegen der Normierung von φ_n direkt die Ungleichung $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(u)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X'} \|u\|_X = \|u\|_X$ gilt, so dass wir nur die umgekehrte Abschätzung sicherstellen müssen.

Dank der Separabilität von X können wir eine dichte Folge (u_n) in X wählen. Zu jedem dieser u_n verschaffen wir uns mit dem Satz von Hahn-Banach in Form von Korollar 4.21 (a) ein $\varphi_n \in X'$ mit $\|\varphi_n\|_{X'} = 1$ und $\varphi_n(u_n) = \|u_n\|_X$. Ist dann ein beliebiges $u \in X$ gegeben und $\varepsilon > 0$, so finden wir dank der Dichtheit der Folge (u_n) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|u - u_{n_0}\|_X < \varepsilon/2$. Damit gilt dank der Eigenschaften von φ_{n_0}

$$\begin{aligned} \|u\|_X &\leq \|u - u_{n_0}\|_X + \|u_{n_0}\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} + \varphi_{n_0}(u_{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\varphi_{n_0}(u_{n_0} - u)| + |\varphi_{n_0}(u)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\varphi_{n_0}\|_{X'} \|u_{n_0} - u\|_X + \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(u)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(u)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Eine Folge (φ_n) wie in Satz 4.23 nennt man auch *normierend für X* . Allgemeiner verwendet man den folgenden Begriff.

Definition 4.24. *Sei X ein normierter Raum. Ein $M \subseteq X'$ heißt normierend für X , wenn gilt:*

- Für alle $\varphi \in M$ gilt $\|\varphi\|_{X'} = 1$ und
- Für alle $u \in X$ gilt $\|u\|_X = \sup\{|\varphi(u)| : \varphi \in M\}$.

4.5 Das Hahn-Banach-Theorem: Trennungsversion

Die Existenz von punkt-trennenden Funktionalen nach Hahn-Banach kann man noch weiter treiben und auch ganze Mengen trennen. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass wenn K_1 und K_2 disjunkte und konvexe Teilmengen von X sind, von denen eine offen ist, es immer ein Funktional in X' gibt, dessen Werte auf K_1 strikt kleiner als auf K_2 sind. Eine „Babyversion“ dieses Satzes können Sie schon jetzt zeigen:

Übungsaufgabe 4.25. Zeigen Sie als Folgerung aus der analytischen Version von Hahn-Banach das folgende Korollar: Es sei X ein normierter Raum und U ein abgeschlossener Teilraum von X mit $U \neq X$. Dann gibt es für jedes $v_0 \in X \setminus U$ ein Funktional $\varphi \in X'$ mit $U \subseteq \ker(\varphi)$ und $\varphi(v_0) \neq 0$.

Definition 4.26. Es sei X ein normierter Raum und $K \subseteq X$.

(a) Die Abbildung $p_K : X \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$p_K(u) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \{\lambda > 0 : u/\lambda \in K\} = \emptyset, \\ \inf\{\lambda > 0 : u/\lambda \in K\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

heißt Minkowski-Funktional von K .

(b) Die Menge K heißt absorbierend, wenn $p_K(u) < \infty$ für alle $u \in X$ gilt.

Man beachte unbedingt, dass die Bezeichnung als „Funktional“ für p_K schlecht und irreführend ist, denn p_K ist *keine* lineare Abbildung! Der Begriff ist aber leider zu etabliert, um hier eine Extrawurst zu braten.

Beispiel 4.27. Nimmt man als K die Einheitskugel in X , so ist für $u \in X$

$$p_K(u) = \inf\left\{\lambda > 0 : \left\|\frac{u}{\lambda}\right\|_X \leq 1\right\} = \inf\{\lambda > 0 : \|u\|_X \leq \lambda\} = \|u\|_X.$$

Man bekommt in diesem Fall als Minkowski-Funktional also einfach die Normabbildung.

Der folgende Satz sammelt ein paar Eigenschaften des Minkowski-Funktional.

Satz 4.28. Es sei X ein normierter Raum und $K \subseteq X$ konvex mit $0 \in K^\circ$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Ist $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(0) \subseteq K$ gilt, so ist $p_K(u) \leq \|u\|_X/\varepsilon$ für alle $u \in X$. Insbesondere ist K absorbierend.
- (b) Die Abbildung p_K ist sublinear.
- (c) Wenn K offen ist, so gilt $K = p_K^{-1}([0, 1))$.

Beweis. (a) Für jedes $u \in X$ und jedes $\lambda > \|u\|_X/\varepsilon$ gilt

$$\left\|\frac{u}{\lambda}\right\|_X = \frac{1}{\lambda}\|u\|_X < \frac{\varepsilon}{\|u\|_X}\|u\|_X = \varepsilon,$$

also ist dann $u/\lambda \in K$ und das liefert $p_K(u) \leq \|u\|_X/\varepsilon$.

(b) Für alle $u \in X$ und $\mu \geq 0$ gilt

$$p_K(\mu u) = \inf\{\lambda > 0 : \mu u/\lambda \in K\} = \mu \inf\{\kappa > 0 : u/\kappa \in K\} = \mu p_K(u).$$

Für die Dreiecksungleichung seien $u, v \in X$ und $\lambda_u, \lambda_v > 0$ so, dass $u/\lambda_u, v/\lambda_v \in K$ gilt. Dann ist dank der Konvexität von K auch

$$\frac{u+v}{\lambda_u+\lambda_v} = \frac{\lambda_u}{\lambda_u+\lambda_v} \frac{u}{\lambda_u} + \frac{\lambda_v}{\lambda_u+\lambda_v} \frac{v}{\lambda_v} \in K.$$

4 Lineare Operatoren auf Banachräumen

Also gilt $p_K(u + v) \leq \lambda_u + \lambda_v$ und damit

$$p_K(u + v) \leq \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{u}{\lambda} \in K \right\} + \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{v}{\lambda} \in K \right\} = p_K(u) + p_K(v).$$

- (c) Es sei K offen. Für $u \in K$ gibt es dann ein $\lambda < 1$, so dass immer noch $\lambda \cdot u \in K$ gilt, also ist $p_K(u) < 1$ und damit $u \in p_K^{-1}([0, 1))$. Ist umgekehrt $p_K(u) \in [0, 1)$, so existiert ein $\lambda \in (0, 1)$ mit $u/\lambda \in K$. Wegen der Konvexität von K und $0 \in K$ gilt dann

$$u = \lambda \frac{u}{\lambda} + (1 - \lambda) \cdot 0 \in K. \quad \square$$

Wir können nun das entscheidende Lemma angehen.

Lemma 4.29. *Es sei X ein normierter Vektorraum und $K \subseteq X$ eine konvexe und offene Menge mit $0 \notin K$. Dann existiert ein $\varphi \in X'$ mit $\operatorname{Re}(\varphi(u)) < 0$ für alle $u \in K$.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ist $K = \emptyset$ so ist nichts zu zeigen, wir gehen also von $K \neq \emptyset$ aus, wählen ein $u_* \in K$ fix und setzen $M := \{u - u_* : u \in K\} = K - u_*$. Dann ist auch M offen und konvex und es gilt $-u_* \notin M$. Nach den Ergebnissen von Lemma 4.28 ist das Minkowski-Funktional p_M von M also sublinear, es hat seine Werte in $[0, \infty)$ und es gilt $p_M(-u_*) \geq 1$.

Auf $U := \operatorname{span}(\{u_*\})$ definieren wir $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\psi(\lambda u_*) := -\lambda p_M(-u_*)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist ψ linear und wir zeigen $\psi(u) \leq p_M(u)$ für alle $u = \lambda u_* \in U$. Ist $\lambda \leq 0$, so ist dank der Sublinearität von p_M sogar

$$\psi(\lambda u_*) = -\lambda p_M(-u_*) = p_M(\lambda u_*)$$

und für $\lambda > 0$ gilt schlicht

$$\psi(\lambda u_*) = -\lambda p_M(-u_*) < 0 \leq p_M(\lambda u_*).$$

Zusammen erfüllen also ψ und p_M auf U die Voraussetzungen der algebraischen Version von Hahn-Banach aus Theorem 4.16 und wir können ψ zu einer linearen Abbildung $\varphi = \tilde{\psi} : X \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen mit $\varphi(u) \leq p_M(u)$ für alle $u \in X$. Diese ist sogar stetig, d. h. in X' . Dazu sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $U_\varepsilon(0) \subseteq M$ gilt. Dann ist nach Satz 4.28 (a) für alle $u \in X$

$$|\varphi(u)| = \pm \varphi(u) = \varphi(\pm u) \leq p_M(\pm u) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\pm u\|_X = \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_X.$$

Schließlich wissen wir auch was φ mit u_* macht, denn es gilt

$$\varphi(u_*) = \psi(u_*) = -p_M(-u_*) \leq -1.$$

Das liefert uns am Ende für alle $u \in K$ mit Hilfe von Satz 4.28 (c)

$$\varphi(u) = \varphi(u - u_*) + \varphi(u_*) \leq p_M(\underbrace{u - u_*}_{\in M}) - 1 < 1 - 1 = 0.$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so setzt man analog zum Beweis der analytischen Version von Hahn-Banach im Theorem 4.19 das Funktional $\operatorname{Re}(\psi)$ fort und setzt wie dort $\varphi(u) := \overline{\operatorname{Re}(\psi)(u)} - i\operatorname{Re}(\psi)(iu)$. Die Details bleiben als Übung. $\square$

Damit können wir nun unsere letzte Hahn-Banach-Version beweisen.

Theorem 4.30 (Hahn-Banach, Trennungsversion oder geometrische Version). *Es seien X ein normierter Raum, $K_1, K_2 \subseteq X$ konvex mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ und K_1 sei offen. Dann existiert ein $\varphi \in X'$ mit*

$$\operatorname{Re}(\varphi(u_1)) < \operatorname{Re}(\varphi(u_2)), \quad u_1 \in K_1, u_2 \in K_2.$$

Beweis. Setze $K := K_1 - K_2$. Dann ist

$$K = \{u_1 - u_2 : u_1 \in K_1, u_2 \in K_2\} = \bigcup_{u_2 \in K_2} \{u_1 - u_2 : u_1 \in K_1\} = \bigcup_{u_2 \in K_2} (K_1 - u_2)$$

als Vereinigung von offenen Mengen selbst eine offene Menge. Außerdem ist mit K_1 und K_2 auch K konvex, denn nimmt man sich zwei Elemente $u = u_1 - u_2$ und $v = v_1 - v_2$ aus K mit $u_1, v_1 \in K_1$ und $u_2, v_2 \in K_2$ her, so gilt für alle $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \lambda u + (1 - \lambda)v &= \lambda u_1 - \lambda u_2 + (1 - \lambda)v_1 - (1 - \lambda)v_2 \\ &= (\lambda u_1 + (1 - \lambda)v_1) - (\lambda u_2 + (1 - \lambda)v_2) \in K_1 - K_2 = K. \end{aligned}$$

Schließlich ist wegen der Disjunktheit von K_1 und K_2 der Ursprung nicht in K enthalten, so dass K alle Voraussetzungen von Lemma 4.29 erfüllt. Wir schnappen uns also das dortige $\varphi \in X'$ mit $\operatorname{Re}(\varphi(u)) < 0$ für alle $u \in K$. Für dieses ist nämlich für alle $u_1 \in K_1$ und $u_2 \in K_2$

$$\operatorname{Re}(\varphi(u_1)) - \operatorname{Re}(\varphi(u_2)) = \operatorname{Re}(\varphi(u_1 - u_2)) < 0, \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{Re}(\varphi(u_1)) < \operatorname{Re}(\varphi(u_2)). \quad \square$$

4.6 Adjungierte Operatoren

Wir hatten in Definition 2.16 die Hilbertraum-Adjungierte T^* eines beschränkten linearen Operators T zwischen zwei Hilberträumen kennengelernt. Auf den ersten Blick sieht es hoffnungslos aus, dieses Konzept auf allgemeine normierte Räume verallgemeinern zu wollen, denn es ist ja schon in der definierenden Gleichung $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle$ engst mit dem Skalarprodukt verwoben. Andererseits haben wir über den Rieszschen Darstellungssatz einen Zusammenhang zwischen Skalarprodukten und Funktionalen festgestellt und das Konzept eines Funktionalen haben wir dank des Satzes von Hahn-Banach sehr erfolgreich auch in normierten Räumen etabliert. Wir versuchen deshalb die Adjungierte zu definieren, indem wir die Skalarprodukte konsequent als Anwendungen von Funktionalen auffassen.

4 Lineare Operatoren auf Banachräumen

Seien also H, K zwei Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Wir wollen H und K nur als Banachräume begreifen und die definierende Gleichung der Adjungierten $\langle Tu, v \rangle_K = \langle u, T^*v \rangle_H$ für alle $u \in H$ und alle $v \in K$ dementsprechend in der Sprache von Funktionalen und ohne Skalarprodukt schreiben. Dazu müssen wir zunächst die Identifikation des Dualraums eines Hilbertraums mit sich selbst aufheben: Während die Hilbertraumadjungierte T^* von T als Operator von K nach H definiert ist, müssen wir demnach allgemein die Adjungierte T' von T als Operator von K' nach H' auffassen. Mit dem Riesz-Isomorphismus $\Phi_K : K \rightarrow K'$ schreiben wir entsprechend um

$$\langle Tu, v \rangle_K = [\Phi_K(v)](Tu) \quad \text{und} \quad \langle u, T^*v \rangle_H = [T'(\Phi_K(v))](u).$$

Mit dem Allquantor über alle $v \in K$ läuft $\Phi(v)$ über alle Funktionale in K' . Wir bekommen also die Gleichheit

$$\varphi(Tu) = [T'(\varphi)](u), \quad \varphi \in K', u \in H,$$

die uns folgende Definition diktiert:

Definition 4.31. *Es seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist der zu T adjungierte Operator $T' : Y' \rightarrow X'$ definiert durch $T'\varphi := \varphi \circ T$, $\varphi \in Y'$, d. h.*

$$(T'\varphi)(u) = \varphi(Tu), \quad u \in X, \varphi \in Y'. \quad (4.4)$$

Sinnvollerweise überlegen wir uns schnell, dass $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ gilt, d. h. dass dieser Operator linear und stetig ist. Beides geht geradeaus, denn für alle $\varphi, \psi \in Y'$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$T'(\lambda\varphi + \psi) = (\lambda\varphi + \psi) \circ T = \lambda\varphi \circ T + \psi \circ T = \lambda T'\varphi + T'\psi$$

und

$$\|T'\varphi\|_{X'} = \|\varphi \circ T\|_{X'} \leq \|T\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|\varphi\|_{Y'}.$$

Wir sammeln ein paar weitere elementare Eigenschaften der Adjungierten-Bildung.

Satz 4.32. *Es seien X, Y, Z normierte Räume. Dann gilt*

- (a) $(\alpha T_1 + \beta T_2)' = \alpha T_1' + \beta T_2'$ für alle $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- (b) $(T_1 T_2)' = T_2' T_1'$ für alle $T_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $T_2 \in \mathcal{L}(Y, Z)$.
- (c) $\|T'\|_{Y' \rightarrow X'} = \|T\|_{X \rightarrow Y}$ für alle $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.
- (d) $T_1' = T_2' \Rightarrow T_1 = T_2$ für alle $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Damit ist insbesondere gezeigt, dass die Adjungierten-Bildung $T \mapsto T'$ als Abbildung von $\mathcal{L}(X, Y)$ nach $\mathcal{L}(Y', X')$ linear und isometrisch ist. Beachten Sie aber, dass sie im Allgemeinen nicht surjektiv ist!

4.6 Adjungierte Operatoren

Beweis. Für den Beweis von (a) schreiben wir für alle $\varphi \in Y'$ schlicht nach Definition und wegen Linearität von φ

$$(\alpha T_1 + \beta T_2)' \varphi = \varphi \circ (\alpha T_1 + \beta T_2) = \alpha \varphi \circ T_1 + \beta \varphi \circ T_2 = \alpha T_1' \varphi + \beta T_2' \varphi = (\alpha T_1' + \beta T_2') \varphi.$$

Teil (b) folgt genauso schnell, denn für alle $\varphi \in Y'$ ist

$$(T_1 T_2)' \varphi = \varphi \circ (T_1 T_2) = (\varphi \circ T_1) \circ T_2 = T_2'(\varphi \circ T_1) = T_2' T_1' \varphi.$$

Für den Nachweis von (c) rechnen wir mit der Definition der Operatornorm, Korollar 4.21 (b) und der Definition der Adjungierten

$$\begin{aligned} \|T\|_{X \rightarrow Y} &= \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X=1}} \|Tu\|_Y = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X=1}} \sup_{\substack{\varphi \in Y' \\ \|\varphi\|_{Y'}=1}} |\varphi(Tu)| = \sup_{\substack{\varphi \in Y' \\ \|\varphi\|_{Y'}=1}} \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X=1}} |(T' \varphi)u| \\ &= \sup_{\substack{\varphi \in Y' \\ \|\varphi\|_{Y'}=1}} \|T' \varphi\|_{X'} = \|T'\|_{Y' \rightarrow X'} \end{aligned}$$

und die in (d) behauptete Injektivität folgt dann sofort aus dieser Isometrie-Eigenschaft. $\square$

Warnung 4.33. Im Spezialfall von Hilberträumen birgt diese Definition eine gefährliche Subtilität, denn die hier definierte Adjungierte stimmt *nicht* mit der in Definition 2.16 eingeführten Hilbertraum-Adjungierten überein! Das liegt daran, dass wir für die Hilbertraum-Adjungierte den Dualraum mit dem Raum selbst identifiziert haben. Da jeder Hilbertraum natürlich auch ein Banachraum ist, haben wir für zwei Hilberträume H, K und ein $T \in \mathcal{L}(H, K)$ zum Einen die Hilbertraumadjungierte $T^* \in \mathcal{L}(K, H)$ und zum anderen die Adjungierte $T' \in \mathcal{L}(K', H')$ und diese hängen über die Riesz-Isomorphismen Φ_H und Φ_K als

$$T^* = \Phi_H^{-1} T' \Phi_K$$

zusammen.

Diese Unterscheidung spielt nicht sehr oft eine Rolle, wenn man sie nicht auf Rechnung hat, können dadurch allerdings böse Fehler passieren. (Vergleichen sie beispielsweise die Rechenregeln in Satz 4.32 (a) und Satz 2.17 (b)!) In dieser Veranstaltung werden wir daher auch strikt zwischen der Notation mit dem Stern für die Hilbertraum-Adjungierte und dem einfachen Adjungierten-Strich unterscheiden.

Diesen Unterschied kennen Sie übrigens schon aus der Linearen Algebra. Für eine lineare Abbildung auf $\mathbb{K}^d$, also eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$, entspricht die Adjungierte der transponierten Matrix A^T und die Hilbertraum-Adjungierte der konjugierten Matrix $A^* = \overline{A^T}$.

4 Lineare Operatoren auf Banachräumen

Mit Beispielen für adjungierte Operatoren tun wir uns abseits von der Banalität $\text{id}_X' = \text{id}_{X'}$ im Moment noch schwer, weil wir von keinem interessanten nicht-Hilbertraum den Dualraum kennen. Das werden wir im nächsten Kapitel ändern und dann auch Beispiele für adjungierte Operatoren betrachten. Ein weiteres allgemeines „Beispiel“ und eine schöne Eigenschaft der Adjungiertenbildung finden Sie im folgenden Satz, dessen Beweis als Übungsaufgabe verbleibt.

Satz 4.34. (a) *Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ sei ein (isometrischer) Isomorphismus. Dann ist $T' : Y' \rightarrow X'$ ebenfalls ein (isometrischer) Isomorphismus und es gilt $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.*

(b) *Es sei X ein Banachraum, $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Teilraum von X und $i : U \rightarrow X$ die Einbettungsabbildung, d. h. $i = \text{id}_X|_U$. Dann ist i' die Einschränkungabbildung, also $i'\varphi = \varphi|_U$ für jedes $\varphi \in X'$.*

Bemerkung 4.35. Zum Abschluss dieses Abschnitts sind noch ein paar Kommentare zur Notation angebracht. Wir haben hier Funktionale mit kleinen griechischen Buchstaben wie φ, ψ notiert, um ihr Wesen als Abbildungen zu betonen. Andererseits sind Funktionale auf X auch einfach wieder Elemente des Banachraums X' . Je nach Sichtweise kann es daher auch sinnvoll sein, diese genauso zu notieren. Meistens schreibt man dann zur Unterscheidung ebenfalls einen Strich an den Buchstaben, also $u' \in X'$ oder $x' \in X'$. Zum Beispiel schreibt sich dann die definierende Gleichung (4.4) der Adjungierten eines Operators $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ als

$$(T'v')(u) = v'(Tu), \quad u \in X, v' \in Y'.$$

Es gibt noch eine weitere Notations-Konvention für Funktionale und Adjungierte, die ebenfalls weitverbreitet ist. Die Idee dahinter ist es, die Äquivalenz von Funktionalen und Skalarprodukten im Hilbertraum zumindest notationell in die Banachräume zu holen, indem Funktionale mit einer Skalarprodukt-ähnlichen Notation geschrieben werden. Für $\varphi \in X'$ oder $x' \in X'$ schreibt man dann statt $\varphi(u)$ oder $x'(u)$ beispielsweise $(\varphi|u)$ oder $(x'|u)$. Ist in diesem Zusammenhang unklar, in welchem Raum man sich gerade befindet, kann man das analog zum Skalarprodukt in den Index packen, d. h. beispielsweise $(\varphi|u)_{X',X}$ oder $(x'|u)_{X',X}$ schreiben. In dieser Notation wäre die Gleichung (4.4) dann gegeben als

$$(T'\varphi|u)_{X',X} = (\varphi|Tu)_{Y',Y} \quad \text{bzw.} \quad (T'v'|u)_{X',X} = (v'|Tu)_{Y',Y}, \quad u \in X, v', \varphi \in Y',$$

mit dem offensichtlichen Vorteil, dass die Adjungierte sich jetzt zumindest notationell wie im Hilbertraum anfühlt.

5 Bestimmung wichtiger Dualräume

Einen Darstellungssatz von Riesz-Fréchet gibt es für Banachräume im Allgemeinen nicht und das ist auch nicht zu erwarten, da dieser Satz ja tief von der Struktur des Skalarprodukts lebt. Der Raum X' ist durch X festgelegt, aber im Allgemeinen eben nicht zu X isomorph. Es kann bisweilen eine ganz schön verzwickte Aufgabe sein, den Dualraum eines gegebenen Banachraums zu bestimmen. Wir werden einige wichtige Beispiele dafür in diesem Kapitel sehen.

5.1 Dualräume von Folgenräumen

Wir beginnen mit den konzeptionell leichteren Folgenräumen ℓ^p für $p \in [1, \infty)$, bevor wir dann in den nächsten Abschnitten zu L^p -Räumen kommen. Im Prinzip sind erstere in zweiteren natürlich über den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$ mit dem Zählmaß ζ enthalten, aber es ist durchaus instruktiv zunächst den einfacheren Beweis für die Folgenräume zu sehen, bevor wir uns in die maßtheoretischen Höhen schwingen werden, die zur Bestimmung des Dualraums von $L^p(\Omega)$ für allgemeinere Maßräume Ω nötig sind.

Satz 5.1. *Es sei $1 \leq p < \infty$ und $p' \in (1, \infty]$ der Hölder-konjugierte Index zu p , d. h. es gilt $1/p + 1/p' = 1$. Dann gilt*

- (a) *Für jedes $a = (a_n) \in \ell^{p'}$ ist die Abbildung $\varphi_a : \ell^p \rightarrow \mathbb{K}$ mit*

$$\varphi_a(u) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \quad u = (u_n) \in \ell^p,$$

ein Funktional auf ℓ^p .

- (b) *Die Abbildung $T : \ell^{p'} \rightarrow (\ell^p)'$ mit $Ta := \varphi_a$, $a \in \ell^{p'}$, ist ein isometrischer Isomorphismus.*
- (c) *Mit der gleichen Zuordnungsvorschrift ist $T : \ell^1 \rightarrow c'_0$ ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus.*
- (d) *Für alle $1 \leq p < \infty$ ist $(\ell^p)' = \ell^{p'}$ und es ist $c'_0 = \ell^1$ im Sinne von isometrischer Isomorphie von Banachräumen.*

Man beachte, dass der Satz keine Aussage zum Dualraum von ℓ^∞ macht. Dieser ist deutlich komplizierter und nicht Thema dieser Vorlesung.

5 Bestimmung wichtiger Dualräume

Beweis. (a) Es sei $a \in \ell^{p'}$ und φ_a wie im Satz definiert. Dann ist φ_a offensichtlich linear und es gilt für jedes $u \in \ell^p$ nach der Hölder-Ungleichung

$$|\varphi_a(u)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \right| \leq \|a\|_{\ell^{p'}} \|u\|_{\ell^p} < \infty,$$

womit φ_a auch stetig von ℓ^p nach $\mathbb{K}$ abbildet. Also gilt tatsächlich $\varphi_a \in (\ell^p)'$.

(b) Dass T tatsächlich $\ell^{p'}$ nach $(\ell^p)'$ abbildet, haben wir bereits in Teil (a) gesehen. Weiter ist T auch linear, denn für alle $a = (a_n), b = (b_n) \in \ell^{p'}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist

$$\begin{aligned} [T(\lambda a + b)](u) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + b_n) u_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n \\ &= \lambda (Ta)(u) + (Tb)(u), \quad u = (u_n) \in \ell^p, \end{aligned}$$

und damit liefert uns die Abschätzung im Beweis von Teil (a) auch die Stetigkeit von T , denn für alle $a \in \ell^{p'}$ gilt

$$\|Ta\|_{(\ell^p)'} = \sup_{\substack{u \in \ell^p \\ \|u\|_{\ell^p}=1}} |\varphi_a(u)| \leq \sup_{\substack{u \in \ell^p \\ \|u\|_{\ell^p}=1}} \|a\|_{\ell^{p'}} \|u\|_{\ell^p} = \|a\|_{\ell^{p'}}. \quad (5.1)$$

Weiterhin kann man sich schnell klar machen, dass T injektiv ist. Dazu nehmen wir ein $a \in \ell^{p'}$ mit $Ta = 0$. Dann gilt für alle $u \in \ell^p$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n = (Ta)(u) = 0.$$

Wir setzen für u speziell die Folgen $e_k = (e_j^{(k)})_{j \in \mathbb{N}} = (\delta_{jk})_{j \in \mathbb{N}}$ aus Beispiel 1.14 (a) ein, die nur an der k -ten Stelle eine Eins haben und sonst nur Nullen. Da diese für alle $k \in \mathbb{N}$ in ℓ^p liegen, liefert das $a_k = 0$ für jedes k und damit $a = 0$.

Wir wenden uns dem Herz der Sache zu und beweisen, dass T surjektiv ist. Dazu sei $\varphi \in (\ell^p)'$ gegeben und wir betrachten die Folge $a_\varphi = (a_n) := (\varphi(e_n))$. Wir werden gleich zeigen, dass diese in $\ell^{p'}$ liegt, $Ta_\varphi = \varphi$ ist und $\|a_\varphi\|_{\ell^{p'}} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)'}$ gilt. Diese drei Dinge liefern dann neben der gewünschten Surjektivität auch noch die Isometrie-Eigenschaft von T , denn für jedes $a \in \ell^{p'}$ gilt dann mit $\psi := Ta$ zum Einen $a = a_\psi$ wegen der Injektivität von T und zum Anderen

$$\|Ta\|_{(\ell^p)'} = \|Ta_\psi\|_{(\ell^p)'} \stackrel{(5.1)}{\leq} \|a_\psi\|_{\ell^{p'}} \leq \|\psi\|_{(\ell^p)'} = \|Ta\|_{(\ell^p)'},$$

so dass die Ungleichung hier tatsächlich eine Gleichheit ist und $\|Ta\|_{(\ell^p)'} = \|a_\psi\|_{\ell^{p'}} = \|a\|_{\ell^{p'}}$ folgt.

5.1 Dualräume von Folgenräumen

Also, frisch ans Werk. Wir bauen uns aus der Folge (a_n) nochmals eine weitere als

$$b_n := \begin{cases} \frac{|a_n|^{p'}}{a_n}, & \text{falls } a_n \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt für alle $N \in \mathbb{N}$ dank $p(p' - 1) = p'/p' - 1 \cdot (p' - 1) = p'$

$$\sum_{n=1}^N |b_n|^p = \sum_{n=1}^N |a_n|^{p(p'-1)} = \sum_{n=1}^N |a_n|^{p'}. \quad (5.2)$$

Wegen der Definition von (b_n) und mit der Linearität von φ folgt weiter

$$\sum_{n=1}^N |a_n|^{p'} = \sum_{n=1}^N b_n a_n = \sum_{n=1}^N b_n \varphi(e_n) = \varphi\left(\sum_{n=1}^N b_n e_n\right) = \left|\varphi\left(\sum_{n=1}^N b_n e_n\right)\right|$$

und wegen $\varphi \in (\ell^p)'$ ist

$$\leq \|\varphi\|_{(\ell^p)'} \left\| \sum_{n=1}^N b_n e_n \right\|_{\ell^p} = \|\varphi\|_{(\ell^p)'} \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^p \right)^{1/p}.$$

Hier setzen wir wiederum (5.2) ein und erhalten

$$= \|\varphi\|_{(\ell^p)'} \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^{p'} \right)^{1/p}.$$

Indem wir nun die p -te Wurzel der Summe von der rechten Seite auf die linke rüberdividieren, liefert das

$$\|a_\varphi\|_{\ell^{p'}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^{p'} \right)^{1/p'} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^{p'} \right)^{1-1/p} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)'}$$

und wir haben $a_\varphi \in \ell^{p'}$ und die gesuchte Normungleichung gezeigt. Damit bleibt nur noch $Ta_\varphi = \varphi$ auf der to-do-Liste. Für jeden Basisvektor $e_n \in \ell^p$ gilt nach Konstruktion von T

$$(Ta_\varphi)(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{nk} = a_n = \varphi(e_n)$$

und damit die behauptete Gleichheit. Da Ta_φ und φ beides stetige lineare Abbildungen sind, haben wir damit aber auch die Gleichheit auf ganz ℓ^p , denn für alle

5 Bestimmung wichtiger Dualräume

$b = (b_n) \in \ell^p$ gilt

$$\begin{aligned}(Ta_\varphi)(b) &= (Ta_\varphi)\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N b_n e_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} (Ta_\varphi)\left(\sum_{n=1}^N b_n e_n\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N b_n (Ta_\varphi)(e_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N b_n \varphi(e_n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi\left(\sum_{n=1}^N b_n e_n\right) = \varphi(b).\end{aligned}$$

(c) Übungsaufgabe

(d) Das folgt direkt aus (b) und (c). $\square$

Nun haben wir einen ersten interessanten Dualraum identifiziert, so dass wir auch anfangen können, Beispiele von adjungierten Operatoren anzuschauen.

Beispiel 5.2. (a) In ℓ^p für $1 \leq p < \infty$ betrachten wir den Linksshift $L : \ell^p \rightarrow \ell^p$, der gegeben ist durch $L((a_n)) = (a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (a_2, a_3, a_4, \dots)$, vgl. Beispiel 2.2 (b) für den Fall $p = 2$. Nach Definition muss für den Adjungierten $L' : (\ell^p)' \rightarrow (\ell^p)'$ gelten

$$(L'\varphi)(a) = \varphi(La) = \varphi((a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}), \quad \varphi \in (\ell^p)', a = (a_n) \in \ell^p.$$

Nach Satz 5.1 identifizieren wir $(\ell^p)'$ mit $\ell^{p'}$ für $1/p + 1/p' = 1$ und bekommen für $L' : \ell^{p'} \rightarrow \ell^{p'}$, dass für gegebenes $b = (b_n) \in \ell^{p'}$ gelten muss

$$\sum_{n=1}^{\infty} (L'b)_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_{n+1} = 0 \cdot a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-1} a_n, \quad a = (a_n) \in \ell^p.$$

Setzt man für a speziell die üblichen Elemente $e_n = (\delta_{jn})_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ ein, so liefert dieser „Koeffizientenvergleich“ $(L'b)_1 = 0$ und $(L'b)_n = b_{n-1}$ für $n \geq 2$ und für diese Setzung gilt obige Gleichheit tatsächlich für alle $a \in \ell^p$. Der Adjungierte des Linksshifts in ℓ^p ist also wie in ℓ^2 , vgl. Übungsaufgabe 2.19, der Rechtsshift $R : \ell^{p'} \rightarrow \ell^{p'}$, $R((a_n)) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$. Man beachte aber, dass dieser nun auf einem anderen Raum operiert!

Genauso kann man zeigen, dass der Adjungierte des Rechtsshifts auf ℓ^p der Linksshift auf $\ell^{p'}$ ist.

(b) Es sei wieder $1 \leq p < \infty$, $m \in \ell^\infty$ und $M_m : \ell^p \rightarrow \ell^p$ der Multiplikationsoperator mit $M_m a = (m_n a_n)$ für $a = (a_n) \in \ell^p$. Die Definition des adjungierten Operators liefert dann für $M'_m : (\ell^p)' \rightarrow (\ell^p)'$

$$(M'_m \varphi)(a) = \varphi(M_m a), \quad \varphi \in (\ell^p)', a \in \ell^p.$$

Nach der Identifizierung von $(\ell_p)'$ mit $\ell^{p'}$ steht da für gegebenes $b = (b_n) \in \ell^{p'}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M'_m b)_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (M_m a)_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n m_n a_n, \quad a = (a_n) \in \ell^p.$$

Hier liefert der Koeffizientenvergleich $M'_m b = (m_n b_n) = M_m b$. Die Adjungierte von M_m auf ℓ^p ist also der Multiplikationsoperator mit derselben Multiplikatorfolge m , aber nun auf $\ell^{p'}$. Man beachte hier für $p = 2$ auch den Unterschied zur Hilbertraumadjungierten $M_m^* = M_{\overline{m}}$, vgl. Übungsaufgabe 2.19.

5.2 Signierte Maße

Unser nächstes Projekt sind die Dualräume der Lebesgue-Räume. Wir wissen schon $L^2(\Omega)' = L^2(\Omega)$, denn das ist ein Hilbertraum. Für die restlichen p ist die Frage nicht so leicht zu beantworten und wir müssen erst eine ganze Menge Theorie entwickeln. Als ersten Schritt verallgemeinern wir in diesem Abschnitt den Maßbegriff aus der Integrationstheorie, indem wir auch zulassen, dass Mengen ein negatives Maß haben. Damit wir keine Probleme mit $\infty - \infty$ bekommen, lassen wir nur Werte in $\mathbb{R}$ zu.

Im gesamten Abschnitt sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

Definition 5.3. Eine Abbildung $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt signiertes Maß, wenn $\nu(\emptyset) = 0$ ist und wenn für jede Folge $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$ von paarweise disjunkten Mengen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$ unbedingt konvergiert mit

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Bemerkung 5.4. Ein direkter Vergleich mit der Integrationstheorie offenbart: Ein Maß ν ist genau dann ein signiertes Maß, wenn ν endlich ist.

Vorsicht ist nun beim Begriff einer Nullmenge geboten, denn wenn man zwei disjunkte Mengen mit Maß 1 und Maß -1 vereinigt, kommt dabei zwar zufällig eine Menge mit Maß Null heraus, aber diese ist nicht maßtheoretisch „klein“ und vernachlässigbar, sondern hat nur zufällig Maß Null. Wir geben daher folgende Definition.

Definition 5.5. Ist ν ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, so ist $N \in \mathcal{A}$ eine Nullmenge, oder genauer ν -Nullmenge, wenn für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq N$ gilt $\nu(A) = 0$.

Die Differenz von zwei endlichen Maßen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist ein signiertes Maß. Bemerkenswerterweise liefert diese Konstruktion auch schon alle signierten Maße — dies ist die Aussage des folgenden Zerlegungssatzes von Hahn-Jordan, der thematisch ganz eindeutig der Maßtheorie zuzuordnen ist und daher hier nicht bewiesen werden soll.

5 Bestimmung wichtiger Dualräume

Die Hauptschwierigkeit im Beweis ist gewissermaßen technischer Natur: Man muss, nur mit Hilfe des signierten Maßes ν , den maximalen Teil von $(\Omega, \mathcal{A})$ ‘ertasten’, der für die negativen Werte von ν verantwortlich ist, vgl. mit [vN22, Theorem 2.45].

Satz 5.6 (Hahn-Jordan-Zerlegung). *Ist ν ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, so existieren $\Omega_{\pm} \in \mathcal{A}$ mit $\Omega_+ \cup \Omega_- = \Omega$ und $\Omega_+ \cap \Omega_- = \emptyset$, so dass die Abbildungen $\nu_{\pm} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ mit $\nu_{\pm}(A) := \pm \nu(A \cap \Omega_{\pm})$ endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ sind, die ν als $\nu = \nu_+ - \nu_-$ zerlegen. Weiterhin ist die Zerlegung von ν als Differenz zweier endlicher Maße eindeutig und in obiger Zerlegung ist $\nu_+(\Omega_-) = 0 = \nu_-(\Omega_+)$.*

Wir bezeichnen in obiger Situation ν_+ und ν_- auch als Positiv- und Negativteil von ν . Daraus ergibt sich natürlicherweise auch ein Betrag von ν :

Definition 5.7. *Sei ν ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $\nu_{\pm}$ wie in der Hahn-Jordan-Zerlegung. Dann heißt das Maß $|\nu| := \nu_+ + \nu_-$ Totalvariation(smaß) von ν .*

Viele Sätze der Maßtheorie lassen sich nun durch separates Anwenden auf Positiv- und Negativteil auf signierte Maße übertragen.

Definition 5.8. *Sei ν ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $\nu_{\pm}$ wie in der Hahn-Jordan-Zerlegung. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ heißt ν -integrierbar falls sie bezüglich ν_+ und ν_- integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir*

$$\int_{\Omega} f \, d\nu := \int_{\Omega} f \, d\nu_+ - \int_{\Omega} f \, d\nu_-.$$

Als einfaches aber wichtiges Beispiel, wie nun Sätze aus der Integrationstheorie ihr Analogon in der signierten Maßtheorie finden, verallgemeinern wir die Dreiecksungleichung für Integrale.

Lemma 5.9 (Dreiecksungleichung für signierte Maße). *Sei ν ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und f bezüglich ν integrierbar. Dann ist $|f|$ bezüglich $|\nu|$ integrierbar und es gilt*

$$\left| \int_{\Omega} f \, d\nu \right| \leq \int_{\Omega} |f| \, d|\nu|.$$

Beweis. Es ist nach Definition und Dreiecksungleichung aus der Integrationstheorie

$$\left| \int_{\Omega} f \, d\nu \right| = \left| \int_{\Omega} f \, d\nu_+ - \int_{\Omega} f \, d\nu_- \right| \leq \int_{\Omega} |f| \, d\nu_+ + \int_{\Omega} |f| \, d\nu_- = \int_{\Omega} |f| \, d|\nu|,$$

wobei die letzte Gleichheit für charakteristische Funktionen aus der Definition des Totalvariationsmaßes folgt und sich dann auf die bekannte Weise fortpflanzt. $\square$

Aus Sicht der Funktionalanalysis drängen sich signierte Maße schon allein deswegen auf, weil sie die aus der Integrationstheorie bekannten Maße in eine Vektorraumstruktur einbetten. Machen Sie sich folgenden Satz anhand der Definitionen klar:

Satz 5.10. Die Menge $M(\Omega)$ der signierten Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ wird mit der von den Abbildungen $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ geerbten Struktur und der Totalvariationsnorm

$$\|v\|_{M(\Omega)} := |v|(\Omega), \quad v \in M(\Omega),$$

zu einem normierten Raum.

Bemerkung 5.11. Ist X ein metrischer Raum, so schreibt man oft ohne weitere Angabe der Sigma-Algebra $M(X)$ für den entsprechenden Raum der signierten Borel-Maße auf X . Als solcher wird beispielsweise in Abschnitt 5.5 der Raum $M([a, b])$ für ein Intervall $[a, b]$ auftauchen.

5.3 Der Satz von Radon-Nikodým

Der größte Brocken auf dem Weg zur Bestimmung des Dualraums von $L^p(\Omega)$ ist der in diesem Abschnitt vorgestellte Satz von Radon-Nikodým, der vom Inhalt her in die Integrationstheorie gehört, sich aber, einer Idee von John v. Neumann folgend, schön mit Hilfe des Darstellungssatzes von Riesz-Fréchet beweisen lässt. Von daher passt er sehr gut in diese Vorlesung.

Auch in diesem gesamten Abschnitt sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

Definition 5.12. Es seien μ und ν jeweils ein Maß oder ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann heißt ν absolut-stetig bezüglich μ und wir schreiben $\nu \ll \mu$, wenn jede μ -Nullmenge auch eine ν -Nullmenge ist.

Theorem 5.13 (Satz von Radon-Nikodým). Es seien μ ein σ -endliches und ν ein σ -endliches Maß oder ein signiertes Maß auf Ω . Dann gilt $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn es eine $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Die Funktion g wird in diesem Zusammenhang dann oft als *Integraldichte* oder einfach *Dichte* von ν bezüglich des Maßes μ bezeichnet und dieses Konzept spielt vor allem in der Stochastik eine wichtige Rolle. In diesem Sinne kann man den Satz von Radon-Nikodým kurz so im Kopf behalten: ν ist genau dann absolut-stetig bezüglich μ , wenn ν bezüglich μ eine Dichte hat.

Das wesentliche Argument zum Beweis des Satzes von Radon-Nikodým steckt in dem folgenden Resultat, das eine getrennte Erwähnung aber mehr als verdient hat.

Theorem 5.14 (Lebesguescher Maß-Zerlegungs-Satz). Es seien μ und ν zwei σ -endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann existiert eine μ -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ und eine $\mathcal{A}$ -

5 Bestimmung wichtiger Dualräume

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion $h : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\nu(A) = \int_A h \, d\mu + \nu(A \cap N)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$.

Beweis. Wir überlegen uns zunächst, dass es ausreicht, den Satz für endliche Maße zu beweisen, bevor wir das dann in vier weiteren Schritten tun werden.

1. Schritt: Wenn der Satz für endliche Maße gilt, dann auch für σ -endliche.

Seien also μ, ν zwei σ -endliche Maße und wir setzen voraus, dass die Aussage des Satzes für endliche Maße gilt. Mit μ und ν ist auch das Summenmaß $\sigma := \mu + \nu$ ein σ -endliches Maß und wir können eine Folge (B_n) in $\mathcal{A}$ wählen, die aus paarweise disjunkten Mengen mit $\sigma(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besteht und die $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \Omega$ erfüllt. Man beachte, dass mit $\sigma(B_n)$ auch $\mu(B_n)$ und $\nu(B_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ endlich sind.

Also existieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine μ -Nullmenge $N_n \in \mathcal{A}|_{B_n}$ und eine $\mathcal{A}|_{B_n}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion $h_n : B_n \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\nu(A) = \int_A h_n \, d\mu + \nu(A \cap N_n), \quad (A \in \mathcal{A}|_{B_n}).$$

Wir setzen $N := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$ und $h := h_n$ jeweils auf B_n . Dann ist N immer noch eine μ -Nullmenge und h ist nicht-negativ und als abschnittsweise messbar definierte Funktion $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. Außerdem gilt für jedes $A \in \mathcal{A}$ auch $A \cap B_n \in \mathcal{A}|_{B_n}$ und damit ist

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A \cap B_n} h_n \, d\mu + \nu(A \cap B_n \cap N_n) \right).$$

Da alle h_n nicht-negativ sind, folgt

$$= \int_{A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n} h \, d\mu + \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n \cap N_n)\right) = \int_A h \, d\mu + \nu(A \cap N)$$

und dieser Schritt ist fertig.

Ab nun gehen wir also davon aus, dass unsere Maße μ und ν endlich sind. Weiter schreiben wir $\sigma := \mu + \nu$ und betrachten den Raum $L^2(\sigma, \Omega)$ aller reellwertigen und bzgl. σ quadratintegrablen Funktionen.

2. Schritt: Es ex. $u \in L^2(\sigma, \Omega)$ mit $\int_{\Omega} f(1-u) \, d\nu = \int_{\Omega} f u \, d\mu$ für alle $f \in L^2(\sigma, \Omega)$.

Wir nutzen die lineare Abbildung $\varphi : L^2(\sigma, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(f) := \int_{\Omega} f \, d\nu$. Dann gilt

für jedes $f \in L^2(\sigma, \Omega)$ mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &= \left| \int_{\Omega} f \, d\nu \right| \leq \int_{\Omega} |f| \, d\nu \leq \nu(\Omega)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |f|^2 \, d\nu \right)^{1/2} \\ &\leq \nu(\Omega)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |f|^2 \, d\nu + \int_{\Omega} |f|^2 \, d\mu \right)^{1/2} = \nu(\Omega)^{1/2} \|f\|_{L^2(\sigma, \Omega)}, \end{aligned}$$

d. h. φ ist ein stetiges Funktional auf dem Hilbertraum $L^2(\sigma, \Omega)$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz 2.10 gibt es also eine Funktion $u \in L^2(\sigma, \Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} f \, d\nu = \varphi(f) = \langle f, u \rangle_{L^2(\sigma, \Omega)} = \int_{\Omega} f u \, d\sigma = \int_{\Omega} f u \, d\mu + \int_{\Omega} f u \, d\nu \quad (5.3)$$

für alle $f \in L^2(\sigma, \Omega)$. Daraus ergibt sich sofort durch Umstellen

$$\int_{\Omega} f(1 - u) \, d\nu = \int_{\Omega} f u \, d\mu, \quad f \in L^2(\sigma, \Omega). \quad (5.4)$$

Bevor wir weitergehen, bemerken wir für das weitere noch, dass u insbesondere eine $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion ist und da alle beteiligten Maße endlich sind und u bezüglich des Summenmaßes σ quadratintegrabel und damit auch integrabel ist, ist u auch bezüglich μ und ν sowohl quadratintegrabel als auch integrabel.

3. Schritt: Es gilt μ -fast überall $0 \leq u < 1$.

Zuerst bekommen wir dank (5.3)

$$\nu(\{u < 0\}) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{u < 0\}} \, d\nu = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{u < 0\}} u \, d\sigma = \int_{\{u < 0\}} u \, d\sigma \leq 0$$

und es ergibt sich $\nu(\{u < 0\}) = 0$.

Nehmen wir an, dass $\mu(\{u < 0\}) > 0$ ist, so bekommen wir den Widerspruch

$$0 = \nu(\{u < 0\}) = \int_{\{u < 0\}} u \, d\sigma = \int_{\{u < 0\}} u \, d\mu + \int_{\{u < 0\}} u \, d\nu = \int_{\{u < 0\}} u \, d\mu < 0,$$

und wir haben schon mal μ -fast überall $u \geq 0$.

Als nächstes zeigt die wiederum auf (5.3) fußende Überlegung

$$\begin{aligned} \nu(\{u \geq 1\}) + \mu(\{u \geq 1\}) &\leq \int_{\{u \geq 1\}} u \, d\nu + \int_{\{u \geq 1\}} u \, d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{u \geq 1\}} u \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{u \geq 1\}} \, d\nu = \nu(\{u \geq 1\}), \end{aligned}$$

dass $\mu(\{u \geq 1\}) \leq 0$ ist. Also gilt tatsächlich μ -fast überall auch $u < 1$.

5 Bestimmung wichtiger Dualräume

4. Schritt: Definition von N und h .

Wir setzen $N := \{u \notin [0, 1)\}$. Das ist nach den Erkenntnissen des vorherigen Schrittes eine μ -Nullmenge. Außerdem gilt außerhalb von N immer $u \neq 1$, so dass wir

$$h := \begin{cases} \frac{u}{1-u} & \text{auf } \Omega \setminus N = \Omega \cap \{u \in [0, 1)\}, \\ 0, & \text{auf } N. \end{cases}$$

setzen können. Mit u ist auch h eine $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion und nach Konstruktion ist h nicht-negativ.

5. Schritt: Nachweis, dass h die gewünschte Gleichheit erfüllt.

Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt nach Definition von N

$$\nu(A) = \nu(A \cap \{u \in [0, 1)\}) + \nu(A \cap N),$$

es bleibt also zu zeigen, dass $\nu(A \cap \{u \in [0, 1)\}) = \int_A h \, d\mu$ gilt. Dazu betrachten wir die Mengen $M_n := \{u \in [0, 1 - 1/n)\}$, $n \in \mathbb{N}$, und erhalten mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\nu(A \cap \{u \in [0, 1)\}) = \int_A \mathbf{1}_{\{u \in [0, 1)\}} \, d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \mathbf{1}_{M_n} \, d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{1}_{A \cap M_n}}{1-u} (1-u) \, d\nu.$$

Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $\mathbf{1}_{A \cap M_n}/(1-u)$ beschränkt und damit bezüglich des endlichen Maßes ν quadratintegrabel ist, folgt mit (5.4)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{1}_{A \cap M_n}}{1-u} u \, d\mu.$$

Wegen $M_n \subseteq \Omega \setminus N$ ist hier $u/(1-u) = h$ und es gilt wieder mit monotoner Konvergenz wie gewünscht

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \mathbf{1}_{M_n} h \, d\mu = \int_A \mathbf{1}_{\{u \in [0, 1)\}} h \, d\mu = \int_A h \, d\mu. \quad \square$$

Mit diesem Resultat ausgestattet können wir jetzt den Radon-Nikodým angehen.

Beweis von Satz 5.13. Zunächst stellen wir fest, dass die Beweisrichtung von der Existenz der Funktion g zur Absolut-Stetigkeit von ν bzgl. μ der einfache Teil ist. Gibt es nämlich eine Funktion g wie im Theorem und ist M eine μ -Nullmenge, so gilt sofort

$$\nu(M) = \int_M g \, d\mu = 0,$$

also ist dann $\nu \ll \mu$.

Die „interessante“ Beweisrichtung gehen wir zunächst in dem Fall an, dass auch ν ein σ -endliches Maß ist. Da nach Voraussetzung $\nu \ll \mu$ ist, können wir dann den Lebesgueschen Maß-Zerlegungssatz 5.14 auf ν und μ anwenden und erhalten eine μ -Nullmenge N und eine Funktion h mit den dortigen Eigenschaften. Wegen der absoluten Stetigkeit von ν bezüglich μ ist N dann auch eine ν -Nullmenge und es gilt für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\nu(A) = \int_A h \, d\mu + \nu(A \cap N) = \int_A h \, d\mu.$$

Wir können also $g := h$ setzen und sind fertig.

Ist ν ein signiertes Maß, so können wir den Maßraum Ω nach dem Zerlegungssatz von Hahn-Jordan 5.6 als $\Omega_+ \cup \Omega_-$ zerlegen und das Maß ν als $\nu_+ - \nu_-$ schreiben. Dann ist $(\Omega_+, \mathcal{A}|_{\Omega_+}, \nu_+)$ ein σ -endlicher Maßraum und für jedes $A \in \mathcal{A}|_{\Omega_+}$ mit $\mu(A) = 0$ gilt nach der Voraussetzung $\nu(A) = 0$ und damit auch

$$\nu_+(A) = \nu(A \cap \Omega_+) = \nu(A) = 0.$$

Also gilt $\nu_+ \ll \mu|_{\Omega_+}$ und nach dem eben bewiesenen gibt es ein $g_+ : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\nu_+(A) = \int_A g_+ \, d\mu|_{\Omega_+} = \int_A g_+ \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}|_{\Omega_+}.$$

Genauso konstruiert man ein $g_- : \Omega_- \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nu_-(A) = \int_A g_- \, d\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}|_{\Omega_-}$. Definiert man nun die Funktion $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g := g_+$ auf Ω_+ und $g := -g_-$ auf Ω_- , so ergibt sich für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu_+(A) - \nu_-(A) = \nu(A \cap \Omega_+) - \nu(A \cap \Omega_-) = \int_{A \cap \Omega_+} g_+ \, d\mu - \int_{A \cap \Omega_-} g_- \, d\mu \\ &= \int_{A \cap \Omega_+} g \, d\mu + \int_{A \cap \Omega_-} g \, d\mu = \int_A g \, d\mu. \end{aligned} \quad \square$$

5.4 Der Dualraum von L^p

Wir können nun die Erkenntnisse der letzten beiden Abschnitte zusammennehmen und endlich die Dualräume der Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$ für σ -endliche Maßräume $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bestimmen. Dazu lohnt es sich einen Blick zurück auf Satz 4.11 zu werfen. Dort haben wir gesehen, dass für $p, p' \in [1, \infty]$ mit $1/p + 1/p' = 1$ und $g \in L^{p'}(\Omega)$ die Abbildung $\varphi_g : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$\varphi_g(f) := \int_{\Omega} fg \, d\mu, \quad f \in L^p(\Omega),$$

5 Bestimmung wichtiger Dualräume

ein Element von $L^p(\Omega)'$ mit $\|\varphi_g\|_{L^p(\Omega)'} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$ ist. Damit induziert jedes Element von $L^{p'}(\Omega)$ ein Funktional auf $L^p(\Omega)$ und die Abbildung

$$T : \begin{cases} L^{p'}(\Omega) & \rightarrow L^p(\Omega)', \\ g & \mapsto \varphi_g. \end{cases} \quad (5.5)$$

ist eine Isometrie. Wir werden jetzt zeigen, dass T im Fall $p < \infty$ sogar surjektiv und damit ein Isomorphismus ist.

Theorem 5.15. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum, $1 \leq p < \infty$ und $p' \in (1, \infty]$ so gegeben, dass $1/p + 1/p' = 1$ ist. Dann ist der Operator T aus (5.5) ein isometrischer Isomorphismus, d. h. es ist $L^p(\Omega)' = L^{p'}(\Omega)$.*

Der folgende Beweis ist für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ formuliert. Das Resultat lässt sich dann bei Bedarf mit erträglichem Aufwand mit Hilfe von Lemma 4.17 komplexifizieren, was wir hier jedoch nicht ausführen werden.

Beweis. Einsetzen einer Linearkombination zeigt sofort, dass T eine lineare Abbildung ist: Für alle $g_1, g_2 \in L^{p'}(\Omega)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist

$$\begin{aligned} [T(\lambda g_1 + g_2)](f) &= \varphi_{\lambda g_1 + g_2}(f) = \int_{\Omega} f(\lambda g_1 + g_2) \, d\mu = \lambda \int_{\Omega} g_1 f \, d\mu + \int_{\Omega} g_2 f \, d\mu \\ &= \lambda(Tg_1)(f) + (Tg_2)(f), \quad f \in L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Weiterhin haben wir in Satz 4.11 schon gesehen, dass T eine Isometrie ist. Es bleibt also nur noch die Surjektivität zu zeigen. Das werden wir zuerst im Falle endlicher Maßräume tun und dann daraus den allgemeinen Fall mit Hilfe der σ -Additivität ableiten. Auf dem Weg werden wir uns durch viele Resultate aus der Vorlesung Integrationstheorie wühlen.

1. Schritt: Im Fall $\mu(\Omega) < \infty$ ist T surjektiv.

Sei $\varphi \in L^p(\Omega)'$ gegeben. Da Ω als endlicher Maßraum vorausgesetzt ist, gilt für jedes $A \in \mathcal{A}$, dass die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_A$ in $L^p(\Omega)$ liegt. Deshalb können wir die Abbildung $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nu(A) := \varphi(\mathbf{1}_A)$ für $A \in \mathcal{A}$ betrachten. Im Hinblick auf den Satz von Radon-Nikodým wollen wir diese im Weiteren als signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ enttarnen, das absolut-stetig bezüglich μ ist.

Es ist sofort $\nu(\emptyset) = \varphi(0) = 0$. Für die σ -Additivität wählen wir eine Folge $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$ von paarweise disjunkten Mengen. Dann gilt $\mathbf{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}$ und für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt $(\sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{A_n})^p \leq 1^p = 1$ auf Ω . Da die konstante 1-Funktion dank der Endlichkeit des Maßraums über Ω integrierbar ist, ist sie eine zulässige Lebesgue-Majorante und wir schlussfolgern, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$ in $L^p(\Omega)$ konvergiert. Damit folgt aus der

Stetigkeit von φ

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \varphi(\mathbf{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}) = \varphi\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(\mathbf{1}_{A_n}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n).$$

Schließlich ist ν tatsächlich absolut-stetig bezüglich μ , denn für jede μ -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ gilt $\mathbf{1}_N = 0$ im μ -fast-überall-Sinne und damit

$$\nu(N) = \varphi(\mathbf{1}_N) = \varphi(0) = 0.$$

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Radon-Nikodým 5.13 erfüllt und dieser schenkt uns ein $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbares $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(\mathbf{1}_A) = \nu(A) = \int_A g \, d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A g \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Wegen der Linearität von sowohl φ als auch des Integrals bezüglich μ bekommen wir aus dieser Gleichheit für die charakteristischen Funktionen sofort die gleiche Identität für alle einfachen Funktionen:

$$\varphi(s) = \int_{\Omega} s g \, d\mu, \quad s \text{ einfache Funktion auf } \Omega. \quad (5.6)$$

Die Hoffnung ist nun natürlich, dass zum Einen $g \in L^{p'}(\Omega)$ gilt und wir zum Anderen die Gleichung (5.6) für alle $f \in L^p(\Omega)$ an Stelle der einfachen Funktionen s zeigen können, denn dann ist $\varphi = Tg$ und wir sind fertig. Letzteres scheint nicht hoffnungslos, denn die einfachen Funktionen liegen dicht in $L^p(\Omega)$, vgl. Satz IV.17.12 aus der Integrationstheorie.

Wenden wir uns also dem Nachweis von $g \in L^{p'}(\Omega)$ zu. Dazu betrachten wir die abgeschnittenen Versionen $g_n := g \mathbf{1}_{\{|g| \leq n\}}$, $n \in \mathbb{N}$, von g . Dann ist jedes $g_n \in L^\infty(\Omega)$ und damit, dank der Endlichkeit des Maßes, auch in $L^{p'}(\Omega)$. Für die Norm erhalten wir mit Satz 4.11 (b), dass

$$\|g_n\|_{L^{p'}} = \sup\left\{\left|\int_{\Omega} f g_n \, d\mu\right| : f \in L^p(\Omega), \|f\|_{L^p} = 1\right\}. \quad (5.7)$$

Für alle einfachen Funktionen s auf Ω gilt wegen (5.6)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} s g_n \, d\mu &= \int_{\Omega} s \mathbf{1}_{\{|g| \leq n\}} g \, d\mu = |\varphi(s \mathbf{1}_{\{|g| \leq n\}})| \\ &\leq \|\varphi\|_{(L^p)'} \|s \mathbf{1}_{\{|g| \leq n\}}\|_{L^p} \leq \|\varphi\|_{(L^p)'} \|s\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Ist nun $f \in L^p(\Omega)$ mit $\|f\|_{L^p} = 1$ und (s_m) eine Folge von einfachen Funktionen, die in $L^p(\Omega)$ gegen f konvergiert, so ist damit wegen der Stetigkeit des Funktional Tg_n auf $L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} \left|\int_{\Omega} f g_n \, d\mu\right| &= |Tg_n(f)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |Tg_n(s_m)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left|\int_{\Omega} s_m g_n \, d\mu\right| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi\|_{(L^p)'} \|s_m\|_{L^p} = \|\varphi\|_{(L^p)'} \|f\|_{L^p} = \|\varphi\|_{(L^p)'}. \end{aligned}$$

5 Bestimmung wichtiger Dualräume

Somit liefert (5.7) die Abschätzung $\|g_n\|_{L^{p'}} \leq \|\varphi\|_{(L^p)'}^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit dem Lemma von Fatou, Lemma IV.10.2, bekommen wir also

$$\|g\|_{L^{p'}}^{p'} = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} |g_n|^{p'} d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |g_n|^{p'} d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{L^{p'}}^{p'} \leq \|\varphi\|_{(L^p)'}^{p'},$$

und wir haben tatsächlich $g \in L^{p'}(\Omega)$ erreicht.

Es bleibt noch (5.6) für beliebiges $f \in L^p(\Omega)$ anstelle der einfachen Funktion s zu zeigen. Sei dazu $f \in L^p(\Omega)$ und (s_n) eine Folge von einfachen Funktionen, die in $L^p(\Omega)$ gegen f konvergiert. Durch Auswahl einer geeigneten Teilfolge können wir zudem sicherstellen, dass (s_n) auch punktweise fast überall konvergiert. Deshalb verhilft uns hier der Satz von der majorisierten Konvergenz zu

$$\varphi(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} s_n g d\mu = \int_{\Omega} f g d\mu.$$

2. Schritt: Verallgemeinerung auf $\mu(\Omega) = \infty$.

Dieser Schritt gelingt mit einem typischen Ausschöpfungsargument der Integrationstheorie, dass daher hier nur skizziert werden soll. Eingedenk der σ -Additivität von Ω wählt man eine Folge (Ω_n) von wachsenden Teilmengen mit jeweils endlichem Maß und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$. Durch Einschränkung auf die Funktionen in $L^p(\Omega)$, deren Träger in Ω_n liegt, lässt sich jedes $\varphi \in L^p(\Omega)'$ auch als Funktional φ_n auf $L^p(\Omega_n)$ auffassen und es gilt $\|\varphi_n\|_{L^p(\Omega_n)'} \leq \|\varphi\|_{L^p(\Omega)'}$.

Nach Schritt 1 gibt es für jedes n ein eindeutiges $g_n \in L^{p'}(\Omega_n)$, dass φ_n entsprechend darstellt und es gilt $\|g_n\|_{L^{p'}(\Omega_n)} = \|\varphi_n\|_{L^p(\Omega_n)'} \leq \|\varphi\|_{L^p(\Omega)'}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sind weiter $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$, so gilt dank der Eindeutigkeit und $\Omega_n \subseteq \Omega_m$, dass $g_m|_{\Omega_n} = g_n$ ist. Die Setzung $g := g_n$ auf Ω_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist also wohldefiniert und es gilt

$$\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|g_n\|_{L^{p'}(\Omega_n)} \leq \|\varphi\|_{L^p(\Omega)'}$$

Schließlich ist für jedes $f \in L^p(\Omega)$ mit der Stetigkeit von φ und dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\varphi(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{1}_{\Omega_n} f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} f g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} f g d\mu = \int_{\Omega} f g d\mu. \quad \square$$

Bemerkung 5.16. Im Fall $1 < p < \infty$ kann man das Theorem abschwächen und die Bedingung, dass der Maßraum σ -endlich sein muss, weglassen. Im Fall $p = 1$ geht das aber nicht.

5.5 Der Dualraum von $C([a, b])$

In diesem Abschnitt wollen wir die vorangegangenen Betrachtungen zu den Dualräumen der L^p -Räume durch ein ‘Endpunktergebnis’ für einen Funktionenraum mit ‘ ∞ -Norm’ vervollständigen. Die schönsten Strukturen findet man für die Dualräume von Räumen stetiger Funktionen. Wir werden sehr bald sehen wie und warum . . .

Um den maßtheoretischen Überbau auf ein Minimum zu beschränken, wollen wir exemplarisch den Dualraum des Banachraums $C([a, b])$ der stetigen, reellwertigen Funktionen auf einem kompakten und im gesamten Abschnitt fixierten Intervall $[a, b]$ bestimmen. Wir arbeiten also erneut über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Im ersten Schritt wollen wir einige stetige Funktionale auf $C([a, b])$ konstruieren.

Lemma 5.17. *Sei ν ein signiertes Borelmaß auf $[a, b]$. Dann ist durch*

$$\varphi_\nu: C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f \, d\nu$$

ein beschränktes lineares Funktional gegeben. Ferner gilt $\|\varphi_\nu\|_{C([a, b])'} = |\nu|([a, b])$.

Beweis. Linearität ist klar und aus der Dreiecksungleichung für Integrale (Lemma 5.9) folgt

$$|\varphi_\nu(f)| \leq \int_a^b |f| \, d|\nu| \leq \|f\|_\infty |\nu|([a, b]), \quad f \in C([a, b]).$$

Somit ist φ_ν beschränkt und es gilt $\|\varphi_\nu\|_{C([a, b])'} \leq |\nu|([a, b])$.

Um Gleichheit in der Normabschätzung zu erzwingen, nutzen wir die Hahn-Jordan-Zerlegung und schreiben $\nu = \nu_+ - \nu_-$ mit $\nu_\pm = \nu(A \cap \Omega_\pm)$ für alle Borelmengen $A \subseteq [a, b]$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $|\nu|$ als endliches Borelmaß regulär ist (Satz IV.7.2), finden wir in $[a, b]$ kompakte Mengen $K_\pm$ und (relativ) offene Mengen $U_\pm$ derart, dass $K_\pm \subseteq \Omega_\pm \subseteq U_\pm$ mit $|\nu|(U_\pm \setminus K_\pm) \leq \varepsilon$ gilt. Dank des Urysohn-Lemmas (Lemma IV.18.4) können wir stetige Funktionen $f_\pm \in C([a, b])$ wählen, die den punktweisen Abschätzungen $\mathbf{1}_{K_\pm} \leq f_\pm \leq \mathbf{1}_{U_\pm}$ genügen. (D. h. es ist $f_\pm = 1$ auf $K_\pm$ und $f_\pm = 0$ außerhalb von $U_\pm$.) Aus dieser Konstruktion folgt

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(\pm f_\pm) &= \int_a^b \pm f_\pm \, d\nu \\ &= \int_{K_\pm} f_\pm \, d\nu_\pm + \int_{U_\pm \setminus K_\pm} \pm f_\pm \, d\nu \\ &\geq \int_{K_\pm} 1 \, d|\nu| - \int_{U_\pm \setminus K_\pm} 1 \, d|\nu| \end{aligned}$$

5 Bestimmung wichtiger Dualräume

und somit nach Wahl der beteiligten Mengen

$$\begin{aligned}
 \varphi_\nu(\pm f_\pm) &\geq |\nu|(K_\pm) - |\nu|(U_\pm \setminus K_\pm) \\
 &= |\nu|(\Omega_\pm) - |\nu|(\Omega_\pm \setminus K_\pm) - |\nu|(U_\pm \setminus K_\pm) \\
 &\geq |\nu|(\Omega_\pm) - 2|\nu|(U_\pm \setminus K_\pm) \\
 &\geq |\nu|(\Omega_\pm) - 2\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Damit erfüllt die Funktion $f := f_+ - f_-$ die Abschätzung

$$\varphi_\nu(f) = \varphi_\nu(f_+) + \varphi_\nu(-f_-) \geq |\nu|(\Omega_+) - 2\varepsilon + |\nu|(\Omega_-) - 2\varepsilon = |\nu|([a, b]) - 4\varepsilon.$$

Außerdem nehmen die Funktionen $f_\pm$ jeweils nur Werte zwischen 0 und 1 an, so dass die Differenz $f = f_+ - f_-$ nur Werte zwischen -1 und 1 annimmt. Das bedeutet $\|f\|_\infty \leq 1$ und wir erhalten $\|\varphi_\nu\|_{C([a,b])'} \geq |\nu|([a, b]) - 4\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

In der Sprache der Funktionalanalysis bedeutet Lemma 5.17, dass die lineare Abbildung

$$T: M([a, b]) \rightarrow (C([a, b]))', \quad \nu \mapsto \varphi_\nu \quad (5.8)$$

isometrisch und daher insbesondere injektiv ist. Wir wollen im Folgenden beweisen, dass T auch surjektiv ist und in diesem Sinne der Dualraum von $C([a, b])$ isometrisch isomorph mit $M([a, b])$ identifiziert werden kann.

Auf dem jetzigen Stand würde jeder Beweisversuch schlichtweg daran scheitern, dass wir gar nicht genug signierte Borelmaße auf $[a, b]$ kennen, abgesehen von denjenigen, die absolut-stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes sind (vgl. Satz 5.13) und wenigen exotischeren Beispielen wie dem Dirac-Maß δ_c für beliebiges $c \in [a, b]$. Das nächste Resultat stellt eine Möglichkeit vor, wie wir aus monoton wachsenden Funktionen $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ endliche Borelmaße konstruieren können.

Aus technischen Gründen ist es einfacher, die Maße zunächst nur auf dem halboffenen Intervall $[a, b)$ zu konstruieren. Die Konstruktion ist eine Verallgemeinerung der Konstruktion des eindimensionalen Lebesgue-Maßes aus Kapitel IV.6 der Integrations-theorie, die zur speziellen Funktion $g(t) = t$ korrespondiert.

Lemma 5.18. *Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann wird durch*

$$\nu([c, d)) := g(d-) - g(c-) \quad (a \leq c \leq d \leq b) \quad (5.9)$$

ein eindeutiges endliches Borelmaß auf $[a, b)$ festgelegt. (Im Fall $c = a$ ist $g(a-)$ als $g(a)$ zu lesen.)

Beweis. Sei $\mathcal{E} := \{[c, d) : a \leq c \leq d \leq b\}$ und $\mathcal{R}$ das System aller endlichen Vereinigungen von Intervallen aus $\mathcal{E}$. Die Behauptung ergibt sich aus dem Fortsetzungssatz

5.5 Der Dualraum von $C([a, b])$

von Carathéodory-Fréchet-Hahn (Theorem IV.5.12), sofern wir sicherstellen können, dass $\mathcal{R}$ ein Ring ist, der die σ -Algebra $\mathcal{B}([a, b])$ erzeugt, und dass ν auf $\mathcal{R}$ eine wohldefinierte, σ -additive und σ -endliche Mengenfunktion mit $\nu(\emptyset) = 0$ ist.

Vielen dieser Dinge gehen genauso oder analog zur Konstruktion des Lebesgue-Maßes im Kapitel IV.6 der Integrationstheorie: Dort ist schon gezeigt, dass $\mathcal{R}$ ein Ring ist, der die Borel- σ -Algebra erzeugt und die Beweise für ν wohldefiniert und ν additiv (Schritte 1 bis 3 im Beweis von Lemma IV.6.2), sowie die erste Ungleichung der σ -Additivität (vgl. Schritt 4 im Beweis desselben Lemmas), gehen genauso oder analog. Außerdem ist ν endlich und damit erst recht σ -endlich. Es bleibt nur die σ -Subadditivität von ν auf $\mathcal{R}$ zu zeigen, vgl. dort den zweiten Teil von Schritt 4.

Da sich jede Menge aus $\mathcal{R}$ als endliche Vereinigung von Intervallen aus $\mathcal{E}$ schreiben lässt, reicht es dazu aus, für ein gegebenes Intervall $[c, d) \in \mathcal{E}$ und nicht-leere, paarweise disjunkte Intervalle $[c_j, d_j)$, $j \in \mathbb{N}$, mit $[c, d) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [c_j, d_j)$, zu folgern dass

$$\nu([c, d)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu([c_j, d_j)). \quad (5.10)$$

gilt.

Dazu sei $\varepsilon > 0$. Da g als monoton wachsende, und damit sprungstetige Funktion, vgl. Lemma I.29.3, in jedem Punkt einen linksseitigen Grenzwert hat, finden wir Zahlen $\delta, \gamma_j > 0$ für die gilt:

$$\begin{aligned} \nu([c, d)) &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \nu([c, d - \delta)) \\ \nu([c_j - \gamma_j, d_j)) &\leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} + \nu([c_j, d_j)), \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wegen $[c, d - \delta] \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (c_j - \gamma_j, d_j)$ können wir via Kompaktheit ein $N \in \mathbb{N}$ mit $[c, d - \delta) \subseteq \bigcup_{j=1}^N [c_j - \gamma_j, d_j)$ finden, woraufhin die Additivität von ν auf $\mathcal{R}$ uns

$$\begin{aligned} \nu([c, d)) &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \nu([c, d - \delta)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^N \nu([c_j - \gamma_j, d_j)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\varepsilon}{2^{j+1}} + \nu([c_j, d_j)) \right] \\ &\leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \nu([c_j, d_j)) \end{aligned}$$

liefert. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (5.10). □

5 Bestimmung wichtiger Dualräume

Bemerkung 5.19. Durch (5.9) ist *kein* eindeutiges Borelmaß auf $[a, b]$ festgelegt. In der Tat ist für jedes $\lambda \geq 0$ auch $\nu + \lambda \delta_b$ ein solches Maß.

Implizit beinhaltet Lemma 5.18 auch schon eine Konstruktion von allgemeineren endlichen signierten Borelmaßen: wir können einfach die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen betrachten. Überraschenderweise, lässt sich diese Klasse von Funktionen sehr explizit beschreiben und bekommt ihren eigenen Namen.

Definition 5.20. Sei $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Variation von h auf $[a, b]$ ist definiert als

$$\text{Var}_{[a,b]}(h) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |h(t_j) - h(t_{j-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

Die Funktion h heißt von beschränkter Variation, wenn $\text{Var}_{[a,b]}(h)$ endlich ist. Der Raum aller Funktionen von beschränkter Variation auf $[a, b]$ wird mit $\text{BV}([a, b])$ bezeichnet.

Übungsaufgabe 5.21. Überzeugen Sie sich, dass $\text{BV}([a, b])$ ein Banachraum ist.

Satz 5.22 (Struktursatz für $\text{BV}([a, b])$). Eine Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn Sie die Differenz von zwei monoton wachsenden Funktionen ist.

Beweis. Ist g monoton wachsend auf $[a, b]$, so ist $\text{Var}_{[a,b]}(g) = g(b) - g(a)$, denn per Teleskopsumme liefern alle Partitionen den gleichen Summenwert. Damit ist die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen in $\text{BV}([a, b])$.

Umgekehrt sei $h \in \text{BV}([a, b])$. Die durch $g(t) := \text{Var}_{[a,t]}(h)$, $t \in [a, b]$, definierte Funktion ist offenbar monoton wachsend auf $[a, b]$. Wir probieren unser Glück mit der Zerlegung $h = g - (g - h)$ und zeigen, dass auch $g - h$ monoton wächst. Seien dazu $s, t \in [a, b]$ mit $s < t$. Durch Einfügen des Punktes s in eine beliebige Partition von $[a, t]$ machen wir uns klar, dass

$$\text{Var}_{[a,t]}(h) = \text{Var}_{[a,s]}(h) + \text{Var}_{[s,t]}(h)$$

gilt. Folglich ist

$$g(t) - g(s) = \text{Var}_{[s,t]}(h) \geq h(t) - h(s),$$

wobei wir im zweiten Schritt die triviale Partition von $[s, t]$ genutzt haben. Umstellen liefert $g(t) - h(t) \geq g(s) - h(s)$ wie gewünscht. $\square$

Aus dem Struktursatz und Lemma 5.18 erhalten wir das nachfolgende Korollar.

Korollar 5.23. Für $g \in \text{BV}([a, b])$ gilt die Aussage von Lemma 5.18 im Kontext von signierten Maßen.

Bemerkung 5.24. Das zu g assoziierte Maß in Lemma 5.18 und Korollar 5.23 heißt auch *Lebesgue-Stieltjes-Maß*.

Damit können wir den Dualraum von $C([a, b])$ wie angekündigt bestimmen.

Theorem 5.25 (Riesz'scher Darstellungssatz für Maße). *Es gilt $C([a, b])' = M([a, b])$ vermöge des isometrischen Isomorphismus (5.8).*

Beweis. Im Vorgang zu (5.8) haben wir uns bereits klar gemacht, dass die Abbildung isometrisch ist. Zu zeigen bleibt, dass sie auch surjektiv ist.

Sei $\varphi \in C([a, b])'$ gegeben. Unsere Erfahrung aus Maß- und Integrationstheorie lehrt uns, dass der Kandidat für das zu findende Maß formal durch $A \mapsto \varphi(\mathbf{1}_A)$ gegeben sein sollte. Da charakteristische Funktionen i.A. aber nicht stetig sind, müssen wir einen kleinen funktionalanalytischen Umweg gehen.

1. Schritt: Fortsetzung von φ .

Es sei $B([a, b])$ der Raum der beschränkten Funktionen auf $[a, b]$ mit Supremumsnorm. Dieser enthält $C([a, b])$ als abgeschlossenen Unterraum. Aus dem Satz von Hahn-Banach erhalten wir eine Fortsetzung $\tilde{\varphi} \in B([a, b])'$ von φ . Wir definieren nun nicht direkt ein Maß sondern eine zugehörige Funktion

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = \tilde{\varphi}(\mathbf{1}_{[a, t]}).$$

2. Schritt: Konstruktion eines Lebesgue-Stieltjes-Maß.

Wir wollen zeigen, dass h von beschränkter Variation ist. Sei $a = t_0 < \dots < t_n = b$ eine beliebige Partition und ε_j das Vorzeichen der Zahl $h(t_j) - h(t_{j-1})$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |h(t_j) - h(t_{j-1})| &= \sum_{j=1}^n \varepsilon_j (\tilde{\varphi}(\mathbf{1}_{[a, t_j]}) - \tilde{\varphi}(\mathbf{1}_{[a, t_{j-1}]})) = \tilde{\varphi} \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \cdot \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j]} \right) \\ &\leq \|\tilde{\varphi}\|_{B([a, b])'} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \cdot \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j]} \right\|_{\infty} = \|\tilde{\varphi}\|_{B([a, b])'}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt genutzt haben, dass die Intervalle $[t_{j-1}, t_j]$ paarweise disjunkt sind. Dies zeigt $\text{Var}_{[a, b]}(h) \leq \|\tilde{\varphi}\|_{B([a, b])'}$. Sei nun ν das zu h assoziierte Lebesgue-Stieltjes Maß auf $[a, b]$, vgl. mit Korollar 5.23.

3. Schritt: Darstellung von φ auf Funktionen, die in b verschwinden.

5 Bestimmung wichtiger Dualräume

Sei $f \in C([a, b])$ mit $f(b) = 0$. Wir behaupten, dass wir f auf $[a, b]$ gleichmäßig durch einfache Funktionen vom Typ

$$s := \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j) \cdot \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j)}$$

mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ und der zusätzlichen Eigenschaft, dass h in allen t_j für $j = 1, 2, \dots, n-1$ stetig ist, approximieren können. Dann finden wir nach Konstruktion von ν , dass

$$\begin{aligned} \int_a^b s \, d\nu &= \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j) \nu([t_{j-1}, t_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j) (h(t_j-) - h(t_{j-1}-)) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j) (h(t_j) - h(t_{j-1})) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j) \tilde{\varphi}(\mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j)}) \\ &= \tilde{\varphi}(s) \end{aligned}$$

und da beide Seiten stetig von s bezüglich der unendlich-Norm abhängen, folgt wie gewünscht

$$\int_a^b f \, d\nu = \tilde{\varphi}(f) = \varphi(f).$$

Hierbei interpretieren wir ν kanonisch als Maß auf $[a, b]$.

Wir müssen noch die behauptete Approximationseigenschaft begründen. Sei also $\varepsilon > 0$. Da f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\|s - f\|_\infty < \varepsilon$ allein daraus folgt, dass $|t_{j-1} - t_j| < \delta$ für alle j gilt. Da h nach Satz 5.22 eine Differenz von zwei monotonen Funktionen ist, hat h nach Satz I.29.7 aus der Analysis I nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Unterteilen wir $[a, b]$ in gleichgroße Intervalle der Länge höchstens $\delta/2$, können wir in jedem Intervall ein t_j wählen, in dem h stetig ist.

Es bleibt noch das Intervall von t_{n-1} bis $t_n = b$ übrig, auf dem s den Wert Null hat. Doch dieses Intervall ist kürzer als $\delta/2$ und es gilt $f(b) = 0$. Damit ist auch dort der maximale Abstand von f zu s kleiner als ε und wir haben wirklich eine auf ganz $[a, b]$ gleichmäßige Approximation.

4. Schritt: Darstellung von φ .

Um nun eine Darstellung durch ein signiertes Borelmaß zu erhalten, die für alle $f \in C([a, b])$ gilt, zerlegen wir $f = (f - f(b)) + f(b)$. Schreiben wir $\mathbf{1}$ für die konstante Eins-Funktion, so liefert uns Schritt 3

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \int_a^b f - f(b) \, d\nu + \varphi(\mathbf{1})f(b) = \int_a^b f \, d\nu + f(b)(\varphi(\mathbf{1}) - \nu([a, b])) \\ &= \int_a^b f \, d(\nu + c\delta_b),\end{aligned}$$

wobei wir $c := \varphi(\mathbf{1}) - \nu([a, b])$ gesetzt haben. Damit ist $\nu + c\delta_b$ das gesuchte signierte Maß, vgl. mit Bemerkung 5.19. $\square$

Bemerkung 5.26. (a) Theorem 5.25 gilt viel allgemeiner auf kompakten Hausdorffräumen anstelle von $[a, b]$. Verloren geht aber der Bezug zu Funktionen von beschränkter Variation und der Beweis wird maßtheoretisch involvierter, vgl. [vN22, Theorem 4.2].

(b) Sobald man diese Identifikation von $C'(\Omega)$ mit $M(\Omega)$ bewiesen hat, bekommt man aus Satz 4.7 sofort auch, dass der Raum $M(\Omega)$ als Dualraum eines Banachraums selbst vollständig ist. Insbesondere haben wir jetzt gezeigt, dass $M([a, b])$ ein Banachraum ist.

5.6 Das Hausdorff'sche Momentenproblem

Ein vieluntersuchtes offenes Problem zu Ende des 19. Jahrhunderts, das auch zur Entwicklung der Funktionalanalysis beigetragen hat, war das sogenannte „Momentenproblem“, das sich in moderner Sprache kurz wie folgt erklären lässt. Ist μ ein Maß auf einer Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, so nennt man für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Zahl $\int_{\Omega} t^j \, d\mu(t)$ das j -te *Moment* von μ . Diese Größen spielen in der Mechanik und heute auch besonders in der Stochastik eine wesentliche Rolle (beispielsweise als Erwartungswert, Varianz, ...). Das damals untersuchte Problem interessiert sich für die inverse Frage: Für welche reellen Folgen (a_j) kann man ein Maß μ finden, so dass a_j genau mit dem j -ten Moment übereinstimmt.

Für den Fall, dass Ω ein kompaktes Intervall, hier o.B.d.A. $[0, 1]$, ist, hat Felix Hausdorff im Jahr 1921 erste Resultate veröffentlicht, weshalb diese Frage heute als *Hausdorff'sches Momentenproblem* bekannt ist. Exakt formuliert lautet es: Gegeben eine reelle Folge $(a_j)_{j \geq 0}$, gibt es ein signiertes Borelmaß ν auf $[0, 1]$ mit der Eigenschaft, dass

$$\int_0^1 t^j \, d\nu(t) = a_j \tag{5.11}$$

5 Bestimmung wichtiger Dualräume

für alle $j \geq 0$ gilt? Da wir die signierten Borelmaße in Theorem 5.25 als Dualraum von $C([0, 1])$ identifiziert haben, ist diese Frage ein Spezialfall des folgenden, abstrakten Problems.

Abstraktes Momentenproblem: Sei X ein normierter Raum über $\mathbb{R}$, $(u_j)_{j \geq 0}$ eine Folge in X und $(a_j)_{j \geq 0}$ eine reelle Folge. Gibt es ein $\varphi \in X'$ mit $\varphi(u_j) = a_j$ für alle $j \geq 0$?

Satz 5.27 (Helly). *Das abstrakte Momentenproblem ist genau dann lösbar, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass*

$$\left| \sum_{j=0}^n \lambda_j a_j \right| \leq C \left\| \sum_{j=0}^n \lambda_j u_j \right\|_X \quad (5.12)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle reellen Folgen $(\lambda_j)_{j \geq 0}$ gilt.

Beweis. “ $\implies$ ”: Angenommen $\varphi \in X'$ ist eine Lösung des abstrakten Momentenproblems. Dann gilt

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j a_j = \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi(u_j) = \varphi \left(\sum_{j=0}^n \lambda_j u_j \right),$$

woraus (5.12) mit $C := \|\varphi\|_{X'}$ folgt.

“ $\impliedby$ ”: Es sei $Y := \text{span}\{u_j : j \geq 0\}$. Auf dem Unterraum Y von X definieren wir ein lineares Funktional ψ durch $\psi(u_j) = a_j$. Wir beachten, dass ψ wohldefiniert ist, denn angenommen $\sum_{j=0}^n \lambda_j u_j = 0$ gilt für gewisse Koeffizienten λ_j , so folgt aus (5.12), dass auch

$$0 = \sum_{j=0}^n \lambda_j a_j = \psi \left(\sum_{j=0}^n \lambda_j u_j \right).$$

Weiterhin ist ψ beschränkt auf Y , denn ist $u = \sum_{j=0}^n \lambda_j u_j$, so folgt $|\psi(u)| \leq C \|u\|_X$ wiederum aus (5.12). Nach dem Satz von Hahn-Banach hat ψ eine normgleiche Fortsetzung $\varphi \in X'$. Diese löst nach Konstruktion das abstrakte Momentenproblem. $\square$

Korollar 5.28 (Lösung des Hausdorff’schen Momentenproblems). *Sei $(a_j)_{j \geq 0}$ eine reelle Folge. Es gibt ein signiertes Borelmaß ν auf $[0, 1]$ für das (5.11) für alle $j \geq 0$ gilt, genau dann, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass*

$$\left| \sum_{j=0}^n \lambda_j a_j \right| \leq C \max_{t \in [0, 1]} \left| \sum_{j=0}^n \lambda_j t^j \right|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle reellen Folgen $(\lambda_j)_{j \geq 0}$ gilt.

Übungsaufgabe 5.29. Finden Sie eine Folge (a_j) , für die das Hausdorff’sche Momentenproblem unlösbar ist. *Hinweis:* Suchen Sie nach Monotonie; nutzen Sie nicht Korollar 5.28.

6 Die Hauptsätze der Funktionalanalysis

Dieses Kapitel präsentiert mehrere große Theoreme, die als die klassischen Hauptsätze der Funktionalanalysis über Operatoren auf Banachräumen gelten. Sie basieren alle auf einem allgemeinen topologischen Prinzip, dem Satz von Baire. Diesen wollen wir im ersten Abschnitt kennenlernen.

6.1 Der Satz von Baire

Wie schon angekündigt hat der Satz von Baire selbst nicht viel mit Funktionalanalysis zu tun, sondern beschäftigt sich mit metrischen Räumen.

Definition 6.1. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Dann heißt M*

- (a) *nirgends dicht in X , falls $(\overline{M})^\circ = \emptyset$ gilt.*
- (b) *von 1. Kategorie oder mager in X , falls es nirgends dichte Mengen $M_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, gibt mit $M \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$.*
- (c) *von 2. Kategorie oder fett in X , falls M nicht mager ist.*

Satz 6.2 (Satz von Baire). *Jeder vollständige metrische Raum $X \neq \emptyset$ ist fett in sich.*

Beweis. Wir nehmen an, dass X mager in sich ist. Dann gibt es eine Folge (M_n) von nirgends dichten Mengen in X mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $A_n := \overline{M_n}$ und beobachten, dass dann immer $A_n^\circ = \emptyset$ gilt.

Da $A_1^\circ = \emptyset$, aber $X^\circ = X \neq \emptyset$ ist, kann $X \setminus A_1$ nicht leer sein und diese Menge ist außerdem offen, da A_1 abgeschlossen ist. Also gibt es eine geeignete offene Kugel $U_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq X \setminus A_1$ mit $\varepsilon_1 < 1/2$. Nun ist $U_{\varepsilon_1/2}(x_1) \cap (X \setminus A_2) \neq \emptyset$, denn sonst wäre $U_{\varepsilon_1/2}(x_1) \subseteq A_2$ und das passt nicht zum leeren Inneren dieser Menge. Außerdem ist dieser Schnitt eine offene Menge, so dass es wieder eine geeignete Kugel $U_{\varepsilon_2}(x_2) \subseteq U_{\varepsilon_1/2}(x_1) \cap (X \setminus A_2)$ mit $\varepsilon_2 < 1/4$ gibt.

Durch Iteration dieses Verfahrens, bekommen wir eine Folge von offenen Kugeln $U_{\varepsilon_n}(x_n)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

6 Die Hauptsätze der Funktionalanalysis

- (a) $U_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq U_{\varepsilon_{n/2}}(x_n) \subseteq U_{\varepsilon_n}(x_n)$,
- (b) $U_{\varepsilon_n}(x_n) \cap A_n = \emptyset$ und
- (c) $\varepsilon_n < \frac{1}{2^n}$.

Wir zeigen, dass die Folge (x_n) eine Cauchyfolge in X ist. Für alle $j, \ell \in \mathbb{N}$ mit $j \leq \ell$ gilt dank (a) die Inklusion $x_\ell \in U_{\varepsilon_\ell}(x_\ell) \subseteq U_{\varepsilon_j}(x_j)$ und mit (c) ist

$$d(x_j, x_\ell) \leq \varepsilon_j \leq \frac{1}{2^j}.$$

Ist also $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $2^{-N} < \varepsilon$ ist, so gilt für alle $\ell \geq j \geq N$ demnach $d(x_j, x_\ell) \leq 2^{-j} \leq 2^{-N} < \varepsilon$. Da X vollständig ist, konvergiert (x_n) also gegen ein $x \in X$.

Nun fixieren wir ein $n \in \mathbb{N}$. Dann liegt wegen (a) das Folgen-Endstück $(x_k)_{k \geq n+1}$ in $U_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})$ und es folgt

$$x \in \overline{U_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})} \subseteq \overline{U_{\varepsilon_{n/2}}(x_n)} \subseteq U_{\varepsilon_n}(x_n).$$

Das bedeutet nach (b) aber, dass $x \notin A_n$ gilt und da $n \in \mathbb{N}$ in dieser Überlegung beliebig war, bekommen wir

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{M_n} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = X,$$

womit wir bei einem Widerspruch wären. □

Hier ist eine einfache Umformulierung des Satzes von Baire in der Form, in der er meistens eingesetzt wird.

Korollar 6.3. *Es sei $X \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum und $(F_n) \subseteq X$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Dann enthält mindestens ein F_n eine offene Kugel.*

Beweis. Wir nehmen an, dass keins der F_n eine offene Kugel enthält. Dann ist $F_n^\circ = \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, d. h. alle F_n sind nirgends dicht und aus der Voraussetzung folgt, dass X mager in sich ist. Das steht aber im Widerspruch zum Satz von Baire. □

Bemerkung 6.4. Wendet man den Satz von Baire auf den Abschluss einer Teilmenge von X an, die einen inneren Punkt besitzt, so sieht man, dass jede solche Teilmenge schon fett in X ist. Eine magere Menge kann also keinen inneren Punkt enthalten. Das zeigt, dass magere Mengen in einem gewissen Sinne „klein“ in einem metrischen Raum sind, so wie Nullmengen kleine Mengen in Maßräumen sind.

Hier ist eine erste vielleicht überraschende Folgerung aus dem Satz von Baire.

Satz 6.5. Die Teilmenge W von $C([0, 1])$ aller stetigen Funktionen, die in mindestens einem Punkt differenzierbar sind, ist mager in $C([0, 1])$. Insbesondere gibt es eine Funktion $f \in C([0, 1])$, die nirgends differenzierbar ist (sogar ausgesprochen viele davon).

Beweis. Wir müssen die Menge W mit abzählbar vielen nirgends dichten Mengen überdecken. Dazu überlegen wir uns folgendes: Wenn $f \in C([0, 1])$ in einem Punkt $t \in [0, 1]$ differenzierbar ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $s \in [0, 1]$ mit $0 < |s - t| < \varepsilon$ gilt

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f'(t) \right| \leq 1, \text{ also } \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \right| \leq 1 + |f'(t)|.$$

Um diese Erkenntnis in abzählbar viele Teilmengen von $C([0, 1])$ umzusetzen, betrachten wir für $n, m \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$F_{n,m} := \left\{ f \in C([0, 1]) : \exists t \in [0, 1] \forall 0 < |s - t| < \frac{1}{m} : \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \right| \leq n \right\}.$$

Nach obiger Überlegung gehört dann jedes $f \in W$ zu einem $F_{n,m}$, indem man $m > 1/\varepsilon$ und $n \geq 1 + |f'(t)|$ für eine Differenzierbarkeitsstelle t von f setzt. Es ist also $W \subseteq \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} F_{n,m}$ und es bleibt nachzuweisen, dass jedes $F_{n,m}$ nirgends dicht ist. Dazu werden wir zeigen, dass diese Mengen alle abgeschlossen sind und keinen inneren Punkt haben. Dann ist $(\overline{F_{n,m}})^\circ = F_{n,m}^\circ = \emptyset$. Seien also $n, m \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

Für den Nachweis der Abgeschlossenheit sei $(f_k) \subseteq F_{n,m}$ eine Folge, die gleichmäßig gegen $f \in C([0, 1])$ konvergiert. Dann gibt es nach der Definition von $F_{n,m}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $t_k \in [0, 1]$, so dass für alle $s \in [0, 1]$ mit $0 < |s - t_k| < 1/m$ gilt

$$\left| \frac{f_k(t_k) - f_k(s)}{t_k - s} \right| \leq n.$$

Die so entstandene Folge (t_k) in $[0, 1]$ hat nach dem guten alten Bolzano-Weierstraß aus der Analysis I eine konvergente Teilfolge (t_{k_j}) mit Grenzwert $t \in [0, 1]$.

Sei $s \in [0, 1]$ mit $0 < |s - t| < 1/m$. Dann gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|t_{k_j} - t| < 1/m - |s - t|$ für alle $j \geq j_0$ ist, und das bedeutet, dass für alle diese $j \geq j_0$ auch gilt

$$|s - t_{k_j}| \leq |s - t| + |t - t_{k_j}| < |s - t| + \frac{1}{m} - |s - t| = \frac{1}{m}.$$

Damit gilt im Grenzübergang $j \rightarrow \infty$ dank der gleichmäßigen Konvergenz

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{k_j}(t_{k_j}) - f_{k_j}(s)}{t_{k_j} - s} \right| \leq n, \quad 0 < |s - t| < \frac{1}{m}.$$

Demnach ist $f \in F_{n,m}$.

6 Die Hauptsätze der Funktionalanalysis

Es bleibt noch zu zeigen, dass $F_{n,m}$ keinen inneren Punkt hat. Dazu konstruieren wir für jedes $f \in F_{n,m}$ und jedes $\delta > 0$ ein $g \in U_{2\delta}(f) \setminus F_{n,m}$. Da f gleichmäßig stetig ist, finden wir eine stetige und stückweise affine Funktion p mit $\|f - p\|_\infty < \delta$. Offenbar ist p bis auf endlich viele Ausnahmen differenzierbar in $[0, 1]$ und wir finden ein $M \geq 0$ mit $|p'(t)| \leq M$ für alle anderen $t \in [0, 1]$.

Diese Funktion p ist jetzt übersichtlich und nahe bei f , aber auch sehr brav. Wir wollen diese Funktion so modifizieren, dass die absolute Änderung in den Funktionswerten gering bleibt, aber die Ableitungswerte größer als n werden, damit die modifizierte Funktion nicht mehr in $F_{n,m}$ liegt.

Dazu wählen wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\delta k \geq 2n + M$, zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in k gleich lange Intervalle und bezeichnen mit $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ die stetige Funktion, die auf jedem Intervall $[j/k, (j+1)/k]$, $j = 0, 1, \dots, k-1$ affin ist mit $h(j/k) = 0$, wenn j gerade und $h(j/k) = 1$, wenn j ungerade ist. Der Haupteffekt dieser Funktion ist, dass ihre Ableitung, da wo sie existiert, Betrag k hat, während die Funktion selbst durch Eins beschränkt bleibt.

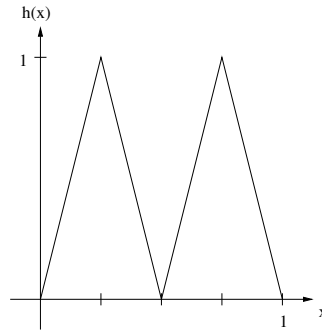


Abbildung 6.1: Die Funktion h aus dem Beweis von Satz 6.5 für $k = 4$.

Nun setzen wir $g := p + \delta \cdot h$. Dann ist g zusammen mit p und h ebenfalls stetig und stückweise affin und es gilt

$$\|f - g\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty + \delta \|h\|_\infty < \delta + \delta \cdot 1 = 2\delta.$$

Es folgt $g \in U_{2\delta}(f)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass g nicht in $F_{n,m}$ ist. Ist $t \in [0, 1]$ eine Differenzierbarkeitsstelle von g , so gilt direkt

$$|g'(t)| = |p'(t) + \delta h'(t)| = |p'(t) \pm \delta k| \geq \delta k - M \geq 2n.$$

In allen diesen Punkten kann also der Differenzenquotient in der Nähe von t nicht kleiner als n werden.

Ist t genau eine „Knickstelle“ von g , so ist g sowohl links von t als auch rechts von t affin mit einer Steigung, die genau wie oben mindestens $2n$ beträgt. Also ist auch hier

6.2 Der Satz von der offenen Abbildung

der Differenzenquotient in keiner Umgebung kleiner als n zu bekommen. Zusammen bedeutet das, dass $g \notin F_{n,m}$ gilt und wir haben gezeigt, dass W mager ist.

Da $C([0, 1])$ als Banachraum insbesondere ein vollständiger metrischer Raum ist, kann nach dem Satz von Baire W nicht der ganze Raum sein. Insbesondere muss es (sehr viele) Funktionen in $C([0, 1])$ geben, die nicht in W liegen, d.h. nirgends differenzierbar sind. $\square$

6.2 Der Satz von der offenen Abbildung

Als erste Anwendung des Satzes von Baire wollen wir in diesem Abschnitt beweisen, dass Umkehrabbildungen von bijektiven beschränkten linearen Abbildungen zwischen Banachräumen automatisch ebenfalls beschränkt sind.

Satz 6.6 (Stetigkeit der Inversen). *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv. Dann ist T^{-1} beschränkt.*

Dass die Vollständigkeit der beiden Räume dabei eine entscheidende Rolle spielt, zeigt das folgende Gegenbeispiel, in dem Y nicht vollständig ist.

Beispiel 6.7. Wir betrachten die normierten Räume $X := (\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$, $Y := (\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ und die identische Abbildung $T : X \rightarrow Y$. Natürlich ist T bijektiv und T ist auch beschränkt, denn für jede Folge $(a_n) \in X$ gilt

$$\|(a_n)\|_Y = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|(a_n)\|_X.$$

Allerdings ist T^{-1} unbeschränkt, denn eine Folge $(a_n) = (1, \dots, 1, 0, \dots)$ mit N vielen Einsen zu Beginn erfüllt $\|(a_n)\|_Y = 1$ und $\|T^{-1}(a_n)\|_X = \|(a_n)\|_X = N$.

Wir arbeiten nun heraus, wie die reichhaltige Topologie von Banachräumen solche einfache Gegenbeispiele verhindert, und beginnen mit einer Charakterisierung von approximativ invertierbaren Abbildungen.

Lemma 6.8. *Seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

- (a) Für ein $r > 0$ hat $\overline{T(U_r(0))}$ einen inneren Punkt.
- (b) Für ein $r > 0$ enthält $\overline{T(U_r(0))}$ eine offene Kugel um 0.
- (c) Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $v \in Y$ die Gleichung $Tu = v$ eine kontrollierte approximative Lösung im folgenden Sinne hat: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $u \in X$ mit $\|v - Tu\|_Y \leq \varepsilon$ und $\|u\|_X \leq C\|v\|_Y$.

6 Die Hauptsätze der Funktionalanalysis

Beweis. Wir beweisen die behauptete Äquivalenz per Ringschluss. Die dabei auftretenden offenen Kugeln der Form $U_r(u)$ sind alle in X gebildet, sofern sie nicht explizit durch die Notation $U_r^Y(v)$ als Kugeln in Y ausgezeichnet werden.

Von (a) nach (b): Nach Voraussetzung finden wir eine offene Kugel $U \subseteq Y$ mit $U \subseteq \overline{T(U_r(0))}$. Da T linear ist, gilt $0 = T0 \in \overline{T(U_r(0))}$ und wir müssen aus dem Gegebenen nun eine ganze Kugel um 0 in dieser Teilmenge konstruieren.

Wir benutzen dazu die Schreibweise $A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$ für die Vektorraumdifferenz von Mengen und beachten, dass aus Linearität und Stetigkeit von T folgt, dass

$$\begin{aligned} U - U &\subseteq \overline{T(U_r(0))} - \overline{T(U_r(0))} \subseteq \overline{T(U_r(0)) - T(U_r(0))} \\ &= \overline{T(U_r(0) - U_r(0))} \subseteq \overline{T(U_{2r}(0))} \end{aligned}$$

gilt. Nun reicht es festzustellen, dass $U - U = \bigcup_{u \in U} (\{u\} - U)$ als Vereinigung offener Mengen selbst offen ist und 0 enthält. Somit gibt es ein $s > 0$ mit

$$U_s^Y(0) \subseteq U - U \subseteq \overline{T(U_{2r}(0))}.$$

Von (b) nach (c): Nach Voraussetzung finden wir $r, s > 0$ mit $U_s^Y(0) \subseteq \overline{T(U_r(0))}$. Für $v = 0$ wählen wir selbstverständlich $u = 0$ als kontrollierte exakte Lösung. Seien nun also $v \in Y \setminus \{0\}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir normieren die Daten geeignet, indem wir $c := s/2\|v\|_Y$ und $y := cv \in U_s^Y(0)$ einführen. Damit ist y im Abschluss von $T(U_r(0))$, d. h. wir finden $x \in U_r(0)$ mit $\|y - Tx\|_X \leq c\varepsilon$. Unsere approximative Lösung wird dann nach rücknormieren $u := c^{-1}x$, denn wie gewünscht gilt

$$\|v - Tu\|_Y = \|c^{-1}y - Tc^{-1}x\|_Y = c^{-1}\|y - Tx\| \leq \varepsilon$$

und

$$\|u\|_X \leq c^{-1}\|x\|_X \leq c^{-1}r = \frac{2r}{s}\|v\|_Y.$$

Von (c) nach (a): Wir zeigen, dass $U_1^Y(0) \subseteq \overline{T(U_C(0))}$ gilt, denn dann ist 0 der gesuchte innere Punkt. Sei also $v \in Y$ mit $\|v\|_Y < 1$. Nach Voraussetzung (c) gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in X$ mit $\|u_n\|_X \leq C\|v\|_Y < C$ und $\|v - Tu_n\|_Y \leq 1/n$. Also ist (u_n) eine Folge in $U_C(0)$, für die (Tu_n) in Y gegen v konvergiert. Das zeigt $v \in \overline{T(U_C(0))}$. $\square$

Der Beweis von Satz 6.6 beruht nun auf zwei Beobachtungen: Einerseits sorgt der Satz von Baire, angewandt im vollständigen Raum Y dafür, dass Eigenschaft (a) aus Lemma 6.8 immer erfüllt ist und andererseits erlaubt uns die Vollständigkeit von X , das exakte Inverse als Grenzwert von immer besseren aber kontrollierten approximativen Inversen zu erhalten.

Beweis von Satz 6.6. Wir nutzen zunächst die Surjektivität von T und schreiben

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n(0)\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(U_n(0)).$$

6.2 Der Satz von der offenen Abbildung

Also wird Y durch die abgeschlossenen Mengen $\overline{T(U_n(0))}$, $n \in \mathbb{N}$, überdeckt und nach dem Satz von Baire in Form von Korollar 6.3 findet sich ein $n \in \mathbb{N}$, für das $\overline{T(U_n(0))}$ einen inneren Punkt enthält. Wir haben damit alle drei äquivalenten Aussagen von Lemma 6.8 zur Verfügung und wählen $C > 0$ wie in Teil (c).

Sei nun $v \in Y$. Die Gleichung $Tu = v$ hat dank der Bijektivität die eindeutige Lösung $u := T^{-1}v$, aber die nutzt uns so nichts, da wir keine Kontrolle über ihre Norm haben und es ja genau darum geht, diese Kontrolle der Norm zu beweisen. Also nutzen wir die Norm-kontrollierten approximativen Lösungen aus Lemma 6.8 (c).

Zunächst finden wir für $\varepsilon = \|v\|_Y/2$ eine approximative Lösung $u_1 \in X$ von $Tu = v$ mit

$$\|v - Tu_1\|_Y \leq \frac{1}{2}\|v\|_Y \quad \text{und} \quad \|u_1\|_X \leq C\|v\|_Y.$$

Wir verfeinern nun die Konstruktion, indem wir erst $Tu = v - Tu_1$ mit $\varepsilon = \|v\|_Y/2^2$ approximativ durch u_2 lösen und dann die Eigenschaften von u_1 benutzen. Dies führt uns auf

$$\begin{aligned} \|v - Tu_1 - Tu_2\|_Y &\leq \frac{1}{2^2}\|v\|_Y \quad \text{und} \\ \|u_2\|_X &\leq C\|v - Tu_1\|_Y \leq \frac{C}{2}\|v\|_Y. \end{aligned}$$

Iterieren liefert eine Folge (u_k) in X mit

$$\left\| v - T \sum_{k=1}^n u_k \right\|_Y \leq \frac{1}{2^n} \|v\|_Y, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \quad (6.1)$$

$$\|u_k\|_X \leq \frac{C}{2^{k-1}} \|v\|_Y, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.2)$$

Aus der unteren Zeile folgt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ absolut konvergiert. Da X vollständig ist, konvergiert sie auch in X (vgl. Übungsaufgabe II.9.6) und ihr Reihenwert $w := \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ erfüllt $\|w\|_X \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_X \leq 2C\|v\|_Y$. Andererseits folgt durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in der ersten Zeile, dass $v - Tw = 0$ ist. Somit ist $w = T^{-1}v = u$ und wir haben $\|T^{-1}v\|_X = \|w\|_X \leq 2C\|v\|_Y$ für beliebiges $v \in Y$ gezeigt. $\square$

Rückblickend stellen wir fest, dass wir die Injektivität von T nur an einer einzigen Stelle im Beweis von Satz 6.6 benutzt haben. Nachdem wir ein beliebiges $v \in Y$ als $v = Tw$ mit $\|w\|_X \leq 2C\|v\|_Y$ dargestellt hatten, haben wir in der vorletzten Zeile per Injektivität auf $w = T^{-1}v$ geschlossen. Eigentlich haben wir also eine stärkere Aussage über surjektive Abbildungen zwischen Banachräumen bewiesen, die wir als nächstes ausformulieren. Wir benötigen dafür das folgende Konzept.

Definition 6.9. Seien X, Y zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt offen, falls Bilder offener Mengen unter f immer offen sind.

6 Die Hauptsätze der Funktionalanalysis

Eine Abbildung ist stetig, wenn Urbilder offener Mengen offen sind. Bijektive Abbildungen mit stetiger Umkehrabbildung liefern damit Beispiele für offene Abbildungen. Für beschränkte lineare Abbildungen zwischen Banachräumen findet sich die folgende Charakterisierung.

Satz 6.10 (Satz von der offenen Abbildung). *Seien X, Y Banachräume. Ein Operator aus $\mathcal{L}(X, Y)$ ist genau dann surjektiv, wenn er offen ist.*

Beweis. Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjektiv. Wie bereits diskutiert, liefert der Beweis von Satz 6.6 ein $C > 0$ mit der Eigenschaft, dass jedes $v \in Y$ als $v = Tw$ mit $\|w\|_X \leq C\|v\|_Y$ dargestellt werden kann. Folglich gilt für jedes $\varrho > 0$ die Inklusion $U_{\varrho}^Y(0) \subseteq T(U_{C\varrho}^X(0))$.

Sei nun $G \subseteq X$ eine offene Menge und $Tu \in T(G)$ gegeben. Dann wählen wir ein geeignetes $r > 0$ mit $U_r^X(u) \subseteq G$. Wegen der Linearität von T gilt dann

$$U_{r/C}^Y(Tu) = Tu + U_{r/C}^Y(0) \subseteq Tu + T(U_r^X(0)) = T(u + U_r^X(0)) = T(U_r^X(u)) \subseteq T(G).$$

Damit ist Tu ein innerer Punkt von $T(G)$ und das bedeutet, dass T offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

Sei umgekehrt $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ offen. Dann ist $T(X) = \text{ran}(T)$ offen und damit ein Untervektorraum, der eine offene Kugel um 0 enthält. Dies kann nur für $\text{ran}(T) = Y$ passieren (Vektoren normieren!) und wir haben gezeigt, dass T surjektiv ist. $\square$

Als Anwendung von Satz 6.10 zeigen wir, dass algebraische Summenzerlegungen von Banachräumen in abgeschlossene Teilräume automatisch topologisch sind. Um zu erklären, was damit gemeint ist, braucht es einen kleinen Exkurs:

Wir haben in den Kapiteln 1 und 2 gesehen, dass für jeden abgeschlossenen Teilraum U eines Hilbertraums H das orthogonale Komplement $U^\perp$ abgeschlossen ist mit $H = U \oplus U^\perp$ und dass die zugehörige Orthogonalprojektionen auf U und $U^\perp$ stetige lineare Abbildungen sind. Ein entsprechendes Resultat für Banachräume gibt es nicht, so ist beispielsweise c_0 ein abgeschlossener Teilraum von ℓ^∞ , auf den es keine stetige Projektion gibt, vgl. [Whi66]. Die Lage ist sogar richtig böse: Nach einem tiefliegenden Theorem von Lindenstrauss und Tzafriri [LT71] ist jeder unendlich-dimensionale Banachraum, in dem es auf jeden abgeschlossenen Teilraum eine stetige Projektion gibt, schon ein Hilbertraum.

Die Frage welche abgeschlossenen Teilräume eines gegebenen Banachraums eine stetige, surjektive Projektion zulassen (man nennt einen solchen Teilraum dann *komplementiert*) liegt im Herzen der Strukturtheorie für Banachräume und ist im Allgemeinen höchst knifflig. Wir können mit unserem Satz von der offenen Abbildung bzw. dem Satz von der stetigen Inversen jetzt einsehen, dass die Problematik dabei nicht in der fehlenden Stetigkeit der Projektion, sondern im Fehlen eines geeigneten komplementären Raums liegt. D. h. wenn man einen Banachraum X als direkte Summe $X = V \oplus W$

6.2 Der Satz von der offenen Abbildung

mit abgeschlossenen Teilräumen V und W von X schreiben kann, dann existieren auch stetige Projektionen von X auf V und W .

Korollar 6.11. *Seien X ein Banachraum und $V, W \subseteq X$ abgeschlossene Teilräume mit $X = V \oplus W$. Dann findet sich eine Konstante $C > 0$, so dass für jedes $u \in X$ für die eindeutigen $v \in V$ und $w \in W$ mit $u = v + w$ gilt $\|v\|_X + \|w\|_X \leq C\|u\|_X$. Insbesondere sind die Projektionen $P_V : X \rightarrow V$, $x \mapsto v$ und $P_W : X \rightarrow W$, $x \mapsto w$ stetige lineare Abbildungen.*

Beweis. Da V und W Banachräume sind, ist nach Übungsaufgabe 4.2 auch $V \times W$ ein Banachraum. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$T : V \times W \rightarrow X, \quad (v, w) \mapsto v + w,$$

die wegen $\|T(v, w)\|_X = \|v + w\|_X \leq \|v\|_X + \|w\|_X = \|(v, w)\|_{V \times W}$ beschränkt ist. Nach Voraussetzung ist T bijektiv und somit ist T^{-1} nach Satz 6.6 stetig. Sei $u = v + w \in X$ mit $v \in V$ und $w \in W$. Dann gilt

$$\|v\|_X + \|w\|_X = \|(v, w)\|_{V \times W} = \|T^{-1}u\|_{V \times W} \leq C\|u\|_X$$

mit $C = \|T^{-1}\|_{X \rightarrow V \times W}$. Weiter ist damit für alle $u = v + w \in X$

$$\|P_V u\|_V = \|P_V u\|_X = \|v\|_X \leq \|v\|_X + \|w\|_X \leq C\|u\|_X,$$

was die Stetigkeit von P_V zeigt. Die Stetigkeit von P_W erhält man analog. $\square$

Wir überlegen uns noch, dass wenigstens jeder endlichdimensionale Teilraum komplementiert ist.

Beispiel 6.12. Sei X ein Banachraum und V ein endlichdimensionaler Teilraum von X . Dann ist V abgeschlossen und da V endlichdimensional ist, können wir eine Basis $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ von V wählen und wir können davon ausgehen, dass jeder Basisvektor normiert ist. Dann hat jedes $u \in V$ eine eindeutige Basisdarstellung $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k(u) b_k$ mit Koeffizienten $\alpha_k(u) \in \mathbb{K}$.

Für jedes $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ definieren wir nun die linearen Abbildungen $\varphi_k : V \rightarrow \mathbb{K}$ durch $\varphi_k(u) := \alpha_k(u)$. Diese sind stetig und damit Funktionale, denn

$$|\varphi_k(u)| = |\alpha_k(u)| \leq \|(\alpha_j(u))_{j=1, \dots, n}\|_\infty \leq C\|u\|_X$$

mit einer geeigneten, von u unabhängigen, Konstanten C , die sich daraus ergibt, dass auf V alle Normen äquivalent sind.

Wir können nun nach dem Satz von Hahn-Banach jedes der φ_k normgleich zu einem Funktional $\tilde{\varphi}_k \in X'$ fortsetzen und setzen dann

$$W := \bigcap_{k=1}^n \ker(\tilde{\varphi}_k).$$

6 Die Hauptsätze der Funktionalanalysis

Da Kerne von Funktionalen nach Lemma 2.4 immer abgeschlossene Teilräume sind, ist W als Schnitt von ebensolchen auch ein abgeschlossener Teilraum. Um nachzuweisen, dass V komplementiert ist, reicht es nach Korollar 6.11 also einzusehen, dass algebraisch $X = V \oplus W$ gilt.

Dazu beobachten wir zunächst, dass wegen der eindeutigen Basisdarstellung $b_k = \sum_{j=1}^n \delta_{jk} b_j$ für jede Kombination von $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt $\varphi_j(b_k) = \delta_{jk}$.

Wir zeigen $V \cap W = \{0\}$: Für $u \in V \cap W$ gibt es wegen $u \in V$ Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k$. Da $u \in W$ ist, gilt andererseits $u \in \ker(\tilde{\varphi}_j)$ für jedes j und damit

$$0 = \tilde{\varphi}_j(u) = \tilde{\varphi}_j\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_j(b_k) = \lambda_j.$$

Also ist $u = 0$.

Es bleibt noch $X = V + W$ zu zeigen. Sei dazu $u \in X$ gegeben und setze

$$v := \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}_k(u) b_k.$$

Dann ist $v \in V$ und wir wollen zeigen, dass $w := u - v$ in W liegt. Für jedes $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ist

$$\tilde{\varphi}_j(v) = \tilde{\varphi}_j\left(\sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}_k(u) b_k\right) = \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}_k(u) \varphi_j(b_k) = \tilde{\varphi}_j(u).$$

Also ist $\tilde{\varphi}_j(w) = \tilde{\varphi}_j(u - v) = 0$ für jedes $j = 1, \dots, n$, wir haben $w \in W$ erreicht und sind damit fertig.

6.3 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Wir wollen uns anschauen, was die Stetigkeit einer linearen Abbildung $T : X \rightarrow Y$ zwischen zwei normierten Räumen für ihren Graphen

$$G(T) := \{(u, Tu) : u \in X\} \subseteq X \times Y$$

bedeutet. Der Graph ist dank der Linearität von T ein Untervektorraum des Produktraums $X \times Y$ aus Übungsaufgabe 4.2.

Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und (u_n) eine konvergente Folge in X mit Grenzwert u , so konvergiert wegen der Stetigkeit von T auch (Tu_n) gegen Tu und damit strebt die Folge $((u_n, Tu_n))$ in $X \times Y$ gegen (u, Tu) . Der Graph einer stetigen linearen Abbildung ist in $X \times Y$ also notwendigerweise abgeschlossen. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass für lineare Abbildungen zwischen Banachräumen diese Bedingung auch hinreichend ist.

6.3 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Definition 6.13. Seien X, Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ linear. Dann heißt T abgeschlossen, falls $G(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$ ist.

Lemma 6.14. Seien X, Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ linear. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

- (a) T ist abgeschlossen.
- (b) Ist (u_n) eine in X konvergente Folge mit Grenzwert $u \in X$, für die (Tu_n) in Y gegen ein $v \in Y$ konvergiert, so gilt $Tu = v$.

Beweis. Zunächst sei T eine abgeschlossene lineare Abbildung und (u_n) eine Folge wie in (b). Dann konvergiert die Folge $((u_n, Tu_n))$ in $X \times Y$ gegen (u, v) und wegen der Abgeschlossenheit des Graphen von T muss damit (u, v) ein Element des Graphen sein. Das bedeutet aber gerade $Tu = v$.

Gilt umgekehrt (b) und ist (u_n, Tu_n) eine in $X \times Y$ konvergente Folge in $G(T)$ mit Grenzwert $(u, v) \in X \times Y$, so konvergiert (u_n) in X gegen u und (Tu_n) in Y gegen v . Nach (b) ist $Tu = v$, d. h. $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, Tu_n) = (u, v) = (u, Tu) \in G(T)$ und das bedeutet, dass der Graph abgeschlossen ist. $\square$

Wir kommen direkt zum oben angekündigten Satz vom abgeschlossenen Graphen, der sich im Wesentlichen aus dem im vorigen Abschnitt vorgestellten Satz von der stetigen Inversen ergibt. Er ermöglicht es unter Anderem, die Stetigkeit einer lineare Abbildung T zwischen zwei Banachräumen auch ohne die übliche Abschätzung $\|Tu\| \leq C\|u\|$ nachweisen zu können.

Satz 6.15 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). Seien X und Y Banachräume. Jede abgeschlossene lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ ist stetig.

Beweis. Da T abgeschlossen ist, ist $G(T) \subseteq X \times Y$ als abgeschlossener Unterraum eines Banachraums selbst wieder ein Banachraum. Wir betrachten nun die lineare Abbildung

$$P : G(T) \rightarrow X, \quad P(u, Tu) = u.$$

Diese ist offenbar stetig und bijektiv. Insbesondere folgt aus Satz 6.6 die Stetigkeit der Inversen und somit

$$\|Tu\|_Y \leq \|(u, Tu)\|_{X \times Y} = \|P^{-1}u\|_{X \times Y} \leq \|P^{-1}\|_{X \rightarrow G(T)} \|u\|_X, \quad u \in X.$$

Das zeigt die Stetigkeit von T . $\square$

Eine schöne erste Anwendung dieses Resultats ist der folgende Satz.

6 Die Hauptsätze der Funktionalanalysis

Satz 6.16 (Hellinger-Toeplitz). *Seien H, K Hilberträume und $T : H \rightarrow K$ sei ein linearer Operator, der eine Hilbertraum-Adjungierte besitzt, d. h. es existiere eine lineare Abbildung $S : K \rightarrow H$ mit*

$$\langle Tu, v \rangle_K = \langle u, Sv \rangle_H, \quad u \in H, v \in K.$$

Dann ist T stetig.

Beweis. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen genügt es zu zeigen, dass T abgeschlossen ist. Seien dazu $u \in H, v \in K$ und $(u_n) \subseteq H$ mit $u_n \rightarrow u$ in H und $Tu_n \rightarrow v$ in K . Nach der Voraussetzung gilt für alle $w \in K$

$$\langle v, w \rangle_K = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Tu_n, w \rangle_K = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, Sw \rangle_H = \langle u, Sw \rangle_H = \langle Tu, w \rangle_K,$$

also $v = Tu$, womit T nach Lemma 6.14 abgeschlossen ist. $\square$

Bemerkung 6.17. Oft findet man den Satz von Hellinger-Toeplitz in der folgenden deutlich spezielleren Formulierung, in der er aber für die Theorie der selbstadjungierten, unbeschränkten Operatoren, z. B. in der Quantenmechanik, einige Bedeutung hat:

Ist H ein Hilbertraum und $T : H \rightarrow H$ ein linearer Operator, der symmetrisch ist, d. h. für alle $u, v \in H$ gilt $\langle Tu, v \rangle_H = \langle u, Tv \rangle_H$, so ist T stetig.

Eine weitere hilfreiche Konsequenz aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist die folgende Aussage, die den Aufwand zum Nachweis der Äquivalenz von zwei Normen halbieren kann.

Übungsaufgabe 6.18. Sei X ein Vektorraum und $\|\cdot\|, \|\cdot\|$ seien zwei Normen auf X , mit denen X vollständig ist. Angenommen es gibt ein $C \geq 0$ mit $\|u\| \leq C\|u\|$ für alle $u \in X$. Dann gibt es auch ein $C' \geq 0$ mit $\|u\| \leq C'\|u\|$ für alle $u \in X$.

6.4 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Die zweite große Anwendung des Satzes von Baire ist das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

Satz 6.19 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). *Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Weiterhin sei I eine Indexmenge und $\{T_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ eine Familie von Operatoren, die punktweise beschränkt ist, d. h. es gilt $\sup_{i \in I} \|T_i u\|_Y < \infty$ für jedes $u \in X$. Dann sind die Operatoren $T_i, i \in I$, gleichmäßig (norm-)beschränkt, d. h. es gilt $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{X \rightarrow Y} < \infty$.*

6.4 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Wenn man die Aussage des Satzes auf die kurze Formel

$$\sup_{i \in I} \|T_i u\|_X < \infty \quad \forall u \in X \implies \sup_{i \in I} \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X \leq 1}} \|T_i u\|_X < \infty$$

bringt, sieht man, dass dieses Resultat keineswegs selbstverständlich ist und das Potenzial hat, unerwartete Dinge zu beweisen.

Beweis. Für jedes $i \in I$ betrachten wir die Funktionen $f_i : X \rightarrow [0, \infty)$ mit $f_i(u) := \|T_i u\|_Y$, $u \in X$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$F_n := \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}([0, n]).$$

Da jede der Funktionen f_i stetig ist, ist jedes F_n als Schnitt von abgeschlossenen Mengen selbst auch abgeschlossen und wir zeigen nun, dass $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ gilt.

Sei dazu $u \in X$ gewählt. Dann ist nach Voraussetzung

$$0 \leq \sup_{i \in I} f_i(u) = \sup_{i \in I} |f_i(u)| = \sup_{i \in I} \|T_i u\|_Y < \infty.$$

Es existiert also ein $n_* \in \mathbb{N}$ mit $f_i(u) \in [0, n_*]$ für alle $i \in I$. Das bedeutet gerade $u \in f_i^{-1}([0, n_*])$ für jedes $i \in I$ und damit

$$u \in \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}([0, n_*]) = F_{n_*} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Wir haben also X als eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen geschrieben und der Satz von Baire in der Version von Korollar 6.3 sagt uns, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, ein $u_0 \in X$ und ein $r_0 > 0$ gibt mit $U_{2r_0}(u_0) \subseteq F_{n_0}$.

Sei nun $u \in X$ mit $\|u\|_X \leq 1$. Dann gilt $u_0 + r_0 u \in U_{2r_0}(u_0)$ und es folgt für alle $i \in I$

$$\begin{aligned} \|T_i u\|_Y &= \frac{1}{r_0} \|T_i(r_0 u)\|_Y = \frac{1}{r_0} \|T_i(u_0 + r_0 u - u_0)\|_Y \leq \frac{1}{r_0} (\|T_i(u_0 + r_0 u)\|_Y + \|T_i u_0\|_Y) \\ &= \frac{1}{r_0} (f_i(u_0 + r_0 u) + f_i(u_0)). \end{aligned}$$

Da $u_0 + r_0 u$ und u_0 beide in $U_{2r_0}(u_0) \subseteq F_{n_0}$ liegen, sind $f_i(u_0 + r_0 u)$ und $f_i(u_0)$ für jedes $i \in I$ in $[0, n_0]$ und das liefert

$$\leq \frac{2n_0}{r_0}.$$

Damit ist $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{X \rightarrow Y} \leq 2n_0/r_0 < \infty$ und wir sind fertig. □

6 Die Hauptsätze der Funktionalanalysis

Satz 6.20 (Satz von Banach-Steinhaus). *Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und (T_n) eine Folge in $\mathcal{L}(X, Y)$, für die $Tu := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n u$ für jedes $u \in X$ existiert. Dann ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

Beweis. Dank der Linearität der Operatoren T_n , $n \in \mathbb{N}$ und des Grenzwertes, ist die Abbildung T ebenfalls linear. Es bleibt zu zeigen, dass diese beschränkt ist.

Als konvergente Folge ist $(\|T_n u\|_Y)_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $u \in X$ beschränkt, d. h. es gilt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n u\|_Y < \infty$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit in Satz 6.19 gilt also $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{X \rightarrow Y} < \infty$. Damit gilt für alle $u \in X$

$$\|Tu\|_Y = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n u \right\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n u\|_Y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M \|u\|_X = M \|u\|_X$$

und T ist beschränkt. □

Übungsaufgabe 6.21. Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und (T_n) eine Folge in $\mathcal{L}(X, Y)$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{X \rightarrow Y} = \infty$. Zeigen Sie: Es existiert ein $u \in X$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n u\|_Y = \infty$.

Um die Stärke des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit zu präsentieren, zeigen wir, dass es eine stetige 2π -periodische Funktion gibt, die eine in Null divergente Fourierreihe besitzt. Damit ist dann die zu Beginn von Kapitel II.2 aufgestellte Behauptung untermauert und das zeigt, dass die Voraussetzung „stückweise glatt“ im Satz II.2.9 zur punktweisen Konvergenz von Fourierreihen nicht einfach weggelassen werden kann.

Beispiel 6.22. Zuerst erinnern wir uns: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische Funktion, so ist für $k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

der k -te Fourierkoeffizient von f ,

$$Sf(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

die Fourierreihe von f und für $n \in \mathbb{N}$

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}$$

das n -te Fourierpolynom von f . Letzteres lässt sich nach Satz II.2.4 aus der Analysis II mit dem Dirichlet-Kern

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin(x/2)}, \quad x \in (-\pi, \pi), \quad (6.3)$$

6.4 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

schreiben als

$$S_n f(x) = (D_n * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt.$$

Wir notieren mit $C_{2\pi}$ den Banachraum aller stetigen und 2π -periodischen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ mit der Supremums-Norm und betrachten im Folgenden die Fourierreihe von f an der Stelle Null. Dazu definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die linearen Operatoren

$$T_n : C_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}, \quad T_n f := \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) = (S_n f)(0),$$

die gerade das n -te Fourierpolynom von f ausgewertet an der Stelle Null zurückliefern.

Wir überlegen uns, dass die Operatornorm von T_n durch

$$\|T_n\|_{(C_{2\pi})'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

gegeben ist. Sei $f \in C_{2\pi}$ gegeben. Dann gilt, da D_n eine gerade Funktion ist,

$$|T_n f| = |S_n f(0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(-t) dt \right| \leq \|f\|_{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Um zu zeigen, dass tatsächlich Gleichheit gilt, definieren wir die Funktionen

$$f_j(t) := \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + 1/j}, \quad t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}.$$

Dann ist jedes $f_j \in C_{2\pi}$ mit $\|f_j\|_{\infty} \leq 1$, womit gilt

$$\|T_n\|_{(C_{2\pi})'} \geq |T_n f_j| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_n(t)|^2}{|D_n(t)| + 1/j} dt.$$

Dieser Integrand geht für $j \rightarrow \infty$ punktweise und monoton wachsend gegen $|D_n(t)|$, also gilt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz nach dem Grenzübergang $j \rightarrow \infty$

$$\|T_n\|_{(C_{2\pi})'} \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Nutzen wir nun die Darstellung des Dirichlet-Kerns aus (6.3), dessen Parität und die Abschätzung $|\sin(x)| \leq |x|$ so folgt daraus

$$\begin{aligned} \|T_n\|_{(C_{2\pi})'} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \right| dt \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)t)|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{(\frac{n}{2}+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx. \end{aligned}$$

6 Die Hauptsätze der Funktionalanalysis

Da das Integral $\int_0^\infty |\sin(x)|/x \, dx$ divergiert, gilt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{(C_{2\pi})'} = \infty$.

Bis hierhin hätten wir die Rechnung auch schon in der Analysis II machen können. Wir hätten daraus aber nichts spannendes folgern können, denn nur daraus, dass dieses Supremum unendlich ist, folgt noch nicht, dass die Fourierreihe einer speziellen Funktion f divergiert. Das bisherige Ergebnis bedeutet ja nur, dass es für jedes $C \geq 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $f \in C_{2\pi}$ gibt mit $(S_n f)(0) = |T_n f| \geq C$. Aber dieses f könnte immer wieder ein anderes sein.

An dieser Stelle kommt das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit in Gestalt von Übungsaufgabe 6.21 ins Spiel, die genau das liefert: Es gibt ein spezielles $f \in C_{2\pi}$, für das die Folge $((S_n f)(0))$ nicht beschränkt und damit auch nicht konvergent ist.

7 Reflexive Räume

7.1 Reflexivität

Wir haben in Satz 4.9 gesehen, dass der Dualraum $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ eines normierten Raums X selbst ein Banachraum ist, d. h. es ist naheliegend auch davon wiederum den Dualraum $(X')'$ zu betrachten.

Definition 7.1. Sei X ein normierter Raum. Dann heißt $X'' := (X')'$ der Bidualraum von X .

Während wir im Hilbertraum-Fall den Raum selbst mit seinem Dualraum identifizieren konnten und für die Hilbertraum-Adjungierte eines stetigen linearen Operators T zwischen Hilberträumen die Identität $T^{**} = T$ gefunden haben, haben wir im Banachraum-Fall noch keinen Zusammenhang zwischen X und X' erkennen können. Auch über den doppelt adjungierten Operator haben wir keine Informationen, tatsächlich kann man aber manchmal etwas über diesen sagen. Denn es stellt sich heraus, dass es einen Zusammenhang zwischen einem normierten Raum selbst und seinem Bidualraum gibt. Das wollen wir nun herausarbeiten.

Dazu betrachten wir für einen gegebenen normierten Raum X die Abbildung $j_X : X \rightarrow X''$ mit

$$[j_X u](\varphi) := \varphi(u), \quad \varphi \in X'. \quad (7.1)$$

Diese Abbildung hat in jedem Fall die folgenden Eigenschaften.

Satz 7.2. Ist X ein normierter Raum, so gilt $j_X \in \mathcal{L}(X, X'')$ und j_X ist eine Isometrie.

Beweis. Für $u, v \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist

$$[j_X(\lambda u + v)](\varphi) = \varphi(\lambda u + v) = \lambda \varphi(u) + \varphi(v) = [\lambda j_X u + j_X v](\varphi), \quad \varphi \in X',$$

also ist j_X linear. Weiter ist die Abbildung isometrisch und damit stetig und injektiv, denn für alle $u \in X$ gilt dank Korollar 4.21 (b)

$$\|j_X u\|_{X''} = \sup_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\|_{X'}=1}} |[j_X u](\varphi)| = \sup_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\|_{X'}=1}} |\varphi(u)| = \|u\|_X. \quad \square$$

7 Reflexive Räume

Als Dualraum ist X'' in jedem Fall ein Banachraum, also lässt sich damit jeder normierte Raum isometrisch isomorph als Teilraum $j_X(X)$ des Banachraums X'' identifizieren. Da der in X'' gebildete Abschluss $\overline{j_X(X)}$ als abgeschlossener Teilraum von X'' ein Banachraum ist, erhalten wir aus Satz 7.2 die folgende Erkenntnis.

Korollar 7.3. *Jeder normierte Raum ist isometrisch isomorph zu einem dichten Teilraum eines Banachraums.*

Es ist nun naheliegend zu fragen, ob j_X auch immer surjektiv ist. Diese Frage ist zu verneinen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 7.4. Aus den Betrachtungen in Satz 5.1 folgt $c_0'' = (\ell^1)' = \ell^\infty$ und die Abbildung $j_{c_0} : c_0 \rightarrow c_0'' = \ell^\infty$ ergibt sich in diesem Fall für $a = (a_n) \in c_0$ und den Isomorphismen $T_1 : \ell^1 \rightarrow c_0'$ und $T_\infty : \ell^\infty \rightarrow (\ell^1)'$ aus Satz 5.1 zu

$$[j_{c_0}a](T_1b) = [T_1b](a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = [T_\infty a](b), \quad b \in \ell^1.$$

Identifiziert man also c_0'' mit ℓ^∞ , so ergibt sich, dass j_{c_0} gerade die Identität von c_0 nach ℓ^∞ ist und diese ist offensichtlich nicht surjektiv.

Das führt zur nächsten Definition, welche die Basis für den Rest des Kapitels bildet.

Definition 7.5. *Es sei X ein normierter Raum.*

- (a) *Die Abbildung $j_X : X \rightarrow X''$ aus (7.1) heißt kanonische Einbettung von X nach X'' .*
- (b) *Der Raum X heißt reflexiv, falls seine kanonische Einbettung j_X surjektiv ist.*

Bemerkung 7.6. (a) Ist ein normierter Raum X reflexiv, so ist er vermöge des Isomorphismus j_X zu seinem Bidualraum X'' isomorph und da letzterer als Dualraum ein Banachraum ist, folgt sofort, dass auch X vollständig ist. Jeder reflexive normierte Raum ist also automatisch ein Banachraum.

- (b) Sind X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, so ist $T'' \in \mathcal{L}(X'', Y'')$ und es gilt für jedes $u \in X$ und $v' \in Y'$

$$[T''(j_X u)](v') = (j_X u)(T'v') = (T'v')(u) = v'(Tu) = (j_Y Tu)(v').$$

Also ist dann $T''j_X = j_Y T$. Sind also X und Y reflexiv, so stimmen T und T'' bis auf die Identifikation von X mit X'' und Y mit Y'' überein.

- (c) Oft wird die Eigenschaft „reflexiv“ mit „ X ist isometrisch isomorph zu X'' “ gleichgesetzt, das ist aber falsch und gefährlich. Es gibt durchaus Banachräume X , für die die Abbildung j_X nicht surjektiv ist, die aber dennoch isometrisch isomorph zu ihrem Bidual sind, indem man einen anderen Isomorphismus nimmt. Das erste und berühmte Beispiel dazu stammt von Robert C. James, vgl. [Jam51].

Die Überlegung in Punkt (b) zeigt auch, warum man reflexiv so definiert. Man will eben nicht nur, dass die Räume X und X'' isomorph sind, sondern auch, dass der Isomorphismus zur Adjungiertenbildung passt und auch die Operatoren T und T'' aufeinander abbildet.

Merke: Reflexiv bedeutet, dass X und X'' genau über die vorgegebene Isometrie j_X isomorph sind, nicht nur irgendwie isomorph.

Beispiel 7.7. (a) Wir haben oben bereits gesehen, dass c_0 nicht reflexiv ist und wir werden daraus in Kürze folgern können, dass auch ℓ^1 diese Eigenschaft nicht hat.

(b) Paradebeispiele für reflexive Räume sind dagegen die L^p -Räume für $1 < p < \infty$ und damit auch ℓ^p für p in diesem Bereich. Das wollen wir kurz nachweisen. Man beachte, dass ein einfacher Verweis auf $(L^p)'' = (L^{p'})' = L^p$ nach Theorem 5.15 nicht ausreicht, denn es muss ja nicht nur Isomorphie sondern die Surjektivität von j_{L^p} nachgewiesen werden.

Sei also $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum und $p \in (1, \infty)$. Wir bezeichnen mit $T_p : L^{p'}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)'$ den isometrischen Isomorphismus aus Theorem 5.15 und wählen $u \in L^p(\Omega)$ und $\varphi \in L^p(\Omega)'$. Dann gilt mit $v := T_p^{-1}(\varphi) \in L^{p'}(\Omega)$

$$\begin{aligned} (j_{L^p} u)(\varphi) &= \varphi(u) = (T_p v)(u) = \int_{\Omega} uv = (T_p u)(v) \\ &= (T_p u)(T_p^{-1} \varphi) = ((T_p^{-1})' T_p u)(\varphi). \end{aligned}$$

Da u und φ beliebig gewählt waren, bedeutet das die Operatorgleichheit $j_{L^p} = (T_p^{-1})' \circ T_p$. Wir wissen aus Theorem 5.15, dass $T_{p'}$ und T_p Isomorphismen sind und nach Satz 4.34 (a) gilt das selbe für $(T_p^{-1})'$, also ist mit diesen beiden Operatoren auch j_{L^p} surjektiv und wir folgern Reflexivität von $L^p(\Omega)$.

Hier sind ein paar erste wichtige Eigenschaften des Reflexivitäts-Begriffs.

Satz 7.8. (a) Sind X, Y Banachräume und existiert ein Isomorphismus in $\mathcal{L}(X, Y)$, so ist X genau dann reflexiv, wenn Y reflexiv ist.

(b) Jeder abgeschlossene Teilraum eines reflexiven Banachraums ist ein reflexiver Banachraum.

(c) Ein Banachraum ist genau dann reflexiv, wenn sein Dualraum reflexiv ist.

Beweis. Die Aussagen in (a) und (c) bleiben als Übungsaufgabe und wir beweisen hier (b).

Sei U ein abgeschlossener Teilraum eines Banachraums X . Wir wollen zeigen, dass die Abbildung $j_U : U \rightarrow U''$ surjektiv ist. Sei dazu $u'' \in U'' \setminus \{0\}$. Wir definieren nun $v'' \in X''$ durch

$$v''(\varphi) := u''(\varphi|_U), \quad \varphi \in X'.$$

7 Reflexive Räume

Wegen der Reflexivität von X finden wir ein $v \in X$ mit $j_X(v) = v''$, also $v''(\varphi) = \varphi(v)$ für alle $\varphi \in X'$. Wir nehmen an, dass v nicht in U liegt. Nach der geometrischen Version des Satzes von Hahn-Banach in der Babyversion aus Übungsaufgabe 4.25 gibt es dann ein $\psi \in X'$ mit $\psi|_U = 0$, das in v nicht verschwindet. Damit bekommen wir den Widerspruch

$$0 \neq \psi(v) = v''(\psi) = u''(\psi|_U) = u''(0) = 0.$$

Also muss v in U liegen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $j_U(v) = u''$ gilt. Sei dazu $\varphi \in U'$ und $\tilde{\varphi} \in X'$ eine Hahn-Banach Fortsetzung von φ auf ganz X . Aus $v \in U$ folgt dann

$$(j_U v)(\varphi) = \varphi(v) = \tilde{\varphi}(v) = v''(\tilde{\varphi}) = u''(\tilde{\varphi}|_U) = u''(\varphi)$$

und somit $j_U(v) = u''$. □

Beispiel 7.9. Nach Beispiel 7.4 ist c_0 nicht reflexiv und wegen $c'_0 = \ell^1$ und $(\ell^1)' = \ell^\infty$ folgt aus obigem Satz sofort, dass auch ℓ^1 und ℓ^∞ keine reflexiven Räume sind.

7.2 Schwache Konvergenz

Erinnern Sie sich an die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß, dass jede beschränkte Folge des $\mathbb{K}^d$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir werden in Satz 8.3 im nächsten Kapitel sehen, dass diese Aussage in unendlich-dimensionalen normierten Räumen tatsächlich immer falsch ist. (Anders formuliert: Die abgeschlossene Einheitskugel ist in unendlich-dimensionalen normierten Räumen nie kompakt.) Unser Ziel in diesem Abschnitt ist, in reflexiven Räumen einen zumindest schwachen Ersatz dafür zu bekommen. Dazu müssen wir den Konvergenzbegriff geeignet abschwächen.

Definition 7.10. Sei X ein normierter Raum.

- (a) Eine Folge $(u_n) \subseteq X$ heißt schwach konvergent gegen $u \in X$, falls für alle $\varphi \in X'$ die Folge $(\varphi(u_n))$ in $\mathbb{K}$ gegen $\varphi(u)$ konvergiert. In diesem Fall schreiben wir $u_n \rightharpoonup u$ in X .
- (b) Eine Folge $(\varphi_n) \subseteq X'$ heißt schwach-* konvergent gegen $\varphi \in X'$, falls für alle $u \in X$ die Folge $(\varphi_n(u))$ in $\mathbb{K}$ gegen $\varphi(u)$ konvergiert. In diesem Fall schreiben wir $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$ in X' .

Bemerkung 7.11. Wir überlegen uns, dass der schwache Grenzwert, wenn er existiert, eindeutig ist. Sind $u, v \in X$ schwache Grenzwerte einer Folge $(u_n) \subseteq X$, so gilt für alle $\varphi \in X'$

$$\varphi(u) - \varphi(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(u_n) - \varphi(u_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Also gilt $u = v$ nach dem Satz von Hahn-Banach in Form von Korollar 4.21 (d).

Übungsaufgabe 7.12. Sei X ein reflexiver Banachraum. Zeigen Sie, dass die schwache und die schwach-* Konvergenz in X' übereinstimmen.

Als nächstes wollen wir sicherstellen, dass auch jede schwach konvergente Folge beschränkt ist, so wie wir es von konvergenten Folgen gewohnt sind. Wir zeigen sogar allgemeiner, dass Beschränktheit und „schwache Beschränktheit“ dasselbe ist.

Satz 7.13. Sei X ein normierter Raum.

- (a) Eine Menge $M \subseteq X$ ist genau dann in X beschränkt, wenn sie schwach beschränkt ist, d. h., wenn für jedes Funktional $\varphi \in X'$ die Menge $\varphi(M)$ in $\mathbb{K}$ beschränkt ist.
- (b) Jede schwach konvergente Folge in X ist beschränkt. Ist X sogar ein Banachraum, so ist jede schwach-* konvergente Folge in X' beschränkt.

Tatsächlich gilt die Beschränktheit von schwach-* konvergenten Folgen auch unter schwächeren Voraussetzungen an den Raum, das übersteigt aber die Möglichkeiten dieser Vorlesung.

Beweis. (a) Da stetige lineare Abbildungen beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbilden, folgt aus der Beschränktheit von M sofort die schwache Beschränktheit.

Wir beweisen also die interessantere umgekehrte Implikation. Die vorausgesetzte schwache Beschränktheit von M bedeutet genau, dass für jedes $\varphi \in X'$ gilt

$$\sup_{u \in M} |j_X u(\varphi)| = \sup_{u \in M} |\varphi(u)| < \infty.$$

Wir können also das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit aus Satz 6.19 im Banachraum $X'' = \mathcal{L}(X', \mathbb{K})$ auf die Operatorfamilie $\{j_X u : u \in M\}$ anwenden und erhalten mit der Isometrieeigenschaft von j_X aus Satz 7.2

$$\sup_{u \in M} \|u\|_X = \sup_{u \in M} \|j_X u\|_{X''} < \infty,$$

d. h. die Menge M ist beschränkt in X .

- (b) Ist (u_n) eine schwach konvergente Folge in X , so ist die Folge $\varphi(u_n)$ in $\mathbb{K}$ konvergent und damit insbesondere beschränkt. Also ist die Menge $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ schwach beschränkt und damit nach Teil (a) auch in Norm beschränkt.

Ist (φ_n) eine schwach-* konvergente Folge in X' , so ist für jedes $u \in X$ die Folge $(\varphi_n(u))$ konvergent und damit beschränkt in $\mathbb{K}$. Es ist also $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(u)| < \infty$ für jedes $u \in X$ und es folgt direkt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Satz 6.19, dass $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X'} < \infty$ ist. $\square$

Das nächste Lemma zeigt unter anderem, dass die Begriffe der schwachen bzw. schwach-* Konvergenz auch wirklich ihren Namen verdienen und von der Norm-Konvergenz impliziert werden.

7 Reflexive Räume

Lemma 7.14. Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:

- (a) Normkonvergenz in X bzw. X' impliziert die schwache bzw. schwach-* Konvergenz.
- (b) Ist $(u_n) \subseteq X$ eine schwach konvergente Folge mit $u_n \rightharpoonup u \in X$, so gilt

$$\|u\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_X.$$

- (c) Ist $(\varphi_n) \subseteq X'$ eine schwach-* konvergente Folge mit $\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi \in X'$, so gilt

$$\|\varphi\|_{X'} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_{X'}.$$

Beweis. (a) Ist (u_n) eine Folge in X , die in X gegen $u \in X$ konvergiert, so gilt für alle $\varphi \in X'$ wegen der Stetigkeit von φ sofort $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) = \varphi(u)$, d. h. (u_n) konvergiert schwach gegen u .

Die Aussage über die schwach-* Konvergenz folgt aus der Abschätzung

$$|\varphi_n(u) - \varphi(u)| = |(\varphi_n - \varphi)(u)| \leq \|\varphi_n - \varphi\|_{X'} \|u\|_X$$

für beliebige $u \in X$ und $\varphi_n, \varphi \in X'$.

- (b) Sei $(u_n) \subseteq X$ eine schwach gegen $u \in X$ konvergente Folge. Nach Korollar 4.21 (a) finden wir ein normiertes $\varphi_u \in X'$ mit $\varphi_u(u) = \|u\|_X$. Es folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_X = \varphi_u(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_u(u_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi_u(u_n) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_u\|_{X'} \|u_n\|_X = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_X. \end{aligned}$$

- (c) Übungsaufgabe

□

Tatsächlich ist die schwache und die schwach-* Konvergenz im Allgemeinen wirklich schwächer als die Normkonvergenz. Das zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 7.15. In ℓ^2 betrachten wir die Folge der Einheitsvektoren $(e_n) \subseteq \ell^2$ aus Beispiel 1.14 (a). Diese besitzt wegen $\|e_n - e_m\|_{\ell^2} = \sqrt{2}$ für $m \neq n$ nicht einmal eine Norm-konvergente Teilfolge, konvergiert aber tatsächlich schwach gegen Null. Dazu erinnern wir uns, dass jedes Funktional auf $(\ell^2)'$ sich nach dem Darstellungssatz von Riesz-Fréchet als Skalarprodukt mit einem ℓ^2 -Element schreiben lässt. Es gilt aber für jedes $u = (u_j) \in \ell^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle e_n, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} e_j^{(n)} \overline{u_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{u_n} = 0,$$

denn (u_j) muss als quadratsummierbare Folge eine Nullfolge sein.

Damit gilt aber nicht nur $e_n \rightarrow 0$ in ℓ^2 , sondern auch $e_n \xrightarrow{*} 0$ in ℓ^2 , denn dieser Raum ist ja auch der Dualraum von ℓ^2 , vgl. Übungsaufgabe 7.12.

Dass Elemente aus der Einheitsphäre gegen den Nullpunkt (im schwachen Sinne) konvergieren, sieht auf den ersten Blick seltsam aus, heißt aber nur, dass die Einheitsphäre bezüglich der schwachen Konvergenz keine abgeschlossene Menge ist. Man muss hier also ein wenig aufpassen. Zum Glück kann ein solcher Effekt für konvexe Mengen, also insbesondere für Teilräume, nicht auftreten. Für diese stimmt nämlich der schwache Abschluss mit dem gewohnten Abschluss der Norm-Konvergenz überein, wie der folgende Satz von Mazur zeigt.

Satz 7.16 (Mazur). *Sei X ein normierter Raum und $K \subseteq X$ konvex. Falls (u_n) eine Folge in K ist, welche schwach gegen $u \in X$ konvergiert, so gilt $u \in \overline{K}$.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\overline{K} \neq X$ ist. Wir nehmen an die Aussage wäre falsch, also $u \in X \setminus \overline{K}$. Da $X \setminus \overline{K}$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_{2\varepsilon}(u) \subseteq X \setminus \overline{K}$. Dann gibt es nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach (Satz 4.30) angewandt auf die beiden Mengen K und $U_{2\varepsilon}(u)$ ein $\varphi \in X'$ mit

$$\operatorname{Re}(\varphi(v)) < \operatorname{Re}(\varphi(w)), \quad v \in K, w \in U_{2\varepsilon}(u). \quad (7.2)$$

Da $\varphi \neq 0$ ist, finden wir ein $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$ und $\varphi(x) \neq 0$. Wir setzen $\alpha := -e^{-i \arg(\varphi(x))}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bzw. $\alpha = -\operatorname{sign}(\varphi(x))$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit der Idee, dass dann in beiden Fällen $\alpha\varphi(x) = -|\varphi(x)|$ ist.

Setzen wir nun in (7.2) speziell $v = u_n \in K$ und $w = u + \varepsilon\alpha x \in U_{2\varepsilon}(u)$ ein, so erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{Re}(\varphi(u_n)) < \operatorname{Re}(\varphi(w)) = \operatorname{Re}(\varphi(u)) + \varepsilon \operatorname{Re}(\alpha\varphi(x)) = \operatorname{Re}(\varphi(u)) - \varepsilon|\varphi(x)|.$$

Das liefert im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ dank der schwachen Konvergenz von (u_n) gegen u den Widerspruch

$$0 < \varepsilon|\varphi(x)| < \operatorname{Re}(\varphi(u)) - \operatorname{Re}(\varphi(u_n)) = \operatorname{Re}(\varphi(u) - \varphi(u_n)) \rightarrow 0.$$

Also ist $u \in \overline{K}$. □

Wir wollen einen Satz beweisen, der die schwache Konvergenz in L^p -Räumen relativ zur punktweisen Konvergenz einordnet. Dazu brauchen wir aber noch ein wenig maßtheoretische Unterstützung in Form des folgenden Resultats.

Satz 7.17 (Egorov). *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, seien messbare Funktionen, so dass (f_n) punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit $\mu(\Omega \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$, so dass (f_n) auf A_ε gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Ein Beweis des Satzes von Egorov findet sich beispielsweise in [SS05, Theorem 4.4].

7 Reflexive Räume

Satz 7.18. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum, $1 < p < \infty$ und $(u_n) \subseteq L^p(\Omega)$ eine beschränkte Folge. Falls (u_n) μ -fast überall gegen ein $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ konvergiert, dann konvergiert (u_n) auch schwach gegen u in $L^p(\Omega)$.*

Beweis. Wir machen zunächst eine maßtheoretische Fingerübung und beweisen die folgende Hilfsaussage: Ist $1 < q < \infty$ und $v \in L^q(\Omega)$, dann existiert für jedes $\tilde{\varepsilon} > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jedes $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \delta$ gilt $\|v\|_{L^q(E)} < \tilde{\varepsilon}$. Zum Beweis sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ gegeben und es sei $g \in L^\infty(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ gewählt mit $\|v - g\|_{L^q(\Omega)} < \tilde{\varepsilon}/2$. (Ein solches g bekommt man beispielsweise dank der Dichtheit der einfachen Funktionen in L^q , vgl. Satz IV.17.12). Mit diesem g gilt

$$\|v\|_{L^q(E)} \leq \|v - g\|_{L^q(\Omega)} + \|g\|_{L^q(E)} \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \mu(E)^{1/q}.$$

Die Wahl von $\delta := (\tilde{\varepsilon}/2\|g\|_{L^\infty(\Omega)})^q$ tut also das gewünschte.

Zum Beginn des eigentlichen Beweises setzen wir $C := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^p(\Omega)}$. Dann folgt aus Fatous Lemma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^p d\mu \leq C^p.$$

Insbesondere ist $u \in L^p(\Omega)$ mit $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C$.

Sei $v \in L^{p'}(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dank der σ -Endlichkeit des Maßraums, finden wir eine disjunkte Folge $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$ von Mengen mit endlichem Maß und mit $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Für diese gilt

$$\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \|v\|_{L^{p'}(A_n)}.$$

Damit ist $\lim_{N \rightarrow \infty} \|v\|_{L^{p'}(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n)} = 0$, d. h. wir finden für großes N ein $A := \bigcup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{A}$ mit endlichem Maß, für das $\|v\|_{L^{p'}(A^c)} < \varepsilon/6C$ gilt.

Für $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon/6C$ und der Funktion v bestimmen wir jetzt ein $\delta > 0$, dessen Existenz uns die obige Hilfsaussage garantiert. Dann wenden wir den Satz von Egorov 7.17 auf dem endlichen Maßraum $(A, \mathcal{A}|_A, \mu|_A)$ an und erhalten eine messbare Menge $A_\varepsilon \subseteq A$ mit $\mu(A \setminus A_\varepsilon) < \delta$, sodass (u_n) auf A_ε gleichmäßig gegen u konvergiert. Unsere Wahl von $\tilde{\varepsilon}$ bedeutet dann, dass $\|v\|_{L^{p'}(A \setminus A_\varepsilon)} < \varepsilon/6C$ gilt.

Nun können wir daran gehen, die schwache Konvergenz von (u_n) gegen u nachzuweisen. Dank der Identifizierung von $(L^p(\Omega))'$ mit $L^{p'}(\Omega)$ müssen wir dazu zeigen, dass für jedes $v \in L^{p'}(\Omega)$ das Integral $\int_{\Omega} u_n v d\mu$ gegen $\int_{\Omega} u v d\mu$ konvergiert. Tatsächlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ dank der disjunkten Zerlegung $\Omega = A^c \cup (A \setminus A_\varepsilon) \cup A_\varepsilon$ und der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} u v d\mu - \int_{\Omega} u_n v d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |u - u_n| |v| d\mu \\ &= \int_{A^c} |u - u_n| |v| d\mu + \int_{A \setminus A_\varepsilon} |u - u_n| |v| d\mu + \int_{A_\varepsilon} |u - u_n| |v| d\mu \end{aligned}$$

7.3 Der Satz von Banach-Alaoglu

$$\begin{aligned}
&\leq \|u - u_n\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(A^c)} + \|u - u_n\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(A \setminus A_\varepsilon)} + \|u - u_n\|_{L^p(A_\varepsilon)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \\
&\leq 2C \|v\|_{L^{p'}(A^c)} + 2C \|v\|_{L^{p'}(A \setminus A_\varepsilon)} + \|u - u_n\|_{L^p(A_\varepsilon)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \|u - u_n\|_{L^p(A_\varepsilon)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Die gleichmäßige Konvergenz von (u_n) gegen u auf A_ε bedeutet, dass wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\|u - u_n\|_{L^p(A_\varepsilon)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \|u - u_n\|_{L^\infty(A_\varepsilon)} \mu(A_\varepsilon)^{1/p} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Insgesamt erhalten wir für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$\left| \int_{\Omega} uv \, d\mu - \int_{\Omega} u_n v \, d\mu \right| < \varepsilon,$$

was die gewünschte schwache Konvergenz beweist. $\square$

7.3 Der Satz von Banach-Alaoglu

Beispiel 7.15 zeigt erfreulicherweise, dass es die schwache Konvergenz tatsächlich vermag aus einer Kompaktheits-Spielverderberfolge, die beschränkt ist, aber keine konvergente Teilfolge besitzt, etwas konvergentes zu machen. Das gibt uns Hoffnung in unserem Unterfangen, einen schwachen Bolzano-Weierstraß-Ersatz zu finden. Dazu führen wir jetzt den schwachen Kompaktheitsbegriff ein, der uns dann den Bolzano-Weierstraß-Ersatz erlauben wird.

Definition 7.19. Sei X ein normierter Raum.

- (a) Eine Menge $M \subseteq X$ heißt schwach folgenkompakt, wenn jede Folge in M eine schwach konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.
- (b) Eine Menge $M \subseteq X'$ heißt schwach-* folgenkompakt, wenn jede Folge in M eine schwach-* konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.

Nun können wir das erste Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren, das uns unserem Ziel sehr nahe bringt.

Satz 7.20 (Banach-Alaoglu). Sei X ein separabler normierter Raum. Dann ist $K_1(0) = \overline{U_1(0)} \subseteq X'$ schwach-* folgenkompakt. Insbesondere hat jede beschränkte Folge in X' eine in X' schwach-* konvergente Teilfolge.

Beweis. Da X separabel ist, gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ von X . Sei nun (φ_k) eine Folge in $K_1(0) \subseteq X'$. Dann gilt für alle $n, k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$|\varphi_k(u_n)| \leq \|\varphi_k\|_{X'} \|u_n\|_X \leq \|u_n\|_X, \quad (7.3)$$

7 Reflexive Räume

womit $(\varphi_k(u_n))_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ ist. Mit dem Cantorschen Diagonalfolgen-Argument können wir eine Teilfolge $(\varphi_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ von (φ_k) extrahieren, für welche der Grenzwert $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{k_j}(u_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert. Wir zeigen nun, dass die Folge $(\varphi_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ schwach-* konvergiert. Dazu setzen wir $U := \text{span}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})$ und definieren auf U das lineare Funktional

$$\psi(u) := \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{k_j}(u), \quad u \in U.$$

Wie in der Abschätzung (7.3) folgt, da $\|\varphi_{k_j}\|_{X'} \leq 1$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt,

$$|\psi(u)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\varphi_{k_j}(u)| \leq \|u\|_X, \quad u \in U,$$

und da U dicht in X liegt, besitzt ψ nach Satz 4.5 eine eindeutige stetige Fortsetzung $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\|_{X'} \leq 1$.

Damit ist $(\varphi_{k_j})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq X'$ eine gleichmäßig beschränkte Operatorfolge und es gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{k_j}(u) = \varphi(u)$ für alle $u \in U$. Satz 4.6 liefert dann, dass $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{k_j}(u) = \varphi(u)$ sogar für alle $u \in X$ gilt. Das bedeutet aber gerade, dass die Folge $(\varphi_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ schwach-* gegen $\varphi \in K_1(0) \subseteq X'$ konvergiert.

Wir beweisen noch den Zusatz. Ist (φ_n) eine beschränkte Folge in X' mit $\|\varphi_n\|_{X'} \leq C$ für ein $C > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\tilde{\varphi}_n := \varphi_n/C$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in $K_1(0) \subseteq X'$. Nach dem eben gezeigten gibt es also eine schwach-* konvergente Teilfolge $(\tilde{\varphi}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit einem Grenzelement $\tilde{\varphi}_0 \in X'$. Die entsprechende Teilfolge $(\varphi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (φ_n) konvergiert dann schwach-* gegen $C\tilde{\varphi}_0$. $\square$

Dieser Satz hat noch zwei Nachteile. Erstens sagt er nur etwas über den Dualraum X' aus und nicht über X selbst. (Und bevor jemand es laut denkt: Nein, nicht jeder Banachraum ist Dualraum von irgendwas.) Zweitens haben wir die unschöne Separabilitätsbedingung. Das lösen wir jetzt und bezahlen dafür den Preis der Reflexivität.

Theorem 7.21. *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist $K_1(0) = \overline{U_1(0)} \subseteq X$ schwach folgenkompakt. Insbesondere hat jede beschränkte Folge in X eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $(u_n) \subseteq K_1(0) \subseteq X$. Wir definieren den abgeschlossenen Unterraum

$$U := \overline{\text{span}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})},$$

von X , welcher nach Satz 7.8 (b) auch reflexiv ist. Damit ist U zu U'' isomorph und da U nach Konstruktion separabel ist, sind damit U und U'' separabel. Nach Satz 4.13 ist somit auch U' separabel, womit wir in der Lage sind Satz 7.20 auf U' anzuwenden.

Dazu betrachten wir die Folge $(j_U u_n) \in U''$. Da j_U eine Isometrie ist, liegt diese in der abgeschlossenen Einheitskugel von $U'' = (U')'$. Nach Satz 7.20 gibt es also eine

7.3 Der Satz von Banach-Alaoglu

Teilfolge $(j_U u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(j_U u_n)$ und ein $u'' \in U''$ mit $j_U u_{n_k} \xrightarrow{*} u''$ in U'' . Da j_U surjektiv ist, können wir $u'' = j_U u$ für ein geeignetes $u \in U$ schreiben und erhalten für alle $\varphi \in U'$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(u_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (j_U u_{n_k})(\varphi) = u''(\varphi) = (j_U u)(\varphi) = \varphi(u).$$

Da aber alle $u_n, u \in U$ liegen, folgt sogar für alle $\varphi \in X'$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(u_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi|_U(u_{n_k}) = \varphi|_U(u) = \varphi(u).$$

Also konvergiert $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ schwach gegen u in X und wir haben gezeigt, dass $K_1(0)$ schwach folgenkompakt ist. Der Nachweis der zweiten Aussage geht nun wie im Beweis des Satzes von Banach-Alaoglu 7.20. $\square$

Dieser Satz ist in vielen Anwendungen der Funktionalanalysis von großer Bedeutung, da er einen Grenzwert-Kandidaten liefert. Kann man beispielsweise einem numerischen Verfahren zur Approximation der Lösung einer Differentialgleichung nachweisen, dass die Normen der Approximanten in H^1 beschränkt bleiben, so gibt es zumindest mal einen schwachen Grenzwert in H^1 , den man dann in der Hand hat, um vielleicht in einem zweiten Schritt doch starke Konvergenz beispielsweise in L^2 zu zeigen.

Hier soll die Stärke des Satzes an einer für die Funktionalanalysis wichtigen Folgerung demonstriert werden, indem wir zeigen, dass die Reflexivität eines normierten Raums es erlaubt, eine Version des Projektionssatzes 1.6 für normierte Räume zu beweisen.

Satz 7.22. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $K \subseteq X$ nicht-leer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es für jedes $u \in X$ ein $v \in K$ mit $\|u - v\|_X = \text{dist}(u, K)$.*

Man beachte, dass, im Gegensatz zum Hilbertraum-Resultat, der Punkt der Bestapproximation v hier im Allgemeinen nicht eindeutig ist. Das gilt nur unter weiteren geometrische Annahmen.

Beweis. Wir setzen $d := \text{dist}(u, K)$. Per Definition der Distanz finden wir eine Folge $(v_n) \subseteq K$ mit $d \leq \|u - v_n\|_X \leq d + 1/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $\|v_n\|_X \leq \|u\|_X + d + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (v_n) ist eine beschränkte Folge in X . Aufgrund der Reflexivität von X gibt es dank Theorem 7.21 ein $v \in X$ und eine Teilfolge $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (v_n) mit $v_{n_k} \rightharpoonup v$ in X für $k \rightarrow \infty$. Da K abgeschlossen und konvex ist, folgt aus dem Satz von Mazur 7.16 auch $v \in K$. Außerdem gilt auch $u - v_{n_k} \rightharpoonup u - v$, so dass mit Lemma 7.14 (b) folgt

$$d \leq \|u - v\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u - v_{n_k}\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (d + 1/n_k) = d.$$

Damit ist $\|u - v\|_X = d$, womit v die gewünschten Eigenschaften hat. $\square$

Eine natürliche Frage ist es, ob es brauchbare Kriterien für die Reflexivität von Banachräumen gibt, die es einem ersparen den Dualraum und den Bidualraum komplett

7 Reflexive Räume

auszuixen. Davon gibt es einige, aber die meisten haben sehr tiefliegende Beweise. Deshalb präsentieren wir hier mit dem Satz von Milman-Pettis eines der schönsten Kriterien, dafür aber ohne Beweis. Dafür benötigen wir das geometrische Konzept der gleichmäßigen Konvexität.

Definition 7.23. *Ein normierter Raum heißt gleichmäßig konvex, falls es zu jedem $\varepsilon \in (0, 2)$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $u, v \in X$ mit $\|u\|_X, \|v\|_X \leq 1$ und $\|u - v\|_X \geq \varepsilon$ stets $\|(u+v)/2\|_X \leq 1 - \delta$ gilt.*

Satz 7.24 (Milman-Pettis). *Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum ist reflexiv.*

Der Beweis benötigt tief liegende Aussagen über schwache Topologien, welche nicht in dieser Vorlesung behandelt werden können. Wir verweisen auf [Yos80, Seiten 126–127].

8 Kompakte Operatoren

In der Analysis II haben wir gesehen, dass jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{K}^d$ kompakt ist, insbesondere also die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0) = \overline{U_1(0)}$. Die Frage ist nun, ob die Kompaktheit der abgeschlossenen Einheitskugel eines beliebigen normierten Raums sogar impliziert, dass dieser endlich-dimensional sein muss. Die Antwort auf diese Frage ist „Ja!“ und der entsprechende Satz ist die erste Hauptaussage dieses Kapitels. Wir benötigen dazu folgendes Hilfsresultat.

Lemma 8.1 (Riesz). *Sei X ein normierter Raum und U ein echter abgeschlossener Teilraum von X . Dann gibt es zu jedem $\eta \in (0, 1)$ ein $v \in X \setminus U$ mit $\|v\|_X = 1$ und $\|u - v\|_X \geq \eta$ für alle $u \in U$.*

Bemerkung 8.2. Das Lemma von Riesz wird oftmals „Lemma von der Fast-Senkrechten“ genannt. Diese Bezeichnung ist durch den Hilbertraum-Fall motiviert, in welchem sogar für jedes normierte $v \in U^\perp$ und alle $u \in U$ gilt:

$$\|u - v\|_H^2 = \|u\|_H^2 - 2 \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle_H) + \|v\|_H^2 = \|u\|_H^2 + 0 + 1 \geq 1.$$

Beweis von Lemma 8.1. Sei $\eta \in (0, 1)$ gegeben. Wir wählen zunächst ein beliebiges $\tilde{v} \in X \setminus U$. Da U abgeschlossen ist, ist $X \setminus U$ offen und insbesondere ist $\operatorname{dist}(\tilde{v}, U) > 0$. Per Definition der Distanz finden wir nun ein $w \in U$ mit $0 < \|\tilde{v} - w\|_X \leq \operatorname{dist}(\tilde{v}, U)/\eta$. Wir setzen

$$v := \frac{\tilde{v} - w}{\|\tilde{v} - w\|_X}.$$

Dann gilt offenbar $\|v\|_X = 1$ und für alle $u \in U$ ist

$$\|v - u\|_X = \frac{1}{\|\tilde{v} - w\|_X} \left\| \tilde{v} - w - \underbrace{\|\tilde{v} - w\|_X u}_{\in U} \right\|_X \geq \frac{\operatorname{dist}(\tilde{v}, U)}{\|\tilde{v} - w\|_X} \geq \eta.$$

Damit hat v die gewünschte Eigenschaft und wir sind fertig. $\square$

Für die weiteren Betrachtungen lohnt es sich ins Gedächtnis zurückzurufen, dass nach Satz II.7.6 aus der Analysis II eine Menge $K \subseteq Y$ genau dann kompakt ist, wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt. Das werden wir im folgenden mehrfach verwenden.

8 Kompakte Operatoren

Satz 8.3. *Sei X ein normierter Raum. Dann ist $K_1(0) \subseteq X$ genau dann kompakt, wenn X endlich-dimensional ist.*

Beweis. Falls $\dim(X) = d < \infty$ gilt, so ist X isomorph zu $\mathbb{K}^d$ und wir wissen bereits aus der Analysis II, dass $K_1(0)$ kompakt ist.

Sei also X unendlich-dimensional. Entsprechend der Erinnerung direkt vor diesem Satz ist es unser Ziel eine Folge $(u_n) \subseteq K_1(0)$ zu konstruieren, welche keine in X konvergente Teilfolge besitzt.

Wir wählen ein $u_1 \in X$ mit $\|u_1\|_X = 1$ und setzen $U_1 := \text{span}(\{u_1\})$. Dann ist U_1 ein echter abgeschlossener Teilraum von X . Nach dem Lemma von Riesz 8.1 finden wir ein $u_2 \in X \setminus U_1$ mit $\|u_2\|_X = 1$ und $\|u_2 - v\|_X \geq 1/2$ für alle $v \in U_1$. Insbesondere gilt $\|u_2 - u_1\|_X \geq 1/2$. Für $n \geq 2$ setzen wir induktiv $U_n := \text{span}(\{u_1, \dots, u_n\})$ und finden ein normiertes $u_{n+1} \in X \setminus U_n$ mit $\|u_{n+1} - v\|_X \geq 1/2$ für alle $v \in U_n$. Auf diese Weise wird (u_n) eine Folge in $K_1(0)$ mit $\|u_n - u_m\|_X \geq 1/2$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Damit kann (u_n) keine in X konvergente Teilfolge haben. $\square$

Kompaktheit ist eine tolle Eigenschaft. Dass sie in unendlich-dimensionalen Räumen nicht mehr so billig über Beschränktheit zu bekommen ist, ist mühsam, aber macht sie eigentlich nur noch wertvoller. Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit einer besonders schönen Klasse von Operatoren beschäftigen, die uns Kompaktheit schenken, in dem Sinne, dass sie beschränkte Mengen nicht nur auf beschränkte Mengen abbilden, wie das jede beschränkte lineare Abbildung tut, sondern sogar in eine kompakte Menge. Es stellt sich heraus, dass diese Operatoren einige schöne Eigenschaften haben. Deshalb bekommen sie zunächst einen Namen.

Definition 8.4. *Seien X, Y zwei normierte Räume. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt kompakt, falls $\overline{T(U_1(0))}$ in Y kompakt ist. Mit $\mathcal{K}(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge aller kompakten Operatoren von X nach Y mit der üblichen Abkürzung $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X)$.*

Wir geben ein paar elementare Charakterisierungen für Kompaktheit an.

Satz 8.5. *Es seien X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *T ist kompakt.*
- (b) *Für jede beschränkte Teilmenge B von X ist $\overline{T(B)}$ kompakt.*
- (c) *Für jede beschränkte Folge (u_n) in X hat (Tu_n) eine in Y konvergente Teilfolge.*

Beweis. Von (c) nach (b): Sei $B \subseteq X$ beschränkt und $(v_n) \subseteq \overline{T(B)}$ eine Folge. Dann gibt es für alle $n, m \in \mathbb{N}$ ein $u_{m,n} \in B$ mit $\|v_n - Tu_{m,n}\|_Y \leq 1/m$. Wir betrachten nun die Diagonalfolge $(w_n) := (u_{n,n})$. Diese liegt in B , ist also eine beschränkte Folge in X . Nach (c) hat also (Tw_n) eine in Y konvergente Teilfolge $(Tw_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Wir zeigen nun, dass die entsprechende Teilfolge $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in Y konvergiert und geben dafür ein $\varepsilon > 0$

vor. Wegen der Konvergenz von $(Tw_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|Tw_{n_k} - Tw_{n_j}\|_Y < \varepsilon/3$ für alle $k, j \geq N$. Außerdem können wir N auch gleich so groß wählen, dass $1/N \leq \varepsilon/3$ gilt. Damit ist für alle $k, j \geq N$

$$\begin{aligned} \|v_{n_k} - v_{n_j}\|_Y &\leq \|v_{n_k} - Tw_{n_k}\|_Y + \|Tw_{n_k} - Tw_{n_j}\|_Y + \|Tw_{n_j} - v_{n_j}\|_Y \\ &< \frac{1}{n_k} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n_j} \leq \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da Y vollständig ist, konvergiert damit $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in Y und $\overline{T(B)}$ ist kompakt.

Von (b) nach (a): Es genügt $B := U_1(0)$ zu wählen.

Von (a) nach (c): Sei $(u_n) \subseteq X$ eine beschränkte Folge und wähle $C > 0$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_X \leq C$. Dann ist $(v_n) := (u_n/2C) \subseteq U_1(0)$ und nach Voraussetzung existiert eine Teilfolge $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (v_n) , so dass $(Tv_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in Y konvergiert. Dann konvergiert aber auch $(Tu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (2CTv_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in Y , also gilt (c). $\square$

Übungsaufgabe 8.6. Seien X, Y normierte Räume. Zeigen Sie:

- (a) $\mathcal{K}(X, Y)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}(X, Y)$.
- (b) Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\dim(\text{ran}(T)) < \infty$, so ist T kompakt.

Satz 8.7. Es seien X, Y, Z normierte Räume. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Wenn Y ein Banachraum ist, dann ist $\mathcal{K}(X, Y)$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{L}(X, Y)$, also auch ein Banachraum.
- (b) Seien $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Falls T oder S kompakt ist, dann ist auch ST kompakt.

Diese Resultate sind vor allem praktisch, weil sie zeigen wie Kompaktheit an andere Operatoren „weitergegeben“ wird: Konvergiert eine Folge von kompakten Operatoren in $\mathcal{L}(X, Y)$, so ist der Grenzoperator ebenfalls kompakt und bei der Hintereinanderausführung von stetigen Operatoren reicht es, wenn einer der verketteten Operatoren kompakt ist, um das ganze Ding kompakt zu machen. Die letztere Eigenschaft kann man für Freunde von algebraischen Formulierungen im Fall $X = Y = Z$ auch so formulieren: $\mathcal{K}(X)$ ist ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal der Algebra $\mathcal{L}(X)$.

Beweis. (a) Nach Übungsaufgabe 8.6 (a) bleibt die Abgeschlossenheit zu zeigen. Sei dazu $(T_n) \subseteq \mathcal{K}(X, Y)$ eine Folge, die gegen T in $\mathcal{L}(X, Y)$ konvergiert. Um zu zeigen, dass T kompakt ist, benutzen wir die Charakterisierung aus Satz 8.5 (c). Sei $(u_k) \subseteq X$ eine beschränkte Folge und $C \geq 0$ so, dass $\|u_k\|_X \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Da T_1 kompakt ist, besitzt $(T_1 u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(Tu_j^{(1)})$. Da auch $(u_j^{(1)})$ als Teilfolge von (u_k) beschränkt und T_2 kompakt ist, kann man wiederum eine Teilfolge $(u_j^{(2)})$ von $(u_j^{(1)})$ finden, so dass $(T_2 u_j^{(2)})$ konvergiert.

8 Kompakte Operatoren

Iterativ findet man so für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(u_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}}$ und mit dem üblichen Diagonalfolgentrick finden wir die Teilfolge $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}} = (u_j^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ von (u_k) , für die $(T_n u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ in Y konvergiert.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da (T_n) gegen T in $\mathcal{L}(X, Y)$ konvergiert, finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|T - T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \varepsilon/3C$. Für dieses n konvergiert die Folge $(T_n u_{k_j})_j$ in Y , also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n u_{k_j} - T_n u_{k_\ell}\|_Y < \varepsilon/3$ für alle $j, \ell \geq N$. Es folgt für alle $j, \ell \geq N$

$$\begin{aligned} \|T u_{k_j} - T u_{k_\ell}\|_Y &\leq \|T u_{k_j} - T_n u_{k_j}\|_Y + \|T_n u_{k_j} - T_n u_{k_\ell}\|_Y + \|T_n u_{k_\ell} - T u_{k_\ell}\|_Y \\ &\leq 2C\|T - T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} + \|T_n u_{k_j} - T_n u_{k_\ell}\|_Y \\ &\leq 2C \frac{\varepsilon}{3C} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $(T u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y . Da Y vollständig ist, konvergiert diese Folge auch in Y . Also ist T kompakt.

- (b) Sei (u_n) eine beschränkte Folge in X . Wir betrachten zunächst den Fall, dass T kompakt ist. Dann besitzt nach Satz 8.5 die Folge $(T u_n)$ eine in Y konvergente Teilfolge $(T u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und dank der Stetigkeit von S konvergiert dann auch die Folge $(S T u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in Z . Also hat $(S T u_n)$ eine konvergente Teilfolge und nach Satz 8.5 ist ST kompakt.

Ist dagegen S kompakt, so ist dank der Beschränktheit von T die Folge $(T u_n)$ eine beschränkte Folge in Y , woraus dank der Kompaktheit von S folgt, dass $(S T u_n) = (S(T u_n))$ eine konvergente Teilfolge in Z hat. Das liefert genauso wieder die Kompaktheit von ST . $\square$

Korollar 8.8. Sind X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\dim(\text{ran}(T_n)) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, so dass (T_n) in $\mathcal{L}(X, Y)$ gegen T konvergiert, so ist T kompakt.

Beweis. Nach Übungsaufgabe 8.6 (b) sind alle T_n kompakte Operatoren, so dass die Kompaktheit von T sofort aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}(X, Y)$ folgt. $\square$

Bemerkung 8.9. In Hilberträumen gilt auch die Umkehrung von Korollar 8.8: Ist T ein kompakter Operator zwischen zwei Hilberträumen, so existiert eine Folge von Operatoren mit endlichdimensionalem Bild, die gegen T konvergieren und das können Sie auch mit den Mitteln dieser Vorlesung zeigen.

Ob das auch für Banachräume gilt, war lange Zeit eine offene Frage, die erst 1973 von Per Enflo beantwortet werden konnte: Nein, es gibt kompakte Operatoren auf Banachräumen, die keine Grenzwerte von Operatoren mit endlichdimensionalem Bild sind. (Letzteres sei hingegen eher nicht als Übungsaufgabe empfohlen. . .)

Beispiel 8.10. Zusätzlich zu den schon benannten Operatoren mit endlich-dimensionalem Bild, betrachten wir hier weitere Beispiele von kompakten Operatoren.

(a) Sei $k \in C([0, 1]^2)$. Der *Fredholmsche Integraloperator*

$$(Tu)(x) := \int_0^1 k(x, y)u(y) \, dy, \quad u \in C([0, 1]), x \in [0, 1],$$

ist kompakt als Operator von $C([0, 1])$ nach $C([0, 1])$. Zum Nachweis dieser Aussage zeigen wir die relative Kompaktheit von $T(U_1(0))$ mit Hilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli, d. h. wir weisen Beschränktheit und gleichgradige Stetigkeit nach.

Sei dazu $u \in C([0, 1])$ mit $\|u\|_\infty < 1$. Dann gilt für alle $x \in [0, 1]$

$$|Tu(x)| = \left| \int_0^1 k(x, y)u(y) \, dy \right| \leq \int_0^1 |k(x, y)||u(y)| \, dy \leq \|k\|_\infty \|u\|_\infty \leq \|k\|_\infty.$$

Also ist $\|Tu\|_\infty \leq \|k\|_\infty$ für alle $u \in U_1(0)$ und das bedeutet, dass $T(U_1(0))$ eine in $C([0, 1])$ beschränkte Menge ist.

Für die gleichgradige Stetigkeit geben wir ein $\varepsilon > 0$ vor und stellen zunächst fest, dass die stetige Funktion k auf der kompakten Menge $[0, 1]^2$ sogar gleichmäßig stetig ist. D. h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y, z \in [0, 1]$ mit $|x - z| < \delta$ gilt $|k(x, y) - k(z, y)| < \varepsilon$. Seien nun $u \in C([0, 1])$ mit $\|u\|_\infty < 1$ und $x, z \in [0, 1]$ mit $|x - z| < \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |Tu(x) - Tu(z)| &= \left| \int_0^1 (k(x, y) - k(z, y))u(y) \, dy \right| \\ &\leq \|u\|_\infty \int_0^1 |k(x, y) - k(z, y)| \, dy < \varepsilon \end{aligned}$$

und da die obige Wahl von δ weder von der Wahl von x, z noch von u abhängt, haben wir gleichgradige Stetigkeit von $T(U_1(0))$ gezeigt. Der Satz von Arzelà-Ascoli sagt nun, dass $T(U_1(0))$ relativ kompakt ist, d. h. $\overline{T_1(0)}$ ist kompakt und damit ist die Kompaktheit dieses Integraloperators gezeigt.

(b) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Wir haben in Kapitel 3 die stetige Einbettung $H^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$ des Sobolew-Raums $H^1(I)$ nach $L^2(I)$ gefunden, von der wir nun zeigen wollen, dass sie sogar kompakt ist, d. h., dass die Inklusionsabbildung $j : H^1(I) \rightarrow L^2(I)$ kompakt ist. Dazu zeigen wir, dass sogar die im Folgenden durch j_* notierte Einbettung $H^1(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ kompakt ist. Die Kompaktheit von j folgt dann aus der Verkettung von j_* mit der stetigen Einbettung $C(\bar{I}) \hookrightarrow L^2(I)$ (I ist beschränkt!) und Satz 8.7 (b).

Der Satz 3.11 beinhaltet genau die Stetigkeit der Einbettung $H^1(I) \hookrightarrow C^{1/2}(\bar{I})$, die uns ein $C \geq 0$ liefert, so dass für jedes $u \in H^1(I)$ gilt

$$\|j_*u\|_\infty \leq \|j_*u\|_{C^{1/2}(\bar{I})} \leq C\|u\|_{H^1(I)}.$$

8 Kompakte Operatoren

Das liefert sofort, dass $\overline{j_*(U_1(0))}$ eine in $C(\bar{I})$ beschränkte Menge ist. Um sicherzustellen, dass $\overline{j_*(U_1(0))}$ sogar kompakt in $C(\bar{I})$ ist, reicht es wegen Arzelà-Ascoli wieder aus die gleichgradige Stetigkeit nachzuweisen. Seien dazu $u \in H^1(I)$ mit $\|u\|_{H^1(I)} < 1$ und $x, y \in \bar{I}$. Dann gilt mit der Hölder-Stetigkeit von u

$$|(j_*u)(x) - (j_*u)(y)| = |u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{1/2}.$$

Setzt man für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ also $\delta := \varepsilon^2/C^2$ unabhängig von x, y und u , so gilt für alle $x, y \in \bar{I}$ mit $|x - y| < \delta$ auch $|(j_*u)(x) - (j_*u)(y)| < \varepsilon$ und wir haben gleichgradige Stetigkeit gezeigt. Damit sind die Einbettungen $H^1(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ und $H^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$ kompakt.

(c) Für $0 < \alpha < \beta < 1$ ist die Einbettung $C^\beta(\bar{I}) \hookrightarrow C^\alpha(\bar{I})$ kompakt (Übung).

Zum Abschluss zeigen wir ein wichtiges Resultat, das u. a. zeigt, dass Kompaktheit bei der Adjungierten-Bildung erhalten bleibt.

Satz 8.11 (Schauder). *Seien X, Y zwei Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist T genau dann kompakt, wenn T' kompakt ist.*

Auch der Beweis dieses Satzes fußt zentral auf dem Satz von Arzelà-Ascoli. Allerdings benötigen wir ihn hier für stetige Funktionen auf einer kompakten Teilmenge von Y . Damit entsteht eine kleine Lücke, denn sein Beweis als Theorem III.4.5 im Skript zur Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen ist für den Spezialfall eines kompakten Intervalls in $\mathbb{R}$ aufgeschrieben. Dieser lässt sich aber ohne größere Schwierigkeiten auf den hier benötigten Fall verallgemeinern, wenn man sich klarmacht, dass jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums separabel ist.

Beweis. Sei zunächst T kompakt. Per Definition ist dann $K := \overline{T(U_1(0))} \subseteq Y$ kompakt. Wir müssen zeigen, dass das Bild der offenen Einheitskugel von Y' unter T' relativ kompakt in X' ist. Dazu nehmen wir uns eine Folge $(\varphi_n) \subseteq Y'$ mit $\|\varphi_n\|_{Y'} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und betrachten die Einschränkungen von φ_n auf K . Wegen

$$|\varphi_n(u) - \varphi_n(v)| = |\varphi_n(u - v)| \leq \|\varphi_n\|_{Y'} \|u - v\|_Y \leq \|u - v\|_Y, \quad u, v \in K,$$

ist $(\varphi_n|_K)$ eine Folge gleichgradig stetiger und punktweise beschränkter Funktionen auf der kompakten Menge K . Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli hat $(\varphi_n|_K)$ eine in $C(K)$ konvergente Teilfolge $(\varphi_{n_k}|_K)_{k \in \mathbb{N}}$. Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass $(T'\varphi_{n_k})$ in X' konvergiert, woraus dann die Kompaktheit von T' folgt. Da X' vollständig ist, genügt es dafür zu zeigen, dass eine Cauchyfolge vorliegt. Dazu berechnen wir für $k, \ell \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|T'\varphi_{n_k} - T'\varphi_{n_\ell}\|_{X'} &= \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X=1}} |(T'\varphi_{n_k} - T'\varphi_{n_\ell})(u)| = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X=1}} |T'(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_\ell})(u)| \\ &= \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|_X=1}} |(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_\ell})(Tu)| \stackrel{Tu \in K}{\leq} \sup_{v \in K} |(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_\ell})(v)| \\ &= \|\varphi_{n_k} - \varphi_{n_\ell}\|_{C(K)} \end{aligned}$$

und schließen aus der Konvergenz von (φ_{n_k}) in $C(K)$ auf die Cauchy-Eigenschaft der Folge $(T'\varphi_{n_k}) \subseteq X'$.

Sei nun $T' : Y' \rightarrow X'$ kompakt. Dann wissen wir aus dem ersten Teil des Beweises, dass auch $T'' : X'' \rightarrow Y''$ kompakt ist. Folglich ist nach Satz 8.7 (b) auch $T'' \circ j_X$ als Verkettung eines kompakten Operators mit einem stetigen Operator kompakt und da dieser Operator nach Bemerkung 7.6 (b) mit $j_Y \circ T$ übereinstimmt, ist wiederum dieser kompakt.

Sei nun (u_n) eine beschränkte Folge in X . Dann hat $(j_Y Tu_n)$ eine in Y'' konvergente Teilfolge $(j_Y Tu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Da j_Y eine Isometrie ist, gilt für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$

$$\|Tu_{n_k} - Tu_{n_\ell}\|_Y = \|j_Y Tu_{n_k} - j_Y Tu_{n_\ell}\|_{Y''},$$

also ist mit der Konvergenz von $(j_Y Tu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in Y'' auch $(Tu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y und wegen der Vollständigkeit von Y haben wir damit eine konvergente Teilfolge von (Tu_n) gefunden. Also ist T kompakt. $\square$

9 Das Bochner-Integral

In der Integrationstheorie haben wir uns bei der Entwicklung des Integrals vor allem auf möglichst allgemeine Definitionsbereiche der betrachteten Funktionen fokussiert, der Zielbereich war eigentlich immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Jetzt drehen wir das um und wollen uns anschauen, wie wir unser Lebesgue-Integral so erweitern können, dass eine vernünftige Integration von Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow X$ mit einem beliebigen Banachraum X möglich wird. Der Fokus liegt also darauf, den Zielbereich der Funktion zu verallgemeinern.

Im ganzen Kapitel seien X und Y Banachräume über $\mathbb{K}$.

9.1 Messbare Funktionen

Als erstes definieren wir einfache Funktionen und ein erstes Konzept von Messbarkeit für X -wertige Funktionen.

Definition 9.1. (a) *Ein $f : \mathbb{R}^d \rightarrow X$ heißt einfache Funktion, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$, endlich viele disjunkte Lebesgue-messbare Mengen $E_1, E_2, \dots, E_N \subseteq \mathbb{R}^d$ mit endlichem Lebesgue-Maß und Vektoren $u_1, u_2, \dots, u_N \in X$ gibt mit*

$$f = \sum_{n=1}^N u_n \cdot \mathbf{1}_{E_n}.$$

(b) *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow X$ ist stark messbar, wenn es eine Folge von einfachen Funktionen gibt, die fast überall gegen f konvergiert.*

Wir sammeln Klassen von stark messbaren Funktionen und Operationen unter denen die starke Messbarkeit erhalten bleibt.

Satz 9.2. (a) *Jede stetige Funktion von $\mathbb{R}^d$ nach X ist stark messbar.*

(b) *Ist $u \in X$ fest und $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ messbar, so ist $f := u \cdot g$ stark messbar.*

(c) *Ist $f : \mathbb{R}^d \rightarrow X$ stark messbar und $G : X \rightarrow Y$ stetig, so ist auch $G \circ f : \mathbb{R}^d \rightarrow Y$ stark messbar. Insbesondere ist $\|f\|_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (Lebesgue-)messbar.*

(d) *Sind $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow X$ stark messbar und $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist auch $\lambda f + g$ stark messbar.*

9 Das Bochner-Integral

Beweis. (a) Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow X$ stetig. Auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ kann f gleichmäßig durch einfache Funktionen approximiert werden, vgl. das Argument im dritten Schritt vom Beweis des Darstellungssatzes von Riesz 5.25. Also kann f auf ganz $\mathbb{R}^d$ zumindest punktweise durch einfache Funktionen angenähert werden und ist damit stark messbar.

(b) Man approximiert g durch skalare einfache Funktionen $s_n, n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Funktionen $u \cdot s_n$ einfache Funktionen mit Werten in X , die f annähern.

(c) Ist (s_n) eine Folge von X -wertigen einfachen Funktionen, die punktweise fast überall gegen f konvergiert, so ist $(G \circ s_n)$ eine Folge von Y -wertigen einfachen Funktionen, die punktweise fast überall gegen $G \circ f$ konvergiert. Also ist auch diese Funktion stark messbar.

Nimmt man als G speziell die stetige Normabbildung $\|\cdot\|_X : X \rightarrow \mathbb{R}$, so folgt, dass $\|f\|_X$ als Funktion von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$ stark messbar und damit auch (Lebesgue-)messbar ist.

(d) Sind (s_n) bzw. (t_n) Folgen von X -wertigen einfachen Funktionen, die gegen f bzw. g konvergieren, so konvergieren die einfachen Funktionen $\lambda s_n + t_n$ gegen $\lambda f + g$. $\square$

Bemerkung 9.3. Im Fall $X = \mathbb{K}$ fallen starke Messbarkeit und Lebesgue-Messbarkeit zusammen, so dass sich die Frage stellt, warum man nicht die „übliche“ Definition über Urbilder von Borel-Mengen verallgemeinert. Das liegt daran, dass ein allgemeiner Banachraum und seine Borel- σ -Algebra zu „groß“ werden können. Die folgende Beobachtung kann ein Gefühl für dieses Problem vermitteln.

Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow X$ stark messbar und (f_n) eine Folge von einfachen Funktionen, die außerhalb einer geeigneten Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ punktweise gegen f konvergiert. Dann gilt

$$f(\mathbb{R}^d \setminus N) \subseteq \overline{\text{span}\{f_n(\mathbb{R}^d) : n \in \mathbb{N}\}} =: V,$$

wobei per Konstruktion V ein separabler Teilraum von X ist. Das zeigt, dass eine stark messbare Funktion, zumindest fast überall, nur Werte in einem höchstens separablen Teilraum von X annehmen kann. Ist nun X selbst nicht separabel, ist damit starke Messbarkeit eine stärkere Einschränkung als nur die Bedingung über die Urbilder. Andersherum formuliert: Würde man Messbarkeit über die Urbilder definieren, so gibt es keine Hoffnung, dass man im Allgemeinen daraus eine Approximierbarkeit durch einfache Funktionen folgern kann. Diese ist aber für den Aufbau des Integrals von fundamentaler Bedeutung. Deshalb ist die hier eingeführte starke Messbarkeit der „richtige“ Messbarkeitsbegriff für die Einführung des Bochner-Integrals. Nicht-separable Banachräume gibt es, wie wir schon gesehen haben durchaus, beispielsweise ℓ^∞ , $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ oder $\mathcal{L}(H)$ für jeden unendlich-dimensionalen Hilbertraum H .

Wir geben unserer so gefundenen notwendigen Bedingung für starke Messbarkeit erst einmal ihren Namen und schauen dann, was wir damit anfangen können.

Definition 9.4. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^d \rightarrow X$ ist fast separabel-wertig, wenn es eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt, so dass $f(\mathbb{R}^d \setminus N)$ in einem abgeschlossenen separablen Teilraum von X enthalten ist.

Satz 9.2 (c) zeigt, dass stark messbare Funktionen auch die folgende Eigenschaft haben.

Definition 9.5. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^d \rightarrow X$ heißt schwach messbar, wenn für jedes $\varphi \in X'$ die Funktion $\varphi \circ f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ Lebesgue-messbar ist.

Dieser Begriff ist hilfreich, da er über die Anwendung des Funktional die Messbarkeitsfragen wieder auf die gewohnte Lebesgue-Messbarkeit zurückspielt. Das folgende Theorem verbindet alle diese Begriffe in einer sehr angenehmen Weise.

Theorem 9.6 (Pettis). Eine Funktion $f: \mathbb{R}^d \rightarrow X$ ist genau dann stark messbar, wenn sie schwach messbar und fast separabel-wertig ist. Insbesondere sind starke und schwache Messbarkeit in separablen Banachräumen äquivalent.

Beweis. Nach den obigen Betrachtungen ist nur noch eine Beweisrichtung zu zeigen, nämlich dass schwache Messbarkeit zusammen mit der Eigenschaft fast separabel-wertig die starke Messbarkeit impliziert. Sei also f eine schwach messbare und fast separabel-wertige Funktion und seien $N \subseteq \mathbb{R}^d$ und $V \subseteq X$ eine passende Nullmenge und ein abgeschlossener, separabler Teilraum von X , so dass $f(\mathbb{R}^d \setminus N) \subseteq V$ gilt. Schließlich sei $(v_n) \subseteq V$ eine dichte Folge.

Zu Beginn überlegen wir uns, dass für jedes $v \in V$ die Funktion $\|f - v\|_X: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ messbar ist: Nach Lemma 4.23 existiert eine normierende Folge (φ_n) für V , insbesondere gilt also für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$

$$\|f(x) - v\|_X = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(f(x) - v)|.$$

Da f schwach messbar ist, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $|\varphi_n(f - v)| = |\varphi_n \circ f - \varphi_n(v)|$ eine Lebesgue-messbare Funktion und $\|f - v\|_X$ ist als Supremum von messbaren Funktionen messbar.

Jetzt definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die „optimale Wahl“-Funktion

$$\Phi_n: V \rightarrow \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V,$$

indem wir $\Phi_n(v)$ als das Element in $\{v_1, \dots, v_n\}$ mit dem kleinsten Index wählen, sodass

$$\|v - \Phi_n(v)\|_X = \min_{1 \leq k \leq n} \|v - v_k\|_X$$

9 Das Bochner-Integral

gilt. Die Dichtheit der Folge (v_n) impliziert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(v) = v, \quad v \in V.$$

Folglich konvergieren die Funktionen $f_n := \mathbf{1}_{U_n(0)} \cdot (\Phi_n \circ f)$, $n \in \mathbb{N}$, punktweise auf $\mathbb{R}^d \setminus N$ gegen f . Es bleibt noch zu zeigen, dass jedes f_n eine einfache Funktion ist.

Dazu schreiben wir f_n um als

$$f_n = \sum_{1 \leq k \leq n} v_k \cdot \mathbf{1}_{E_{k,n}}$$

mit Mengen

$$E_{k,n} := \left\{ t \in U_n(0) : \Phi_n(f(t)) = v_k \right\}.$$

Dank der Definition der Funktionen Φ_n gilt

$$\begin{aligned} E_{k,n} &= \left\{ t \in U_n(0) : \|f(t) - v_k\|_X = \min_{1 \leq \ell \leq n} \|f(t) - v_\ell\|_X \right\} \\ &\cap \bigcap_{1 \leq m \leq k-1} \left\{ t \in U_n(0) : \|f(t) - v_m\|_X > \min_{1 \leq \ell \leq n} \|f(t) - v_\ell\|_X \right\}. \end{aligned}$$

Die Mengen $E_{k,n}$ sind offenbar alle beschränkt, so dass wir nur noch sicherstellen müssen, dass sie messbare Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ sind. Dabei hilft uns, dass wir zu Beginn des Beweises sichergestellt haben, dass die Funktionen $t \mapsto \|f(t) - v\|_X$ für jedes $v \in V$ messbar sind. Damit sind auch die Funktionen $t \mapsto \min_{1 \leq \ell \leq n} \|f(t) - v_\ell\|_X$ messbar und alle Bausteine von $E_{k,n}$ lassen sich damit als Urbilder von Einpunktmengen oder Intervallen unter skalarwertigen messbaren Funktionen schreiben. $\square$

Das nächste Resultat ist bekannt für skalarwertige Funktionen und der übliche Beweis beruht auf der Ordnungsstruktur der reellen Zahlen. Im Vektor-wertigen Fall ist der Beweis eine aufschlussreiche Anwendung des Satzes von Pettis.

Korollar 9.7. *Falls eine Folge stark messbarer Funktionen fast überall konvergiert, so ist die Grenzfunktion stark messbar.*

Beweis. Sei (f_n) eine Folge von stark messbaren Funktionen von $\mathbb{R}^d$ nach X , die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Nach dem Satz von Pettis 9.6 in der einen Richtung ist damit jedes f_n fast separabel-wertig und schwach messbar. Wir werden uns gleich überlegen, dass diese beiden Eigenschaften durch den punktweisen Grenzwert auf f übertragen werden. Dann liefert die umgekehrte Richtung des Satzes von Pettis, dass f stark messbar ist.

Dass jedes f_n schwach messbar ist, bedeutet, dass für jedes $\varphi \in X'$ die Funktion $\varphi \circ f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ Lebesgue-messbar ist. Außerdem konvergiert $(\varphi \circ f_n)$ fast überall gegen $\varphi \circ f$ in $\mathbb{K}$, so dass auch $\varphi \circ f$ Lebesgue-messbar ist. Das liefert uns aber genau die schwache Messbarkeit von f .

Da jedes f_n fast separabel-wertig ist, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ Nullmengen N_n und separable, abgeschlossene Teilräume V_n von X mit $f_n(\mathbb{R}^d \setminus N_n) \subseteq V_n$. Mit der Nullmenge

$$N := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \cup \{x \in \mathbb{R}^d : (f_n(x)) \text{ konvergiert nicht gegen } f(x)\}$$

und dem abgeschlossenen Teilraum $V := \overline{\text{span}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n)}$ gilt $f_n(\mathbb{R}^d \setminus N) \subseteq V$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und wegen der Abgeschlossenheit von V auch $f(\mathbb{R}^d \setminus N) \subseteq V$. Es bleibt noch sicherzustellen, dass V separabel ist. Nimmt man aber in jedem V_n eine abzählbare und dichte Teilmenge, so ist deren Vereinigung auch wieder abzählbar und zumindest in $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ dicht. Mit dem schon mehrfach bemühten Argument der rationalen Linearkombinationen gibt es dann aber auch eine abzählbare, dichte Teilmenge im Abschluss des Aufspans dieser Menge, also in V . $\square$

9.2 Das Bochner-Integral

Mit dem „korrekten“ Messbarkeitsbegriff ausgestattet, können wir nun der Konstruktion des skalaren Lebesgue-Integrals folgen: Für eine einfache Funktion $f = \sum_{n=1}^N u_n \cdot \mathbf{1}_{E_n}$ auf $\mathbb{R}^d$ mit $u_n \in X$ und paarweise disjunkten messbaren Mengen $E_n \subseteq \mathbb{R}^d$ ist das *Bochner-Integral* definiert als

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, dt := \sum_{n=1}^N u_n \cdot |E_n|.$$

Wie im skalaren zeigt eine simple Rechnung die Linearität, d. h. für einfache Funktionen $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\alpha f + g) \, dt = \alpha \int_{\mathbb{R}^d} f \, dt + \int_{\mathbb{R}^d} g \, dt.$$

Darüberhinaus gilt dank der Disjunktheit der Mengen E_n für die einfache Funktion $f = \sum_{n=1}^N u_n \mathbf{1}_{E_n}$, dass $\|f\|_X = \sum_{n=1}^N \|u_n\|_X \mathbf{1}_{E_n}$ ist. Also folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^d} f \, dt \right\|_X = \left\| \sum_{n=1}^N u_n |E_n| \right\|_X \leq \sum_{n=1}^N \|u_n\|_X |E_n| = \int_{\mathbb{R}^d} \|f\|_X \, dt. \quad (9.1)$$

Dies führt uns zu folgender Definition.

Definition 9.8. Eine stark messbare Funktion $f: \mathbb{R}^d \rightarrow X$ ist Bochner-integrierbar, falls es eine Folge von einfachen Funktionen $f_n: \mathbb{R}^d \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \|f_n - f\|_X \, dt = 0.$$

9 Das Bochner-Integral

Diese Definition ergibt Sinn, denn jedes $\|f_n - f\|_X$ ist nach Satz 9.2 (c) Lebesgue-messbar. Des Weiteren zeigt die für alle $j, k \in \mathbb{N}$ gültige Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f_j \, dt - \int_{\mathbb{R}^d} f_k \, dt \right\|_X &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f_j - f_k\|_X \, dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f_j - f\|_X \, dt + \int_{\mathbb{R}^d} \|f - f_k\|_X \, dt, \end{aligned} \quad (9.2)$$

dass die Integrale $\int_{\mathbb{R}^d} f_n \, dt$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchyfolge in X bilden. Da X vollständig ist, besitzt diese Folge einen Grenzwert in X . Mit einer Rechnung ähnlich zu (9.2) erhalten wir außerdem, dass der Grenzwert unabhängig von der approximierenden Folge ist.

Definition 9.9. In der Situation von Definition 9.8 ist das Bochner-Integral von f definiert durch

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \, dt.$$

Wie im Fall der starken Messbarkeit gibt es auch ein besonders nützliches Kriterium, um die Bochner-Integrierbarkeit nachzuweisen, indem man sich auf den skalarwertigen Fall zurückzieht.

Theorem 9.10 (Bochner). Eine stark messbare Funktion $f: \mathbb{R}^d \rightarrow X$ ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn $\|f\|_X: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (Lebesgue)-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^d} f \, dt \right\|_X \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f\|_X \, dt.$$

Beweis. Sei zunächst f Bochner integrierbar und (f_n) eine Folge wie in Definition 9.8. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|f\|_X \, dt \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|f - f_n\|_X \, dt + \int_{\mathbb{R}^d} \|f_n\|_X \, dt < \infty.$$

Sei nun umgekehrt $\|f\|_X$ integrierbar. Da f stark messbar ist, gibt es eine Folge von einfachen Funktionen (f_n) , die fast überall gegen f konvergiert. Die einfachen Funktionen

$$g_n(t) := \begin{cases} f_n(t), & \text{falls } \|f_n(t)\|_X \leq 2\|f(t)\|_X, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

haben die selbe Eigenschaft und erfüllen zusätzlich die Abschätzung $\|g_n - f\|_X \leq 3\|f\|_X$. Der (skalare!) Satz von der dominierten Konvergenz gibt nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \|g_n - f\|_X \, dt = 0,$$

9.3 Eigenschaften des Bochner-Integrals

womit f Bochner integrierbar ist. Schließlich gilt die Dreiecksungleichung (9.1) für die einfachen Funktionen f_n und folglich auch für f im Grenzwert $n \rightarrow \infty$. $\square$

In vielen Situationen integriert man nicht über den ganzen Raum $\mathbb{R}^d$, sondern nur über eine messbare Teilmenge. In diesem Fall sind Messbarkeit und Integrierbarkeit durch die jeweilige Eigenschaft der Nullfortsetzung definiert.

Definition 9.11. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar und $f: E \rightarrow X$. Weiterhin sei $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow X$ die Nullfortsetzung von f . Dann heißt f

- (a) stark messbar, falls $\tilde{f}$ stark messbar ist,
- (b) Bochner-integrierbar auf E , falls $\tilde{f}$ Bochner-integrierbar ist und in diesem Fall definieren wir

$$\int_E f \, dt := \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f} \, dt.$$

Beispiel 9.12. Jede stetige Funktion $f: I \rightarrow X$ auf einem kompakten Intervall I ist Bochner-integrierbar. Das folgt aus dem Satz von Bochner 9.10, denn f ist stark messbar nach Beispiel 9.2 (a) und $\|f\|_X$ ist beschränkt, also integrierbar auf I .

9.3 Eigenschaften des Bochner-Integrals

Eine der fundamentalsten Eigenschaften des Bochner-Integrals ist die Verträglichkeit mit beschränkten linearen Operatoren.

Satz 9.13. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar und $f: E \rightarrow X$ Bochner-integrierbar. Falls T ein beschränkter linearer (oder anti-linearer) Operator von X nach Y ist, dann ist $Tf: E \rightarrow Y$ Bochner-integrierbar und es gilt

$$T \int_E f(t) \, dt = \int_E Tf(t) \, dt.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $E = \mathbb{R}^d$. Dank der starken Messbarkeit von f , gibt es eine Folge (f_n) von X -wertigen einfachen Funktionen, die fast überall gegen f konvergiert, vgl. Definition 9.1 (b). Dann ist (Tf_n) eine Folge von Y -wertigen einfachen Funktionen, die dank der Stetigkeit von T fast überall gegen Tf konvergiert. Also ist auch Tf stark messbar.

Die Bochner-Integrierbarkeit von f liefert dann eine u. U. andere Folge (f_n) von X -wertigen einfachen Funktionen, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \|f_n - f\|_X \, dt = 0$ gilt, vgl. Definition 9.8. Wieder ist (Tf_n) eine Folge von Y -wertigen einfachen Funktionen und es

9 Das Bochner-Integral

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \|Tf_n - Tf\|_Y \, dt \leq \|T\|_{X \rightarrow Y} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \|f_n - f\|_X \, dt = 0,$$

also ist auch Tf Bochner-integrierbar. Da das Bochner-Integral einer einfachen Funktion durch eine endliche Summe gegeben ist, überlegt man sich leicht, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int_{\mathbb{R}^d} Tf_n \, dt = T \int_{\mathbb{R}^d} f_n \, dt$. Damit folgt mit der Definition 9.9 des Bochner-Integrals und der Stetigkeit von T

$$\int_{\mathbb{R}^d} Tf \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} Tf_n \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} T \int_{\mathbb{R}^d} f_n \, dt = T \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n \, dt = T \int_{\mathbb{R}^d} f \, dt.$$

Für allgemeines messbares $E \subseteq \mathbb{R}^d$ folgt jetzt dank $T0 = 0$

$$T \int_E f(t) \, dt = T \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}^d} T\tilde{f}(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{Tf}(t) \, dt = \int_E Tf(t) \, dt. \quad \square$$

Eine Situation, welcher wir später öfter begegnen werden, ist die, dass der betrachtete Banachraum X ein Raum von Funktionen ist, welche von einer Variablen x abhängen. Folglich ist auch das Bochner-Integral eine Funktion von x und wir würden gerne die „äußere“ Variable x in das Integral hineinziehen. Hier ist ein Setting, in dem das ohne Probleme möglich ist.

Korollar 9.14. *Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar, K eine kompakte Teilmenge eines normierten Raums und $f: \mathbb{R}^d \rightarrow C(K)$ Bochner-integrierbar. Dann ist für jedes $x \in K$ die Funktion $t \mapsto f(t)(x): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ Lebesgue-integrierbar mit*

$$\left(\int_E f(t) \, dt \right)(x) = \int_E f(t)(x) \, dt. \quad (9.3)$$

Beweis. Die Punktauswertung $\delta_x: C(K) \rightarrow \mathbb{K}$, $\delta_x u := u(x)$ ist ein stetiger linearer Operator, also können wir Satz 9.13 anwenden und bekommen die Behauptung. $\square$

Für Bochner-integrierbare Funktionen $f: E \rightarrow L^2(K)$ ist es plausibel zu erwarten, dass (9.3) für fast jedes x gilt. Das Argument kann aber nicht das gleiche sein, da die Punktauswertung nicht einmal auf X definiert ist. In diesem Fall kann sogar schon die Messbarkeit der skalarwertigen Funktion $f(t)(x)$ zum Problem werden, siehe [HvNVW16, Prop. 1.2.25] für eine ausführliche Diskussion.

In dieser Vorlesung werden wir dieses Problem umgehen, indem wir nur mit solchen stark messbaren Funktionen $f: E \rightarrow L^2(K)$ arbeiten, die ausschließlich Werte in dem kleineren Raum $C(K)$ annehmen und Bochner-integrierbar bezüglich dieser feineren Topologie sind. Das folgende weitere Korollar aus Satz 9.13 erlaubt uns dann zu entscheiden, in welchem Raum wir das Bochner-Integral betrachten. Insbesondere können wir $X = C(K)$ wählen, sodass (9.3) gilt.

9.3 Eigenschaften des Bochner-Integrals

Korollar 9.15. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar und $f: E \rightarrow X$ Bochner-integrierbar. Falls X stetig in Y eingebettet ist, dann ist $f: E \rightarrow Y$ Bochner-integrierbar und die Bochner-Integrale in X und Y stimmen überein.

Beweis. Dieses Mal wendet man Satz 9.13 auf die stetige Inklusionsabbildung $X \hookrightarrow Y$ an. $\square$

Eine sehr ähnliche Eigenschaft für Integrale von Operator-wertigen Funktionen sieht folgendermaßen aus.

Korollar 9.16. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar und $L: E \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ Bochner-integrierbar. Dann ist $t \mapsto L(t)u$ für jedes $u \in X$ Bochner-integrierbar und

$$\left(\int_E L(t) \, dt \right) u = \int_E L(t)u \, dt.$$

Beweis. Das folgt aus Proposition 9.13 angewendet auf die Punktauswertung

$$\text{ev}_u: \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow Y, \quad \text{ev}_u L = Lu,$$

deren Stetigkeit sofort aus $\|\text{ev}_u L\|_Y = \|Lu\|_Y \leq \|u\|_X \|L\|_{X \rightarrow Y}$, $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, folgt. $\square$

Viele Eigenschaften des Lebesgue-Integrals basieren *nicht* auf Ordnungseigenschaften wie Positivität oder Monotonie. Für diese können wir also auch ein entsprechendes Resultat für das Bochner-Integral erhoffen. Wir präsentieren nun die wichtigsten Beispiele für diese Vorlesung.

Theorem 9.17 (Dominierte Konvergenz). Seien $E \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar und $f_n: E \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, Bochner-integrierbare Funktionen. Falls es eine Funktion $f: E \rightarrow X$ und eine nicht-negative integrierbare Funktion $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ und $\|f_n\|_X \leq g$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ punktweise fast überall gilt, dann ist f Bochner-integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \|f - f_n\|_X \, dt = 0.$$

Insbesondere ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dt = \int_E f \, dt.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist f fast überall ein punktweiser Grenzwert von stark messbaren Funktionen, also liefert Korollar 9.7 die starke Messbarkeit von f . Weiter ist wegen $\|f\|_X \leq g$ fast überall die Funktion $\|f\|_X$ Lebesgue-integrierbar, was uns

9 Das Bochner-Integral

mit dem Satz von Bochner in Theorem 9.10 die Bochner-Integrierbarkeit von f sichert. Schließlich gilt fast überall die Abschätzung $\|f_n - f\|_X \leq 2g$, so dass mit dem skalarwertigen Satz der dominierten Konvergenz folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \|f_n - f\|_X \, dt = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_X \, dt = \int_E 0 \, dt = 0.$$

Die zweite Gleichheit ergibt sich dann direkt aus der Definition des Bochner-Integrals. $\square$

Theorem 9.18 (Fubini). *Sei $f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \rightarrow X$ Bochner-integrierbar. Dann gilt:*

- (a) *Für fast jedes $s \in \mathbb{R}^d$ ist die Funktion $f(s, \cdot)$ Bochner-integrierbar.*
- (b) *Für fast jedes $t \in \mathbb{R}^k$ ist die Funktion $f(\cdot, t)$ Bochner-integrierbar.*
- (c) *Die Funktionen $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot, t) \, dt$ und $\int_{\mathbb{R}^d} f(s, \cdot) \, ds$ sind Bochner integrierbar und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(s, t) \, dt \right) ds = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k} f(s, t) \, d(s, t) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(s, t) \, ds \right) dt.$$

Beweis. Die Hauptbeobachtung ist, dass der skalarwertige Satz von Fubini zusammen mit Satz 9.2 (b) die Behauptung für den Fall $f = u \cdot \mathbf{1}_E$ mit $u \in X$ und $E \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$ mit endlichem Lebesgue Maß impliziert. Für einfache Funktionen folgt die Behauptung dann aus der Linearität des Integrals.

Für den allgemeinen Fall sei (f_n) eine Folge von einfachen Funktionen, die punktweise fast überall gegen f konvergiert und $\|f_n\|_X \leq 2\|f\|_X$ fast überall für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. (Eine solche Folge wurde beispielsweise im Beweis von Bochners Theorem konstruiert). Damit gilt für fast jedes $s \in \mathbb{R}^d$, dass

- alle Funktionen $f_n(s, \cdot)$ messbar sind,
- es gilt $f_n(s, \cdot) \rightarrow f(s, \cdot)$ fast überall auf $\mathbb{R}^k$
- und $\|f_n(s, \cdot)\|_X \leq 2\|f(s, \cdot)\|_X$ fast überall auf $\mathbb{R}^k$, wobei die skalarwertige Version von Fubini impliziert, dass $\|f(s, \cdot)\|_X$ integrierbar ist.

Für solche s können wir aus Korollar 9.7 folgern, dass $f(s, \cdot)$ messbar ist. Die Bochner-Integrierbarkeit folgt dann aus Bochners Theorem. Das zeigt (a). Darüberhinaus liefert der Satz von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n(s, t) \, dt = \int_{\mathbb{R}^k} f(s, t) \, dt.$$

Da letzteres für fast jedes $s \in \mathbb{R}^d$ gilt, ist $\int_{\mathbb{R}^k} f(\cdot, t) \, dt$ messbar. Diese Funktion ist auch beschränkt durch $2 \int_{\mathbb{R}^k} \|f(\cdot, t)\|_X \, dt$ und nach der skalarwertigen Version von Fubini

9.3 Eigenschaften des Bochner-Integrals

integrierbar. Dominierte Konvergenz liefert nun

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(s, t) \, dt \right) ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f_n(s, t) \, dt \right) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k} f_n(s, t) \, d(s, t) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k} f(s, t) \, d(s, t).\end{aligned}$$

Das zeigt die erste Hälfte von (c). Die zweite Hälfte von (c) und (b) folgen, indem man die Rollen von s und t vertauscht. $\square$

10 Banachraum-wertige Funktionentheorie

Wir wollen den Holomorphie-Begriff auf Funktionen von $\mathbb{C}$ in einen komplexen Banachraum X erweitern und sehen, dass sich sehr viele ihrer bemerkenswerten Eigenschaften auf den Vektor-wertigen Fall ausweiten lassen. Schon dabei werden wir wieder erleben, dass holomorphe Funktionen sehr pflegeleicht sind. Die Beweise werden mehr oder weniger direkt aus dem skalaren Fall folgen und Wir werden dazu eine starke Übertragungsmaschinerie finden, die für sich genommen schon magisch ist.

In diesem ganzen Abschnitt sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und D eine offene und nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{C}$.

10.1 Holomorphie und schwache Holomorphie

Definition 10.1. Eine Funktion $f: D \rightarrow X$ ist

(a) holomorph, falls

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (10.1)$$

für jedes $z_0 \in D$ existiert.

(b) schwach holomorph, falls $\varphi \circ f: D \rightarrow \mathbb{C}$ für jedes $\varphi \in X'$ holomorph ist.

Bemerkung 10.2. (a) Wieder ergibt die Namensgebung als „schwach holomorph“ Sinn, denn für jede holomorphe Funktion $f: D \rightarrow X$, jedes $\varphi \in X'$ und jedes $z_0 \in D$ existiert der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(f(z)) - \varphi(f(z_0))}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) = \varphi\left(\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) \\ &= \varphi(f'(z_0)), \end{aligned}$$

d. h. $\varphi \circ f$ ist holomorph und damit f schwach holomorph.

(b) Man beachte, dass genau wie im skalaren Fall jede holomorphe Funktion automatisch stetig und damit auf kompakten Teilmengen von D auch beschränkt ist.

Übungsaufgabe 10.3. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $(u_n) \subseteq X$. Betrachten Sie die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n u_n$$

mit Konvergenzradius $\rho := (\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|u_n\|_X})^{-1}$. Zeigen Sie, dass f holomorph in $U_\rho(z_0)$ ist und dass $f^{(n)}(z_0) = n!u_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wir kommen jetzt zum zentralen Ergebnis dieses Abschnittes, mit dessen Hilfe sich die schönen Eigenschaften holomorpher Funktionen aus dem skalaren in die X -wertige Welt übertragen lassen. Es stellt sich heraus, dass es im Gegensatz zur starken und schwachen Messbarkeit, Differenzierbarkeit oder Konvergenz keinen so großen Unterschied zwischen starker und schwacher Holomorphie gibt.

Theorem 10.4. *Eine Funktion von D nach X ist genau dann holomorph, wenn sie schwach holomorph ist.*

Beweis. Dass aus Holomorphie immer schwache Holomorphie folgt, haben wir oben bereits diskutiert. Wir setzen also jetzt voraus, dass $f : D \rightarrow X$ eine schwach holomorphe Funktion ist und fixieren ein $z_0 \in D$. Da D offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $U_{3r}(z_0) \subseteq D$.

Nach Voraussetzung ist $\varphi \circ f$ für jedes $\varphi \in X'$ eine holomorphe Funktion und damit auf $U_{2r}(z_0)$ beschränkt, d. h. $f(U_{2r}(z_0))$ ist eine schwach beschränkte Teilmenge von X . Da schwach beschränkte Mengen auch Norm-beschränkt sind (siehe Satz 7.13 (a)), ist damit $C := \sup_{z \in \overline{U_{2r}(z_0)}} \|f(z)\|_X$ endlich. Für $z, z' \in U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ setzen wir

$$F(z, z') := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0}.$$

Die Hauptarbeit des Beweises wird es sein, die Abschätzung

$$\|F(z, z')\|_X \leq \frac{C|z - z'|}{r^2}, \quad z, z' \in U_r(z_0) \setminus \{z_0\}, \quad (10.2)$$

zu zeigen. Wenn wir diese haben, gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ und für alle $z, z' \in U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z'| < \varepsilon r^2 / C$

$$\left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0} \right\|_X = \|F(z, z')\|_X \leq \frac{C|z - z'|}{r^2} < \varepsilon.$$

Nach dem Cauchy Kriterium existiert dann also der Grenzwert in (10.1) und f ist tatsächlich holomorph.

Zum Nachweis von (10.2) seien $z, z' \in U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ und $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\|_{X'} = 1$. Dann ist $\varphi \circ f$ nach Voraussetzung holomorph, so dass mit der skalarwertigen Cauchy-

Integral-Formel für jedes $w \in U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ folgt

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}\right) &= \frac{1}{w - z_0} (\varphi(f(w)) - \varphi(f(z_0))) \\ &= \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{2r}(z_0)} \left(\frac{\varphi(f(\zeta))}{\zeta - w} - \frac{\varphi(f(\zeta))}{\zeta - z_0} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{2r}(z_0)} \varphi(f(\zeta)) \frac{w - z_0}{(\zeta - w)(\zeta - z_0)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{2r}(z_0)} \varphi(f(\zeta)) \frac{1}{(\zeta - w)(\zeta - z_0)} d\zeta. \end{aligned}$$

Für den gesamten Ausdruck $F(z, z')$ bedeutet das

$$\begin{aligned} \varphi(F(z, z')) &= \varphi\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) - \varphi\left(\frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{2r}(z_0)} \varphi(f(\zeta)) \frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{2r}(z_0)} \varphi(f(\zeta)) \frac{1}{(\zeta - z')(\zeta - z_0)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{2r}(z_0)} \varphi(f(\zeta)) \frac{z - z'}{(\zeta - z)(\zeta - z')(\zeta - z_0)} d\zeta. \end{aligned}$$

Wegen $z, z' \in U_r(z_0)$ gilt

$$|\varphi(F(z, z'))| \leq \frac{1}{2\pi} 4\pi r \|\varphi\|_{X'} \sup_{w \in \partial U_{2r}(z_0)} \|f(w)\|_X \frac{|z - z'|}{2r^3} \leq \frac{C|z - z'|}{r^2}.$$

Da φ ein beliebiges normiertes Funktional war, impliziert Korollar 4.21 (b) die gewünschte Abschätzung in (10.2) und wir sind fertig. $\square$

Bemerkung 10.5. Wie so oft lohnt sich ein Blick zurück auf den gerade geführten Beweis. Haben wir wirklich alle Voraussetzungen in Gänze genutzt oder lässt sich eine Abschwächung mit feiner ausdifferenzierten Annahmen formulieren? Die schwache Holomorphie von f haben wir zunächst benutzt, um zu folgern, dass f lokal beschränkt ist. Setzen wir aber lokale Beschränktheit voraus, so gelingt der Rest des Beweises unter der viel schwächeren Annahme, dass $\varphi \circ f$ gar nicht für alle $\varphi \in X'$ holomorph ist sondern nur entlang einer normierenden Teilmenge von X' , vgl. Definition 4.24.

10.2 Übertragung der zentralen Sätze

In der Funktionentheorie dreht sich viel um Wegintegrale. Wir haben alles Rüstzeug zusammen, um diese auch Banachraum-wertig zu betrachten. Sei dazu $f: D \rightarrow X$

10 Banachraum-wertige Funktionentheorie

holomorph, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $\gamma: I \rightarrow D$ eine stetig differenzierbare Funktion. Im Weiteren nennen wir ein solches γ einen *kompakten C^1 -Weg* in D . Wir definieren das *Weg-Integral*

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz := \int_I f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

als Bochner Integral in X , wobei wir uns an Beispiel 9.12 erinnern, das uns die Bochner-Integrierbarkeit für stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall garantiert.

Unser nächstes Ziel ist nun, die aus der skalaren Funktionentheorie bekannten Identitäten für Weg-Integrale auf den Banachraum-wertigen Fall zu übertragen. Der Satz von Hahn-Banach erlaubt das im Zusammenspiel mit Theorem 10.4 geradezu mühelos. Die im folgenden Beispiel angewendete Strategie sollten Sie sich merken!

Beispiel 10.6 (Cauchy-Integral-Theorem). Sei γ ein kompakter C^1 -Weg in D . Wenn die geometrische Konstellation so ist, dass das Cauchy-Integral-Theorem in der Form

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0$$

für alle *skalarwertigen* holomorphen Funktionen f auf D gültig ist, so gilt die Aussage auch im Vektor-wertigen Fall. Um das einzusehen, sei $f: D \rightarrow X$ holomorph und $\varphi \in X'$. Dann ist $\varphi \circ f$ holomorph und die skalare Theorie zusammen mit Satz 9.13, der es uns erlaubt das stetige Funktional φ aus dem Integral zu ziehen, liefert

$$0 = \int_{\gamma} \varphi(f(z)) \, dz = \varphi\left(\int_{\gamma} f(z) \, dz\right).$$

Da diese Gleichheit für jedes Funktional gilt, bekommen wir $\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0$ aus dem Satz von Hahn-Banach in der Form von Korollar 4.21 (c).

Hier sind zwei prominente Beispiele, bei denen Sie die Strategie selbst anwenden können.

Übungsaufgabe 10.7 (Cauchy-Integral-Formel). Wie im letzten Beispiel nehmen wir unsere Lieblings-Konstellation für die Geometrie von D an, so dass der Satz in der Form

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz$$

für alle $z_0 \in D$ und alle holomorphen Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass die Aussage dann auch im Banachraum-wertigen Fall richtig ist.

Übungsaufgabe 10.8 (Satz von Liouville). Übertragen Sie den Satz von Liouville auf Banachraum-wertige Funktionen, beweisen Sie also: Ist $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

10.2 Übertragung der zentralen Sätze

Zuweilen ermöglicht die Banachraum-wertige Funktionentheorie sogar höchst elegante Beweise für Aussagen, deren Beweise in der skalaren Funktionentheorie deutlich schwerfälliger sind und ermöglicht damit dort u. U. sogar neue Erkenntnisse. Hier ist ein besonders schönes Beispiel. Den Beweis davon werden Sie als angeleitete Aufgabe auf dem Übungsblatt finden.

Theorem 10.9 (Vitali). *Sei D zusätzlich zusammenhängend und seien $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, holomorphe Funktionen, für die es ein $C > 0$ gibt mit $|f_n(z)| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in D$. Falls die Menge*

$$M := \{z \in D : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \text{ existiert}\}$$

einen Häufungspunkt in D besitzt, so konvergiert (f_n) lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

11 Spektraltheorie

Viele Einsichten über lineare Operatoren auf endlich-dimensionalen Räumen zieht man in der Linearen Algebra aus der Betrachtung ihrer Eigenwerte. Das wollen wir jetzt auch für lineare Operatoren auf unendlich-dimensionalen Räumen tun. Dabei wird die Theorie ein bisschen komplizierter bzw. interessanter, was vor allem daran liegt, dass im Allgemeinen nicht mehr injektiv = surjektiv = bijektiv gilt, vgl. den Links- und Rechtsshift in Beispiel 2.2 (b).

Wie immer im Zusammenhang mit Spektraltheorie hat man ein großes Interesse daran, als Skalkörper die komplexen Zahlen zu wählen. Im gesamten Kapitel ist X stets ein Banachraum über $\mathbb{C}$ mit $X \neq \{0\}$ und $T \in \mathcal{L}(X)$.

11.1 Spektrum und Resolvente

Definition 11.1. (a) *Die Menge*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \cdot \text{id}_X - T \text{ ist bijektiv und } (\lambda \cdot \text{id}_X - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

heißt Resolventenmenge von T und für $\lambda \in \rho(T)$ ist $R(\lambda, T) := (\lambda \cdot \text{id}_X - T)^{-1}$ die Resolvente von T in λ .

(b) *Das Komplement der Resolventenmenge*

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

ist das Spektrum von T .

(c) *Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von T , wenn es ein $u \in X \setminus \{0\}$ gibt mit $Tu = \lambda u$. In diesem Fall heißt u ein Eigenvektor von T . Die Menge aller Eigenwerte wird Punktspektrum genannt und mit $\sigma_p(T)$ bezeichnet.*

Bemerkung 11.2. (a) Wir werden im Weiteren die verbreitete schlampige Schreibweise $\lambda - T$ statt $\lambda \cdot \text{id}_X - T$ verwenden.

(b) Jeder Eigenwert λ von T ist ein Element des Spektrums, denn aus $(\lambda - T)u = 0$ für $u \neq 0$ folgt sofort, dass $\lambda - T$ nicht injektiv ist. Es ist also $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$.

11 Spektraltheorie

- (c) Dank des Satzes 6.6 von der stetigen Inversen folgt aus der Bijektivität von $\lambda - T$ schon, dass die Inverse auch stetig ist, es gilt also

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ bijektiv}\}.$$

- (d) Für jedes $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ist wegen $\lambda - (\lambda_0 + T) = (\lambda - \lambda_0) - T$ ein λ genau dann in $\sigma(\lambda_0 + T)$, wenn $\lambda - \lambda_0$ in $\sigma(T)$ liegt. Es gilt also $\sigma(\lambda_0 + T) = \lambda_0 + \sigma(T)$. Das ist oft praktisch, um Betrachtungen zu Spektren und Resolventenmengen in der komplexen Ebene an einen angenehmeren Ort zu schieben.

Beispiel 11.3. (a) Ist X endlich-dimensional, so ist $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ genau die Menge der Eigenwerte.

- (b) Im Allgemeinen ist das Spektrum aber größer als die Menge der Eigenwerte. Als Beispiel mag der Rechtsshift auf ℓ^2 aus Beispiel 2.2 (b) dienen, d. h. der Operator $R \in \mathcal{L}(\ell^2)$ mit $R(a_n) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$. Die Eigenwertgleichung $R(a_n) = \lambda(a_n)$ schreibt sich dann als

$$(0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \dots).$$

Im Fall $\lambda = 0$ ist die rechte Seite die konstante Nullfolge und wir können sofort ablesen, dass die einzige Lösung $(a_n) = 0$ ist. Für $\lambda \neq 0$ liefert der erste Eintrag $a_1 = 0$ und dann bekommen wir induktiv weiter $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir stellen also fest, dass R überhaupt keine Eigenwerte hat.

Andererseits gilt $\sigma(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, was deutlich größer als die leere Menge ist. Das kann man entweder direkt nachrechnen (Übungsaufgabe!) oder mit den im Weiteren eingeführten Mitteln der Vorlesung elegant argumentieren, vgl. Beispiel 11.15.

Ist $\rho(T) \neq \emptyset$, so definiert die Resolvente $R(\cdot, T)$ von T eine Funktion von $\rho(T)$ nach $\mathcal{L}(X)$. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass diese sogar holomorph ist und verallgemeinern dazu die Neumann-Reihe aus Lemma II.18.7 aus der Analysis II.

Satz 11.4 (Neumann-Reihe). *Ist $\|T\|_{X \rightarrow X} < 1$, so ist $1 - T$ stetig invertierbar mit*

$$R(1, T) = (1 - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

wobei die Reihe in $\mathcal{L}(X)$ konvergiert, und es gilt $\|R(1, T)\|_{X \rightarrow X} \leq (1 - \|T\|_{X \rightarrow X})^{-1}$.

Beweis. Wegen der Submultiplikativität der Operatornorm und $\|T\|_{X \rightarrow X} < 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|_{X \rightarrow X} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|_{X \rightarrow X}^n = \frac{1}{1 - \|T\|_{X \rightarrow X}}.$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ in $\mathcal{L}(X)$ absolut konvergent und folglich auch konvergent, denn $\mathcal{L}(X)$ ist vollständig. Es gilt

$$(1 - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - T) \sum_{n=0}^N T^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N T^n - \sum_{n=0}^N T^{n+1} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - T^{N+1}).$$

Wegen $\|T^{N+1}\|_{X \rightarrow X} \leq \|T\|_{X \rightarrow X}^{N+1} \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} T^{N+1} = 0$, d. h. $(1 - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n = \text{id}_X$. Eine analoge Rechnung für $\sum_{n=0}^{\infty} T^n (1 - T) = \text{id}_X$ liefert, dass $1 - T$ bijektiv ist mit $R(1, T) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ und es gilt dank der Konvergenz der Reihe in $\mathcal{L}(X)$

$$\|R(1, T)\|_{X \rightarrow X} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=0}^N T^n \right\| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \|T\|_{X \rightarrow X}^n = \frac{1}{1 - \|T\|_{X \rightarrow X}}. \quad \square$$

Bemerkung 11.5. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|_{X \rightarrow X}$, so gilt $\lambda - T = \lambda(1 - T/\lambda)$ mit $\|T/\lambda\|_{X \rightarrow X} < 1$. Also liefert die Neumann-Reihe $\lambda \in \rho(T)$ und

$$R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1} = \left[\lambda \left(1 - \frac{T}{\lambda} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Insbesondere gilt $\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|_{X \rightarrow X}\}$.

Das folgende auf der Neumann-Reihe basierende Argument wird Ihnen, wenn Sie sich weiter mit Operatortheorie beschäftigen, immer wieder unterkommen. Es läuft meistens unter der Bezeichnung „Störungsargument“, da eine Eigenschaft, die für einen Operator bekannt ist, auf alle nahebei liegenden, d. h. leicht „gestörten“, Operatoren übertragen wird.

Korollar 11.6. Sei T stetig invertierbar und $S \in \mathcal{L}(X)$ erfülle $\|T - S\|_{X \rightarrow X} < 1/\|T^{-1}\|_{X \rightarrow X}$. Dann ist auch S stetig invertierbar und es gilt $S^{-1} = [1 - T^{-1}(T - S)]^{-1} T^{-1}$.

Beweis. Es gilt mit Hilfe der Invertierbarkeit von T

$$S = T - T + S = T(1 - T^{-1}(T - S)),$$

so dass wir S mit der angegebenen Inversen invertieren können, wenn $1 - T^{-1}(T - S)$ eine stetige Inverse hat. Das folgt aber gerade aus der Voraussetzung und mit Hilfe der Neumann-Reihe, denn es ist

$$\|T^{-1}(T - S)\|_{X \rightarrow X} \leq \|T^{-1}\|_{X \rightarrow X} \|T - S\|_{X \rightarrow X} < 1. \quad \square$$

Wir kommen jetzt zum Hauptsatz zur Struktur der Resolvente und der Resolventenmenge.

Theorem 11.7. (a) Die Resolventenmenge $\rho(T)$ ist offen und das Spektrum $\sigma(T)$ ist kompakt.

11 Spektraltheorie

- (b) Die Resolventenabbildung $R(\cdot, T) : \rho(T) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ ist holomorph.
(c) Das Spektrum $\sigma(T)$ ist nicht-leer.

Beweis. (a) Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$ gegeben und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_0 - \lambda| < 1/\|R(\lambda_0, T)\|_{X \rightarrow X}$. Dann ist $\lambda_0 - T$ ein invertierbarer Operator und wegen

$$\|\lambda_0 - T - (\lambda - T)\|_{X \rightarrow X} = \|(\lambda_0 - \lambda)\text{id}_X\|_{X \rightarrow X} = |\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, T)\|_{X \rightarrow X}}$$

können wir Korollar 11.6 auf $S = \lambda - T$ anwenden. Das liefert die Invertierbarkeit von $\lambda - T$, d. h. $\lambda \in \rho(T)$ und wir haben gezeigt, dass $\rho(T)$ offen ist.

Damit ist $\sigma(T)$ abgeschlossen und Bemerkung 11.5 impliziert, dass $\sigma(T)$ im Kreis mit Radius $\|T\|_{X \rightarrow X}$ um den Ursprung enthalten ist. Also ist $\sigma(T)$ kompakt.

- (b) Korollar 11.6 liefert zusätzlich, dass in der Situation von Teil (a) für jedes λ in einer offenen Kugel um λ_0 gilt

$$R(\lambda, T) = [1 - R(\lambda_0, T)(\lambda_0 - \lambda)]^{-1} R(\lambda_0, T).$$

Verwendet man die Darstellung der Inversen durch die Neumann-Reihe ergibt sich

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [R(\lambda_0, T)(\lambda_0 - \lambda)]^n R(\lambda_0, T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R(\lambda_0, T)^{n+1} (\lambda - \lambda_0)^n$$

mit absoluter Konvergenz in $\mathcal{L}(X)$. Damit haben wir in einer Umgebung von λ_0 eine Potenzreihendarstellung von $R(\cdot, T)$ gefunden und Übungsaufgabe 10.3 sagt uns, dass die Resolventenabbildung in einer Umgebung von λ_0 holomorph ist. Da $\lambda_0 \in \rho(T)$ beliebig war, folgt die Holomorphie auf dieser ganzen Menge.

- (c) Wir nehmen an, das Spektrum von T wäre leer. Dann ist nach Teil (b) die Resolvente eine holomorphe Funktion von $\mathbb{C}$ nach X . Außerdem gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 2\|T\|_{X \rightarrow X}$ wegen Bemerkung 11.5

$$\|R(\lambda, T)\|_{X \rightarrow X} = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^n \right\|_{X \rightarrow X} \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|T\|_{X \rightarrow X}}{|\lambda|} \right)^n < \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{|\lambda|}.$$

Da die stetige Abbildung $R(\cdot, T)$ auf der kompakten Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\|T\|_{X \rightarrow X}\}$ beschränkt ist, ist sie damit auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt und es gilt $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda, T) = 0$.

Der Satz von Liouville, vgl. Übungsaufgabe 10.8, liefert also, dass $R(\cdot, T)$ konstant ist. Wegen des Nullgrenzwertes im Unendlichen muss $R(\lambda, T) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten und das funktioniert nur, wenn $X = \{0\}$ und $T = 0$ ist. Wir haben also einen Widerspruch. $\square$

Wir sammeln ein paar weitere, wenn auch weniger aufregende, Eigenschaften der Resolvente.

Satz 11.8. (a) Für jedes $\lambda \in \rho(T)$ gilt

$$\|R(\lambda, T)\|_{X \rightarrow X} \geq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(T))}.$$

(b) Für alle $\lambda, \mu \in \rho(T)$ gilt die Resolventengleichung

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T).$$

(c) Für alle $\lambda, \mu \in \rho(T)$ gilt $R(\lambda, T)R(\mu, T) = R(\mu, T)R(\lambda, T)$.

Beweis. (a) Sei $\lambda \in \rho(T)$. Wie wir im Beweis von Theorem 11.7 (a) gesehen haben, gilt dann für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu - \lambda| < 1/\|R(\lambda, T)\|_{X \rightarrow X}$, dass auch $\mu \in \rho(T)$ ist. Also ist für alle $\nu \in \sigma(T)$ die Ungleichung $|\nu - \lambda| \geq 1/\|R(\lambda, T)\|_{X \rightarrow X}$ erfüllt. Das liefert

$$\text{dist}(\lambda, \sigma(T)) = \inf\{|\nu - \lambda| : \nu \in \sigma(T)\} \geq \frac{1}{\|R(\lambda, T)\|_{X \rightarrow X}}$$

und Umstellen der Ungleichung liefert die Behauptung.

(b) Es ist $\mu - \lambda = (\mu - T) - (\lambda - T)$. Multipliziert man diese Gleichung von links mit $R(\lambda, T)$ und von rechts mit $R(\mu, T)$, erhält man

$$(\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T) = R(\lambda, T)((\mu - T) - (\lambda - T))R(\mu, T) = R(\lambda, T) - R(\mu, T).$$

(c) Im Fall $\lambda = \mu$ ist nichts zu zeigen. Für $\lambda \neq \mu$ folgt aus der zweimaligen Anwendung der Resolventengleichung

$$\begin{aligned} R(\lambda, T)R(\mu, T) &= \frac{1}{\mu - \lambda}(R(\lambda, T) - R(\mu, T)) = \frac{1}{\lambda - \mu}(R(\mu, T) - R(\lambda, T)) \\ &= R(\mu, T)R(\lambda, T). \end{aligned} \quad \square$$

11.2 Unterteilung des Spektrums

Wir haben bereits das Punktspektrum als Teilmenge des Spektrums kennengelernt und wollen nun weitere wichtige Teilmengen des Spektrums benennen.

Definition 11.9. Die folgenden Teilmengen des Spektrums bekommen Namen:

(a) $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ nicht injektiv}\}$ (Punktspektrum)

11 Spektraltheorie

- (b) $\sigma_a(T) := \sigma_p(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ran}(\lambda - T) \text{ nicht abgeschlossen in } X\}$ (Approximatives Spektrum)
- (c) $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\text{ran}(\lambda - T)} \neq X\}$ (Residualspektrum)

Bemerkung 11.10. (a) Man beachte, dass hier keine disjunkte Zerlegung des Spektrums angegeben ist. Beispielsweise ist offensichtlich $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_a(T)$. Machen Sie sich außerdem klar, dass das hier angegebene Punktspektrum und die früher gegebene Definition als die Menge aller Eigenwerte übereinstimmen.

- (b) Zumindest gilt aber $\sigma_a(T) \cup \sigma_r(T) = \sigma(T)$. Denn für $\lambda \notin \sigma_a(T) \cup \sigma_r(T)$ ist $\lambda - T$ injektiv, hat abgeschlossenes Bild und es gilt $\text{ran}(\lambda - T) = \overline{\text{ran}(\lambda - T)} = X$, so dass $\lambda - T$ bijektiv ist. Nach Bemerkung 11.2 (c) ist dann $\lambda \in \rho(T)$.
- (c) In der Literatur gibt es je nach Zielsetzung zur Unterteilung des Spektrums mehrere übliche Methoden mit zum Teil uneinheitlichen Bezeichnungen. Wenn Sie also diese oder ähnliche Begriffe in einem Buch oder woanders finden, seien Sie vorsichtig und betrachten Sie genau die Definitionen.

Das folgende kurze Lemma bietet ein manchmal praktisches Kriterium dafür, dass das Bild eines stetigen Operators abgeschlossen ist.

Lemma 11.11. *Sind V, X Banachräume und $T \in \mathcal{L}(V, X)$, so dass es ein $c > 0$ gibt mit $c\|v\|_V \leq \|Tv\|_X$ für alle $v \in V$. Dann ist $\text{ran}(T)$ abgeschlossen in X .*

Beweis. Sei (u_n) eine Folge in $\text{ran}(T)$, die in X gegen ein $u \in X$ konvergiert. Dann finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $v_n \in V$ mit $u_n = Tv_n$. Nach Voraussetzung gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|v_n - v_m\|_V \leq \frac{1}{c} \|T(v_n - v_m)\|_X = \frac{1}{c} \|u_n - u_m\|_X.$$

Mit (u_n) ist also auch (v_n) eine Cauchyfolge und wir setzen $v := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. Dann gilt

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tv_n = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n\right) = Tv \in \text{ran}(T). \quad \square$$

Wir charakterisieren die Elemente des approximativen Spektrums noch einmal anders.

Lemma 11.12. *Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ liegt genau dann in $\sigma_a(T)$, wenn es eine Folge $(u_n) \subseteq X$ gibt mit $\|u_n\|_X = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda u_n - Tu_n\|_X = 0$.*

Damit verhalten sich die Elemente des approximativen Spektrums „fast wie Eigenwerte“. Man nennt ein $\lambda \in \sigma_a(T)$ daher auch *approximativer Eigenwert* und eine zugehörige Folge (u_n) mit der Eigenschaft aus obigem Lemma heißt *approximativer Eigenvektor* von T .

Beweis. „ $\Rightarrow$ “ Sei $\lambda \in \sigma_a(T)$. Wenn λ ein Eigenwert von T ist, so schnappen wir uns einen zugehörigen normierten Eigenvektor u und stellen fest, dass die konstante Folge (u) das Gewünschte tut.

Es sei also ab jetzt $\lambda - T$ injektiv und $\text{ran}(\lambda - T)$ nicht abgeschlossen. Dann existiert eine algebraisch inverse lineare Abbildung $R : \text{ran}(\lambda - T) \rightarrow X$ mit $R(\lambda - T) = \text{id}_X$ und $(\lambda - T)R = \text{id}_{\text{ran}(\lambda - T)}$. Nehmen wir an, diese Abbildung wäre beschränkt, so können wir sie nach dem Fortsetzungssatz 4.5 zu einem stetigen Operator $\tilde{R}$ auf $\overline{\text{ran}(\lambda - T)}$ fortsetzen. Dann gilt für alle $v \in \text{ran}(\lambda - T)$

$$v = \text{id}_{\overline{\text{ran}(\lambda - T)}} v = (\lambda - T)\tilde{R}v \in \text{ran}(\lambda - T).$$

Also ist $\overline{\text{ran}(\lambda - T)} \subseteq \text{ran}(\lambda - T)$ und damit $\text{ran}(\lambda - T) = \overline{\text{ran}(\lambda - T)}$ abgeschlossen. Das ist ein Widerspruch.

Da demzufolge R nicht beschränkt ist, gibt es eine Folge $(v_n) \subseteq \text{ran}(\lambda - T)$ mit $\|v_n\|_X = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Rv_n\|_X = \infty$. Damit definieren wir die Folge $u_n := Rv_n / \|Rv_n\|_X$. Diese ist dann ebenfalls normiert und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda - T)u_n\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|(\lambda - T)Rv_n\|_X}{\|Rv_n\|_X} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|v_n\|_X}{\|Rv_n\|_X} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|Rv_n\|_X} = 0.$$

„ $\Leftarrow$ “ Für die Rückrichtung nehmen wir an, λ sei kein Eigenwert und $Y := \text{ran}(\lambda - T)$ sei abgeschlossen. Dann ist $\lambda - T : X \rightarrow Y$ ein bijektiver Operator zwischen zwei Banachräumen. Nach dem Satz 6.6 von der stetigen Inversen ist dann $R := (\lambda - T)^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig und es folgt für jede normierte Folge $(u_n) \subseteq X$

$$1 = \|u_n\|_X = \|R(\lambda - T)u_n\|_X \leq \|R\|_{Y \rightarrow X} \|(\lambda - T)u_n\|_Y.$$

Also gilt

$$\|\lambda u_n - Tu_n\|_X \geq \frac{1}{\|R\|_{Y \rightarrow X}}$$

und diese Folge kann nicht gegen Null gehen. Die Behauptung ist damit per Kontraposition bewiesen. $\square$

Wir zeigen, dass der Rand des Spektrums immer zum approximativen Spektrum gehört.

Satz 11.13. *Es gilt $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_a(T)$.*

Beweis. Sei $\mu \in \partial\sigma(T)$. Dann gilt wegen der Abgeschlossenheit des Spektrums $\mu \in \sigma(T)$ und es gibt eine Folge $(\lambda_n) \subseteq \rho(T)$ mit $\lambda_n \rightarrow \mu$ ($n \rightarrow \infty$). Damit geht der Abstand von λ_n zu $\sigma(T)$ gegen Null und mit der Abschätzung aus Satz 11.8 (a) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\lambda_n, T)\|_{X \rightarrow X} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{dist}(\lambda_n, \sigma(T))} = \infty.$$

11 Spektraltheorie

Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit in Form von Übungsaufgabe 6.21 versorgt uns mit einem $u \in X$, für das die Folge $(R(\lambda_n, T)u)$ unbeschränkt ist. Wir finden also eine Teilfolge $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|R(\lambda_{n_k}, T)u\|_X = \infty$. Setzen wir damit

$$u_k := \frac{R(\lambda_{n_k}, T)u}{\|R(\lambda_{n_k}, T)u\|_X}, \quad k \in \mathbb{N},$$

so ist (u_k) eine normierte Folge in X mit

$$\|\mu u_k - T u_k\|_X \leq \|(\mu - \lambda_{n_k})u_k\|_X + \|(\lambda_{n_k} - T)u_k\|_X = |\mu - \lambda_{n_k}| + \frac{\|u\|_X}{\|R(\lambda_{n_k}, T)u\|_X}.$$

Da beide Summanden auf der rechten Seite für $k \rightarrow \infty$ gegen Null gehen, ist damit (u_k) ein approximativer Eigenvektor zu μ und wir haben dank Lemma 11.12 unser Ziel $\mu \in \sigma_a(T)$ erreicht. $\square$

11.3 Das Spektrum der Adjungierten

Für Matrizen wissen wir, dass sich die Eigenwerte beim Transponieren nicht ändern. Dürfen wir also auch darauf hoffen, dass das Spektrum beim Adjungieren gleich bleibt?

Satz 11.14. *Es ist $\sigma(T) = \sigma(T')$ und für alle $\lambda \in \rho(T) = \rho(T')$ gilt $R(\lambda, T') = R(\lambda, T)'$.*

Beweis. Da $\lambda \in \sigma(T)$ äquivalent zu $0 \in \sigma(\lambda - T)$ ist, nach Bemerkung 11.2 (d) gilt $\sigma(\lambda - T) = \lambda - \sigma(T)$ und beide Aussagen auch analog für die Adjungierte T' gelten, genügt es wenn wir zeigen, dass $0 \in \rho(T)$ äquivalent zu $0 \in \rho(T')$ ist und dass im Falle $0 \in \rho(T)$ gilt $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

Sei $0 \in \rho(T)$, d. h. T ist stetig invertierbar in $\mathcal{L}(X)$. Dann gilt nach Satz 4.34 (a), dass auch T' in $\mathcal{L}(X')$ stetig invertierbar ist mit $(T')^{-1} = (T^{-1})'$. Wir kennen die Implikation $0 \in \rho(T) \Rightarrow 0 \in \rho(T')$ und die Gleichheit der beiden Operatoren also schon und müssen nur zeigen, dass man auch einen Strich wegbekommt, dass also $0 \in \rho(T') \Rightarrow 0 \in \rho(T)$ gilt.

Sei dazu $0 \in \rho(T')$, d. h. T' stetig invertierbar in $\mathcal{L}(X')$. Dann ist einen Strich dazumachen erlaubt und es gilt $0 \in \rho(T'')$. Um wieder zurück nach X zu kommen, betrachten wir $(T'')^{-1}j_X$ und werden gleich zeigen, dass dieser Operator X in $j_X(X)$ abbildet. Dann können wir $j_X^{-1}(T'')^{-1}j_X$ bilden und es gilt mit Hilfe von Bemerkung 7.6 (b)

$$j_X^{-1}(T'')^{-1}j_X T = j_X^{-1}(T'')^{-1} T'' j_X = \text{id}_X,$$

sowie analog

$$T j_X^{-1}(T'')^{-1}j_X = j_X^{-1} T'' (T'')^{-1} j_X = \text{id}_X.$$

Also ist $0 \in \rho(T)$ und wir sind fertig.

Es bleibt zu zeigen, dass $\text{ran}((T'')^{-1}j_X)$ in $j_X(X)$ enthalten ist. Für jedes $u \in X$ gilt wieder mit Hilfe von Bemerkung 7.6 (b)

$$j_X u = (T'')^{-1} T'' j_X u = (T'')^{-1} j_X T u,$$

also bildet $(T'')^{-1}j_X$ zumindest den Teilraum $\text{ran}(T)$ von X in $j_X(X)$ ab.

Das können wir noch verbessern. Da X ein Banachraum ist, ist $j_X(X)$ ein abgeschlossener Teilraum von X'' und dank der Stetigkeit von $(T'')^{-1}j_X : X \rightarrow X''$ bekommen wir sogar, dass $(T'')^{-1}j_X$ den Abschluss $\overline{\text{ran}(T)}$ nach $j_X(X)$ abbildet.

Es bleibt $\overline{\text{ran}(T)} = X$ zu zeigen. Sei dazu $\varphi \in X'$ so, dass $\varphi(v) = 0$ für alle $v \in \overline{\text{ran}(T)}$ ist. Dann gilt für alle $u \in X$ wegen $Tu \in \text{ran}(T)$ sofort $[T'\varphi](u) = \varphi(Tu) = 0$. Also ist $T'\varphi = 0$ und da T' invertierbar vorausgesetzt ist, folgt $\varphi = 0$. Das bedeutet $\overline{\text{ran}(T)} = X$, denn anderenfalls müsste nach Hahn-Banach ein $\varphi \in X' \setminus \{0\}$ existieren, dass auf $\overline{\text{ran}(T)}$ verschwindet. $\square$

Damit können wir nun das Versprechen aus Beispiel 11.3 (b) einlösen.

Beispiel 11.15. Wir zeigen, dass für den Rechtsshift R auf ℓ^2 gilt $\sigma(R) = K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Zunächst wissen wir seit Beispiel 2.2 (b), dass $\|R\|_{\ell^2 \rightarrow \ell^2} = 1$ ist, also muss dank Bemerkung 11.5 schon mal $\sigma(R) \subseteq K$ gelten. Desweiteren gilt nach dem eben gezeigten $\sigma(R) = \sigma(R')$ und Beispiel 5.2 (a) verrät uns, dass der Adjungierte von R auf ℓ^2 der Linksshift L auf ℓ^2 ist.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < 1$. Dann ist die Folge $(\lambda^n)_{n \geq 0}$ dank der geometrischen Reihe in ℓ^2 und da der erste Eintrag 1 ist, ist dies auch nie das Nullelement. Wendet man den Linksshift an, findet man

$$L(\lambda^n) = L(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots).$$

Also ist jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < 1$ ein Eigenwert von L und damit auch in $\sigma(R)$. Da das Spektrum nach Theorem 11.7 (a) abgeschlossen ist, muss sogar jedes λ mit $|\lambda| \leq 1$ in $\sigma(R)$ liegen und damit haben wir schon $K \subseteq \sigma(R)$ gezeigt.

12 Der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Aus der Linearen Algebra kennen wir den Satz, dass man jede symmetrische Matrix bezüglich einer Orthonormalbasis diagonalisieren kann. Ein Äquivalent zu dieser Aussage wollen wir in diesem Abschnitt in allgemeinen Hilberträumen formulieren. Dazu werden wir aber noch ein paar Schleifen drehen und tiefer in die Theorie von Operatoren auf Hilberträumen eintauchen.

In diesem gesamten Abschnitt sei H ein komplexer Hilbertraum.

12.1 Der numerische Wertebereich

Wir lernen in diesem kurzen Abschnitt ein sehr praktisches Hilfsmittel im Hilbertraum kennen, das eine weitere Abschätzung liefert, wie groß das Spektrum höchstens sein kann.

Definition 12.1. Sei $T \in \mathcal{L}(H)$. Der numerische Wertebereich von T ist

$$W(T) := \{ \langle Tu, u \rangle : u \in H, \|u\|_H = 1 \}.$$

Bemerkung 12.2. Für den Adjungierten T^* von T gilt wegen $\langle T^*u, u \rangle = \langle u, Tu \rangle = \overline{\langle Tu, u \rangle}$

$$\begin{aligned} W(T^*) &= \{ \langle T^*u, u \rangle : u \in H, \|u\|_H = 1 \} = \{ \overline{\langle Tu, u \rangle} : u \in H, \|u\|_H = 1 \} \\ &= \{ \bar{z} : z \in W(T) \}. \end{aligned}$$

Der numerische Wertebereich wird also beim Adjungieren des Operators nur komplex konjugiert.

Nicht nur der numerische Wertebereich konjugiert sich beim Adjungieren, auch das Spektrum, wie der folgende Satz zeigt. Man beachte hier wieder den Unterschied zwischen der Adjungierten, für die $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$ gilt und der Hilbertraum-Adjungierten.

Satz 12.3. Ist $T \in \mathcal{L}(H)$, so gilt $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$ und für alle $\lambda \in \rho(T)$ gilt $R(\lambda, T)^* = R(\bar{\lambda}, T^*)$.

12 Der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Beweis. Der Beweis folgt demselben Drehbuch wie der von Satz 11.14, ist aber dank des Riesz-Isomorphismus' deutlich kürzer.

Sei zunächst $\lambda \in \rho(T)$. Dann gilt

$$(\bar{\lambda} - T^*)R(\lambda, T)^* = (\lambda - T)^*R(\lambda, T)^* = (R(\lambda, T)(\lambda - T))^* = \text{id}_H^* = \text{id}_H$$

und analog zeigt man $R(\lambda, T)^*(\bar{\lambda} - T^*) = \text{id}_H$. Also ist $\bar{\lambda} \in \rho(T^*)$ mit $R(\bar{\lambda}, T^*) = R(\lambda, T)^*$.

Ist umgekehrt $\lambda \in \rho(T^*)$ haben wir jetzt kein Problem mit dem Rückweg von $T^{**} = T$ nach T , sondern erhalten einfach aus dem eben gezeigten $\bar{\lambda} \in \rho(T^{**}) = \rho(T)$ und $R(\bar{\lambda}, T) = R(\bar{\lambda}, T^{**}) = (R(\lambda, T^*))^*$. $\square$

Wir kommen jetzt zum Hauptresultat über den numerischen Wertebereich.

Satz 12.4. Für $T \in \mathcal{L}(H)$ gilt $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{W(T)}$. Wir wollen zeigen, dass $\lambda \in \rho(T)$ ist und beobachten zunächst, dass $d := \text{dist}(\lambda, \overline{W(T)}) > 0$ ist. Es folgt für jedes $u \in H$ mit $\|u\|_H = 1$ dank der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$d \leq |\lambda - \langle Tu, u \rangle| = |\lambda \langle u, u \rangle - \langle Tu, u \rangle| = |\langle (\lambda - T)u, u \rangle| \leq \|(\lambda - T)u\|_H.$$

Für beliebiges $u \in H$ bedeutet das

$$\|(\lambda - T)u\|_H = \|u\|_H \left\| (\lambda - T) \frac{u}{\|u\|_H} \right\| \geq d \|u\|_H. \quad (12.1)$$

Damit gilt für jedes $u \in \ker(\lambda - T)$ wegen $\|u\|_H \leq 1/d \|(\lambda - T)u\|_H = 0$ sofort $u = 0$ und wir wissen schon mal, dass $\lambda - T$ injektiv ist.

Wir zeigen noch, dass $\lambda - T$ surjektiv ist. Ausgangspunkt ist dazu ebenfalls die Ungleichung (12.1), denn diese liefert dank Lemma 11.11, dass $\text{ran}(\lambda - T)$ ein abgeschlossener Teilraum von H ist. Für diesen gilt mit Satz 2.20 (a) außerdem

$$\text{ran}(\lambda - T)^\perp = \text{ran}((\lambda - T)^{**})^\perp = \ker((\lambda - T)^*) = \ker(\bar{\lambda} - T^*).$$

Wir bekommen also das gewünschte $\text{ran}(\lambda - T) = H$, sobald wir zeigen können, dass $\bar{\lambda} - T^*$ injektiv ist.

Dazu beobachten wir, dass aus $\lambda \notin \overline{W(T)}$ mit Bemerkung 12.2 folgt, dass $\bar{\lambda} \notin \overline{W(T^*)}$ gilt. Also gilt mit der Begründung, die zu (12.1) geführt hat, auch hier, dass es ein $d^* > 0$ gibt mit $\|(\bar{\lambda} - T^*)u\|_H \geq d^* \|u\|_H$ für alle $u \in H$, woraus ebenfalls wie oben wieder die Injektivität von $\bar{\lambda} - T^*$ folgt. $\square$

12.2 Selbstadjungierte Operatoren

Eine in Hilberträumen extrem bedeutsame Klasse von Operatoren enthält jene, die mit ihrer Adjungierten übereinstimmen. Diese selbstadjungierten Operatoren wollen wir jetzt untersuchen.

Definition 12.5. Ein $T \in \mathcal{L}(H)$ heißt

- (a) unitär, wenn $TT^* = T^*T = \text{id}_H$ gilt.
- (b) selbstadjungiert, wenn $T = T^*$ gilt.
- (c) normal, wenn $TT^* = T^*T$ gilt.

Bemerkung 12.6. (a) Offensichtlich folgt sowohl aus unitär als auch aus selbstadjungiert normal.

- (b) Ist T unitär, so gilt für alle $u, v \in H$

$$\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, T^*Tv \rangle = \langle u, v \rangle.$$

- (c) Ist T selbstadjungiert, so gilt für alle $u, v \in H$

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle = \langle u, Tv \rangle.$$

- (d) Ist T normal, so gilt für alle $u, v \in H$

$$\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, T^*Tv \rangle = \langle u, TT^*v \rangle = \langle T^*u, T^*v \rangle.$$

Beispiel 12.7. Wir betrachten wieder die Beispiele aus 2.2. Die Ergebnisse der Übungsaufgabe 2.19 und von Beispiel 2.18 zeigen dann das folgende:

- (a) Der Multiplikationsoperator M_m ist wegen

$$M_m M_m^* = M_m M_{\overline{m}} = M_{m\overline{m}} = M_{\overline{m}} M_m = M_m^* M_m$$

immer normal und er ist genau dann selbstadjungiert, wenn der Multiplikator m reellwertig ist. Schließlich ist er genau dann unitär, wenn $m\overline{m} = |m|^2 = 1$ ist, also wenn die Werte von m alle auf dem komplexen Einheitskreis liegen.

- (b) Für den Rechtsshift gilt zwar $R^*R = LR = \text{id}_{\ell^2}$, aber umgekehrt ist $RR^* = RL$ der Operator der eine Folge (a_n) auf $(0, a_2, a_3, a_4, \dots)$ schickt und das ist nicht die Identität. Rechts- und Linksshift sind also *nicht* normal.
- (c) Die Fouriertransformation ist wegen $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ unitär und damit auch normal.
- (d) Der Shiftoperator S_b auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ ist wegen $S_b S_b^* = S_b S_{-b} = S_{b-b} = S_0 = \text{id}_{L^2}$ und $S_b^* S_b = S_{-b+b} = \text{id}_{L^2}$ unitär und damit auch normal.

12 Der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

- (e) Der Faltungsoperator K_k ist genau dann selbstadjungiert, wenn $k(z) = \overline{k^*(-z)}$ gilt.

Selbstadjungierte Operatoren können nur reelle Eigenwerte haben, wie die folgende einfache Rechnung für einen selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ mit Eigenwert λ und zugehörigem normierten Eigenvektor u zeigt:

$$\lambda = \lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle Tu, u \rangle = \langle u, Tu \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle = \bar{\lambda}.$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass sogar das gesamte Spektrum auf der reellen Achse liegen muss und sogar das kleinstmögliche Intervall angeben, das das Spektrum umfasst.

Satz 12.8. Sei $T \in \mathcal{L}(H)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- (a) Wenn für alle $u \in H$ gilt $\langle Tu, u \rangle = 0$, so ist $T = 0$.
 (b) T ist genau dann selbstadjungiert, wenn für alle $u \in H$ gilt $\langle Tu, u \rangle \in \mathbb{R}$.

Sei ab jetzt T selbstadjungiert und

$$m := \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} \langle Tu, u \rangle, \quad M := \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} \langle Tu, u \rangle.$$

Dann gilt weiter:

- (c) $\|T\|_{H \rightarrow H} = \sup_{\|u\|_H=1} |\langle Tu, u \rangle| = \max\{|M|, |m|\}$,
 (d) $\sigma(T) \subseteq [m, M]$,
 (e) $m, M \in \sigma(T)$.

Beweis. (a) Nach Voraussetzung gilt für alle $u, v \in H$

$$0 = \langle T(u+v), u+v \rangle = \langle Tu, u \rangle + \langle Tu, v \rangle + \langle Tv, u \rangle + \langle Tv, v \rangle = \langle Tu, v \rangle + \langle Tv, u \rangle,$$

$$\text{also ist } \langle Tu, v \rangle = -\langle Tv, u \rangle.$$

Macht man dieselbe Rechnung mit iv an Stelle von v bekommt man

$$0 = \langle T(u+iv), u+iv \rangle = \langle Tu, iv \rangle + \langle Tiv, u \rangle = -i \langle Tu, v \rangle + i \langle Tv, u \rangle,$$

also $\langle Tu, v \rangle = \langle Tv, u \rangle$. Addition dieser beiden Gleichungen erzwingt $\langle Tu, v \rangle = 0$ für alle $u, v \in H$, also ist $Tu = 0$ für alle $u \in H$ und das bedeutet $T = 0$.

- (b) Wenn T selbstadjungiert ist, so ist wegen $\langle Tu, u \rangle = \langle u, Tu \rangle = \overline{\langle Tu, u \rangle}$ für alle $u \in H$ der Ausdruck $\langle Tu, u \rangle$ immer eine reelle Zahl. Ist umgekehrt $\langle Tu, u \rangle$ immer reell so gilt für alle $u \in H$

$$\langle T^*u, u \rangle = \overline{\langle u, T^*u \rangle} = \overline{\langle Tu, u \rangle} = \langle Tu, u \rangle.$$

Damit ist $\langle (T - T^*)u, u \rangle = 0$ für alle $u \in H$ und Teil (a) liefert $T = T^*$.

- (c) Für alle $u \in H$ mit $\|u\|_H = 1$ gilt $|\langle Tu, u \rangle| \leq \|Tu\|_H \|u\|_H \leq \|T\|_{H \rightarrow H} \|u\|_H^2 = \|T\|_{H \rightarrow H}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \|T\|_{H \rightarrow H} &\geq \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H = 1}} |\langle Tu, u \rangle| = \max \left\{ \left| \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H = 1}} \langle Tu, u \rangle \right|, \left| \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H = 1}} \langle Tu, u \rangle \right| \right\} \\ &= \max\{|M|, |m|\}. \end{aligned}$$

Es bleibt also nur noch die Ungleichung $C := \max\{|M|, |m|\} \geq \|T\|_{H \rightarrow H}$ zu zeigen.

Seien $u \in H$ mit $\|u\|_H = 1$ und $\mu > 0$. Dann gilt mit viel Aufpusten und der Selbstadjungiertheit von T

$$\begin{aligned} 4\|Tu\|_H^2 &= 4\langle Tu, Tu \rangle \\ &= \langle \mu Tu, \mu^{-1} Tu \rangle + \langle \mu^{-1} T^2 u, \mu u \rangle - \langle \mu Tu, -\mu^{-1} Tu \rangle - \langle -\mu^{-1} T^2 u, \mu u \rangle \\ &= \langle \mu Tu + \mu^{-1} T^2 u, \mu^{-1} Tu + \mu u \rangle - \langle \mu Tu, \mu u \rangle - \langle \mu^{-1} T^2 u, \mu^{-1} Tu \rangle \\ &\quad - \langle \mu Tu, -\mu^{-1} Tu \rangle - \langle -\mu^{-1} T^2 u, \mu u \rangle \\ &= \langle \mu Tu + \mu^{-1} T^2 u, \mu^{-1} Tu + \mu u \rangle - \langle \mu Tu - \mu^{-1} T^2 u, \mu u - \mu^{-1} Tu \rangle \\ &= \langle T(\mu u + \mu^{-1} Tu), \mu u + \mu^{-1} Tu \rangle - \langle T(\mu u - \mu^{-1} Tu), \mu u - \mu^{-1} Tu \rangle. \end{aligned}$$

Beide Skalarprodukte sind jetzt von der Form $\langle Tv, v \rangle$ und lassen sich daher im Betrag kontrollieren durch

$$|\langle Tv, v \rangle| = \left| \left\langle T \frac{v}{\|v\|_H}, T \frac{v}{\|v\|_H} \right\rangle \right| \cdot \|v\|_H^2 \leq \sup_{\|w\|_H = 1} |\langle Tw, w \rangle| \|v\|_H^2 = C \|v\|_H^2.$$

Das liefert

$$4\|Tu\|_H^2 \leq C\|\mu u + \mu^{-1} Tu\|_H^2 + C\|\mu u - \mu^{-1} Tu\|_H^2$$

und die Parallelogrammgleichung macht daraus

$$= 2C(\|\mu u\|_H^2 + \|\mu^{-1} Tu\|_H^2) = 2C\left(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} \|Tu\|_H^2\right).$$

Setzt man nun speziell $\mu^2 = \|Tu\|_H$ so ergibt sich

$$4\|Tu\|_H^2 \leq 2C(\|Tu\|_H + \|Tu\|_H) = 4C\|Tu\|_H$$

und kürzen wir die Norm von Tu einmal heraus bleibt genau das gewünschte $C \geq \|Tu\|_H$ für alle $u \in H$ mit $\|u\|_H = 1$ stehen.

- (d) Mit Satz 12.4 gilt sofort

$$\sigma(T) \subseteq W(T) = \{\langle Tu, u \rangle : u \in H, \|u\|_H = 1\} \subseteq [m, M].$$

12 Der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

(e) Es gilt

$$\sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} \langle (T - m)u, u \rangle = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} (\langle Tu, u \rangle - m \langle u, u \rangle) = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} \langle Tu, u \rangle - m = M - m$$

und genauso $\inf_{\|u\|_H=1} \langle (T - m)u, u \rangle = m - m = 0$. Weiter gilt eingedenk Bemerkung 11.2 (d) auch $\sigma(T - m) = \sigma(T) - m$. Wir können also durch Betrachtung von $T - m$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass $m = 0$ gilt. Dann ist $M \geq m = 0$ und wir haben $\langle Tu, u \rangle \geq 0$ für alle $u \in H$. Nach Teil (c) gilt außerdem

$$M = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} \langle Tu, u \rangle = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} |\langle Tu, u \rangle| = \|T\|_{H \rightarrow H}.$$

Sei nun (u_n) eine Folge in H mit $\|u_n\|_H = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Tu_n, u_n \rangle = M$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|(M - T)u_n\|_H^2 &= \langle Mu_n - Tu_n, Mu_n - Tu_n \rangle \\ &= M^2 \|u_n\|_H^2 - M \langle u_n, Tu_n \rangle - M \langle Tu_n, u_n \rangle + \|Tu_n\|_H^2 \\ &= M^2 - 2M \langle Tu_n, u_n \rangle + \|Tu_n\|_H^2 \\ &\leq M^2 - 2M \langle Tu_n, u_n \rangle + M^2 \|u_n\|_H^2 \\ &= 2M^2 - 2M \langle Tu_n, u_n \rangle \rightarrow 2M^2 - 2M^2 = 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Also ist (u_n) ein approximativer Eigenvektor zum approximativen Eigenwert M und damit gilt $M \in \sigma(T)$.

Zum Nachweis, dass $m \in \sigma(T)$ ist, betrachtet man den Operator $-T$. Dann drehen sich m und M um und obiger Beweis liefert $-m \in \sigma(-T)$, d. h. $m \in \sigma(T)$. $\square$

12.3 Der Spektralsatz

Jetzt können wir uns langsam unserem Ziel nähern, geeignete selbstadjungierte Operatoren bezüglich einer Orthonormalbasis zu diagonalisieren. Dazu kombinieren wir ihre schönen Eigenschaften mit denen von kompakten Operatoren. Die dafür relevanten Spektral-Features von kompakten Operatoren sammeln wir in einem praktischen Lemma.

Lemma 12.9. *Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ kompakt. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Wenn X unendlich-dimensional ist, dann gilt $0 \in \sigma(T)$.*
- (b) *Für alle $\lambda \neq 0$ ist $\ker(\lambda - T)$ endlich-dimensional.*

(c) Für alle $\lambda \neq 0$ ist $\text{ran}(\lambda - T)$ abgeschlossen.

Beweis. (a) Nehmen wir an, dass $0 \in \rho(T)$ gilt, so ist T^{-1} ein stetiger Operator und damit ist $\text{id}_X = TT^{-1}$ als Verkettung eines kompakten Operators mit einem stetigen nach Satz 8.7 (b) auch kompakt. Nach Satz 8.3 ist X dann endlich-dimensional.

(b) Sei $K := \{u \in \ker(\lambda - T) : \|u\|_X \leq 1\}$ der Schnitt der Einheitskugel mit dem Kern. Dann ist K als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Sei (u_n) eine Folge in K . Dann ist (u_n) beschränkt und da T kompakt ist, hat (Tu_n) eine konvergente Teilfolge (Tu_{n_k}) . Da die Folge im Kern von $\lambda - T$ liegt, gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ außerdem $(\lambda - T)u_{n_k} = 0$ und damit $u_{n_k} = 1/\lambda Tu_{n_k}$. Damit ist (u_{n_k}) eine konvergente Teilfolge von (u_n) .

Wir haben bewiesen, dass jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt, d. h. K ist kompakt. Das ist wiederum nach Satz 8.3 nur möglich, wenn $\ker(\lambda - T)$ endlich-dimensional ist.

(c) Da $\ker(\lambda - T)$ nach Teil (b) endlich-dimensional ist, gibt es dank Beispiel 6.12 eine stetige, surjektive Projektion $P : X \rightarrow \ker(\lambda - T)$. Wir setzen $V := \ker(P) = \text{ran}(1 - P)$ und betrachten den Operator $T_{\lambda,V} := (\lambda - T)|_V \in \mathcal{L}(V, X)$. Da dieser eine Einschränkung von $\lambda - T$ ist, gilt direkt $\text{ran}(T_{\lambda,V}) \subseteq \text{ran}(\lambda - T)$ und tatsächlich gilt auch die umgekehrte Inklusion, denn für jedes $v \in \text{ran}(\lambda - T)$ gilt mit einem passenden $u \in X$, das $(\lambda - T)u = v$ erfüllt, wegen $Pu \in \ker(\lambda - T)$

$$v = (\lambda - T)u = (\lambda - T)Pu + (\lambda - T)(1 - P)u = (\lambda - T) \underbrace{(1 - P)u}_{\in V} \in \text{ran}(T_{\lambda,V}).$$

Also ist $\text{ran}(\lambda - T) = \text{ran}(T_{\lambda,V})$ und wir machen uns daran zu zeigen, dass letzterer abgeschlossen ist. Dazu weisen wir nach, dass $T_{\lambda,V}$ die Voraussetzungen von Lemma 11.11 erfüllt, d. h. wir wollen zeigen, dass es ein $c > 0$ gibt mit

$$c\|u\|_X \leq \|T_{\lambda,V}u\|_X \quad \text{für alle } u \in V.$$

Wir nehmen an, die Ungleichung wäre falsch, d. h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es (mit $c = 1/n$) ein $u_n \in V$ mit $\|u_n\|_X = 1$ und $\|T_{\lambda,V}u_n\|_X < 1/n$. Insbesondere gilt also $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\lambda,V}u_n = 0$. Weiterhin ist die Folge (u_n) beschränkt, dank der Kompaktheit von T gibt es also eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $v \in X$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} Tu_{n_k} = v$. Zusammengefasst folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda u_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} ((\lambda - T)u_{n_k} + Tu_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\lambda,V}u_{n_k} + Tu_{n_k}) = 0 + v = v.$$

Damit ist v als Grenzwert von Elementen λu_{n_k} des abgeschlossenen Teilraums V selbst ein Element von V und es gilt außerdem $v \in \ker(\lambda - T)$, denn

$$(\lambda - T)v = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda - T)\lambda u_{n_k} = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} T_{\lambda,V}u_{n_k} = 0.$$

12 Der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Da die Zerlegung von X in $\ker(\lambda - T)$ und V aber direkt ist, muss damit $v = 0$ sein und das steht im Widerspruch zu $\|v\|_X = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda u_{n_k}\| = |\lambda| \neq 0$. $\square$

Wir können nun das Spektrum kompakter selbstadjungierter Operatoren charakterisieren.

Satz 12.10. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Ist $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, dann ist λ ein Eigenwert von T und der zugehörige Eigenraum ist endlich-dimensional.*
- (b) *Für jedes $C > 0$ ist die Anzahl der Eigenwerte von T , die größer als C sind, endlich. Insbesondere hat T höchstens abzählbar viele Eigenwerte.*
- (c) *Hat T unendlich viele Eigenwerte λ_n , $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.*

Beweis. (a) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt mit Hilfe der Selbstadjungiertheit von $\lambda - T$ und Satz 2.20 (a)

$$\operatorname{ran}(\lambda - T)^\perp = \operatorname{ran}((\lambda - T)^*)^\perp = \ker(\lambda - T).$$

Sei nun $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ und wir nehmen an, λ wäre kein Eigenwert von T , d. h. $\ker(\lambda - T) = \{0\}$ und $\lambda - T$ ist injektiv. Dann folgt sofort, dass $\operatorname{ran}(\lambda - T)^\perp$ ebenfalls nur die Null enthält und das bedeutet mit Lemma 1.11, dass $\operatorname{ran}(\lambda - T)$ dicht in H liegt. Nach Lemma 12.9 (c) ist diese Menge zusätzlich abgeschlossen, so dass $\operatorname{ran}(\lambda - T) = H$ folgt, d. h. $\lambda - T$ ist auch surjektiv und damit bijektiv. Das bedeutet aber $\lambda \in \rho(T)$ und das kann nicht sein. Also muss λ ein Eigenwert von T sein. Dass der Eigenraum endlich-dimensional ist, folgt schließlich direkt aus Lemma 12.9 (b).

- (b) Sei $C > 0$. Angenommen es gäbe eine Folge von paarweise verschiedenen Eigenwerten (λ_n) mit $|\lambda_n| \geq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir einen normierten Eigenvektor u_n von T zum Eigenwert λ_n und setzen $U_0 := \{0\}$ sowie $U_n := \operatorname{span}(\{u_1, \dots, u_n\})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Diese Räume haben zwei für das weitere relevante Eigenschaften. Zum Einen sind sie alle T -invariant, denn für jedes $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \in U_n$ gilt

$$Tv = T \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j T u_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j u_j \in U_n.$$

Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, ist zum Anderen U_n jeweils ein n -dimensionaler Unterraum von H und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $U_{n-1} \subsetneq U_n$.

Wir können also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein normiertes $v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(n)} u_j \in U_n \cap U_{n-1}^\perp$ wählen. Dann gilt

$$(\lambda_n - T)v_n = (\lambda_n - T) \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^{(n)} u_j + \alpha_n^{(n)} (\lambda_n - T)u_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^{(n)} (\lambda_n - \lambda_j) u_j + 0 \in U_{n-1}.$$

Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ liefert das

$$Tv_n - Tv_m = -\lambda_n v_n + (\lambda_n - T)v_n - Tv_m = -\lambda_n \underbrace{\left(v_n - \frac{1}{\lambda_n} (\lambda_n - T)v_n + \frac{1}{\lambda_n} Tv_m \right)}_{=: w \in U_{n-1}}.$$

Da $w \in U_{n-1}$ und v_n ein normiertes Element von $U_{n-1}^\perp$ ist, gilt $\|v_n - w\|_H \geq 1$, vgl. die Rechnung in Bemerkung 8.2. Damit finden wir

$$\|Tv_n - Tv_m\|_H = |\lambda_n| \|v_n - w\|_H \geq |\lambda_n| \geq C$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Das bedeutet, dass die Folge (Tv_n) keine konvergente Teilfolge haben kann, was aber im Widerspruch zur Kompaktheit von T steht, denn die Folge (v_n) ist als Folge von normierten Vektoren offensichtlich beschränkt. Es kann also nur endlich viele Eigenwerte mit größerem Betrag als C geben.

Damit ist

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

als abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen abzählbar.

- (c) Angenommen die Aussage ist falsch. Dann gibt es ein $C > 0$ und eine Teilfolge $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (λ_n) mit $|\lambda_{n_k}| \geq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch zu Teil (b). $\square$

Jetzt können wir das zentrale Resultat dieses Kapitels formulieren.

Theorem 12.11 (Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren). *Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Es bezeichne $\lambda_n \in \mathbb{R}$ für $n \in I \subseteq \mathbb{N}$ alle (endlich oder unendlich vielen) paarweise verschiedenen Eigenwerte von T , die nicht Null sind, und $N_n := \dim(\ker(\lambda_n - T))$ für $n \in I$. Dann gibt es ein Orthonormalsystem $\{e_{n,j} \in H : n \in I, 1 \leq j \leq N_n\}$, wobei $e_{n,1}, \dots, e_{n,N_n}$ jeweils Eigenvektoren von T zum Eigenwert λ_n sind und es gilt für alle $u \in H$*

$$Tu = \sum_{n \in I} \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_n \langle u, e_{n,j} \rangle e_{n,j}.$$

12 Der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Beweis. Nach Satz 12.10 ist für jedes $n \in I$ der Raum $\ker(\lambda_n - T)$ endlich-dimensional, so dass wir jeweils eine Orthonormalbasis $e_{n,1}, \dots, e_{n,N_n}$ dieses Raums wählen können. Wir stecken alle diese zu $B := \{e_{n,j} : n \in I, j = 1, \dots, N_n\}$ zusammen und überlegen uns, dass das ein Orthonormalsystem ist. Dazu ist nur zu zeigen, dass Vektoren aus Eigenräumen zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen. Seien also $m, n \in I$ mit $m \neq n$ und $u \in \ker(\lambda_m - T)$, $v \in \ker(\lambda_n - T)$. Dann gilt

$$(\lambda_m - \lambda_n) \langle u, v \rangle = \langle \lambda_m u, v \rangle - \langle u, \lambda_n v \rangle = \langle Tu, v \rangle - \langle u, Tv \rangle = 0$$

und wegen $\lambda_m \neq \lambda_n$ folgt $\langle u, v \rangle = 0$. Das selbe Argument mit $\lambda_m = 0$ liefert auch, dass $\ker(T)$ auf jedem der Eigenräume senkrecht steht.

Wir betrachten den Teilraum $U := \ker(T) \oplus \overline{\text{span}(B)}$ von H , der jetzt als orthogonale direkte Summe von abgeschlossenen Teilräumen von H abgeschlossen und folglich auch selbst ein Hilbertraum ist. Da B ein Orthonormalsystem ist, lässt sich jedes $u \in U$ schreiben als

$$u = Pu + \sum_{n \in I} \sum_{j=1}^{N_n} \langle u, e_{n,j} \rangle e_{n,j}, \quad (12.2)$$

wobei P die Orthogonalprojektion auf $\ker(T)$ ist. Die Hauptarbeit ist es nun, nachzuweisen, dass tatsächlich schon $U = H$ ist. Das machen wir, indem wir in mehreren Schritten zeigen, dass $U^\perp = \{0\}$ ist.

1. Schritt: $U^\perp$ ist T -invariant. Sei $u \in U^\perp$. Dann gilt insbesondere $\langle u, e_{n,j} \rangle = 0$ für jedes $e_{n,j} \in B$ und für jedes $v \in U$ folgt mit der Darstellung aus (12.2)

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \langle u, Tv \rangle = \left\langle u, TPv + T \sum_{n \in I} \sum_{j=1}^{N_n} \langle v, e_{n,j} \rangle e_{n,j} \right\rangle = \left\langle u, 0 + \sum_{n \in I} \sum_{j=1}^{N_n} \langle v, e_{n,j} \rangle T e_{n,j} \right\rangle \\ &= \left\langle u, \sum_{n \in I} \sum_{j=1}^{N_n} \langle v, e_{n,j} \rangle \lambda_n e_{n,j} \right\rangle = \sum_{n \in I} \sum_{j=1}^{N_n} \langle v, e_{n,j} \rangle \lambda_n \langle u, e_{n,j} \rangle = 0, \end{aligned}$$

also $Tu \in U^\perp$. Das bedeutet, dass T den Raum $U^\perp$ in sich selbst abbildet und wir können daher $T^\perp := T|_{U^\perp}$ als Operator aus $\mathcal{L}(U^\perp)$ anschauen.

2. Schritt: $T^\perp$ ist selbstadjungiert und kompakt. Da für alle $u, v \in U^\perp$ gilt $\langle T^\perp u, v \rangle_{U^\perp} = \langle Tu, v \rangle_H = \langle u, Tv \rangle_H = \langle u, T^\perp v \rangle_{U^\perp}$, ist $T^\perp$ als Operator in $U^\perp$ ebenfalls selbstadjungiert. Außerdem bleibt die Einschränkung auch kompakt, denn $T^\perp$ ist als Hintereinanderausführung der stetigen identischen Abbildung von $U^\perp$ nach H und dem kompakten Operator T wieder kompakt, vgl. Satz 8.7 (b).

3. Schritt: $T^\perp = 0$. Wir nehmen an, es wäre $T^\perp \neq 0$. Dann ist nach Satz 12.8 (c) und (e) der Wert $\mu := \|T^\perp\|_{U^\perp \rightarrow U^\perp} \neq 0$ im Spektrum von $T^\perp$ und dank Satz 12.10 (a) ist μ sogar ein Eigenwert von $T^\perp$. Es gibt also ein $u \in U^\perp \setminus \{0\}$ mit $T^\perp u = \mu u$. Da $T^\perp$ aber einfach nur eine Einschränkung von T ist, gilt dann auch $Tu = \mu u$, also ist μ ebenso ein Eigenwert von T , stimmt also mit einem unserer λ_n überein. Damit ist $u \in \text{span}(B) \subseteq U$ und in $U^\perp$ und das liefert $u = 0$ und wir haben einen Widerspruch.

4. Schritt: Wir sind fertig. Sei $u \in U^\perp$. Dann ist $Tu = T^\perp u = 0$, also ist $U^\perp \subseteq \ker(T) \subseteq U$ und das geht nur, wenn $U^\perp = \{0\}$ ist. Damit gilt $H = U$, d. h. die Darstellung in (12.2) gilt für jedes $u \in H$. Das liefert die behauptete Formel

$$Tu = TPu + \sum_{n \in I} \sum_{j=1}^{N_n} \langle u, e_{n,j} \rangle T e_{n,j} = \sum_{n \in I} \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_n \langle u, e_{n,j} \rangle e_{n,j}. \quad \square$$

12.4 Rückkehr zum schwachen Poisson-Problem

Der Spektralsatz hat viele, zum Teil sehr weitreichende Verallgemeinerungen, auf die hier nicht eingegangen werden kann und mindestens genauso viele tiefliegende Anwendungen. Um wenigstens einen klitzekleinen Eindruck zu geben, wollen wir die Erkenntnisse kurz anwenden, um unsere Behandlung des schwachen Dirichlet-Problems aus Kapitel 3 fortzusetzen.

Im gesamten Abschnitt bezeichnet $I = [a, b]$ wieder ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ und wir erinnern uns kurz, dass es darum ging, das Randwertproblem zum Poissonproblem

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{auf } I \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

zu lösen, also für jedes vorgegebene f aus einem geeigneten Funktionenraum ein eindeutiges u als Lösung zu finden. Wir fassen kurz die Erkenntnisse aus Kapitel 3 in einem Satz zusammen und übersetzen sie dabei gleich in funktionalanalytische Operatorensprache.

Satz 12.12. *Es gibt einen stetigen Operator $S_0 \in \mathcal{L}(L^2(I), H_0^1(I))$ mit $\text{ran}(S_0) \subseteq H^2(I)$, so dass für jedes $f \in L^2(I)$ im schwachen Sinne gilt $-(S_0 f)'' = f$ und für jedes $u \in H_0^1(I) \cap H^2(I)$ ist $-S_0(u'') = u$.*

Wir überlegen uns im Folgenden, wie wir dieses Resultat und unsere Erkenntnisse über kompakte, selbstadjungierte Operatoren aus dem vorhergehenden Abschnitt nutzen können, um für fast alle $\mu \in \mathbb{C}$ das allgemeinere Poisson-Resolventen-Problem

$$\begin{cases} \mu u - u'' = f & \text{auf } I \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{PP}_\mu)$$

12 Der Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

zu lösen und beweisen das folgende Resultat.

Satz 12.13. *Es gibt eine Folge $(\mu_n) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n| = \infty$, so dass für alle $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ und alle $f \in L^2(I)$ das Randwertproblem (PP_μ) eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(I) \cap H^2(I)$ hat und der entsprechende Lösungsoperator $S_\mu : L^2(I) \rightarrow H_0^1(I)$ mit $S_\mu f = u$ stetig ist.*

Bevor wir in den Beweis einsteigen, machen wir die folgende Überlegung: Ist u eine Lösung von (PP_μ) , so gilt

$$\begin{aligned} \mu u - u'' &= f \implies \mu S_0 u - S_0(u'') = S_0 f \implies S_0 u + \frac{1}{\mu} u = \frac{1}{\mu} S_0 f \\ &\implies \left(-\frac{1}{\mu} - S_0\right)u = -\frac{1}{\mu} S_0 f. \end{aligned}$$

Der Kandidat für unsere Lösung ist also $u = -R(-1/\mu, S_0) \frac{1}{\mu} S_0 f$. Ganz so kann es nicht stimmen, denn beispielsweise ist S_0 gar kein Operator auf einem Hilbertraum in sich selbst (hat also gar keine Resolvente), aber es ist trotzdem gut, diese Idee im Kopf zu behalten, denn diese setzen wir jetzt sauber um.

Beweis. Nach Beispiel 8.10 (b) ist die Einbettung $j : H_0^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$ kompakt, so dass der Operator $\tilde{S}_0 := j \circ S_0 \in \mathcal{L}(L^2(I))$ als Verkettung eines kompakten mit einem stetigen Operator kompakt ist. Außerdem ist $\tilde{S}_0$ selbstadjungiert, denn für alle $f, g \in L^2(I)$ gilt wegen $S_0 f, S_0 g \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ und der partiellen Integration aus Korollar 3.12

$$\begin{aligned} \langle \tilde{S}_0 f, g \rangle &= \langle S_0 f, g \rangle = \langle S_0 f, -(S_0 g)'' \rangle = \langle (S_0 f)', (S_0 g)' \rangle \\ &= -\langle (S_0 f)'', S_0 g \rangle = \langle f, \tilde{S}_0 g \rangle. \end{aligned}$$

Damit erfüllt $\tilde{S}_0$ die Voraussetzungen des Spektralsatzes und es gilt $\sigma(\tilde{S}_0) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $\lambda_n \neq 0$ alle verschiedenen Eigenwerte von $\tilde{S}_0$ und es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

Setzen wir nun $\mu_n = -1/\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n| = \infty$ und für alle $\mu \in \mathbb{C}$, die kein solches μ_n sind, gilt $-1/\mu \in \rho(\tilde{S}_0)$.

Wir zeigen zunächst, dass es für jedes solche μ höchstens eine Lösung von (PP_μ) geben kann. Sind u, v beides Lösungen, so gilt mit der Vorüberlegung vor dem Beweis

$$\left(-\frac{1}{\mu} - \tilde{S}_0\right)(u - v) = \left(-\frac{1}{\mu} - S_0\right)u - \left(-\frac{1}{\mu} - S_0\right)v = -\frac{1}{\mu} S_0 f + \frac{1}{\mu} S_0 f = 0,$$

und da $-1/\mu - \tilde{S}_0$ injektiv ist, folgt $u = v$.

Für vorgegebenes $f \in L^2(I)$ können wir nun

$$u := -R\left(-\frac{1}{\mu}, \tilde{S}_0\right) \frac{1}{\mu} \tilde{S}_0 f$$

12.4 Rückkehr zum schwachen Poisson-Problem

setzen und werden dann nachrechnen, dass das die gesuchte Lösung ist.

Zunächst gilt durch Anwendung von $1/\mu + \widetilde{S}_0 = -(-1/\mu - \widetilde{S}_0)$ auf die Definition von u

$$\frac{1}{\mu}u + \widetilde{S}_0u = \frac{1}{\mu}\widetilde{S}_0f.$$

Das liefert uns

$$u = \widetilde{S}_0f - \mu\widetilde{S}_0u = \widetilde{S}_0(f - \mu u) \in \text{ran}(\widetilde{S}_0) \subseteq H_0^1(I) \cap H^2(I).$$

Wir dürfen also u zwei Mal schwach ableiten und bekommen tatsächlich

$$\mu u - u'' = \mu u - [\widetilde{S}_0(f - \mu u)]'' = \mu u + f - \mu u = f.$$

Weiter erfüllt u als Element von $H_0^1(I)$ auch die Randbedingungen und es bleibt noch die behauptete Stetigkeit zu zeigen. Dazu beobachten wir zunächst, dass für alle $\lambda \in \rho(\widetilde{S}_0)$ gilt

$$\begin{aligned} R(\lambda, \widetilde{S}_0)\widetilde{S}_0 &= R(\lambda, \widetilde{S}_0)(\widetilde{S}_0 - \lambda) + \lambda R(\lambda, \widetilde{S}_0) = -\text{id}_{L^2(I)} + \lambda R(\lambda, \widetilde{S}_0) \\ &= (\widetilde{S}_0 - \lambda)R(\lambda, \widetilde{S}_0) + \lambda R(\lambda, \widetilde{S}_0) = \widetilde{S}_0 R(\lambda, \widetilde{S}_0), \end{aligned}$$

der Operator $\widetilde{S}_0$ kommutiert also mit seiner Resolvente. Damit gilt für alle $f \in L^2(I)$ dank der Stetigkeit von S_0 als Operator von $L^2(I)$ nach $H^1(I)$

$$\begin{aligned} \|S_\mu f\|_{H^1(I)} &= \left\| R\left(-\frac{1}{\mu}, \widetilde{S}_0\right) \frac{1}{\mu} \widetilde{S}_0 f \right\|_{H^1(I)} = \frac{1}{|\mu|} \left\| \widetilde{S}_0 R\left(-\frac{1}{\mu}, \widetilde{S}_0\right) f \right\|_{H^1(I)} \\ &= \frac{1}{|\mu|} \left\| S_0 R\left(-\frac{1}{\mu}, \widetilde{S}_0\right) f \right\|_{H^1(I)} \\ &\leq \frac{1}{|\mu|} \|S_0\|_{L^2(I) \rightarrow H^1(I)} \left\| R\left(-\frac{1}{\mu}, \widetilde{S}_0\right) \right\|_{L^2(I) \rightarrow L^2(I)} \|f\|_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

woran ersichtlich wird, dass S_μ stetig von $L^2(I)$ nach $H^1(I)$ abbildet. □

13 Dunford-Kalkül

Im gesamten Kapitel sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$.

In vielen Zusammenhängen betrachten man Funktionen von Operatoren, so kann man $T^4 - T^3 + T$ interpretieren als T eingesetzt in das Polynom $z^4 - z^3 + z$ oder $R(\lambda, T)$ als T eingesetzt in die Funktion $z \mapsto 1/\lambda - z$.

Wir wollen jetzt einen Kalkül kennenlernen, der es systematischer erlaubt Operatoren in gewisse Funktionen einzusetzen, also beispielsweise auch Ausdrücken einen Sinn zu geben wie e^T (zum Interesse daran vgl. die Vorlesung zu gewöhnlichen Differentialgleichungen), $\sqrt{T}$, $T^{1/3}$, $\cos(T)$, $\ln(1 + T)$, ... Dabei soll natürlich eine sinnvolle Setzung entstehen, die beispielsweise kompatibel mit den obigen Beispielen zu Polynomen und Resolventen ist und Linearität $(f + g)(T) = f(T) + g(T)$ sowie Multiplikativität $(fg)(T) = f(T)g(T)$ u.ä. gewährleistet. Solche sogenannten *Funktionalkalküle* gibt es einige und wir wollen hier exemplarisch einen kennenlernen, der auf unseren Erkenntnissen zur Spektraltheorie in Kapitel 11 und aus der Banachraum-wertigen Funktionentheorie in Kapitel 10 und dort insbesondere auf der Cauchy-Integral-Formel beruht.

13.1 Der Kalkül

Betrachtet man die Cauchy-Integral-Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda)(\lambda - z)^{-1} d\lambda,$$

so ist daran immer wieder das besondere, dass die Abhängigkeit von der Variablen z , die auf der linken Seite im f steht, auf der rechten Seite aus dem f herauswandert und dort sehr einfach in einer rationalen Funktion auftaucht. Es ist kein großes Problem auf der rechten Seite der Formel, das z durch ein T zu ersetzen und das liefert uns die Idee, den Operator $f(T)$ durch

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda)(\lambda - T)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda)R(\lambda, T) d\lambda$$

zu definieren. Das wollen wir jetzt exakt tun. Dazu betrachten wir holomorphe Funktionen $f : D_f \rightarrow \mathbb{C}$, wobei D_f immer den offenen Definitionsbereich von f bezeichne.

Für die Konstruktion ist es entscheidend, dass D_f zumindest das Spektrum $\sigma(T)$ von T enthält. Man beachte, dass dank der Kompaktheit von $\sigma(T)$ dann ein echt positiver Sicherheitsabstand zwischen $\sigma(T)$ und ∂D_f besteht.

Definition 13.1. (a) Wir setzen

$$\mathcal{H}(T) := \{f : D_f \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph mit } D_f \subseteq \mathbb{C} \text{ offen und } \sigma(T) \subseteq D_f\}.$$

- (b) Sei $f \in \mathcal{H}(T)$ mit Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{C}$. Ein geschlossener $\mathbb{C}^1$ -Zyklus in D_f , der $\sigma(T)$ genau einmal positiv umrundet und nullhomolog in D_f ist, heißt für f geeignet. Ist γ ein geeigneter Zyklus für f , so definieren wir $f(T) \in \mathcal{L}(X)$ als

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda. \quad (13.1)$$

Die Abbildung $\Phi_T : \mathcal{H}(T) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ mit $\Phi_T(f) = f(T)$ heißt Dunford-Kalkül von T .

Bemerkung 13.2. (a) Für jeden geeigneten Zyklus γ ist das Integral in (13.1) als Bochner-Integral in $\mathcal{L}(X)$ definiert, denn der Integrand ist eine stetige Funktion in λ entlang eines kompakten Weges, es kommt also tatsächlich ein Operator in $\mathcal{L}(X)$ heraus.

Desweiteren ist die Definition in dem Sinne sinnvoll, dass sie nicht vom konkret gewählten geeigneten Weg abhängt. Das folgt aus dem Cauchy-Integral-Theorem, denn ist $\tilde{\gamma}$ ein weiterer geeigneter Weg, so ist $\gamma - \tilde{\gamma}$ ein geschlossener, nullhomologer Zyklus in D_f , für den die Umlaufzahl für jedes $z \in \sigma(T)$ Null ist. Also ist er sogar nullhomolog in $D \setminus \sigma(T)$ und auf dieser Menge ist der Integrand in (13.1) holomorph. Das Cauchy-Integral-Theorem, vgl. Beispiel 10.6, liefert also

$$\int_{\gamma} f(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda - \int_{\tilde{\gamma}} f(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda = \int_{\gamma - \tilde{\gamma}} f(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda = 0.$$

- (b) Die Sammlung von Funktionen in $\mathcal{H}(T)$ hat eine algebraisch schöne Struktur. So ist nicht nur für $f, g \in \mathcal{H}(T)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ auch die Funktion $\alpha f + g : D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{C}$ wieder in $\mathcal{H}(T)$, was $\mathcal{H}(T)$ zu einem Vektorraum macht. Gleiches gilt sogar für das Produkt $fg : D_f \cap D_g \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $\mathcal{H}(T)$ sogar die Struktur einer Algebra hat.

Damit ist unser $f(T)$ für jedes $f \in \mathcal{H}(T)$ wohldefiniert, und wir können anfangen nachzuprüfen, ob dabei auch ein vernünftiger Kalkül herauskommt, d.h. unsere zu Beginn des Abschnitts formulierten Wünsche erfüllt werden.

Im Folgenden schreiben wir fettgedrucktes $\mathbf{z}$ für die Funktion $z \mapsto z$, auch in dem Sinne, dass beispielsweise $1/1-\mathbf{z}$ für die Funktion $z \mapsto 1/1-z$ steht. Genauso notiert $\mathbf{1}$ die konstante Eins-Funktion.

Satz 13.3. Sei $f \in \mathcal{H}(T)$. Dann gilt:

(a) Die Abbildung $\Phi_T : \mathcal{H}(T) \rightarrow \mathcal{L}(X)$, $f \mapsto f(T)$ ist ein Algebrhomomorphismus, d. h. für alle $f, g \in \mathcal{H}(T)$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$(i) \quad (\alpha f + g)(T) = \alpha f(T) + g(T),$$

$$(ii) \quad (fg)(T) = f(T)g(T) \text{ und}$$

$$(iii) \quad \mathbf{1}(T) = \text{id}_X.$$

(b) Für alle $f, g \in \mathcal{H}(T)$ gilt

$$f(T)g(T) = g(T)f(T).$$

(c) Für jedes Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ gilt $p(T) = \sum_{k=0}^n \alpha_k T^k$.

(d) Ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \sigma(T)$, so ist $1/f \in \mathcal{H}(T)$, $f(T)$ invertierbar in $\mathcal{L}(X)$ und es gilt $f(T)^{-1} = (1/f)(T)$. Insbesondere gilt für alle $\lambda \in \rho(T)$, dass $1/(\lambda - z)(T) = R(\lambda, T)$ ist.

Beweis. (a) Die Linearität von Φ_T in (i) folgt aus der Linearität des Integrals. Dazu wählen wir uns einen Weg γ , der für f und g gleichzeitig geeignet ist. Das geht, indem wir einen solchen in $D_f \cap D_g$ wählen. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} (\alpha f + g)(T) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\alpha f + g)(\lambda) R(\lambda, T) \, d\lambda \\ &= \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) R(\lambda, T) \, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\lambda) R(\lambda, T) \, d\lambda \\ &= \alpha f(T) + g(T). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass Φ_T auch multiplikativ ist. Seien dazu $f, g \in \mathcal{H}(T)$ mit Definitionsbereichen D_f, D_g . Wir wählen nun in $D_f \cap D_g$ ein für f geeignetes γ_f und ein für g geeignetes γ_g , so dass γ_f ganz im Inneren von γ_g liegt. (Machen Sie sich an an einer Skizze klar, dass das geht!) Dann gilt

$$\begin{aligned} f(T)g(T) &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} f(\lambda) R(\lambda, T) \, d\lambda \right) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_g} g(\mu) R(\mu, T) \, d\mu \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} f(\lambda) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_g} g(\mu) R(\lambda, T) R(\mu, T) \, d\mu \right) \, d\lambda. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Resolventengleichung und dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} f(\lambda) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_g} g(\mu) \frac{1}{\mu - \lambda} (\mathbf{R}(\lambda, T) - \mathbf{R}(\mu, T)) \, d\mu \right) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} f(\lambda) \mathbf{R}(\lambda, T) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_g} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} \, d\mu \right) d\lambda \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_g} g(\mu) \mathbf{R}(\mu, T) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} \frac{f(\lambda)}{\mu - \lambda} \, d\lambda \right) d\mu.
\end{aligned}$$

Da die Kurve γ_f im Inneren der Kurve γ_g liegt und für jedes μ auf γ_g die Funktion $\lambda \mapsto f(\lambda)/(\mu - \lambda)$ im Inneren von γ_g holomorph ist, verschwindet nach dem Cauchy-Integral-Theorem der zweite Summand. Umgekehrt folgt aus der Cauchy-Integral-Formel, dass das innere Integral im ersten Summand genau $g(\lambda)$ ist. Das liefert

$$\begin{aligned}
f(T)g(T) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} f(\lambda) \mathbf{R}(\lambda, T) g(\lambda) \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} (f \cdot g)(\lambda) \mathbf{R}(\lambda, T) \, d\lambda \\
&= (f \cdot g)(T).
\end{aligned}$$

Schließlich betrachten wir die Einsfunktion $\mathbf{1}$. Dazu wählen wir ein $R > \|T\|_{X \rightarrow X}$ und beobachten, dass wegen $\sigma(T) \subseteq U_R(0)$, vgl. Bemerkung 11.5, der durch $\partial U_R(0)$ beschriebene Weg für diese Funktion geeignet ist. Mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der Resolvente aus derselben Bemerkung und einem altbekannten Integral aus der Funktionentheorie folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}(T) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(0)} \mathbf{R}(\lambda, T) \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \, d\lambda \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(0)} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \, d\lambda T^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \delta_{n0} T^n = T^0 = \text{id}_X. \quad (13.2)
\end{aligned}$$

- (b) Seien $f, g \in \mathcal{H}(T)$. Für diese gilt $fg = gf$, also ist mit der Multiplikativität des Kalküls aus Teil (a) sofort $f(T)g(T) = (fg)(T) = (gf)(T) = g(T)f(T)$.
- (c) Sei wieder $R > \|T\|_{X \rightarrow X}$. Dann ist auch für die Funktion $\mathbf{z} = \text{id}_{\mathbb{C}}$ der entlang $\partial U_R(0)$ gegebene Weg geeignet und mit einer zu (13.2) analogen Rechnung folgt

$$\mathbf{z}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(0)} \lambda \mathbf{R}(\lambda, T) \, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(0)} \frac{1}{\lambda^n} \, d\lambda T^n = T^1 = T.$$

Da jedes Polynom eine Linearkombination von $\mathbf{1}$ und Produkten von $\mathbf{z}$ ist, folgt die Behauptung damit aus Teil (a).

13.2 Spektraler Abbildungssatz und Spektralradius

- (d) Die Menge $D_{1/f} := \{z \in D_f : f(z) \neq 0\} = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ist offen und enthält nach Voraussetzung $\sigma(T)$. Damit ist die auf dieser Menge definierte und holomorphe Funktion $1/f$ in $\mathcal{H}(T)$ und es gilt nach Teil (a)

$$\frac{1}{f}(T)f(T) = \left(\frac{1}{f}f\right)(T) = \mathbf{1}(T) = \text{id}_X$$

und genauso $f(T)1/f(T) = \text{id}_X$. Also ist $f(T)$ invertierbar mit $f(T)^{-1} = 1/f(T)$. $\square$

Warnung 13.4. Die Schreibweise $f(T)$ für $\Phi_T(f)$ ist sehr intuitiv und angenehm und wird deshalb auch hier durchgehend verwendet. Sie hat aber eine unglaubliche Tücke und diese sollte einem beim Umgang mit Funktionalkalkülen immer bewusst sein. In unseren gesamten Betrachtungen hier ist der Operator T fixiert und wir setzen diesen in verschiedene Funktionen ein. Die Variable des Dunford-Kalküls ist also das f und nicht das T , wie es in der Schreibweise des Algebra-Homomorphismus $\Phi_T(f)$ auch richtig zum Ausdruck kommt.

Ändert man das T , ändert sich auch das Spektrum und man bekommt eine völlig neue Algebra $\mathcal{H}(T)$ und einen komplett neuen Dunford-Kalkül, der mit dem alten nicht kompatibel ist.

Man darf also beim Hinschreiben des Ausdrucks $f(T)$ nie das T als eine Variable denken, obwohl die Schreibweise genau das suggeriert. Die Verhältnisse sind hier genau anders herum: Das T ist fix, das f variiert!

13.2 Spektraler Abbildungssatz und Spektralradius

Der Dunford-Kalkül eröffnet zum Einen die Möglichkeit Operatoren in Funktionen einzusetzen, zum Anderen und fast noch wichtiger, kann man mit ihm Berechnungen aus der Welt der Operatoren in die Welt der Funktionen holen, dort (meist leichter) ausführen und dann wieder in der Welt der Operatoren interpretieren. Das ist die Hauptstärke aller Funktionalkalküle. Ein sehr wichtiges Resultat, das beispielhaft für diesen Sachverhalt steht, ist der folgende spektrale Abbildungssatz, der es ermöglicht das Spektrum von $f(T)$ nur durch Rechnungen in der komplexen Ebene zu bestimmen.

Theorem 13.5 (Spektraler Abbildungssatz). *Für jedes $f \in \mathcal{H}(T)$ gilt $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.*

Beweis. Zum Nachweis der Inklusion $\sigma(f(T)) \subseteq f(\sigma(T))$ sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus f(\sigma(T))$. Dann ist $\lambda - f = \lambda \mathbf{1} - f \in \mathcal{H}(T)$ mit $\lambda - f(z) \neq 0$ für alle $z \in \sigma(T)$. Nach Satz 13.3 (d) ist also $(\lambda - f)(T) = \lambda \mathbf{1}(T) - f(T) = \lambda - f(T)$ invertierbar, d. h. $\lambda \in \rho(f(T)) = \mathbb{C} \setminus \sigma(f(T))$. Das zeigt durch Komplementbildung die erste Inklusion.

13 Dunford-Kalkül

Sei nun $\lambda \in f(\sigma(T))$, also $\lambda = f(w)$ für ein $w \in \sigma(T)$. Auf dem Definitionsbereich D_f von f betrachten wir die Funktion $g : D_f \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & z \neq w, \\ f'(z), & z = w. \end{cases}$$

Dank der Holomorphie von f ist diese in $\mathcal{H}(T)$ und die Gleichheit $g(z)(w-z) = f(w) - f(z)$ gilt für alle $z \in D_f$. Damit folgt dank des Dunford-Kalküls

$$g(T)(w-T) = (w-T)g(T) = f(w) - f(T) = \lambda - f(T).$$

Wir nehmen nun an, es wäre $\lambda \notin \sigma(f(T))$, d.h. $\lambda \in \rho(f(T))$. Dann gilt dank der Injektivität von $\lambda - f(T)$

$$\ker(w-T) \subseteq \ker(g(T)(w-T)) = \ker(\lambda - f(T)) = \{0\}.$$

Also ist auch der Operator $w-T$ injektiv. Wegen der Surjektivität von $\lambda - f(T)$ folgt außerdem

$$X = \text{ran}(\lambda - f(T)) = \text{ran}((w-T)g(T)) \subseteq \text{ran}(w-T)$$

und das bedeutet, dass $w-T$ auch surjektiv ist. Zusammen ist $w-T$ bijektiv, d.h. es gilt $w \in \rho(T)$, was im Widerspruch zu $w \in \sigma(T)$ steht, also muss doch $\lambda \in \sigma(f(T))$ sein und wir sind fertig. $\square$

Wir haben in Bemerkung 11.5 gesehen, dass außerhalb des Kreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|_{X \rightarrow X}\}$ kein Spektrum liegen kann. Das ist manchmal eine gute Abschätzung dafür wie groß das Spektrum sein kann, so haben wir beispielsweise für selbstadjungierte Operatoren T in Satz 12.8 (e) gesehen, dass $\|T\|_{H \rightarrow H}$ selbst immer zum Spektrum gehört. Im Allgemeinen ist das aber eine ziemlich schlechte Abschätzung, wie schon die einfache Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, die nur Null als Eigenwert hat, zeigt. Wir wollen uns genauer anschauen, in welchen Kreisen um den Ursprung wir das Spektrum einfangen können.

Definition 13.6. Die Zahl

$$r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

heißt Spektralradius von T .

Satz 13.7. Es gilt $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|_{X \rightarrow X}^{1/n}$. (Die Existenz des Grenzwertes ist Teil der Behauptung.)

Beweis. Wir werden uns durch die folgende Ungleichungskette argumentieren:

$$r(T) \stackrel{1.}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|_{X \rightarrow X}^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|_{X \rightarrow X}^{1/n} \stackrel{2.}{\leq} r(T),$$

wobei wir die beiden Stellen 1. und 2. begründen müssen. Dann muss überall Gleichheit gelten und wir haben sowohl die Existenz des Grenzwertes als auch die behauptete Identität gezeigt.

Wir starten mit der ersten Abschätzung. Aus Bemerkung 11.5 wissen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $r(T^n) \leq \|T^n\|_{X \rightarrow X}$ ist. Mit Hilfe des Spektralen Abbildungssatzes 13.5 gilt weiter die Identität $\sigma(T^n) = \sigma(T)^n$ und damit ist

$$\begin{aligned} r(T^n) &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T^n)\} = \sup\{|\mu^n| : \mu \in \sigma(T)\} = \sup\{|\mu|^n : \mu \in \sigma(T)\} \\ &= (\sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(T)\})^n = r(T)^n. \end{aligned}$$

Das bedeutet $r(T) = r(T^n)^{1/n} \leq \|T^n\|_{X \rightarrow X}^{1/n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit ist insbesondere $r(T) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|_{X \rightarrow X}^{1/n}$.

Für den Beweis der zweiten Abschätzung, wählen wir ein $R > r(T)$. Dann liegt der Weg $\partial U_R(0)$ ganz in $\rho(T)$ und ist damit für die Funktion $\mathbf{z}^n$ geeignet. Es folgt mit dem Dunford-Kalkül

$$T^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(0)} \lambda^n \mathbf{R}(\lambda, T) \, d\lambda,$$

und wir erhalten mit der Standardabschätzung

$$\|T^n\| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot R^n \sup_{|\lambda|=R} \|\mathbf{R}(\lambda, T)\| = R^{1+n} \underbrace{\sup_{|\lambda|=R} \|\mathbf{R}(\lambda, T)\|_{X \rightarrow X}}_{:=C}.$$

Da $\mathbf{R}(\cdot, T)$ stetig und $\partial U_R(0)$ kompakt ist, ist C ein endlicher Wert. Ziehen der n -ten Wurzel und bilden des Limes Superior liefert

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R R^n C} = R.$$

Für $R \rightarrow r(T)$ folgt die zweite Abschätzung. □

13.3 Spektraler Zerlegungssatz

Wir wollen beispielhaft noch eine weitere Anwendung des Dunford-Kalküls anschauen, bei der es darum geht, einen gegebenen Operator anhand seiner Spektraleigenschaften in einfachere Bauteile zu zerlegen. Dazu betrachten wir den Fall, dass das Spektrum von T in zwei abgeschlossene, disjunkte Teile zerfällt, dass es also abgeschlossene Mengen $\sigma_1, \sigma_2 \subseteq \mathbb{C}$ gibt mit $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ und $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Dann gibt es dank der Kompaktheit von σ_1 und σ_2 auch zwei offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ sowie $\sigma_1 \subseteq U_1$ und $\sigma_2 \subseteq U_2$.

13 Dunford-Kalkül

Die beiden Funktionen $f_1, f_2 : U_1 \cup U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f_1(z) := \begin{cases} 1, & z \in U_1, \\ 0, & z \in U_2, \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(z) := \begin{cases} 0, & z \in U_1, \\ 1, & z \in U_2, \end{cases}$$

sind dann holomorph auf $U_1 \cup U_2$ und das bedeutet, dass $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(T)$ gilt. Wir können daher über den Dunford-Kalkül $P_j := f_j(T) \in \mathcal{L}(X)$, $j = 1, 2$, definieren. Ganz heuristisch gesprochen ist $P_1 = f_1(T)$ die Identität auf σ_1 und Null auf σ_2 und P_2 umgekehrt die Identität auf σ_2 und Null auf σ_1 . So ticken natürlich Operatoren nicht, aber tatsächlich ist das gar nicht so weit von der Wahrheit weg. Es stellt sich heraus, dass P_1 und P_2 dem Operator T angepasste Projektionen sind, die den Raum X und den Operator T in die jeweiligen Anteile zerlegen, die zu den Spektrumteilen σ_1 und σ_2 gehören. Das machen wir im folgenden Satz rigoros.

Satz 13.8 (Spektraler Zerlegungssatz). *Für die gerade definierten Operatoren P_1, P_2 gelten die folgenden Aussagen.*

- (a) P_1, P_2 sind Projektionen mit $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ und $P_1 + P_2 = \text{id}_X$.
- (b) Es gilt $X = \text{ran}(P_1) \oplus \text{ran}(P_2) =: X_1 \oplus X_2$.
- (c) X_1 und X_2 sind T -invariant, d. h. $T_j := T|_{X_j} \in \mathcal{L}(X_j)$ für $j = 1, 2$.
- (d) Es ist $\sigma(T_1) = \sigma_1$ und $\sigma(T_2) = \sigma_2$.

Beweis. Die Aussagen in (a) folgen alle aus den entsprechenden Identitäten $f_1^2 = f_1$, $f_2^2 = f_2$, $f_1f_2 = f_2f_1 = 0$ und $f_1 + f_2 = 1$ über den Funktionalkalkül und aus diesen werden wir nun im Wesentlichen alles ziehen. Als erstes bestätigen wir, dass für alle Projektionen gilt $P_1u = u$ für alle $u \in X_1 = \text{ran}(P_1)$. Das sieht man mit einem $v \in X$, das $u = P_1v$ erfüllt, durch

$$P_1u = P_1(P_1v) = P_1^2v = P_1v = u.$$

Damit wirkt P_1 auf X_1 als Identität und genauso gilt $P_2u = u$ für alle $u \in X_2$.

Das und die anderen Rechenregeln aus Teil (a) können wir im nächsten Schritt nutzen um $X_2 = \ker(P_1)$ zu zeigen. Ist $u \in X_2$, so folgt wegen

$$P_2u = u = P_1u + P_2u \implies P_1u = 0,$$

auch $u \in \ker(P_1)$. Andererseits gilt für $u \in \ker(P_1)$ sofort

$$u = P_1u + P_2u = P_2u \in \text{ran}(P_2) = X_2.$$

Analog zeigt man $X_1 = \ker(P_2)$. Das zeigt zum Einen, dass X_1 und X_2 als Kerne von stetigen linearen Operatoren immer abgeschlossene Teilräume von X sind, vgl. Lemma 2.4. Zum Anderen liefert das für $u \in X_1 \cap X_2 = \ker(P_2) \cap \ker(P_1)$ gleich

$u = P_1 u + P_2 u = 0 + 0 = 0$. Zusammen mit $X = X_1 + X_2$, was wir aus $P_1 + P_2 = \text{id}_X$ bekommen, liefert das dann $X = X_1 \oplus X_2$.

Schließlich ergibt sich die behauptete Invarianz in (c) nun für $j \in \{1, 2\}$ und $u \in X_j$ direkt aus

$$Tu = TP_j u = T f_j(T) u = f_j(T) Tu = P_j Tu \in \text{ran}(P_j) = X_j.$$

Es bleibt also nur noch (d) zu zeigen.

Wir zeigen zunächst $\sigma(T_1) \subseteq \sigma_1$, indem wir die Komplemente anschauen. Sei dazu $\mu \notin \sigma_1$. Dann wählen wir offene Mengen $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{C}$ mit $\sigma_1 \subseteq V_1$, $\sigma_2 \cup \{\mu\} \subseteq V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. (Wenn μ nicht in U_1 ist, kann man einfach $V_1 = U_1$ nehmen, sonst muss man U_1 ausreichend verkleinern.) Betrachtet man nun die Funktionen $g : V_1 \cup V_2 \rightarrow \mathbb{C}$ und $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(z) := \begin{cases} \frac{1}{\mu - z}, & z \in V_1, \\ 0, & z \in V_2, \end{cases} \quad \text{und} \quad h(z) = \mu - z,$$

so gilt $g, h \in \mathcal{H}(T)$ mit $gh = f_1$, also ist

$$P_1 = f_1(T) = (gh)(T) = g(T)h(T) = g(T)(\mu - T) = (\mu - T)g(T).$$

Nun ist es entscheidend zu beobachten, dass für alle $u \in X_1$ gilt

$$g(T)u = g(T)P_1 u = P_1 g(T)u \in \text{ran}(P_1) = X_1,$$

also ist für alle $u \in X_1$ die Bildung $(\mu - T_1)g(T)u$ sinnvoll und es ist

$$(\mu - T_1)g(T)u = g(T)(\mu - T_1)u = P_1 u = u.$$

Der Operator $g(T)$ ist damit invers zu $(\mu - T_1)$ auf X_1 und das bedeutet $\mu \in \rho(T_1)$.

Damit ist $\sigma(T_1) \subseteq \sigma_1$ gezeigt und analog gilt auch $\sigma(T_2) \subseteq \sigma_2$. Wenn wir nun noch zeigen, dass $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$ ist, sind wir fertig, denn wegen $\sigma(T_2) \cap \sigma_1 \subseteq \sigma_2 \cap \sigma_1 = \emptyset$, ist dann auch $\sigma(T_2) \cap \sigma_1 = \emptyset$ und es folgt die umgekehrte Inklusion $\sigma_1 \subseteq \sigma(T_1)$ über

$$\sigma_1 = \sigma(T) \cap \sigma_1 = (\sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)) \cap \sigma_1 = (\sigma(T_1) \cap \sigma_1) \cup (\sigma(T_2) \cap \sigma_1) = \sigma(T_1).$$

Dazu zeigen wir nun $\rho(T) = \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$, indem wir beide Inklusionen zeigen. Sei zunächst $\lambda \in \rho(T)$. Dann gilt für $j \in \{1, 2\}$ und für alle $u \in X_j$

$$P_j(\lambda - T)^{-1}u = (\lambda - T)^{-1}P_j u = (\lambda - T)^{-1}u,$$

also ist $(\lambda - T)^{-1}(X_j) \subseteq X_j$ und das liefert für alle $u \in X_j$

$$\begin{aligned} (\lambda - T_j)(\lambda - T)^{-1}u &= (\lambda - T)(\lambda - T)^{-1}u = u \quad \text{und} \\ (\lambda - T)^{-1}(\lambda - T_j)u &= (\lambda - T)^{-1}(\lambda - T)u = u, \end{aligned}$$

13 Dunford-Kalkül

womit $\lambda - T_j$ auf X_j bijektiv und $\lambda \in \rho(T_j)$ ist.

Für die umgekehrte Inklusion sei $\lambda \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$. Dann gilt für alle $u \in X$

$$\begin{aligned}
 & (\lambda - T) \left[(\lambda - T_1)^{-1} P_1 + (\lambda - T_2)^{-1} P_2 \right] u \\
 &= (\lambda - T) \underbrace{(\lambda - T_1)^{-1} P_1 u}_{\in X_1} + (\lambda - T) \underbrace{(\lambda - T_2)^{-1} P_2 u}_{\in X_2} \\
 &= (\lambda - T_1)(\lambda - T_1)^{-1} P_1 u + (\lambda - T_2)(\lambda - T_2)^{-1} P_2 u \\
 &= P_1 u + P_2 u = u
 \end{aligned}$$

und genauso umgekehrt

$$\begin{aligned}
 & \left[(\lambda - T_1)^{-1} P_1 + (\lambda - T_2)^{-1} P_2 \right] (\lambda - T) u \\
 &= (\lambda - T_1)^{-1} (\lambda - T) P_1 u + (\lambda - T_2)^{-1} (\lambda - T) P_2 u \\
 &= (\lambda - T_1)^{-1} (\lambda - T_1) P_1 u + (\lambda - T_2)^{-1} (\lambda - T_2) P_2 u = P_1 u + P_2 u = u
 \end{aligned}$$

für alle $u \in X$. Damit ist $\lambda - T$ bijektiv und $\lambda \in \rho(T)$. □

Literaturverzeichnis

- [HvNVW16] Tuomas Hytönen, Jan van Neerven, Mark Veraar, and Lutz Weis. *Analysis in Banach spaces. Vol. I*. Springer, Cham, 2016.
- [Jam51] Robert C. James. A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 37:174–177, 1951.
- [LT71] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. On the complemented subspaces problem. *Israel J. Math.*, 9:263–269, 1971.
- [SS05] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis*, volume 3 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.
- [vN22] Jan van Neerven. *Functional analysis*, volume 201 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2022.
- [Whi66] Robert Whitley. Mathematical Notes: Projecting m onto c_0 . *Amer. Math. Monthly*, 73(3):285–286, 1966.
- [Yos80] Kosaku Yosida. *Functional analysis. 6th ed*, volume 123 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer, Cham, 1980.

Index

- Abbildung
 - offene, 91
 - sublineare, 49
- Abbildungssatz, spektraler, 167
- Abgeschlossener Graph, Satz von, 95
- abgeschlossener Operator, 95
- Ableitung, schwache, 31
 - k -te, 39
- absolut-stetiges Maß, 69
- absorbierende Menge, 57
- Adjungierte
 - Hilbertraum-, 25
 - im normierten Raum, 60
- algebraische Version Satz von Hahn-Banach, 50
 - in $\mathbb{C}$, 53
- analytische Version Satz von Hahn-Banach, 53
- approximativer Eigenvektor, 144
- approximativer Eigenwert, 144
- approximatives Spektrum, 144
- $BV([a, b])$, 80
 - Struktursatz für, 80
- Baire, Satz von, 85
- Banach-Alaoglu, Satz von, 109
- Banach-Steinhaus, Satz von, 98
- Banachraum, 43
 - Bidual eines, 101
 - Dualraum eines, 46
 - gleichmäßig konvexer, 112
 - reflexiver, 102
 - separabler, 11
- Basis
 - Hamel-, 8
 - Orthonormal-, 8
 - Schauder-, 8
- beschränkte Variation, 80
- Beschränktheit, Prinzip der gleichmäßigen, 96
- beschränkte lineare Abbildung, 16
- Besselsche Ungleichung, 9
- Bidualraum, 101
- Bild einer linearen Abbildung, 15
- Bilinearform, 22
 - koerzive, 22
 - stetige, 22
- Bochner, Theorem, 126
- Bochner-Integral, 126
 - einer einfachen Funktion, 125
- Bochner-integrierbar, 125, 127
- $C(K)$, 44
- $C([a, b])$ (Dualraum von), 81
- c , 44
- c_0 , 44
 - Dualraum von, 63
- Cauchy-Integral-Formel, 136
- Cauchy-Integral-Theorem, 136
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 2
- Darstellungssatz
 - Riesz für Maße, 81
 - Riesz-Fréchet, 21
- Dichte, (Integral-), 69
- Dichtheitsargument
 - im Banachraum, 45
 - im Hilbertraum, 18, 19

- differenzierbar, schwach, 31
 - k Mal, 39
- Dirichlet-Kern, 98
- dominierte Konvergenz, Satz von, 129
- Dreiecksungleichung
 - für Bochner-Integrale, 126
 - für signierte Maße, 68
- Dualraum
 - Bi-, 101
 - eines Banachraums, 46
 - eines Hilbertraums, 20
 - von $C([a, b])$, 81
 - von c_0 , 63
 - von $L^p(\Omega)$, 74
 - von ℓ^p , 63
- Dunford-Kalkül, 164
- Egorov, Satz von, 107
- Eigenvektor, 139
 - approximativer, 144
- Eigenwert, 139
 - approximativer, 144
- Einbettung
 - kanonische, 102
 - kompakte, 117
 - stetige, 34
- einfache Funktion, 121
 - Bochner-Integral einer, 125
- Faltungsoperator auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, 17
- fast separabel-wertig, 123
- Fast-Senkrechte, Lemma von, 113
- fette Menge, 85
- Folge
 - normierende, 56
 - schwach konvergente, 104
 - schwach-* konvergente, 104
- folgenkompakt, schwach, 109
- folgenkompakt, schwach-*, 109
- Form
 - Bilinear-, 22
 - koerzive, 22
 - stetige, 22
 - Sesquilinear-, 22
 - koerzive, 22
 - stetige, 22
- Formel, Cauchy-Integral-, 136
- Fredholmscher Integraloperator, 117
- Fubini, Satz von, 130
- Funktion
 - Bochner-integrierbare, 125, 127
 - einfache, 121
 - Bochner-Integral einer, 125
 - fast separabel-wertige, 123
 - holomorphe, 133
 - schwach holomorphe, 133
 - schwach messbare, 123
 - stark messbare, 121, 127
- Funktional
 - im Banachraum, 46
 - im Hilbertraum, 20
 - Minkowski-, 57
- Funktionalkalkül, 163
 - Dunford-Kalkül, 164
- geeigneter Zyklus, 164
- geometrische Version Satz von Hahn-Banach, 59
- gleichmäßige Beschränktheit, Prinzip der, 96
- gleichmäßig konvex, 112
- Gleichung
 - Parsevalsche, 10
 - Poisson-, 29
 - Resolventen-, 143
- Graph
 - eines Operators, 94
 - Satz vom abgeschlossenen, 95
- $H^1(I)$, 31
 - Skalarprodukt in, 33
- $H_0^1(I)$, 37
- $H^k(I)$, 39
- Hahn-Banach, Satz von
 - algebraische Version, 50
 - in $\mathbb{C}$, 53

- analytische Version, 53
- geometrische Version, 59
- Trennungsversion, 59
- Hahn-Jordan-Zerlegung, 68
- Hamelbasis, 8
- Hauptsatz für H^1 -Funktionen, 34
- Hausdorff Momentenproblem, 83
- Hausdorff-Momentenproblem
 - Lösung, 84
- Hellinger-Toeplitz, Satz von, 96
- Helly, Satz von, 84
- Hilbertraum, 1
 - Adjungierte, 25
 - Dualraum eines, 20
 - Prä-, 1
 - separabler, 11
- Hölder-stetig, 35
- holomorphe Funktion, 133
 - schwach, 133
- Integral
 - Bochner-, 126
 - einer einfachen Funktion, 125
 - dichte, 69
 - Formel, Cauchy-, 136
 - operator, Fredholmscher, 117
 - Theorem, Cauchy-, 136
 - Weg-, 136
- Integration, partielle für Sobolew-Funktionen, 37
- Integrierbarkeit
 - bezüglich eines signierten Maßes, 68
 - Bochner-, 125, 127
- Isomorphismus, Riesz-, 21
- j_X , 101
- Kalkül, Dunford-, 164
- kanonische Einbettung, 102
- Kern einer linearen Abbildung, 15
- klassische Lösung, 29
- koerzive
 - Bilinearform, 22
 - Sesquilinearform, 22
- kompakt
 - schwach folgen-, 109
 - schwach-* folgen-, 109
- kompakte Einbettung, 117
- kompakter C^1 -Weg, 136
- kompakter Operator, 114
- Komplement, orthogonales, 1
- komplementierter Teilraum, 92
- Konvergenz
 - schwach-*, 104
 - schwache, 104
- konvex, gleichmäßig, 112
- $\mathcal{L}(X, Y)$, 15
- $L^p(\Omega)$, 44
 - Dualraum von, 74
- ℓ^p , 44
 - Dualraum von, 63
- $L^2(\Omega)$, 2
- ℓ^2 , 2
- Lax-Milgram, Lemma von, 22
- Lebesgue-Stieltjes-Maß, 81
- Lebesguescher Maß-Zerlegungssatz, 69
- Lemma
 - Lax-Milgram, 22
 - Riesz, 113
 - von der Fast-Senkrechten, 113
- lineare Abbildung
 - abgeschlossene, 95
 - adjungierte
 - im Hilbertraum, 25
 - im normierten Raum, 60
 - beschränkte, 16
 - Graph einer, 94
 - kompakte, 114
 - stetige, 15
- Linksshift, 17
- Liouville, Satz von, 136
- Lösung
 - klassische, 29
 - schwache, 37
- magere Menge, 85

majorisierte Konvergenz, Satz von, 129
 Maß
 absolut stetiges, 69
 Lebesgue-Stieltjes, 81
 signiertes, 67
 Totalvariation, 68
 Maß-Zerlegungssatz, Lebesguescher, 69
 Mazur, Satz von, 107
 Menge
 absorbierende, 57
 fette, 85
 magere, 85
 nirgends dichte, 85
 normierende, 56
 Null-, 67
 Resolventen-, 139
 von 1. Kategorie, 85
 von 2. Kategorie, 85
 messbare Funktion
 schwach, 123
 stark, 121, 127
 Milman-Pettis, Satz von, 112
 Minkowski-Funktional, 57
 Moment, j -tes, 83
 Momentenproblem, 83, 84
 Lösung abstrakt, 84
 Multiplikationsoperator
 auf L^2 , 17
 auf ℓ^2 , 16

 Neumannreihe, 140
 nirgends dichte Menge, 85
 Norm
 C^α -, 35
 H^1 -, 33
 Operator-, 15
 Totalvariations-, 69
 normaler Operator, 151
 normierende Folge, 56
 normierende Menge, 56
 normierter Raum
 gleichmäßig konvexer, 112
 reflexiver, 102
 separabler, 11
 Nullmenge, 67
 Nullrandbedingung, Sobolew-Raum mit, 37
 numerischer Wertebereich, 149

 offene Abbildung, 91
 Satz von, 92
 Operator, 15
 abgeschlossener, 95
 adjungierter
 im Hilbertraum, 25
 im normierten Raum, 60
 beschränkter, 16
 Eigenvektor, 139
 Eigenwert, 139
 Faltungs- auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, 17
 Fredholmscher Integral-, 117
 Graph eines, 94
 kompakter, 114
 Spektralsatz, 157
 Linksshift, 17
 Multiplikations-
 auf L^2 , 17
 auf ℓ^2 , 16
 -norm, 15
 normaler, 151
 Rechtsshift, 17
 Resolvente, 139
 Holomorphie der, 142
 selbstadjungierter, 151
 Spektralsatz, 157
 Shift- auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, 17
 Spektralradius eines, 168
 Spektrum, 139
 approximatives, 144
 Punkt-, 139, 143
 Residual-, 144
 unitärer, 151
 orthogonal, 1
 orthogonales Komplement, 1
 Orthogonalprojektion, 5, 17
 Orthogonalsystem, 8

Orthonormalbasis, 8
 Orthonormalsystem, 8

 Parallelogrammgleichung, 1
 Parsevalsche Gleichung, 10
 partielle Integration, 37
 Pettis, Theorem von, 123
 Poincaré-Ungleichung, 38
 Poisson-Resolventen-Problem, 159
 Poissongleichung, 29
 Prähilbertraum, 1
 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, 96
 Problem
 Poisson-, 29
 Poisson-Resolventen-, 159
 Randwert-, 29
 Projektion, Orthogonal-, 5, 17
 Punktspektrum, 139, 143
 Pythagoras, Satz von, 2

 Radon-Nikodým, Satz von, 69
 Randwertproblem, 29
 Raum
 Banach-, 43
 Dualraum eines, 46
 Bidual-, 101
 gleichmäßig konvexer, 112
 Hilbert-, 1
 Dualraum eines, 20
 komplementierter Teil-, 92
 Prähilbert-, 1
 reflexiver normierter, 102
 separabler normierter, 11
 Sobolew-, 31
 k -ter Ordnung, 39
 mit Nullrandbedingung, 37
 Norm im, 33
 Skalarprodukt im, 33
 Rechtsshift, 17
 reflexiver normierter Raum, 102
 Reihe, Neumann-, 140
 Residualspektrum, 144

 Resolvente, 139
 Holomorphie der, 142
 Resolventengleichung, 143
 Resolventenmenge, 139
 Riesz, Lemma von, 113
 Riesz-Fréchet, Darstellungssatz von, 21
 Riesz-Isomorphismus, 21

 Satz
 Baire, 85
 Banach-Alaoglu, 109
 Banach-Steinhaus, 98
 Bochner, 126
 Cauchy-Integral-, 136
 Darstellungs- von Riesz für Maße, 81
 Darstellungs- von Riesz-Fréchet, 21
 dominierte Konvergenz, 129
 Egorov, 107
 Fubini, 130
 Hahn-Banach
 algebraische Version, 50
 algebraische Version in $\mathbb{C}$, 53
 analytische Version, 53
 geometrische Version, 59
 Trennungsversion, 59
 Hahn-Jordan-Zerlegung, 68
 Hellinger-Toeplitz, 96
 Helly, 84
 Lax-Milgram, Lemma von, 22
 Lebesguescher Maß-Zerlegungs-, 69
 Liouville, 136
 Mazur, 107
 Milman-Pettis, 112
 Pettis, 123
 Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, 96
 Pythagoras, 2
 Radon-Nikodým, 69
 Riesz'scher Darstellungssatz für Maße, 81
 Riesz, Lemma von, 113
 Riesz-Fréchet, 21

- Schauder, 118
- Spektral-, 157
- Spektraler Abbildungs-, 167
- Spektraler Zerlegungs-, 170
- Struktur von $BV([a, b])$, 80
- Vitali, 137
- vom abgeschlossenen Graphen, 95
- von der offenen Abbildung, 92
- Schauder, Satz von, 118
- Schauderbasis, 8
- schwach
 - differenzierbar, 31
 - k Mal, 39
 - folgenkompakt, 109
 - holomorph, 133
 - konvergent, 104
 - messbar, 123
- schwach-*
 - folgenkompakt, 109
 - konvergent, 104
- schwache
 - Ableitung, 31
 - k -te, 39
 - Konvergenz, 104
 - Lösung, 37
- selbstadjungierter Operator, 151
- senkrecht, 1
- separabel-wertig, fast, 123
- separabler normierter Raum, 11
- Sesquilinearform, 22
 - koerzive, 22
 - stetige, 22
- Shiftoperator auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, 17
- signiertes Maß, 67
 - Dreiecksungleichung, 68
- Skalarprodukt
 - H^1 -, 33
 - in ℓ^2 , 2
 - in L^2 , 2
- Sobolew-Raum, 31
 - k -ter Ordnung, 39
 - mit Nullrandbedingung, 37
 - Norm im, 33
 - Skalarprodukt im, 33
- Spektraler Abbildungssatz, 167
- Spektraler Zerlegungssatz, 170
- Spektralradius, 168
- Spektralsatz, 157
- Spektrum, 139
 - approximatives, 144
 - Punkt-, 139, 143
 - Residual-, 144
- Störungsargument, 141
- stark messbare Funktion, 121, 127
- stetig, Hölder-, 35
- stetige
 - Bilinearform, 22
 - Einbettung, 34
 - Inverse, Satz von, 89
 - lineare Abbildung, 15
 - Sesquilinearform, 22
- Struktursatz für $BV([a, b])$, 80
- sublineare Abbildung, 49
- Teilraum, komplementierter, 92
- Totalvariationsmaß, 68
- Totalvariationsnorm, 69
- Trennungsversion Satz von Hahn-Banach, 59
- Ungleichung
 - Besselsche, 9
 - Cauchy-Schwarz, 2
 - Poincaré-, 38
- unitärer Operator, 151
- Untervektorraum, komplementierter, 92
- Variation einer Funktion, 80
 - beschränkte, 80
- Vektor, Eigen-, 139
- Vitali, Satz von, 137
- Weg, kompakter C^1 -, 136
- Wegintegral, 136
- Wertebereich, numerischer, 149
- Zerlegung, Hahn-Jordan-, 68

Zerlegungssatz, spektraler, 170

Zyklus, geeigneter, 164