

Skript zur Vorlesung
Analysis II
Sommersemester 2026

Robert Haller

Version vom 18. März 2026

Inhaltsverzeichnis

I. Fourier-Analysis	1
1. Fourierreihen – Einführung und Motivation	3
2. Punktweise Konvergenz von Fourierreihen	7
3. Konvergenz im quadratischen Mittel	17
 II. Metrische Räume	 23
4. Metrische Räume	25
5. Topologische Grundbegriffe	33
6. Konvergenz in metrischen Räumen	39
7. Kompaktheit	49
8. Stetigkeit	57
9. Eigenschaften stetiger Funktionen	65
10. Exkurs: Topologie	69
11. Zusammenhang	75
 III. Analysis in $\mathbb{R}^d$	 79
12. Kurven	81
13. Partielle Ableitungen	87
14. Totale Differenzierbarkeit	97
15. Ableitungsregeln und der Mittelwertsatz	105

Inhaltsverzeichnis

16. Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor	111
17. Lokale Extrema	119
18. Umkehrfunktionen	125
19. Satz über implizite Funktionen	135
20. Untermannigfaltigkeiten	141
21. Extrema unter Nebenbedingungen	149
22. Parameterintegrale	155
23. Kurvenintegrale	161
Tabelle der griechischen Buchstaben	173
Index	174

Teil I.

Fourier-Analysis

1. Fourierreihen – Einführung und Motivation

Im Zusammenhang mit Taylorreihen haben wir gesehen, dass man schöne Funktionen durch Potenzreihen, d. h. als „unendliche Linearkombinationen“ der Monome $1, x, x^2, x^3, \dots$ darstellen kann. Wir wollen nun einen anderen Satz von „Basisfunktionen“ betrachten, nämlich Sinus- und Cosinus-Funktionen, in der Hoffnung, dass diese sich gut eignen, um damit periodische Funktionen zu approximieren.

Um die Notation einfach zu halten, betrachten wir nur den Spezialfall, dass die Periode, passend zu den trigonometrischen Funktionen, die Länge 2π hat. Da sich jede periodische Funktion f mit Periode $L > 0$ durch $\tilde{f}(x) := f(Lx/2\pi)$ zu einer periodischen Funktion mit Periode 2π umskalieren lässt, ist das keine wirkliche Einschränkung.

Die hierzu gehörige Theorie der Fourierreihen, die in diesem und den folgenden Kapiteln vorgestellt werden soll, liegt auch vielen Methoden der Signalverarbeitung zugrunde. Die Idee ist es, eine komplizierte Schwingung, d. h. eine periodische Funktion, in elementare Sinus- und Cosinusschwingungen mit ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz zu zerlegen. Unser Basissystem ist damit $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x), \dots$, zusammen mit $\cos(0x) = 1$, $\cos(x)$, $\cos(2x)$, $\cos(3x), \dots$

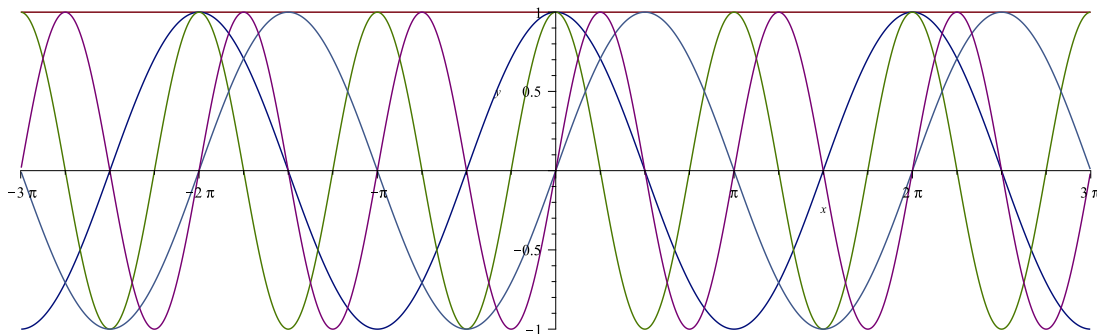


Abbildung 1.1.: Die ersten fünf Fourier-Basis-Funktionen 1 , $\cos(x)$, $\cos(2x)$, $\sin(x)$ und $\sin(2x)$.

Es ist allerdings oft praktisch die komplexen Zahlen zu Hilfe zu nehmen und mit Hilfe der Eulerschen Formel die Funktionen $e_k(x) := e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, als Basisfunktionen zu nehmen. Wegen $e_0(x) = 1$, $e_k(x) = \cos(kx) + i \sin(kx)$ kann man diese

1. Fourierreihen – Einführung und Motivation

beiden Darstellungen leicht ineinander umrechnen, so dass beide Betrachtungen äquivalent sind.

Die Leitfragen für dieses und die nächsten Kapitel werden dementsprechend sein: Für welche 2π -periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es Koeffizienten $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}?$$

Bemerkung 1.1. Anders als in der Betrachtung von doppelt uneigentlichen Integralen in der Analysis I ist es im Kontext von Fourierreihen üblich, unter Konvergenz der obigen Reihe die Existenz des Grenzwerts

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

zu verstehen. Wir wollen das auch tun. In Satz 2.11 werden Sie sehen, dass für die Darstellung der Fourierreihe mit Sinus und Cosinus gerade die Koeffizienten c_k und c_{-k} zusammengefasst werden und dann unser übliches Verständnis von (einfach) unendlichen Reihen greift.

Stück für Stück werden wir sehen, dass sich diese Fragestellung besonders gut mittels der Sprache der linearen Algebra behandeln lässt. Wir führen bereits hier ein paar Notationen ein, wobei wir den Begriffen “Skalarprodukt” und “Norm” keine tiefere mathematische Bedeutung zuweisen, sondern sie lediglich umgangssprachlich in Analogie zu den entsprechenden Konzepten in $\mathbb{C}^n$ verwenden.

Definition 1.2. (a) Es sei

$$\mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch und } f|_{[-\pi, \pi]} \in \mathcal{S}([-\pi, \pi])\}$$

der Raum aller 2π -periodischen sprungstetigen Funktionen.¹

(b) Auf $\mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ betrachten wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx, \quad f, g \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$$

und schreiben

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

(c) Für $k \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir unsere Basisfunktionen als $e_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $e_k(x) := e^{ikx}$.

¹Mit $\mathcal{S}([-\pi, \pi])$ wird hier wie in Analysis I der Raum der sprungstetigen Funktionen auf $[-\pi, \pi]$ notiert.

Man beachte, dass die so definierte Abbildung $\|\cdot\|_2 : \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ nicht wirklich eine Norm ist, da sie nicht definit ist. Wir verwenden trotzdem die Notation einer Norm, da $\|\cdot\|_2$ sich in allen für dieses Thema relevanten Belangen wie eine solche verhält. Im Verlauf der Vorlesung „Integrationstheorie“ werden wir auch verstehen warum das so ist.

Wir zeigen als erstes, dass die Funktionen e_k , $k \in \mathbb{Z}$, bzgl. des Skalarprodukts in $\mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ ein Orthonormalsystem bilden.

Satz 1.3. Für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$ gilt $\langle e_k, e_\ell \rangle = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq \ell, \\ 1, & \text{falls } k = \ell. \end{cases}$

Beweis. Für $k = \ell$ gilt

$$\langle e_k, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \overline{e^{ikx}} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ikx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 1$$

und für $k \neq \ell$ ergibt sich aufgrund der 2π -Periodizität der komplexen Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_\ell \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-i\ell x} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)x} \, dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(k-\ell)} e^{i(k-\ell)x} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi i(k-\ell)} (e^{i(k-\ell)\pi} - e^{-i(k-\ell)\pi}) = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Damit bildet $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis seiner linearen Hülle. Deren Elemente bekommen einen eigenen Namen.

Definition 1.4. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und für $k \in \{-n, \dots, n\}$ seien Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann heißt $\sum_{k=-n}^n c_k e_k$ trigonometrisches Polynom vom Grad höchstens n .

Bemerkung 1.5. Da unsere Basisfunktionen eine Orthonormalbasis des Raums aller trigonometrischen Polynome bilden, ergibt sich sofort für jedes trigonometrische Polynom $T = \sum_{k=-n}^n c_k e_k$ die Darstellung der Koeffizienten c_k als

$$c_k = \langle T, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) e^{-ikx} \, dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Das motiviert für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ die folgende Definition.

Definition 1.6. Sei $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

(a) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\widehat{f}(k) := \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

k -ter Fourierkoeffizient von f .

1. Fourierreihen – Einführung und Motivation

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ heißt das trigonometrische Polynom $S_n f$ mit

$$(S_n f)(x) := \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e_k(x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

n -tes Fourierpolynom von f .

(c) Die Reihe

$$(Sf)(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

heißt Fourierreihe von f .

Geometrisch ist $S_n f$ die Orthogonalprojektion von f auf den Teilraum der trigonometrischen Polynome vom Grad höchstens n in $\mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ und es ist zu erwarten, dass $S_n f$ in einem geeigneten Sinne die beste solche Approximation an f unter den trigonometrischen Polynomen ist. Wir werden auf diesen Gedanken in Satz 3.2 zurückkommen.

In jedem Fall ist $S_n f$ ein guter Kandidat für eine Approximation von f durch ein trigonometrisches Polynom vom Grad n und wir wollen uns in den folgenden Abschnitten der nun offensichtlichen Frage zuwenden, unter welchen Voraussetzungen an f die Fourierreihe von f konvergiert, wann Sie auch noch gegen f konvergiert und in welchem Sinne wir diese Konvergenz bekommen.

2. Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

Wir wollen zunächst Voraussetzungen an die betrachtete Funktion finden, die die punktweise oder gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe garantieren. Eine solche ist im Allgemeinen nicht zu erwarten, denn nach einem berühmten Gegenbeispiel von Du Bois-Reymond (1876) gibt es stetige Funktionen in $\mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$, deren Fourierreihe im Nullpunkt divergiert. Wir werden aber sehen, dass eine einigermaßen harmlose Differenzierbarkeitsbedingung ausreicht. Der Weg dorthin ist ein bisschen verschlungen, haben Sie also bitte ein bisschen Geduld, wenn nicht immer gleich klar wird, wo das alles hinführt. Eine befriedigende Erklärung zur punktweisen Konvergenz von Fourierreihen hat übrigens erst 1964 Lennart Carleson gegeben.

Als erstes schreiben wir unsere Fourierpolynome mit Hilfe der folgenden Funktionen noch einmal um.

Definition 2.1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Das trigonometrische Polynom

$$D_n := \sum_{k=-n}^n e_k$$

heißt Dirichlet-Kern n -ten Grades.

Wir sammeln drei wichtige Eigenschaften dieser Funktionen.

Lemma 2.2. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Der Dirichlet-Kern n -ten Grades hat folgende Eigenschaften.

(a) D_n ist eine gerade Funktion.

(b) Es gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) \, dx = 1.$$

(c) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ gilt

$$D_n(x) = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin(x/2)}.$$

2. Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

Beweis. (a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $e_k(-x) = e^{ik(-x)} = e_{-k}(x)$. Folglich werden zur Berechnung von $D_n(x)$ und $D_n(-x)$ die gleichen Summen, nur in unterschiedlicher Reihenfolge gebildet.

(b) Für $k = 0$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_0(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 1,$$

wohingegen wir für $k \neq 0$ wegen der 2π -Periodizität der komplexen Exponentialfunktion

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_k(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \, dx = \frac{1}{2\pi ik} e^{ikx} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

erhalten. Summation dieser Ergebnisse für $k = -n, \dots, n$ liefert die Behauptung.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^{2n} e^{i(k-n)x} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} (e^{ix})^k$$

und wann immer $e^{ix} \neq 1$ ist, also für $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, gilt mit der geometrischen Summenformel

$$= e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

Wir machen den Ausdruck symmetrischer, indem wir den Bruch durch $e^{ix/2}$ kürzen und erhalten die gewünschte Darstellung durch Sinus-Funktionen:

$$= \frac{e^{-i(n+1/2)x} - e^{i(n+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} = \frac{-2i \sin((n+1/2)x)}{-2i \sin(x/2)} = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}. \square$$

Bemerkung 2.3. Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass für $x = 2\pi\ell$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt

$$D_n(2\pi\ell) = \sum_{k=-n}^n e^{ik2\pi\ell} = \sum_{k=-n}^n 1 = 2n + 1.$$

Die Bedeutung des Dirichlet-Kerns für die Theorie der Fourierreihen ergibt sich aus dem folgenden Satz.

Satz 2.4. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$(S_n f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) f(t-x) \, dx$$

Beweis. Setzt man alle Notationen ein, ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned}(S_n f)(t) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e_k(t) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \cdot e^{ikt} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ik(t-x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{k=-n}^n e_k(t-x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(x) dx.\end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil bewiesen. Da der Integrand 2π -periodisch ist, ergibt sich der gleiche Wert, wenn wir stattdessen über $[t-\pi, t+\pi]$ integrieren und mit der Substitution $y = t-x$ folgt

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} D_n(t-x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) f(t-y) dy.\end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 2.5. Die obige Integraldarstellung für $(S_n f)(t)$ nennt man auch *Faltungsintegral* von D_n und f , geschrieben $(D_n * f)(t) = (f * D_n)(t)$. Integrale dieser Art spielen eine wichtige Rolle in der Approximationstheorie. Wir werden sie systematisch in der Analysis IV behandeln.

Als weitere Zutat benötigen wir eine Aussage zur Integration einer gegebenen Funktion gegen immer schneller oszillierende Sinuswellen.

Lemma 2.6 (Riemannsches Lemma). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in \mathcal{S}([a, b])$. Dann gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz zunächst für den Spezialfall, dass $f = \mathbf{1}_{(c,d)}$ die charakteristische Funktion eines offenen Intervalls $(c, d) \subseteq [a, b]$ ist. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(x) \sin(tx) dx \right| &= \left| \int_c^d \sin(tx) dx \right| = \left| \frac{1}{t} \cos(tx) \Big|_{x=c}^{x=d} \right| \\ &\leq \frac{1}{t} |\cos(td) - \cos(tc)| \leq \frac{2}{t}\end{aligned}$$

und dieser letzte Ausdruck geht für t gegen Unendlich gegen Null.

Per Linearität von Integral und Grenzwertbildung folgern wir in einem zweiten Schritt direkt die Behauptung für den Fall, dass $f \in \mathcal{T}([a, b])$ eine Treppenfunktion ist.

2. Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

Nun wenden uns dem allgemeinen Fall zu. Sei dazu $f \in \mathcal{S}([a, b])$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach dem Approximationssatz für sprungstetige Funktionen I.29.4¹ eine Treppenfunktion φ_ε auf $[a, b]$ mit $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon/2(b-a)$. Wir wenden das schon bewiesene Resultat auf φ_ε an und wählen ein $t_0 > 0$ so groß, dass für alle $t \geq t_0$

$$\left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin(tx) \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Das liefert uns für alle $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin(tx) \, dx \right| &\leq \left| \int_a^b (f(x) - \varphi_\varepsilon(x)) \sin(tx) \, dx \right| + \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin(tx) \, dx \right| \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \, dx + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

und wir sind fertig. □

Definition 2.7. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in \mathcal{S}([a, b])$. Wir sagen f hat in $x_0 \in [a, b]$ eine links-, bzw. rechtsseitige Ableitung, falls die Grenzwerte

$$D^-f(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}, \quad \text{bzw.} \quad D^+f(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}$$

existieren.

Die Hauptarbeit hin zur punktweisen Konvergenz der Fourierreihe steckt im nun folgenden Lemma.

Lemma 2.8 (Dirichletsches Lemma). Sei $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$, so dass f an der Stelle Null sowohl eine links- als auch eine rechtsseitige Ableitung besitzt. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(x) \, dx = \frac{1}{2} (f(0^-) + f(0^+)).$$

Beweis. Aus Lemma 2.2 wissen wir, dass D_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine gerade Funktion ist mit $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) \, dx = 1$. Also gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ auch $\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(x) \, dx = \frac{1}{2}$. Damit ist unter Verwendung der Darstellung von D_n aus Lemma 2.2 (c)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) D_n(x) \, dx - \frac{f(0^+)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) D_n(x) \, dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(0^+) D_n(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x) - f(0^+)) D_n(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x) - f(0^+)) \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin(x/2)} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x) - f(0^+)}{\sin(x/2)} \sin((n + 1/2)x) \, dx. \end{aligned}$$

¹Verweise mit vorgestelltem „I.“ beziehen sich auf die entsprechenden Abschnittsnummern im Skript zur Analysis I.

Wenn wir nun zeigen können, dass die Funktion $g(x) := \frac{f(x)-f(0+)}{\sin(x/2)}$ auf $[0, \pi]$ sprungstetig ist, dann folgt mit Hilfe des Riemannschen Lemmas 2.6, dass dieses letzte Integral für $n \rightarrow \infty$ gegen Null geht, d. h. wir bekommen dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(x) D_n(x) \, dx = \frac{f(0+)}{2}.$$

Analog zeigt man dann die entsprechende Aussage für das Integral über $[-\pi, 0]$ und den linksseitigen Grenzwert $f(0-)$, um den Beweis zu komplettieren.

Es bleibt also zu zeigen, dass g sprungstetig ist. Da f sprungstetig auf $[0, \pi]$ und der Sinus stetig ist, existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von g in jedem Punkt $x_0 \in (0, \pi]$. Wir müssen also nur sicherstellen, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$ existiert. Um das einzusehen, schreiben wir

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0+)}{\sin(x/2)} = 2 \frac{f(x) - f(0+)}{x} \cdot \frac{x/2}{\sin(x/2)}.$$

Bekanntermaßen konvergiert der zweite Bruch gegen Eins und nach Voraussetzung existiert der Grenzwert des ersten Bruchs, denn dieser ist genau die rechtsseitige Ableitung von f in Null. $\square$

Wir können nun mit Hilfe des Dirichletschen Lemmas das zentrale Resultat dieses Abschnitts beweisen.

Satz 2.9. *Sei $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ so, dass f in $x_0 \in \mathbb{R}$ links- und rechtsseitige Ableitungen hat. Dann konvergiert die Fourierreihe (Sf) an der Stelle x_0 und es gilt*

$$(Sf)(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n f)(x_0) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}.$$

Insbesondere gilt $(Sf)(x_0) = f(x_0)$ wenn f in x_0 zusätzlich stetig ist.

Beweis. Wir bauen das Vorbereitete zusammen. Aus Satz 2.4 wissen wir, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(S_n f)(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y) D_n(y) \, dy.$$

Die um x_0 verschobene Funktion f_{x_0} mit $f_{x_0}(y) := f(x_0 - y)$ ist ebenfalls sprungstetig und 2π -periodisch, also in $\mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ und hat nach Voraussetzung in $y = 0$ sowohl links- als auch rechtsseitige Ableitungen. Also gilt nach dem Dirichletschen Lemma

$$(S_n f)(x_0) \longrightarrow \frac{1}{2} (f_{x_0}(0+) + f_{x_0}(0-)) = \frac{1}{2} (f(x_0+) + f(x_0-)) \quad (n \rightarrow \infty),$$

was zu zeigen war. $\square$

2. Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

Als Seitenbemerkung können wir festhalten, dass das Dirichletsche Lemma auch einen eleganten Weg liefert, ein prominentes uneigentliches Integral zu bestimmen.

Beispiel 2.10. In Beispiel I.33.8 haben wir gesehen, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ konvergiert. Da die Funktion $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ gerade ist, bekommen wir mit der Substitution $x = (n + 1/2)t$ und mit Hilfe von Lemma 2.2 (c)

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-(n+1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)t)}{(n+1/2)t} (n+1/2) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \frac{\sin(t/2)}{t/2} \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \frac{\sin(t/2)}{t/2} dt. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(t) = \frac{\sin(t/2)}{t/2}$ für alle $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ und $f(0) = 1$. In Beispiel I.18.6(b) haben wir gesehen, dass diese Funktion durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius unendlich gegeben ist. Insbesondere ist f also auch im Nullpunkt differenzierbar und erfüllt damit die Voraussetzungen des Dirichletschen Lemmas. Dieses liefert uns wegen obiger Rechnung

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \frac{\sin(t/2)}{t/2} dt \\ &= \frac{2\pi}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(t) dt = \frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Wir kommen zurück zu Fourierreihen. Für reellwertige Funktionen verwendet man gerne eine Basisdarstellung in Sinus- und Cosinusfunktionen anstelle der komplexen Exponentialfunktion. Zum Glück kann man beide Darstellungen leicht ineinander umrechnen, so dass beide völlig äquivalent sind und man sich immer die gerade passendere aussuchen kann. Diese Umrechnung wollen wir jetzt einmal machen. Sei dazu $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (S_n f)(x) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^{-1} \widehat{f}(k) (\cos(kx) + i \sin(kx)) + \widehat{f}(0) + \sum_{k=1}^n \widehat{f}(k) (\cos(kx) + i \sin(kx)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \widehat{f}(0) + \sum_{k=1}^n [(\widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)) \cos(kx) + i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)) \sin(kx)] \\
&= \widehat{f}(0) + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
a_k &:= \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (e^{-ikx} + e^{ikx}) \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
b_k &:= i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (e^{-ikx} - e^{ikx}) \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Um eine einheitliche Formel für die a_k , $k \in \mathbb{N}_0$, zu haben, setzt man üblicherweise

$$a_0 := 2\widehat{f}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0x) \, dx.$$

Wir fassen diese Ergebnisse in einem Satz zusammen, der als Referenz auch noch mal alle Berechnungsformeln für die Fourierkoeffizienten enthält.

Satz 2.11. *Es sei $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Dann gelten für die beiden Darstellungen der Fourierreihe*

$$(Sf)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx, & k \in \mathbb{Z}, \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, & k \in \mathbb{N}_0, \\
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, & k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

die Umrechnungsformeln

$$\begin{aligned}
a_k &= \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k), & k \in \mathbb{N}_0, \\
b_k &= i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)), & k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

2. Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

Bemerkung 2.12. Die Berechnung der reellen Fourierkoeffizienten lässt sich vereinfachen, wenn man im Spezialfall von geraden oder ungeraden Funktionen ist.

- (a) Ist $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ *gerade*, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $x \mapsto f(x) \cos(kx)$ gerade und $x \mapsto f(x) \sin(kx)$ ungerade. Es gilt also dann

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(kx) \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Fourierreihe verkürzt sich zu einer reinen *Cosinusreihe* $(Sf)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k \cos(kx)$.

- (b) Ist $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ *ungerade* bekommt man analog

$$a_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(kx) \, dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

mit einer reinen *Sinusreihe* $(Sf)(x) = \sum_{k=1}^\infty b_k \sin(kx)$ als Fourierreihe.

Fourierreihen haben reichhaltige Anwendungen, die hier nicht dargestellt werden können. Sie werden ihnen im weiteren Studium immer wieder begegnen. Als kleine Spielerei löst das folgende Beispiel ein altes Versprechen ein.

Beispiel 2.13. Wir betrachten die 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Dann ist f eine gerade Funktion, d. h. wir wissen schon mal, dass $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Wir berechnen die restlichen (reellen) Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^\pi = \frac{2}{3} \pi^2$$

und für $k \in \mathbb{N}$ liefert zweimalige partielle Integration

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{k} x^2 \sin(kx) \right) \Big|_{x=0}^{x=\pi}}_{=0} - \frac{1}{k} \int_0^\pi 2x \sin(kx) \, dx \\ &= -\frac{2}{\pi k} \left(-\frac{1}{k} 2x \cos(kx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{k} \int_0^\pi 2 \cos(kx) \, dx \right) \\ &= -\frac{2}{\pi k} \left(-\frac{2\pi}{k} (-1)^k + \frac{2}{k^2} \sin(kx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right) = \frac{4}{k^2} (-1)^k. \end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe von f gegeben durch

$$(Sf)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos(kx).$$

Da f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist (man beachte $f(-\pi) = (-\pi)^2 = \pi^2 = f(\pi)$) und in jedem Punkt links- und rechtsseitige Ableitungen hat, wissen wir, dass die Fourierreihe auf ganz $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert. Insbesondere bekommen wir für $x = \pi$:

$$\pi^2 = f(\pi) = (Sf)(\pi) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(k\pi) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

und wir erhalten die lange herbeigesehnte Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \left(\pi^2 - \frac{1}{3}\pi^2 \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dieser Wert wurde erstmals 1735 von Euler gefunden und ging als Lösung des Baseler Problems in die Mathematikgeschichte ein.

3. Konvergenz im quadratischen Mittel

Die Frage, wann eine Fourierreihe punktweise konvergiert, ist auch deswegen so kompliziert, weil punktweise Konvergenz einfach nicht zu Fourierreihen passt. Die Schwierigkeiten lösen sich auf, wenn man den „richtigen“ Konvergenzbegriff verwendet. Das wollen wir in diesem Abschnitt tun.

Aber was ist ein für die Fourierreihen maßgeschneiderter Konvergenzbegriff? Eigentlich ist es ganz naheliegend, denn wir haben eine natürliche Art über Abstände in unserem Raum $\mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ zu reden, nämlich durch das in Definition 1.2 (b) definierte Skalarprodukt, d. h. wir messen den Abstand von f zu den zugehörigen Fourierpolynomen $S_n f$ durch

$$\|f - S_n f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (S_n f)(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Das ist eine Integralversion eines Kleinste-Fehler-Quadrate-Abstandes und Konvergenz $\|f - S_n f\|_2 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ wird auch *Konvergenz im quadratischen Mittel* oder kurz *L^2 -Konvergenz*¹ genannt.

Wir vergleichen zunächst einmal diesen Konvergenzbegriff mit der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz.

Bemerkung 3.1. (a) Wir überlegen uns zunächst, dass gleichmäßige Konvergenz Konvergenz im quadratischen Mittel impliziert.

Sei dazu (f_n) eine Folge in $\mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Das bedeutet, dass $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f_n(x) - f(x)|$ gegen Null geht und das liefert uns sofort wegen der Standardabschätzung für Integrale

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} 2\pi \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f_n(x) - f(x)|^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$= \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f_n(x) - f(x)|. \quad (3.2)$$

Also konvergiert (f_n) im quadratischen Mittel gegen f .

¹Wo das „ L “ herkommt, werden wir erst in der Integrationstheorie sehen.

3. Konvergenz im quadratischen Mittel

- (b) Umgekehrt impliziert aber Konvergenz im quadratischen Mittel noch nicht einmal punktweise Konvergenz! Das kann man an folgendem fiesem Gegenbeispiel sehen. (Dieses ist auf dem Intervall $[0, 1]$ statt $[-\pi, \pi]$ gegeben, um es leichter hinschreiben zu können. Das ändert aber nichts an den Tatsachen. Wer das doof findet, darf das Beispiel mit $\tilde{x} := 2\pi(x - 1/2)$ gerne selbst nach $[-\pi, \pi]$ rübertransformieren.)

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir die (eindeutig bestimmten!) Zahlen $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ mit $n = 2^k + j$ und definieren damit eine Funktionenfolge (f_n) auf $[0, 1]$ durch

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]}(x), \quad x \in [0, 1], \quad n = 2^k + j \in \mathbb{N}.$$

Um zu sehen, was diese Folge macht, lohnt es sich, ein paar Folgenglieder hinzuschreiben:

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathbf{1}_{[0,1]}, \quad f_2 = \mathbf{1}_{[0,1/2]}, \quad f_3 = \mathbf{1}_{[1/2,1]}, \\ f_4 &= \mathbf{1}_{[0,1/4]}, \quad f_5 = \mathbf{1}_{[1/4,2/4]}, \quad f_6 = \mathbf{1}_{[2/4,3/4]}, \quad f_7 = \mathbf{1}_{[3/4,1]} \\ f_8 &= \mathbf{1}_{[0,1/8]}, \quad f_9 = \mathbf{1}_{[1/8,2/8]}, \dots \end{aligned}$$

Diese Funktionenfolge ist in *keinem* Punkt des Intervalls $[0, 1]$ konvergent, aber es gilt

$$\begin{aligned} \|f_n\|_2^2 &= \int_0^1 |\mathbf{1}_{[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]}(x)|^2 dx = \int_0^1 \mathbf{1}_{[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]}(x) dx \\ &= (j+1)2^{-k} - j2^{-k} = 2^{-k} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

denn mit wachsendem n wird auch k immer größer. Das bedeutet aber, dass diese Funktionenfolge im quadratischen Mittel gegen die Nullfunktion konvergiert, obwohl sie in keinem einzigen Punkt konvergiert.

Die am Ende von Abschnitt 1 beschriebene Motivation für die konkrete Wahl der Fourierpolynome und der Fourierreihe war, dass $S_n f$ die Orthogonalprojektion von f auf den Teilraum der trigonometrischen Polynome vom Grad höchstens n in $\mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ ist und deshalb so etwas wie eine Bestapproximation in diesem Teilraum sein sollte. Diesen Gedanken können wir jetzt bestätigen und präzisieren.

Satz 3.2 (Bestapproximationseigenschaft). *Sei $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- (a) *Für jedes trigonometrische Polynom T vom Grad höchstens n mit $T \neq S_n f$ gilt $\|f - S_n f\|_2 < \|f - T\|_2$.*
- (b) *Es gilt $\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |\hat{f}(k)|^2$.*

Bemerkung 3.3. Die Aussage von Teil (a) des Satzes bedeutet, dass $S_n f$ das eindeutige trigonometrische Polynom vom Grad höchstens n ist, das f im quadratischen Mittel am besten approximiert. Teil (b) gibt dann sogar an, wie groß der Approximationsfehler genau ist.

Die Formeln sind typisch für Orthogonalprojektionen in $\mathbb{R}^d$ und könnten daher aus der Vorlesung Lineare Algebra bekannt sein. Die positive Überraschung ist, dass sie sich so problemlos auf das unendliche Orthonormalsystem $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ausweiten lassen.

Beweis von Satz 3.2. Sei $T = \sum_{k=-n}^n t_k e_k$ ein trigonometrisches Polynom vom Grad höchstens n . Dann gilt für den Abstand von T zu f

$$\begin{aligned} \|f - T\|_2^2 &= \langle f - T, f - T \rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \langle f, T \rangle - \langle T, f \rangle + \langle T, T \rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \left\langle f, \sum_{k=-n}^n t_k e_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=-n}^n t_k e_k, f \right\rangle + \left\langle \sum_{k=-n}^n t_k e_k, \sum_{k=-n}^n t_k e_k \right\rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n (\overline{t_k} \langle f, e_k \rangle + t_k \langle e_k, f \rangle) + \sum_{k, \ell=-n}^n t_k \overline{t_\ell} \langle e_k, e_\ell \rangle. \end{aligned}$$

Mit der Definition der Fourierkoeffizienten und der Orthonormalität der e_k ergibt sich

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n (\overline{t_k} \widehat{f}(k) + t_k \overline{\widehat{f}(k)}) + \sum_{k=-n}^n t_k \overline{t_k}.$$

Wir addieren eine nährhafte Null und bekommen

$$\begin{aligned} &= \|f\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n (t_k \overline{t_k} - t_k \overline{\widehat{f}(k)} - \overline{t_k} \widehat{f}(k) + \widehat{f}(k) \overline{\widehat{f}(k)}) - \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) \overline{\widehat{f}(k)} \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n (t_k - \widehat{f}(k)) (\overline{t_k} - \overline{\widehat{f}(k)}) - \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |t_k - \widehat{f}(k)|^2 - \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2. \end{aligned}$$

Da alle auftretenden Ausdrücke nun Quadrate sind, sieht man sofort, dass dieser Ausdruck genau dann minimal groß ist, wenn der mittlere Summand verschwindet, d. h. wenn für jedes $k \in \{-n, \dots, n\}$ gilt $t_k = \widehat{f}(k)$. Daraus folgt die Aussage in (a) und im Fall $T = S_n f$ folgt aus dieser Gleichheit auch sofort die Aussage in (b). $\square$

Dieser Satz hat einige bemerkenswerte Konsequenzen.

3. Konvergenz im quadratischen Mittel

Korollar 3.4 (Besselsche Ungleichung). Für jedes $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Beweis. Nach Satz 3.2 (b) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 - \|f - S_n f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Daraus folgt im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ die Behauptung. $\square$

Da Konvergenz einer Reihe sofort impliziert, dass die Summanden eine Nullfolge bilden, können wir ein weiteres wichtiges Korollar formulieren.

Korollar 3.5 (Lemma von Riemann-Lebesgue). Für jede Funktion $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ gilt $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(k) = 0$.

Das in der Besselschen Ungleichung festgehaltene Abklingverhalten der Fourierkoeffizienten lässt sich noch auf andere Art und Weise nutzen. Im Folgenden verbessern wir für auf $[-\pi, \pi]$ stetig differenzierbare Funktionen die punktweise Konvergenz der Fourierreihe aus Satz 2.9 zu gleichmäßiger Konvergenz.

Lemma 3.6. Sei $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ stetig differenzierbar auf $[-\pi, \pi]$ und sei $g \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ die 2π -periodische Fortsetzung von $(f|_{[-\pi, \pi]})'$. Dann gilt

$$\widehat{g}(k) = ik\widehat{f}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{g}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx} dx \\ &= f(x)e^{-ikx} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-ik)e^{-ikx} dx = 0 + ik\widehat{f}(k). \end{aligned} \quad \square$$

Satz 3.7. Sei $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ stetig differenzierbar auf $[-\pi, \pi]$. Dann konvergiert die Fourierreihe (Sf) gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ und es gilt

$$(Sf)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2}, & \text{falls } x = \pi \end{cases}.$$

Beweis. Nach Satz 2.9 konvergiert (Sf) punktweise gegen die angegebene Grenzfunktion. Um gleichmäßige Konvergenz nachzuweisen, nutzen wir das Majorantenkriterium für Funktionenreihen. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt unter Zuhilfenahme von Lemma 3.6 dass

$$|\widehat{f}(k)e_k(x)| = |\widehat{f}(k)| = \frac{1}{k}|\widehat{g}(k)|,$$

wobei $g \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ wiederum die 2π -periodische Fortsetzung von $(f|_{[-\pi, \pi]})'$ ist. Die Ungleichung $2ab \leq a^2 + b^2$ für positive reelle Zahlen führt auf

$$|\widehat{f}(k)e_k(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + |\widehat{g}(k)|^2 \right).$$

Dank der Besselsche Ungleichung und unserem Wissen aus der Analysis I wissen wir, dass die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1/k^2 + |\widehat{g}(k)|^2)$ konvergiert. Folglich konvergiert (Sf) gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ nach dem Majorantenkriterium für Funktionenreihen. $\square$

Nun wollen wir uns dem Herz dieses Kapitels zuwenden, der Konvergenz der Fourierreihe im quadratischen Mittel für *jede* Funktion aus $\mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Dazu benötigen wir noch die beliebig genaue Approximierbarkeit durch stetig differenzierbare Funktionen, die wir in den Übungen beweisen werden:

Lemma 3.8. *Seien $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ mit $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.*

Satz 3.9 (Parsevalsche Gleichung). *Für jedes $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ konvergiert die Fourierreihe (Sf) im quadratischen Mittel gegen f und es gilt*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Beweis. Unter der Zusatzannahme $f \in C^1(\mathbb{R})$ wissen wir aus Satz 3.7 bereits, dass die Fourierreihe (Sf) gleichmäßig gegen f konvergiert, also nach Bemerkung 3.1 (a) auch im quadratischen Mittel.

Sei nun also $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$ beliebig. Dann gibt es nach Lemma 3.8 eine Funktion $g \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ mit $\|f - g\|_2 < \varepsilon/2$ und nach dem schon Bewiesenen gibt es weiter ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $\|S_n g - g\|_2 < \varepsilon/2$. Also gilt für diese n auch

$$\begin{aligned} \|S_n f - f\|_2^2 &= \|S_n(f - g) - (f - g) + S_n g - g\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f - g) - (f - g) + S_n g - g|^2 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|S_n(f - g) - (f - g)| + |S_n g - g|)^2 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2|S_n(f - g) - (f - g)|^2 + 2|S_n g - g|^2 \\ &= 2\|S_n(f - g) - (f - g)\|_2^2 + 2\|S_n g - g\|_2^2. \end{aligned}$$

Der zweite Term ist nach der Wahl von n klein und den ersten bearbeiten wir mit dem Bestapproximations-Satz 3.2 (a) mit der speziellen Wahl $T = 0$ und erhalten

$$\leq 2\|f - g\|_2^2 + 2\frac{\varepsilon^2}{4} \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2.$$

3. Konvergenz im quadratischen Mittel

Das liefert die Konvergenz der Fourierreihe und es bleibt noch die Parsevalsche Gleichung zu zeigen. Nach Satz 3.2 (b) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\|f\|_2^2 = \|S_n f - f\|_2^2 + \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}(k)|^2.$$

Nach dem oben bereits Bewiesenen können wir in dieser Gleichung zum Grenzwert $n \rightarrow \infty$ übergehen. Dabei verschwindet der erste Summand auf der rechten Seite und wir bekommen

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2,$$

wie gewünscht. □

Bemerkung 3.10. Schreibt man die Fourierreihe von f wie in Satz 2.11 reell um, bekommt die Parsevalsche Gleichung die folgende Form:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Das kann man direkt mit den Umrechnungsformeln aus Satz 2.11 nachrechnen.

Zum Abschluss bestimmen wir mit Hilfe der Parsevalschen Formel einen weiteren berühmten Reihenwert.

Beispiel 3.11. Wir betrachten nochmal die 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus Beispiel 2.13, mit deren Hilfe wir das Baseler Problem gelöst haben. Zur Erinnerung: $f(x) = x^2$ für $x \in [-\pi, \pi]$ und $a_0 = 2\pi^2/3$, $a_k = 4(-1)^k/k^2$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie $b_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Setzt man dies in die reeller Form der Parsevalschen Gleichung ein, so folgt

$$\frac{4\pi^4}{36} + \frac{16}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{10\pi} x^5 \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{2\pi^4}{10}.$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{8} \left(\frac{2\pi^4}{10} - \frac{4\pi^4}{36} \right) = \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{9-5}{45} \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Wir kennen damit für die sogenannte Zeta-Funktion $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ die genauen Werte $\zeta(2) = \pi^2/6$ und $\zeta(4) = \pi^4/90$. Ähnliche Formeln lassen sich für alle geraden natürlichen Zahlen s herleiten, beispielsweise $\zeta(8) = \pi^8/9450$, aber bis heute kennt man keinen vergleichbar einfachen Ausdruck für $\zeta(3)$.

Teil II.

Metrische Räume

4. Metrische Räume

In Ihrer bisherigen Karriere in der Analysis sind Ihnen viele Beweise begegnet, die, obgleich Sie sehr unterschiedliche mathematische Objekte betrafen, ganz ähnlichen Strategien gefolgt sind. Denken Sie an einen beliebigen Konvergenzbeweis. Was haben Sie benutzt? Sicherlich eine Methode, um Abstände zwischen den beteiligten Objekten zu messen und höchstwahrscheinlich mehrmals die omnipräsente Dreiecksungleichung. Für Folgen und Reihen in $\mathbb{K}^1$ haben Sie Abstände mit dem Absolutbetrag gemessen, für Fragen der gleichmäßigen Konvergenz haben Sie das Supremum über die Abstände der Funktionswerte genutzt und zuletzt haben Sie Konvergenz im quadratischen Mittel untersucht.

Wir wollen uns nun auf eine höhere Flughöhe begeben und uns zunächst ganz abstrakt mit Mengen beschäftigen, in denen ein Abstandsbegriff, eine sogenannte Metrik, definiert ist. Als Aufwärmübung, die gleichzeitig einen für das weitere fundamental wichtigen Spezialfall darstellt, betrachten wir speziell Vektorräume. Dort lässt sich der Begriff einer Länge folgendermaßen axiomatisieren.

Definition 4.1. Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

(a) Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm auf V , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

i) Es ist $\|x\| = 0$, genau dann wenn $x = 0$ ist. (Definitheit)

ii) Für alle $x \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. (Homogenität)

iii) Für alle $x, y \in V$ gilt $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Dreiecksungleichung)

(b) In diesem Fall nennt man V mit $\|\cdot\|$ einen normierten (Vektor-)Raum.

Beispiel 4.2. (a) Im eindimensionalen Raum $\mathbb{K}$ haben wir schon eine Norm kennengelernt, nämlich den Betrag.

(b) Im d -dimensionalen Raum $\mathbb{K}^d$ gibt es eine ganze Reihe von Normen. Die

¹Der Buchstabe $\mathbb{K}$ steht auch in diesem Semester wieder für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

4. Metrische Räume

gebräuchlichsten sind für $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T \in \mathbb{K}^d$

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2\text{-Norm}),$$

$$\|x\|_\infty := \max_{j=1}^d |x_j| \quad (\text{Maximumsnorm oder Unendlich-Norm}),$$

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^d |x_j| \quad (1\text{-Norm}),$$

bzw. allgemein für $p \geq 1$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p\text{-Norm}).$$

Beispielhaft rechnen wir hier durch, dass die 1-Norm tatsächlich eine Norm ist. Dazu überprüfen wir die Bedingungen (a)i) bis (a)iii) aus Definition 4.1.

- i) Es ist offensichtlich $\|0\|_1 = 0$. Ist umgekehrt $\|x\|_1 = 0$ für ein $x \in \mathbb{K}^d$, so gilt $\sum_{j=1}^d |x_j| = 0$ und da jeder Summand positiv ist, muss jeder Summand Null sein. Also ist $x_j = 0$ für alle j und damit $x = 0$.
- ii) Seien $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T \in \mathbb{K}^d$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{j=1}^d |\lambda x_j| = \sum_{j=1}^d |\lambda| |x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^d |x_j| = |\lambda| \|x\|_1.$$

- iii) Aus der Dreiecksungleichung für den Betrag in $\mathbb{K}$ folgt für beliebige $x = (x_j)_{j=1, \dots, d}$, $y = (y_j)_{j=1, \dots, d} \in \mathbb{K}^d$

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= \sum_{j=1}^d |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^d (|x_j| + |y_j|) \\ &= \sum_{j=1}^d |x_j| + \sum_{j=1}^d |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1. \end{aligned}$$

Sie sind eingeladen, den entsprechenden Nachweis für die Supremumsnorm selbst zu führen. Wer eine Herausforderung braucht, nehme sich die p -Norm vor.

Um eine Vorstellung von einer Norm zu bekommen, ist es meist gut, sich die sogenannte *Einheitskugel* $K_1(0) := \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$ anzuschauen. Die Ränder der Einheitskugeln der 1-, 2- und ∞ -Norm in $\mathbb{R}^2$ finden Sie in Abbildung 4.1.

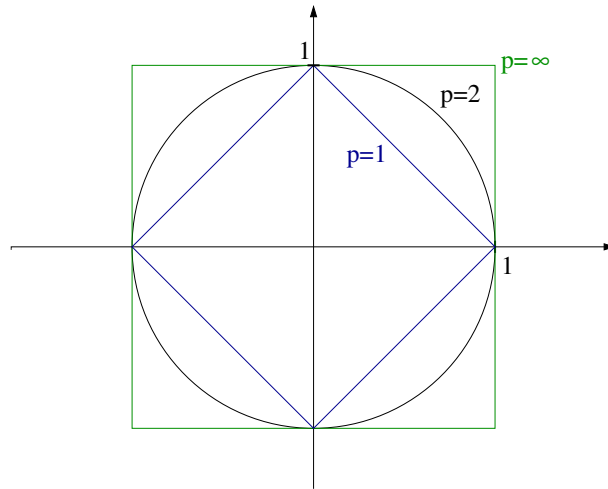


Abbildung 4.1.: Die Ränder der Einheitskugeln im $\mathbb{R}^2$ für die 1-, 2- und ∞ -Norm

Bemerkung 4.3. Der durch die 2-Norm definierte Längenbegriff ist der uns im Alltag geläufige. Er liegt der Euklidischen Geometrie zugrunde. Deshalb wird die 2-Norm auch bisweilen als *Euklidische Norm* bezeichnet.

Die folgende Vergleichbarkeit von p - und ∞ -Norm in $\mathbb{K}^d$ werden wir in den nächsten Abschnitten häufiger brauchen, bevor wir sie dann als Spezialfall des viel allgemeineren Satzes 7.11 erkennen werden.

Satz 4.4. Für alle $x \in \mathbb{K}^d$ und alle $p \geq 1$ gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq d^{1/p} \|x\|_\infty$.

Beweis. Es gilt für alle $x \in \mathbb{K}^d$

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max_{j=1}^d |x_j| = \left(\max_{j=1}^d |x_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p \\ &= \left(\sum_{j=1}^d |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^d \|x\|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(d \|x\|_\infty^p \right)^{\frac{1}{p}} = d^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 4.5. Die Bezeichnung der Maximumsnorm mit dem Unendlich-Zeichen mag zunächst seltsam erscheinen. Tatsächlich ist sie aber in gewisser Weise der Grenzfall für p gegen unendlich. Geht man in der Ungleichungskette aus Satz 4.4 zum Grenzwert $p \rightarrow \infty$ über, so findet man mit dem Sandwich-Theorem $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Wir geben der in Satz 4.4 bewiesenen Vergleichbarkeit von Normen einen Namen.

Definition 4.6. Es sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\!\|\!\cdot\!\|$ auf V heißen äquivalent, wenn es Konstanten $c, C > 0$ gibt mit

$$c\|x\| \leq \|\!\|x\!\| \leq C\|x\| \quad \text{für alle } x \in V.$$

4. Metrische Räume

Übungsaufgabe 4.7. Zeigen Sie, dass die Äquivalenz von Normen tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen eines gegebenen $\mathbb{K}$ -Vektorraums darstellt.

Beispiel 4.8. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Auf dem Raum $C([a, b])$ der stetigen Funktionen auf $[a, b]$ lassen sich für $1 \leq p$ die p -Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

und die *Unendlich-Norm* oder *Supremums-* bzw. *Maximumsnorm*

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

definieren. Die Supremumsnorm ist uns im Zusammenhang mit gleichmäßiger Konvergenz in der Analysis I begegnet. Die 2-Norm auf $I = [-\pi, \pi]$ (multipliziert mit $(2\pi)^{-1/2}$) haben wir nach einigen Umwegen in Abschnitt 3 als die natürliche Norm für die Analysis von Fourierreihen identifiziert.

Der Nachweis der Norm-Eigenschaften für die 1- und ∞ -Norm ist einfach, wohingegen die allgemeine p -Norm wieder eine herausfordernde Übung ist.

Wir machen uns klar, dass im Gegensatz zu $\mathbb{K}^d$ die Unendlich- und die 2-Norm auf $C([0, 1])$ *nicht* äquivalent sind. Durch eine affine Abbildung lässt sich dieses Resultat sogar auf jedes Intervall $[a, b]$ wie oben übertragen. Dazu betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &= 1, \\ \|f_n\|_2 &= \left(\int_0^1 t^{2n} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} = \sqrt{2n+1}.$$

Da dieser Quotient für $n \rightarrow \infty$ bestimmt gegen ∞ divergiert, kann es keine Konstante C geben, mit der $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$ für alle $f \in C([0, 1])$ gilt.

Wir erinnern an den Begriff eines Skalarproduktes aus der Vorlesung Lineare Algebra.

Definition 4.9. Ist V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, dann heißt eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ Skalarprodukt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Für alle $x \in V$ gilt $\langle x, x \rangle \in [0, \infty)$ und es ist $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist. (Definitheit)

(b) Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

(c) Für alle $x_1, x_2, y \in V$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle. \quad (\text{Linearität im ersten Argument})$$

Satz 4.10. Ist V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, so ist durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm definiert, die sogenannte assoziierte Norm.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir die folgende Ungleichung, die auch sonst von zentraler Wichtigkeit ist und für deren Beweis wir auf die Lineare Algebra verweisen.

Satz 4.11 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Ist V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und assoziierter Norm $\|\cdot\|$, so gilt für alle $x, y \in V$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis von Satz 4.10. Die Definitheit der Norm folgt direkt aus der Definitheit des Skalarprodukts. Gegeben $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ erhalten wir per Linearität in der ersten und Antilinearität in der zweiten Komponente die Homogenität der Norm

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \overline{\langle \lambda x, x \rangle} = \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2.$$

Schließlich finden wir für $x, y \in V$ mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

und durch Ziehen der Wurzel auf beiden Seiten folgt die Dreiecksungleichung. $\square$

Auf diese Weise sind in Beispiel 4.2 und Beispiel 4.8 jeweils die 2-Normen durch Skalarprodukte induziert. Die zugehörigen Skalarprodukte sind

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^d x_j \overline{y_j}, \quad x, y \in \mathbb{K}^d, \quad (\text{Standardskalarprodukt})$$

und

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} \, dt, \quad f, g \in C(I) \quad (L^2\text{-Skalarprodukt}).$$

Man beachte, dass Normen, die sich aus Skalarprodukten gewinnen lassen, nur schöne Spezialfälle sind. Die meisten Normen lassen sich nicht mit einem Skalarprodukt assoziieren. Das gilt z.B. für alle anderen Normen in den beiden obigen Beispielen, wie wir teilweise in den Übungen sehen werden. Wir sammeln ein paar einfache Eigenschaften von Normen.

4. Metrische Räume

Satz 4.12. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gilt für alle $x, y \in V$

(a) $\|x\| \geq 0$.

(b) $\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|$. (umgekehrte Dreiecksungleichung)

Beweis. Wir beweisen nur (a), den Beweis der umgekehrten Dreiecksungleichung können Sie direkt aus der Analysis I abschreiben. Sie müssen lediglich an einigen Stellen „|“ durch „ $\|$ “ ersetzen.

Für alle $x \in V$ gilt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$0 = \|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|x\| = 2\|x\|.$$

Also ist $\|x\| \geq 0$. □

Vektorräume sind sehr wichtige, aber auch sehr reichhaltige Strukturen. Um in allgemeineren Zusammenhängen Analysis betreiben zu können, z.B. auf einer Kugeloberfläche (Mit einer solchen hat die Menschheit ja manchmal zu tun. . .), wäre ein Abstandsbegriff schön, der ohne die algebraische Struktur eines Vektorraums auskommt. Diesen liefert der folgende Begriff.

Definition 4.13. Sei M eine nicht-leere Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik auf M , falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:

(a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$, (Definitheit)

(b) $d(x, y) = d(y, x)$, (Symmetrie)

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (Dreiecksungleichung)

In diesem Fall nennt man M mit der Metrik d einen metrischen Raum.

Wir sammeln erste einfache Eigenschaften von Metriken und werden dabei auch sehen, dass wir damit wirklich ein verallgemeinertes Konstrukt haben, denn jede Norm erzeugt auch eine Metrik.

Satz 4.14. (a) Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gilt $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in M$.

(b) Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $N \subseteq M$ sei nicht-leer. Dann ist die Einschränkung von d auf $N \times N$ eine Metrik auf N , die sogenannte induzierte Metrik. Diese wird zuweilen als d_N notiert.

(c) Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, so ist durch $d(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in V$, eine Metrik auf V gegeben.

Beweis. (a) Wie im Beweis von Satz 4.12 (a) bekommen wir für alle $x, y \in M$

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y),$$

also $d(x, y) \geq 0$.

(b) Alle drei Axiome einer Metrik sind Allaussagen auf Elemente in M . Diese gelten dann natürlich auch für alle Elemente in N .

(c) Wir müssen nur die drei Metrik-Axiome nachprüfen. Ist $x = y$, so ist $d(x, y) = d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$. Und gilt $0 = d(x, y) = \|x - y\|$, so ist dank der Definitheit der Norm, vgl. Definition 4.1 (a)i), sofort $x - y = 0$, d.h. $x = y$.

Die Symmetrie folgt aus der Homogenität der Norm, denn für alle $x, y \in V$ gilt

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = d(y, x).$$

Es bleibt noch die Dreiecksungleichung zu prüfen. Seien dazu $x, y, z \in V$. Dann ist dank der Dreiecksungleichung für Normen

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y). \quad \square$$

Zum Abschluss wollen wir uns zwei Beispiele ansehen, die unter Anderem zeigen, dass man tatsächlich beliebige Mengen mit einer Metrik ausstatten kann.

Beispiel 4.15. (a) Wir betrachten zunächst die sogenannte *diskrete Metrik*. Diese ist auf jeder nicht-leeren Menge M gegeben durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

für $x, y \in M$.

Dass dies eine Metrik ist, sieht man folgendermaßen: Zunächst ergibt sich die Definitheit direkt aus der Definition. Für die Symmetrie müssen wir nur beachten, dass mit $x = y$ auch $y = x$ gilt, bzw, dass $x \neq y$ auch $y \neq x$ impliziert. Sind schließlich $x, y, z \in M$, so kann zum Einen $x = y$ sein. In diesem Fall ist $d(x, y) = 0$ und damit auf jeden Fall kleiner oder gleich $d(x, z) + d(z, y)$. Ist aber $x \neq y$, so muss auch z zumindest von x oder y verschieden sein, es ist also dann $d(x, y) = 1 \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(b) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Dann haben wir in Satz 4.14 (c) gesehen, dass dieser auch ein metrischer Raum ist. Wir können aber nun

4. Metrische Räume

noch eine andere Metrik auf V definieren, die selbst nicht durch eine Norm erzeugt wird, die sogenannte französische Eisenbahnmetrik

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|, & \text{falls } x, y \text{ linear abhängig,} \\ \|x\| + \|y\|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Abstand zweier Punkte ist also gleich dem „normalen“ Abstand, wenn diese auf einer gemeinsamen Ursprungsgerade liegen und sonst gleich der Länge des Weges vom einen Punkt zum anderen mit Umweg über den Ursprung. Das entspricht der Weglänge in einem komplett zentralisiert aufgebauten Verkehrsnetz, bei dem alle Punkte untereinander nur durch Wege über das Zentrum verbunden sind. In überzeichneter Sichtweise des französischen Eisenbahnnetzes kam diese Metrik zu ihrem Namen, wobei natürlich Paris im Ursprung liegt.

Die Aufgabe, die Metrik-Axiome nachzuweisen, bleibt als Übung stehen.

Eine Bedeutung dieses Beispiels liegt darin, dass dies eine Metrik auf dem Vektorraum V ergibt, die sich nicht im Sinne von Satz 4.14(c) durch eine Norm beschreiben lässt. Hier ein Tipp, falls Sie das nachweisen wollen: Jede Metrik, die von einer Norm herrührt, ist translationsinvariant, d. h. für alle $x, y, z \in V$ gilt die Gleichheit $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

5. Topologische Grundbegriffe

Haben wir in einer Menge eine Metrik, d. h. einen Abstandsbegriff zur Verfügung, so können wir damit „Kugeln“ beschreiben. Das führt uns in diesem Kapitel zu Verallgemeinerung von Begriffen wie offene und abgeschlossene Menge, Häufungspunkt, usw. auf metrische Räume. Wir werden so die Grundlage für analytische Betrachtungen auf solchen Mengen legen. Im gesamten Abschnitt sei (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 5.1. (a) Für $x_0 \in M$ und $r > 0$ ist

$$U_r(x_0) := \{x \in M : d(x, x_0) < r\}$$

die (offene) Kugel um x_0 mit Radius r .

(b) Eine Teilmenge U von M heißt Umgebung von $x_0 \in M$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq U$.

(c) Eine Teilmenge X von M heißt

i) beschränkt, falls es ein $r > 0$ und ein $x_0 \in M$ gibt mit $X \subseteq U_r(x_0)$.

ii) offen, wenn für jedes $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subseteq X$.

iii) abgeschlossen, falls $X^c = M \setminus X$ offen ist.

Beispiel 5.2. Es seien $x_0 \in M$ und $r > 0$.

(a) Wir betrachten die offene Kugel $U_r(x_0)$ und zeigen, dass diese im Sinne unserer Definition auch wirklich offen ist. Es sei dazu $x \in U_r(x_0)$ ein beliebiger Punkt in dieser Menge. Dann ist nach der Definition der Kugel $d(x, x_0) < r$ und es gilt $\varrho := r - d(x, x_0) > 0$. Wir zeigen nun, dass $U_\varrho(x) \subseteq U_r(x_0)$ gilt, womit dann folgt, dass $U_r(x_0)$ offen ist.

Sei dazu $z \in U_\varrho(x)$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung

$$d(z, x_0) \leq d(z, x) + d(x, x_0) < \varrho + d(x, x_0) = r.$$

Also ist $z \in U_r(x_0)$ und wir sind fertig.

(b) Wir betrachten die abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius r , d. h.

$$K_r(x_0) := \{x \in M : d(x, x_0) \leq r\}$$

5. Topologische Grundbegriffe

und zeigen, dass auch diese ihren Namen zurecht trägt, also abgeschlossen ist. Dazu müssen wir zeigen, dass $K_r(x_0)^c$ offen ist. Wir wählen also ein $x \in K_r(x_0)^c$. Dann ist $d(x, x_0) > r$ und es gilt $\varrho := d(x, x_0) - r > 0$. Wenn wir also zeigen können, dass $U_\varrho(x) \subseteq K_r(x_0)^c$ gilt, sind wir fertig.

Sei dazu $z \in U_\varrho(x)$. Dann gilt wieder mit Hilfe der Dreiecksungleichung $d(x, x_0) \leq d(x, z) + d(z, x_0)$, also haben wir

$$d(z, x_0) \geq d(x, x_0) - d(x, z) = \varrho + r - d(x, z) > \varrho + r - \varrho = r.$$

Also ist $z \in K_r(x_0)^c$ und wir haben $U_\varrho(x) \subseteq K_r(x_0)^c$ erreicht.

Warnung 5.3. (a) Mengen sind keine Türen! Die meisten Mengen sind weder offen noch abgeschlossen, denken Sie z.B. an ein halboffenes Intervall in $\mathbb{R}$. Hüten Sie sich also vor dem Fehlschluss: „Ich habe festgestellt, dass meine Menge nicht offen ist, also ist sie abgeschlossen.“

(b) Die Eigenschaft einer Menge offen, bzw. abgeschlossen zu sein, hängt vom betrachteten umgebenden metrischen Raum ab. So ist die Menge $[0, 1)$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen. Betrachtet man sie als Teilmenge von $[0, \infty)$ (mit der natürlichen induzierten Metrik), so ist sie offen, aber nicht abgeschlossen, und als Teilmenge von $[0, 1)$ ist sie offen und abgeschlossen. Es lohnt sich, darüber ein wenig nachzudenken und diesen Effekt zu verinnerlichen. Das schützt später davor immer wieder in Fallen zu tappen. Zum Verständnis kann Ihnen auch die folgende Übungsaufgabe helfen.

Übungsaufgabe 5.4. Es sei $X \subseteq M$. Dann ist $Y \subseteq X$ bezüglich der induzierten Metrik in X

- (a) genau dann offen, wenn es eine (in M) offene Menge $O \subseteq M$ gibt mit $Y = O \cap X$.
- (b) genau dann abgeschlossen, wenn es eine (in M) abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ gibt mit $Y = A \cap X$.

Übungsaufgabe 5.5. Es sei V ein normierter Vektorraum und $U_r(x_0)$ sei eine offene Kugel mit Radius $r > 0$ um $x_0 \in V$. Zeigen Sie, dass diese immer *konvex* ist, d. h. für alle $x, y \in U_r(x_0)$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U_r(x_0)$.

Anschaulich bedeutet Konvexität für eine Teilmenge eines normierten Vektorraums, dass für je zwei ihrer Punkte die gesamte Verbindungsstrecke der beiden auch zu der Menge gehört.

Offene bzw. abgeschlossene Mengen kann man recht gut vereinigen und schneiden ohne diese Eigenschaften zu verlieren. Genauer gilt das folgende Resultat.

Satz 5.6. Es sei I eine beliebige Indexmenge.

- (a) Sind $X_i \subseteq M$ für jedes $i \in I$ offene Mengen, so ist auch $\bigcup_{i \in I} X_i$ offen.
- (b) Sind $X_1, X_2 \subseteq M$ offen, so ist auch $X_1 \cap X_2$ offen.
- (c) Sind $X_i \subseteq M$ für jedes $i \in I$ abgeschlossene Mengen, so ist auch $\bigcap_{i \in I} X_i$ abgeschlossen.
- (d) Sind $X_1, X_2 \subseteq M$ abgeschlossen, so ist auch $X_1 \cup X_2$ abgeschlossen.

Bemerkung 5.7. In Worten sagt dieser Satz: Beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte von offenen Mengen sind offen, sowie beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.

Man beachte, dass an den beiden Stellen, an denen hier „endlich“ steht, auch nicht mehr geht, wie man an den folgenden Beispielen aus $\mathbb{R}$ sieht:

$$[0, 1) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, 1\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{n}{n+1}\right].$$

Beweis von Satz 5.6. Seien zunächst $X_i \subseteq M$ offen für jedes $i \in I$ und $x_0 \in \bigcup_{i \in I} X_i$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x_0 \in X_{i_0}$ und X_{i_0} ist eine offene Menge. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq X_{i_0}$. Dann ist aber auch $U_\varepsilon(x_0) \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$. Wir haben also gezeigt, dass diese Menge offen ist und damit (a) erledigt.

Zum Nachweis von (b) seien nun $X_1, X_2 \subseteq M$ offene Mengen und $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Da beide Mengen offen sind, gibt es dann Radii $r_1, r_2 > 0$ mit $U_{r_1}(x_0) \subseteq X_1$ und $U_{r_2}(x_0) \subseteq X_2$. Für $r := \min\{r_1, r_2\}$ gilt dann $U_r(x_0) \subseteq X_1 \cap X_2$. Also ist $X_1 \cap X_2$ offen.

Für (c) seien $X_i \subseteq M$ abgeschlossen für jedes $i \in I$. Dann ist mit den De Morgan'schen Regeln

$$\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} X_i^c.$$

Nun ist jedes X_i^c offen und mit Hilfe von (a) ist die Vereinigung all dieser Mengen ebenfalls offen und damit auch $\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^c$. Das bedeutet aber schlussendlich, dass $\bigcap_{i \in I} X_i$ abgeschlossen ist.

Genauso sieht man für abgeschlossene Mengen $X_1, X_2 \subseteq M$ mit Hilfe von (b), dass $(X_1 \cup X_2)^c = X_1^c \cap X_2^c$ offen und damit $X_1 \cup X_2$ abgeschlossen ist. Das liefert (d) und beendet den Beweis. $\square$

Die Ergebnisse aus obigem Satz ermöglichen es, mittels der beliebten Technik der Hüllenbildung für jede Teilmenge von M eine minimale abgeschlossene Obermenge und eine maximale offene Teilmenge zu finden. Das liefert die folgenden Begriffe.

Definition 5.8. Zu gegebenem $X \subseteq M$ betrachten wir die Mengensysteme $\mathcal{O}_X := \{O \subseteq X : O \text{ offen}\}$ und $\mathcal{A}_X := \{A \supseteq X : A \text{ abgeschlossen}\}$ und definieren:

5. Topologische Grundbegriffe

- (a) $X^\circ := \bigcup_{O \in \mathcal{O}_X} O$, (Inneres von X)
- (b) $\overline{X} := \bigcap_{A \in \mathcal{A}_X} A$, (Abschluss von X)
- (c) $\partial X := \overline{X} \setminus X^\circ$. (Rand von X)

Unter Verwendung von Satz 5.6 ist X° die größte offene Teilmenge von X und $\overline{X}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von X .

In engem Zusammenhang mit obiger Definition stehen die folgenden Begriffe für Elemente von M , vgl. Satz 5.10.

Definition 5.9. *Es sei X eine Teilmenge von M .*

- (a) *Ein $x_0 \in M$ heißt Häufungspunkt von X , falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $U_\varepsilon(x_0) \cap X$ unendlich ist.*
- (b) *Ein $x_0 \in M$ ist Randpunkt von X , falls für alle Umgebungen U von x_0 gilt, dass sowohl $U \cap X \neq \emptyset$ als auch $U \cap X^c \neq \emptyset$ ist.*
- (c) *Ein $x_0 \in X$ ist ein innerer Punkt von X , falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq X$.*

Satz 5.10. *Es sei X eine Teilmenge von M . Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- (a) $\overline{X} = X \cup \partial X = X^\circ \cup \partial X$.
- (b) $X^\circ = \{x \in X : x \text{ innerer Punkt von } X\}$.
- (c) $\partial X = \{x \in M : x \text{ Randpunkt von } X\}$.
- (d) $\overline{X} = \{x \in M : x \in X \text{ oder } x \text{ Häufungspunkt von } X\}$.

Beweis. (a) Wegen $X^\circ \subseteq X \subseteq \overline{X}$ gilt nach der Definition des Randes

$$\begin{aligned} \overline{X} &= (\overline{X} \cap X^\circ) \cup (\overline{X} \setminus X^\circ) = X^\circ \cup \partial X \subseteq X \cup \partial X = X \cup (\overline{X} \setminus X^\circ) \\ &\subseteq \overline{X} \cup (\overline{X} \setminus X^\circ) = \overline{X}. \end{aligned}$$

Also sind alle drei Mengen gleich.

- (b) Sei $x \in X^\circ$. Dann gibt es nach Definition von X° eine offene Teilmenge O von X mit $x \in O$. Da O offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq O \subseteq X$, also ist x ein innerer Punkt von X .

Ist umgekehrt x ein innerer Punkt von X , so ist für ein $\varepsilon > 0$ die offene Menge $U_\varepsilon(x)$ Teilmenge von X , d. h. $U_\varepsilon(x) \in \mathcal{O}_X$. Also ist $x \in \bigcup_{O \in \mathcal{O}_X} O = X^\circ$.

(c) Übung.

(d) Wir zeigen zunächst „ $\subseteq$ “. Dazu sei $x \in \overline{X}$ und wir nehmen an, es wäre weder $x \in X$, noch x ein Häufungspunkt von X . Dann gibt es nach der Definition eines Häufungspunktes ein $\varepsilon > 0$, für das die Menge $U_\varepsilon(x) \cap X$ endlich ist. Daraus wollen wir nun folgern, dass es sogar ein $\delta > 0$ gibt, so dass $U_\delta(x) \cap X = \emptyset$ ist. Ist $U_\varepsilon(x) \cap X$ schon leer, so ist nichts mehr zu tun. Ist das nicht der Fall, so gilt $U_\varepsilon(x) \cap X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Dann ist $\delta := \min\{d(x, x_j) : j = 1, 2, \dots, r\} > 0$, da x selbst nicht zu X gehört und es gilt $U_\delta(x) \cap X = \emptyset$.

Damit ist $U_\delta(x)^c$ eine abgeschlossene Obermenge von X und wir erhalten wegen

$$x \notin U_\delta(x)^c \supseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}_X} A = \overline{X}.$$

den Widerspruch $x \notin \overline{X}$.

Für die umgekehrte Inklusion „ $\supseteq$ “ ist wegen $X \subseteq \overline{X}$ und (a) nur zu zeigen, dass jeder Häufungspunkt von X , der nicht zu X gehört, in ∂X liegt.

Es sei also x ein solcher Häufungspunkt von X , der selbst nicht zu X gehört. Ist U eine Umgebung von x , so ist zum Einen $x \in U \cap X^c$ und damit diese Menge nicht-leer. Zum Anderen gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ und nach der Definition eines Häufungspunktes ist $U_\varepsilon(x) \cap X$ unendlich und damit insbesondere nicht-leer. Also ist auch $U \cap X$ nicht-leer und wir haben gezeigt, dass x ein Randpunkt von X ist. Also ist $x \in \partial X$ nach (c). $\square$

Beispiel 5.11. Wir betrachten auf M die diskrete Metrik d , d. h. $d(x, y) = 1$ falls $x \neq y$ und $d(x, y) = 0$ für $x = y$. Sei nun X eine beliebige Teilmenge von M . Für jeden Punkt $x_0 \in X$ ist dann

$$U_{1/2}(x_0) = \{y \in M : d(y, x_0) < 1/2\} = \{y \in M : y = x_0\} = \{x_0\} \subseteq X.$$

Also ist jede Teilmenge von M offen und damit auch jede Teilmenge abgeschlossen. In diesem Sinne ist die diskrete Metrik ein extremer Fall.

Wir können nun auch den Begriff der Dichtheit aus Analysis I verallgemeinern.

Definition 5.12. Eine Teilmenge X von M heißt dicht in M , wenn $\overline{X} = M$ gilt.

Satz 5.13 (Hausdorff'sches Trennungsaxiom). Es seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Dann existieren Umgebungen U_x und U_y von x bzw. y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Beweis. Es gilt $x \neq y$, also ist $d(x, y) > 0$. Mit $\varepsilon := d(x, y)/2 > 0$ setze $U_x := U_\varepsilon(x)$ und $U_y := U_\varepsilon(y)$. Dann ist U_x Umgebung von x und U_y Umgebung von y

5. Topologische Grundbegriffe

und, wenn wir annehmen, dass $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ gilt, so gibt es ein $z \in U_x \cap U_y$ mit dessen Hilfe wir zu dem Widerspruch

$$2\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

gelangen. Also ist $U_x \cap U_y = \emptyset$ und wir sind fertig. $\square$

Übungsaufgabe 5.14. (a) Zeigen Sie, dass für jedes $X \subseteq M$ die Menge der Häufungspunkte von X eine abgeschlossene Teilmenge von M ist.

(b) Weisen Sie nach, dass $\overline{U_\varepsilon(x_0)} \subseteq K_\varepsilon(x_0)$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x_0 \in M$ gilt. Gilt auch immer Gleichheit? Gilt Gleichheit im Fall eines normierten Raums?

6. Konvergenz in metrischen Räumen

Mit den Vorarbeiten aus dem letzten Abschnitt können wir nun den Konvergenzbegriff auf allgemeine metrische Räume verallgemeinern. Damit haben wir eine Basis für die weiteren Betrachtungen. In diesem ganzen Abschnitt sei wieder (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 6.1. Eine Folge (x_n) in M heißt

- (a) beschränkt, falls die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ in M beschränkt ist.
- (b) konvergent gegen $x_0 \in M$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, für das $x_n \in U_\varepsilon(x_0)$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Der Punkt x_0 heißt dann Grenzwert oder Limes der Folge (x_n) und wir schreiben wie gewohnt $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Viele Eigenschaften des Grenzwertes kann man analog zu unseren Betrachtungen in $\mathbb{R}$ aus der Analysis I beweisen, indem man den Abstand, der dort durch den Betrag beschrieben wird, durch die Metrik ausdrückt. Beispielhaft zeigen wir hier die Eindeutigkeit des Grenzwerts.

Satz 6.2. Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Beweis. Seien $x, y \in M$ Grenzwerte einer konvergenten Folge (x_n) in M . Nehmen wir an, es wäre $x \neq y$, so gibt es nach dem Hausdorff'schen Trennungsaxiom, Satz 5.13, Umgebungen U_x von x und U_y von y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Diese Umgebungen enthalten nach Definition je eine offene Kugel um x , bzw. y , d. h. es gibt $\varepsilon_x, \varepsilon_y > 0$, so dass $U_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U_x$ und $U_{\varepsilon_y}(y) \subseteq U_y$ gilt. Insbesondere ist damit $U_{\varepsilon_x}(x) \cap U_{\varepsilon_y}(y) = \emptyset$.

Andererseits konvergiert unsere Folge (x_n) gegen x und y , also liegen sowohl in $U_{\varepsilon_x}(x)$, als auch in $U_{\varepsilon_y}(y)$ jeweils fast alle Folgenglieder, womit wir bei einem Widerspruch wären. $\square$

Beispiel 6.3. In $\mathbb{R}$ haben wir schon ein gutes Gefühl für Konvergenz, wie sieht das bei exotischen Metriken aus? Wir betrachten die diskrete Metrik d , vgl. Beispiel 4.15 (a). Haben wir nun eine konvergente Folge (x_n) in M mit Grenzwert x_0 , so existiert zu $\varepsilon = 1/2$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$x_n \in U_{1/2}(x_0) = \{x \in M : d(x, x_0) < 1/2\} = \{x_0\}.$$

6. Konvergenz in metrischen Räumen

Also ist (x_n) fast überall konstant.

Tatsächlich sind die bezüglich der diskreten Metrik konvergenten Folgen genau die ab einem Index konstanten Folgen.

Übungsaufgabe 6.4. Eine Folge (x_n) in M konvergiert gegen $x_0 \in M$, genau dann wenn die reelle Folge $(d(x_n, x_0))$ eine Nullfolge ist.

Das folgende Beispiel kennen wir schon aus der Analysis I, aber wir können es nun in neuem Licht betrachten.

Beispiel 6.5. Wir betrachten ein kompaktes Intervall $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und den normierten Raum $C(I)$ mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$, vgl. Beispiel 4.8.

Eine Folge (f_n) in $C(I)$ ist dann eine Funktionenfolge von stetigen Funktionen und diese konvergiert nach Übungsaufgabe 6.4 genau dann in $C(I)$ gegen eine Funktion f , wenn

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)|$$

gilt. Ein Vergleich mit Übungsaufgabe I.20.9(b) zeigt, dass das genau gleichmäßige Konvergenz von (f_n) gegen f bedeutet.

Gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge ist also nichts anderes als Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm.

Wir können nun weitere Begriffe im Zusammenhang mit Konvergenz verallgemeinern.

Definition 6.6. Sei (x_n) eine Folge in M .

- (a) Ein $x_0 \in M$ heißt Häufungswert von (x_n) , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_\varepsilon(x_0)\}$ unendlich ist.
- (b) Die Folge (x_n) ist eine Cauchyfolge, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, für das $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt.

Die Beweise der Aussagen im folgenden Satz lassen sich dann wieder direkt aus den entsprechenden Beweisen der Analysis I übertragen, wenn man dort den Betrag durch die Metrik ersetzt.

Satz 6.7. Sei (x_n) eine Folge in M . Dann gilt:

- (a) (x_n) konvergent $\implies (x_n)$ Cauchyfolge $\implies (x_n)$ beschränkt.
- (b) Ist (x_n) konvergent mit Grenzwert x_0 , so ist x_0 ein Häufungswert von (x_n) .
- (c) Ein $x \in M$ ist genau dann ein Häufungswert von (x_n) , wenn es eine Teilfolge von (x_n) gibt, die gegen x konvergiert.

Wir zeigen noch schnell die folgende nützliche Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch Folgenkonvergenz. Dieser Satz zeigt außerdem, dass unsere Definition einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ aus der Analysis I mit der hier gegebenen Definition konsistent ist.

Satz 6.8. *Eine Menge $A \subseteq M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge in A , die in M konvergiert, der Grenzwert in A liegt.*

Beweis. „ $\Rightarrow$ “ Es sei A abgeschlossen und (x_n) sei eine Folge in A , die in M konvergiert. Wir nennen den Grenzwert x_0 und nehmen an, dieser wäre nicht in A .

Dann liegt x_0 in A^c . Da A abgeschlossen ist, ist A^c offen, es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x_0) \subseteq A^c$ ist. Dank der Konvergenz von (x_n) gilt nun $x_n \in U_\varepsilon(x_0)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere ist also $x_n \notin A$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, womit wir bei einem Widerspruch wären.

„ $\Leftarrow$ “ Wir zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen A^c offen ist. Dann ist nach Definition A abgeschlossen. Dazu müssen wir nachweisen, dass jeder Punkt von A^c ein innerer Punkt von A^c ist.

Wir nehmen also an es gäbe ein $x_0 \in A^c$, das kein innerer Punkt von A^c ist. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap (A^c)^c = U_\varepsilon(x_0) \cap A$. Für die speziellen Wahlen von $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, liefert das: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_n \in U_{1/n}(x_0) \cap A$. Damit ist (x_n) eine Folge in A , die nach Konstruktion gegen x_0 konvergiert. Unsere Voraussetzung liefert also den Widerspruch $x_0 \in A$. $\square$

Übungsaufgabe 6.9. Es sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $\|\cdot\|$ und $\|\!\!\|\cdot\|\!\!\|$ seien äquivalente Normen auf V , vgl. Definition 4.6. Zeigen Sie:

- (a) Eine Teilmenge von V ist genau dann in $(V, \|\cdot\|)$ abgeschlossen/offen/beschränkt, wenn sie dies in $(V, \|\!\!\|\cdot\|\!\!\|)$ ist.
- (b) Eine Folge in V ist genau dann beschränkt/konvergent/Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|)$, wenn sie dies in $(V, \|\!\!\|\cdot\|\!\!\|)$ ist.

Bemerkung 6.10. Die Bedeutung obiger Übungsaufgabe besteht darin, dass bei zwei äquivalenten Normen alle für die Analysis relevanten Eigenschaften die selben sind. Es ist also in einer solchen Situation sehr oft egal, welche konkrete Norm man betrachtet, solange alle betrachteten Normen äquivalent sind. Diese Freiheit kann man sich oft zu Nutze machen und sich eine Norm aussuchen, die gut zum jeweils betrachteten Problem passt.

In Satz 6.7 (a) haben wir gesehen, dass die Implikation „Konvergenz $\Rightarrow$ Cauchyfolge“ ganz allgemein in metrischen Räumen gilt. In $\mathbb{R}$ hatten wir auch die Umkehrung, aber wir hatten schon damals festgestellt, dass der entsprechende Beweis

6. Konvergenz in metrischen Räumen

das Vollständigkeitsaxiom benötigt und die Umkehrung z.B. in $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen falsch ist. Wir können also ganz sicher nicht im allgemeinen metrischen Raum erwarten, dass jede Cauchyfolge konvergiert, dazu braucht es eben Vollständigkeit. Aber wie definiert man die in diesem allgemeinen Kontext? Na, eben genau so!

Definition 6.11. (a) Der metrische Raum (M, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in M konvergiert.

(b) Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.

(c) Ein Banachraum, dessen Norm durch ein Skalarprodukt induziert wird, heißt Hilbertraum.

Die Konzepte des Banach- und Hilbertraums sind von großer Wichtigkeit für die moderne Entwicklung der Analysis und spielen in der heutigen Forschung eine zentrale Rolle. Im weiteren Verlauf Ihres Studiums werden sie Ihnen daher immer wieder begegnen. Für den Moment schauen wir uns einen ordentlichen Stapel Beispiele an.

Beispiel 6.12. (a) Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ und jedes $d \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{K}^d$ mit der p -Norm $\|\cdot\|_p$ ein Banachraum.

Um das einzusehen, betrachten wir eine Folge (x_n) in $\mathbb{K}^d$, die bezüglich der p -Norm eine Cauchyfolge ist. Da alle p -Normen nach Satz 4.4 äquivalent zur ∞ -Norm sind, ist diese Folge dann auch bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ eine Cauchyfolge, vgl. Übungsaufgabe 6.9. Für jedes $j \in \{1, \dots, d\}$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_{n,j} - x_{m,j}| \leq \max_{k=1}^d |x_{n,k} - x_{m,k}| = \|x_n - x_m\|_\infty.$$

Also sind mit (x_n) auch die Folgen $(x_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ Cauchyfolgen. Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, existieren die Grenzwerte $x_{0,j} := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,j} \in \mathbb{K}$ für jedes $j = 1, 2, \dots, d$ und für $x_0 := (x_{0,1}, \dots, x_{0,d})^T$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{j=1}^d |x_{n,j} - x_{0,j}| = 0.$$

Also konvergiert (x_n) in $\mathbb{K}^d$ bezüglich der ∞ -Norm gegen x_0 und nach Übungsaufgabe 6.9 und Satz 4.4 gilt die gleiche Konvergenz auch bezüglich der p -Norm. Wir haben also die Konvergenz von (x_n) gezeigt und $\mathbb{K}^d$ ist mit der p -Norm ein Banachraum.

(b) Insbesondere ist damit $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_2)$ ein Hilbertraum.

(c) Die rationalen Zahlen mit dem Betrag als Norm sind nicht vollständig, also kein Banachraum.

- (d) Ein wichtiger Banachraum ist $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ mit einem kompakten Intervall $[a, b]$ in $\mathbb{R}$. Auch hier weisen wir nach, dass es sich wirklich um einen vollständigen normierten Raum handelt. Es sei also (f_n) eine Folge in $C([a, b])$, die bezüglich der Supremumsnorm eine Cauchyfolge ist. Da für alle $t \in [a, b]$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \sup_{s \in [a, b]} |f_n(s) - f_m(s)| = \|f_n - f_m\|_\infty$$

gilt, ist die Folge $(f_n(t))$ in $\mathbb{K}$ für jedes $t \in [a, b]$ ebenfalls eine Cauchyfolge. Damit ist jede dieser Folgen konvergent, denn $\mathbb{K}$ ist vollständig.

Wir betrachten nun die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ mit $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$. Dann ist nach Konstruktion die Funktion f die punktweise Grenzfunktion der Funktionenfolge (f_n) . Das reicht uns aber nicht, denn wir müssen nachweisen, dass (f_n) in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ gegen f konvergiert. Dazu fehlen uns noch zwei Dinge: Erstens müssen wir sicherstellen, dass f selbst ein Element von $C([a, b])$ ist, d. h. wir brauchen Stetigkeit von f . Zum Zweiten brauchen wir Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm und das ist nach Beispiel 6.5 gleichbedeutend mit gleichmäßiger Konvergenz. Immerhin liefert die Lösung für das zweite Problem gleich die Lösung für das erste mit. Denn wenn wir nachweisen können, dass (f_n) gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen f konvergiert, so ist f ein gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen und damit selbst stetig.

Für den Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) seien $\varepsilon > 0$ und $t \in [a, b]$. Da (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich der Maximumsnorm ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon/2$ für alle $n, m \geq n_0$. Zum Anderen konvergiert $(f_n(t))$ punktweise gegen $f(t)$, also existiert ein $m_0 \geq n_0$, so dass $|f_{m_0}(t) - f(t)| < \varepsilon/2$ ist. Zusammengefasst haben wir damit für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &\leq |f_n(t) - f_{m_0}(t)| + |f_{m_0}(t) - f(t)| \\ &\leq \|f_n - f_{m_0}\|_\infty + |f_{m_0}(t) - f(t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

und damit die gesuchte gleichmäßige Konvergenz, da das gefundene n_0 nicht von t abhängt.

Der hier vorgeführte Vollständigkeitsbeweis folgt einem meist erfolgreichen Muster: Man verschafft sich zunächst irgendwoher einen Kandidaten für den Grenzwert, ohne sich zuviel Gedanken zu machen, ob der auch die formalen Kriterien erfüllt. Dann zeigt man Konvergenz gegen diesen Grenzwert und durch diesen Konvergenzbeweis klären sich dann auch meist die formalen Schwierigkeiten.

6. Konvergenz in metrischen Räumen

(e) Zur Übung seien die folgenden Aussagen empfohlen:

- $(C^1([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht vollständig.
- $(C^1([a, b]), \|\cdot\|_{C^1})$ mit $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ist vollständig.

(f) Schließlich muss noch ein weiterer sehr wichtiger Hilbertraum erwähnt werden. Der Raum $\ell^2(\mathbb{N})$ besteht aus allen Folgen (x_n) in $\mathbb{K}$, die *quadratsummierbar* sind, d. h. für die

$$\|(x_n)\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$$

endlich ist. Es stellt sich heraus (nachweisen!), dass dieses eine Norm ist, die durch das ℓ^2 -Skalarprodukt

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle_{\ell^2} := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}, \quad (x_n), (y_n) \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

induziert wird und dass $\ell^2(\mathbb{N})$ darüberhinaus vollständig, also ein Hilbertraum, ist.

Gleiches gilt für den Raum $\ell^2(\mathbb{Z})$ aller quadratsummierbaren Folgen, die über $\mathbb{Z}$ indiziert sind, mit der entsprechend angepassten Norm

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} |x_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$$

und dem angepassten Skalarprodukt

$$\langle (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rangle := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \overline{y_n}, \quad (x_n), (y_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Dieser Raum ist uns bereits im Kapitel 3 zu Fourierreihen begegnet. Mit seiner Hilfe können wir die Parsevalsche Gleichung aus Satz 3.9 als

$$\|f\|_2^2 = \|(\widehat{f}(n))\|_{\ell^2}^2$$

schreiben und diese Gleichheit gilt für alle $f \in \mathcal{S}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Wir haben schon in der Analysis I bemerkt, dass Vollständigkeit eine sehr mächtige Eigenschaft ist. Wir wollen nun zwei wichtige Sätze beweisen, die Vollständigkeit ausnutzen. Zur Formulierung des ersten Satzes führen wir noch einen Begriff ein.

Definition 6.13. Sei $A \subseteq M$ eine beschränkte Menge. Dann ist der Diameter von A gegeben durch

$$\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

Der folgende Cantorsche Durchschnittssatz ist eine Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips aus Satz I.8.4.

Satz 6.14 (Cantorscher Durchschnittssatz). *Sei M vollständig und A_n , $n \in \mathbb{N}$, seien abgeschlossene und nicht-leere Teilmengen von M mit*

(a) $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0$.

Dann gibt es ein $x_0 \in M$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x_0\}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass der Schnitt aller Mengen A_n höchstens ein Element enthalten kann. Seien dazu $x_1, x_2 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Dann gilt $x_1, x_2 \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_1, x_2) \leq \sup_{x, y \in A_n} d(x, y) = \text{diam}(A_n).$$

Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ folgt aus Voraussetzung (b), dass $d(x_1, x_2) = 0$ ist und damit $x_1 = x_2$.

Wir können uns also dem Existenzbeweis zuwenden und wollen nun zeigen, dass der Schnitt nicht leer ist. Da jede Menge A_n nicht-leer ist, finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A_n$. Wir zeigen, dass die so gewonnene Folge (x_n) eine Cauchyfolge in M ist. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$, finden wir dank (b) ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\text{diam}(A_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Betrachten wir nun $n, m \geq N$ so gilt wegen (a), dass $x_n, x_m \in A_N$ sind und das liefert uns die gewünschte Cauchy-Eigenschaft via

$$d(x_n, x_m) \leq \sup_{x, y \in A_N} d(x, y) = \text{diam}(A_N) < \varepsilon.$$

Die Vollständigkeit von M sagt uns, dass der Grenzwert $x_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existiert und es bleibt zu zeigen, dass x_0 wirklich im Schnitt aller A_n enthalten ist. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Da x_0 auch der Grenzwert der abgeschnittenen Folge $(x_m)_{m \geq n}$ ist, diese Folge nach (a) komplett in A_n liegt und A_n nach Voraussetzung abgeschlossen ist, folgt $x_0 \in A_n$ und wir sind fertig. $\square$

Wir beenden den Abschnitt mit dem für die Analysis zentralen Banach'schen Fixpunktsatz. Diesem werden Sie in den nächsten Semestern in allen möglichen Verkleidungen und in verschiedensten Vorlesungen wiederbegegnen. Auch deshalb behandeln wir ihn hier im ganz allgemeinen Rahmen eines vollständigen metrischen Raums.

Satz 6.15 (Banach'scher Fixpunktsatz). *Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : M \rightarrow M$ eine strikte Kontraktion, d. h. es gebe ein $q \in (0, 1)$ mit*

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M.$$

Dann hat f genau einen Fixpunkt, d. h. es existiert genau ein $x^* \in M$ mit $f(x^*) = x^*$. Außerdem konvergiert die Folge (x_n) in M mit $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, für jedes $x_0 \in M$ gegen x^* .

6. Konvergenz in metrischen Räumen

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz eines Fixpunkts von f . Dazu wählen wir ein $x_0 \in M$ beliebig und bezeichnen wie oben mit (x_n) die rekursiv definierte Folge in M mit $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq qd(x_n, x_{n-1}).$$

Iterieren wir dieses Argument, so folgt

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0). \quad (6.1)$$

Für beliebige $n, k \in \mathbb{N}$ gilt dann mit der Dreiecksungleichung, obiger Überlegung und freundlicher Unterstützung einer geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq \sum_{j=0}^{k-1} q^{n+j} d(x_1, x_0) = q^n d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{k-1} q^j \\ &\leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen Null geht, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, für den $d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon$ ist für jedes $n \geq n_0$ und jedes $k \in \mathbb{N}$. Also ist (x_n) eine Cauchyfolge in M .

Da M vollständig ist, muss (x_n) einen Grenzwert haben, den wir nun mit x^* bezeichnen. Dieser erfüllt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x^*, f(x^*)) &\leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, f(x^*)) = d(x^*, x_{n+1}) + d(f(x_n), f(x^*)) \\ &\leq d(x^*, x_{n+1}) + qd(x_n, x^*). \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht der Ausdruck auf der rechten Seite gegen Null und somit gilt $d(x^*, f(x^*)) = 0$, was wegen der Definitheit der Metrik $f(x^*) = x^*$ impliziert. Wir haben also einen Fixpunkt gefunden.

Wir wenden uns der Eindeutigkeit zu. Dazu überlegen wir uns zunächst, dass für alle $x, y \in M$ gilt

$$d(x, y) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), y) \leq d(x, f(x)) + qd(x, y) + d(y, f(y)).$$

Umstellen der Gleichung liefert

$$(1 - q)d(x, y) \leq d(x, f(x)) + d(y, f(y)).$$

und wir erhalten (mit $y = x^*$) für alle $x \in M$

$$(1 - q)d(x, x^*) \leq d(x, f(x)) + d(x^*, f(x^*)) = d(x, f(x)). \quad (6.2)$$

Das liefert nun für jeden Fixpunkt $x \in M$ von f die Ungleichung

$$(1 - q)d(x, x^*) \leq d(x, f(x)) = 0$$

und da q in $(0, 1)$ liegt, muss damit $d(x, x^*) = 0$, d. h. $x = x^*$ gelten. $\square$

Bemerkung 6.16. Für die Folge (x_n) im Banach'schen Fixpunktsatz gelten die folgenden Fehlerschranken für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(a) \text{ A priori } d(x^*, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

$$(b) \text{ A posteriori } d(x^*, x_n) \leq \frac{1}{1-q} d(x_n, x_{n+1}).$$

Die a posteriori Abschätzung ist dabei immer mindestens genauso gut, wie die a priori Abschätzung.

Um dies einzusehen, bauen wir die Zwischenergebnisse aus unserem Beweis zusammen. Wir starten von (6.2) mit $x = x_n$ und erhalten für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von (6.1)

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{1}{1-q} d(x_n, f(x_n)) = \frac{1}{1-q} d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Beispielhafte Anwendungen dieses Satzes werden Sie in dieser und in anderen Vorlesungen noch reichlich sehen, so dass wir hier auf ein konstruiertes Schaufenster-Beispiel verzichten wollen. Lassen Sie uns stattdessen nach der Vollständigkeit ein anderes unverzichtbares Hilfsmittel der Analysis in den Kontext von metrischen Räumen herüberretten: die Kompaktheit.

7. Kompaktheit

Dass die Übertragung der Kompaktheit aus der Analysis I nicht 1:1 geht, war dort schon angedroht worden. Das folgende Beispiel zeigt das zu Grunde liegende Problem auf.

In diesem gesamten Abschnitt sei wieder (M, d) ein beliebiger metrischer Raum.

Beispiel 7.1. Wir betrachten den Hilbertraum $(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$ aus Beispiel 6.12 (f). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sind die Elementarfolgen $e^{(k)} = (\delta_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$, die nur an der k -ten Stelle eine 1 enthalten und sonst Nullen, Elemente von ℓ^2 mit

$$\|e^{(k)}\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{nk}^2 \right)^{1/2} = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit liegen alle diese Folgen in der abgeschlossenen Einheitskugel $K_1(0)$ von ℓ^2 . Dieses ist eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von ℓ^2 und $(e^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in dieser Menge (Achtung, das ist jetzt eine Folge, deren Folgenglieder selbst Folgen sind!). Aber diese Folge hat leider keinen einzigen Häufungswert, denn für alle $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k \neq m$ gilt

$$\|e^{(k)} - e^{(m)}\|_{\ell^2} = (1^2 + (-1)^2)^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Wenn wir also bei „kompakt = abgeschlossen und beschränkt“ bleiben, müssen wir uns von Bolzano-Weierstraß und vielen weiteren Freunden verabschieden. Ein solcher Kompaktheitsbegriff wäre inhaltsleer und nutzlos.

Das Problem ist, dass ℓ^2 als unendlichdimensionaler Vektorraum so weitläufig ist, dass man darin auf beschränktem Raum unendlich viele Punkte ohne Häufungswert unterbringt. Wir brauchen also einen restriktiveren Kompaktheitsbegriff, der die Teilmengen solch „großer“ Räume, oder gleich eines beliebigen metrischen Raums, auszeichnet, in denen eben Bolzano-Weierstraß usw. gelten.

Eine Möglichkeit wäre es nun, analog zur Vollständigkeit, die gewünschte Eigenschaft einfach zur Definition zu erheben. Glücklicherweise kann man im Falle der Kompaktheit eine elementare Definition angeben. (Elementar heißt leider nicht immer übersichtlich...)

Definition 7.2. Es sei $X \subseteq M$.

- (a) Ist I eine beliebige Indexmenge und O_i für jedes $i \in I$ eine offene Teilmenge von M , so dass $X \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ gilt, dann nennt man $\{O_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von X .

7. Kompaktheit

(b) Eine Teilmenge einer offenen Überdeckung von X , die selbst immer noch eine offene Überdeckung von X ist, heißt Teilüberdeckung.

(c) Die Menge X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Ist M selbst kompakt, so spricht man auch von einem kompakten metrischen Raum.

Bemerkung 7.3. Da Kompaktheit über die Betrachtung offener Mengen definiert ist, und sich die offenen Mengen nach Übungsaufgabe 6.9 beim Übergang zu einer äquivalenten Norm nicht ändern, ist auch dieser Begriff davon nicht betroffen.

Beispiel 7.4. (a) Jede endliche Menge ist (banalerweise) kompakt.

(b) Es sei (x_n) eine konvergente Folge in M mit $x_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Dann ist die Menge $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ kompakt.

Zum Nachweis betrachten wir eine beliebige offene Überdeckung $\{O_i : i \in I\}$ von K . Da K in der Vereinigung aller O_i enthalten ist, gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x_0 \in O_{i_0}$. Desweiteren ist O_{i_0} offen, was uns die Existenz eines $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq O_{i_0}$ sichert. Dank der Konvergenz von (x_n) gegen x_0 gibt es nun wiederum ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U_\varepsilon(x_0) \subseteq O_{i_0}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Nun bleiben nur noch endlich viele Folgenglieder $x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}$ übrig, die jeweils in einem $O_{i_1}, \dots, O_{i_{n_0-1}}$ liegen. Zusammen gilt also $K \subseteq \bigcup_{k=0}^{n_0-1} O_{i_k}$ und wir haben unsere endliche Teilüberdeckung gefunden.

Satz 7.5. Es sei $K \subseteq M$ eine kompakte Menge. Ist $A \subseteq K$ abgeschlossen in M , so ist auch A kompakt.

Beweis. Sei $\{O_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von A . Da A^c in M offen ist, und

$$K \subseteq M = A^c \cup A \subseteq A^c \cup \bigcup_{i \in I} O_i$$

gilt, ist $\{O_i : i \in I\} \cup \{A^c\}$ eine offene Überdeckung von K . Dank der Kompaktheit von K , können wir aus dieser eine endliche Teilüberdeckung auswählen, d. h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ und $i_1, i_2, \dots, i_r \in I$ mit $A \subseteq K \subseteq A^c \cup O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_r}$. Schließlich kann A^c an dieser Überdeckung von A keinen Anteil haben, es gilt also $A \subseteq \bigcup_{k=1}^r O_{i_k}$ und wir haben eine endliche Teilüberdeckung von A gefunden. $\square$

Nun können wir zeigen, dass dieser Kompaktheitsbegriff unsere Erwartungen erfüllt: Kompakte Mengen sind genau die, in denen jede Folge eine konvergente Teilfolge hat. Damit haben wir tatsächlich das Problem aus dem Einführungsbeispiel dieses Abschnitts gelöst.

Satz 7.6 (Folgenkompaktheit). *Eine Menge $K \subseteq M$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge hat.*

Beweis. „ $\Rightarrow$ “ Wir nehmen an, es gäbe eine Folge (x_n) in K , die keine konvergente Teilfolge, d. h. keinen Häufungswert, in K hat. Nach der Definition eines Häufungswerts bedeutet das, dass es für jedes $x \in K$ ein $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ gibt, so dass die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_{\varepsilon(x)}(x)\}$ endlich ist.

Dann ist die Familie $\{U_{\varepsilon(x)}(x) : x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt vorausgesetzt ist, gibt es nun eine endliche Teilüberdeckung, d. h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \dots, a_r \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^r U_{\varepsilon(a_j)}(a_j)$. Damit folgt aber

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \bigcup_{j=1}^r U_{\varepsilon(a_j)}(a_j)\right\} \\ &= \bigcup_{j=1}^r \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_{\varepsilon(a_j)}(a_j)\}. \end{aligned}$$

Wir haben also $\mathbb{N}$ als eine endliche Vereinigung von endlichen Mengen geschrieben, womit $\mathbb{N}$ endlich ist, was als Widerspruch durchgehen sollte.

„ $\Leftarrow$ “ Von nun an nehmen wir an, dass jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge hat.

Schritt 1: Wir versuchen zunächst K durch Kugeln von gleichem Radius zu überdecken und zeigen, dass für jedes $\delta > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ existieren mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\delta}(x_j)$.

Zum Nachweis dieser Behauptung führen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gäbe ein $\delta_1 > 0$, so dass für jede endliche Wahl von Punkten $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ gilt, dass $K \not\subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\delta_1}(x_j)$ ist.

Nun wählen wir ein $x_0 \in K$ und definieren rekursiv eine Folge in K durch

$$x_k \in K \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} U_{\delta_1}(x_j), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Man beachte, dass diese Konstruktion möglich ist, denn nach Annahme ist in jedem Schritt diese Menge nicht leer.

Seien nun $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gegeben. Dann gilt für unsere eben gewonnene Folge (x_k) , dass $x_m \notin U_{\delta_1}(x_n)$, also ist $d(x_n, x_m) \geq \delta_1$. Das bedeutet aber, dass keine Teilfolge von (x_k) eine Cauchyfolge sein kann, d. h. diese Folge (x_k) hat keine konvergente Teilfolge und wir haben einen Widerspruch zur Voraussetzung.

7. Kompaktheit

Schritt 2: Wir wenden uns nun einer beliebigen offenen Überdeckung $\{O_i : i \in I\}$ von K zu. Wir behaupten, dass es genügt, folgende Eigenschaft zu zeigen:

$$\exists \delta_0 > 0 \quad \forall x \in K \quad \exists i \in I : U_{\delta_0}(x) \subseteq O_i \quad (7.1)$$

In der Tat gibt es dann nach dem ersten Schritt eine endliche Wahl von Punkten $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\delta_0}(x_j)$. Für jeden der Punkte $x_1, x_2, \dots, x_n$ wenden wir jetzt (7.1) an. Damit erhalten wir für $j = 1, 2, \dots, n$ jeweils ein $i_j \in I$ mit $U_{\delta_0}(x_j) \subseteq O_{i_j}$ und damit ist schließlich

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\delta_0}(x_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^n O_{i_j}$$

und wir haben eine endliche Teilüberdeckung gefunden, womit K als kompakt entlarvt ist.

Zum Beweis von (7.1) nehmen wir erneut an, diese Aussage ist falsch, d. h. für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $x \in K$, so dass $U_\delta(x) \not\subseteq O_i$ für jedes $i \in I$ gilt. Nun bauen wir eine Folge (x_n) in K , indem wir diese Annahme für alle δ der Form $1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ausschachten. Das liefert uns für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$, so dass gilt

$$U_{1/n}(x_n) \not\subseteq O_i \quad \text{für jedes } i \in I. \quad (7.2)$$

Da (x_n) eine Folge in K ist, hat diese nach Voraussetzung eine in K konvergente Teilfolge (x_{n_k}) , deren Grenzwert wir im Folgenden x_0 nennen. Da $x_0 \in K$ und $\{O_i : i \in I\}$ eine Überdeckung von K ist, gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x_0 \in O_{i_0}$, und da O_{i_0} eine offene Menge ist, gibt es weiter ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq O_{i_0}$.

Dank der Konvergenz der Teilfolge (x_{n_k}) gegen x_0 können wir nun ein $\ell \in \mathbb{N}$ finden, für das zum Einen $\ell > 2/\varepsilon$ und zum Anderen $d(x_0, x_\ell) < \varepsilon/2$ gilt. Dann gilt für alle $x \in U_{\varepsilon/2}(x_\ell)$

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_\ell) + d(x_\ell, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also haben wir $U_{\varepsilon/2}(x_\ell) \subseteq U_\varepsilon(x_0)$ und das liefert nun zusammengekommen

$$U_{1/\ell}(x_\ell) \subseteq U_{\varepsilon/2}(x_\ell) \subseteq U_\varepsilon(x_0) \subseteq O_{i_0},$$

was uns einen Widerspruch zu (7.2) liefert. $\square$

Kompaktheit ist ein sehr starker Begriff, der immer wieder mit zum Teil großem Gewinn verwendet werden kann. Sie werden in Ihrem Studium noch viele Beispiele dafür sehen. Für den Augenblick notieren wir die folgende überraschende Folgerung.

Satz 7.7. *Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.*

Beweis. Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum und (x_n) eine Cauchyfolge in M , von der wir nachweisen müssen, dass sie konvergiert. Nach Satz 7.6 hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) , deren Grenzwert wir mit x_0 bezeichnen. Wir wollen nun zeigen, dass die gesamte Folge (x_n) schon gegen x_0 konvergiert und geben dazu ein $\varepsilon > 0$ vor. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, das gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllt:

- $d(x_{n_{k_0}}, x_m) < \varepsilon/2$ für alle $m \geq n_{k_0}$. (Da (x_n) Cauchyfolge)
- $d(x_0, x_{n_{k_0}}) < \varepsilon/2$. (Da $x_{n_k} \rightarrow x_0$ ($k \rightarrow \infty$))

Damit gilt dann für alle $n \geq n_{k_0}$

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Satz 7.8. *Jede kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Es sei K eine kompakte Teilmenge von M . Ist $K = \emptyset$, so ist die Aussage des Satzes erfüllt, wir nehmen also ab jetzt an, dass $K \neq \emptyset$ ist.

Sei $x_0 \in K$ beliebig. Dann gilt $K \subseteq M = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n(x_0)$. Also ist das Mengensystem $\{U_n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d. h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^m U_n(x_0) = U_m(x_0).$$

Also ist K beschränkt.

Für die Abgeschlossenheit verwenden wir Satz 6.8. Sei also (x_n) eine Folge in K , die in M gegen x_0 konvergiert. Dann hat (x_n) nach Satz 7.6 eine in K konvergente Teilfolge. Deren Grenzwert muss aber x_0 sein, also ist $x_0 \in K$ und wir sind fertig. $\square$

Korollar 7.9. *Für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ existieren $\min K$ und $\max K$.*

Beweis. Nach Satz 7.8 ist K beschränkt und damit existieren $\inf K$ und $\sup K$. Sei im Folgenden $x \in \{\inf K, \sup K\}$. Zu zeigen ist $x \in K$. Nach Satz I.2.17 enthält jede Umgebung von x ein Element aus K . Folglich ist x innerer Punkt oder Randpunkt von K und Satz 5.10 (a) liefert $x \in \overline{K}$. Da K aber abgeschlossen ist, ist es selbst seine kleinste abgeschlossene Obermenge, d. h. $\overline{K} = K$. $\square$

Wir haben in Beispiel 7.1 bereits gesehen, dass die Umkehrung obigen Satzes in metrischen Räumen im Allgemeinen falsch ist. Wir wollen nun zeigen, dass sie in endlichdimensionalen normierten $\mathbb{K}$ -Vektorräumen gilt. Dazu starten wir mit einem Spezialfall.

7. Kompaktheit

Lemma 7.10 (Heine-Borel, Spezialfall). *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Basis $e_1, \dots, e_d$ und für $x = \sum_{j=1}^d x_j e_j$ sei die (verallgemeinerte) 1-Norm gegeben durch*

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^d |x_j|.$$

Eine Teilmenge von $(V, \|\cdot\|_1)$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis. Dank Satz 7.8 müssen wir nur noch zeigen, dass jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge M von V kompakt ist. Mit Blick auf Satz 7.5 betrachten wir eine beliebige Folge (x_n) in M und zeigen, dass diese eine in M konvergente Teilfolge besitzt.

Da M beschränkt ist, gibt es ein $r > 0$ mit $\|x_n\|_1 \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun stellen wir die Folgenglieder bezüglich der Basis als

$$x_n = \sum_{j=1}^d x_j^{(n)} e_j, \quad n \in \mathbb{N},$$

dar. Für jedes $j \in \{1, \dots, d\}$ gilt $|x_j^{(n)}| \leq \|x_n\|_1 \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. $(x_j^{(n)})_n$ ist eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß finden wir eine konvergente Teilfolge $(x_1^{(n_k)})_k$ mit Grenzwert $x_1 \in \mathbb{K}$. Als nächstes betrachten wir $(x_2^{(n_k)})_k$ und wählen nach dem gleichen Prinzip eine konvergente Teilfolge $(x_2^{(n_{k_m})})_m$ mit Grenzwert x_2 aus. Da beliebige Teilfolgen von konvergenten Folgen selbst konvergent gegen den gleichen Grenzwert sind, liefert d -faches Anwenden dieses Arguments eine Teilfolge $(x_{n_\ell})_\ell$ von (x_n) so dass der Grenzwert

$$x_j := \lim_{\ell \rightarrow \infty} x_j^{(n_\ell)}$$

für alle $j \in \{1, \dots, d\}$ existiert. Definieren wir abschließend $x := \sum_{j=1}^d x_j e_j$, so gilt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|x_{n_\ell} - x\|_1 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^d |x_j^{n_\ell} - x_j| = \sum_{j=1}^d \lim_{\ell \rightarrow \infty} |x_j^{n_\ell} - x_j| = 0.$$

Folglich konvergiert die Teilfolge $(x_{n_\ell})_\ell$ in V gegen x und weil M abgeschlossen ist, liegt mit den Folgengliedern auch der Grenzwert x in M . $\square$

Dieser Satz hat weitreichende Konsequenzen. Wir wollen ein paar Schlussfolgerungen ziehen, die viele Betrachtungen aus diesem und den vorigen Abschnitten zusammenführen.

Satz 7.11. *Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum, so sind alle Normen auf V äquivalent.*

Beweis. Sei $e_1, \dots, e_d$ eine Basis von V . Da Normäquivalenz nach Übungsaufgabe 4.7 transitiv ist, reicht es zu zeigen, dass jede Norm in V äquivalent zur in Lemma 7.10 definierten 1-Norm ist.

Für jedes $x = \sum_{j=1}^d x_j e_j \in V$ gilt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^d x_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^d \|x_j e_j\| = \sum_{j=1}^d |x_j| \|e_j\| \leq \left(\max_{j=1}^d \|e_j\| \right) \sum_{j=1}^d |x_j|.$$

woraus durch Setzen von $C := \max_{j=1}^d \|e_j\|$ die Abschätzung $\|x\| \leq C \|x\|_1$ wird. Das ist schon die halbe Miete.

Die umgekehrte Abschätzung $c \|x\|_1 \leq \|x\|$ ist ein bisschen tiefliegender. Wir betrachten dazu die Menge

$$S := \{x \in V : \|x\|_1 = 1\}$$

und setzen $c := \inf\{\|x\| : x \in S\}$. Man beachte, dass dieses Infimum existiert, da die betrachtete Menge nicht-leer und nach unten (durch 0) beschränkt ist. Dieses c ist nun unser Kandidat für die gesuchte Abschätzung und tatsächlich gilt für alle $x \in V \setminus \{0\}$, da $x/\|x\|_1 \in S$ ist,

$$\|x\| = \|x\|_1 \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \geq \|x\|_1 \cdot c$$

und banalerweise gilt auch $\|0\| = 0 \geq c \cdot 0 = c \|0\|_1$. Es bleibt noch ein klitzekleines Problem: Wir müssen irgendwie sicherstellen, dass $c > 0$ ist.

Dazu nehmen wir an, es wäre $c = 0$. Das bedeutet, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in S$ existiert mit $\|x_n\| \leq 1/n$. Damit ist (x_n) eine Folge in S mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$. Weiter ist S nach dem Spezialfall von Heine-Borel 7.10 eine in $(V, \|\cdot\|_1)$ kompakte Teilmenge, also hat (x_n) nach Satz 7.6 eine bezüglich der 1-Norm konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $a \in S$. Insbesondere gilt $\|a\|_1 = 1$.

Andererseits gilt nach dem schon oben bewiesenen für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\|a\| \leq \|a - x_{n_k}\| + \|x_{n_k}\| \leq C \|a - x_{n_k}\|_1 + \|x_{n_k}\| \leq C \|x_{n_k} - a\|_1 + \frac{1}{n_k}$$

und mit $k \rightarrow \infty$ folgt $\|a\| \leq C \cdot 0 + 0 = 0$. Dank der Definitheit der Norm ist also $a = 0$ und damit auch $\|a\|_1 = 0$, was der angestrebte Widerspruch ist. $\square$

Bemerkung 7.12. In Beispiel 4.8 haben wir bereits gesehen, dass es auf den unendlichdimensionalen Raum $C([0, 1])$ nicht-äquivalente Normen gibt!

Nun kommen wir zum allgemeinen Satz von Heine-Borel, der uns das folgende, leicht zu handhabene Kompaktheitskriterium beschert.

7. Kompaktheit

Satz 7.13 (Heine-Borel, Vollversion). *Eine Teilmenge eines endlichdimensionalen normierten $\mathbb{K}$ -Vektorraums ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Nach Satz 7.11 sind auf endlichdimensionalen $\mathbb{K}$ -Vektorräumen alle Normen äquivalent. Nach Bemerkung 7.3 und Übungsaufgabe 6.9 ändern sich die kompakten, abgeschlossenen und beschränkten Mengen beim Wechsel zu einer äquivalenten Norm nicht. Damit folgt die Behauptung schon aus dem Spezialfall in Lemma 7.10. $\square$

Mit der Erkenntnis, dass insbesondere in $\mathbb{K}^d$ alle Normen äquivalent sind, können wir nun einige Dinge vereinfachen. Beispielsweise gilt folgendes schöne Konvergenz-Kriterium für $\mathbb{K}^d$ -wertige Folgen, das uns wieder auf Konvergenzbetrachtungen in $\mathbb{K}$ zurückbringt.

Satz 7.14. *Eine Folge $(x_n) = ((x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,d})^T)$ in $\mathbb{K}^d$ konvergiert genau dann, wenn jede Koordinatenfolge $(x_{n,j})$, $j = 1, 2, \dots, d$, in $\mathbb{K}$ konvergiert. In diesem Fall gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,2} \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,d} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Ist (x_n) eine in $\mathbb{K}^d$ gegen $x \in \mathbb{K}^d$ konvergente Folge, so konvergiert sie insbesondere bezüglich der ∞ -Norm, denn auf $\mathbb{K}^d$ sind ja alle Normen äquivalent. Also gilt für jedes $j = 1, 2, \dots, d$

$$|x_{n,j} - x_j| \leq \max_{j=1}^d |x_{n,j} - x_j| = \|x_n - x\|_\infty \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Sind andererseits alle Koordinatenfolgen $(x_{n,j})$ konvergent gegen $x_j \in \mathbb{K}$ für $j = 1, 2, \dots, d$, so gilt mit $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{j=1}^d |x_{n,j} - x_j| = 0,$$

also konvergiert dann (x_n) gegen x in $\mathbb{K}^d$, wobei wiederum egal ist mit welcher Norm dieser Raum daherkommt. $\square$

Bemerkung 7.15. Als Information für die Zukunft sei hier noch vermerkt, dass der Satz von Heine-Borel sogar endlichdimensionale Räume charakterisiert. Tatsächlich ist die abgeschlossene Einheitskugel eines normierten Vektorraums genau dann kompakt, wenn dieser endlichdimensional ist. Zum Beweis sei hier auf die Vorlesung „Funktionalanalysis“ verwiesen.

8. Stetigkeit

Wir wollen nun den Begriff der Stetigkeit auf metrische Räume verallgemeinern. Das geht wieder geradeaus, indem wir in der Definition aus $\mathbb{R}$ alle Ausdrücke der Form „ $|x - y|$ “ durch „ $d(x, y)$ “ ersetzen.

Im gesamten Kapitel seien nun (M, d_M) und (N, d_N) zwei metrische Räume. Bevor wir loslegen, sei zunächst an einige elementare Zusammenhänge zwischen Bildmengen bzw. Urbildmengen von Funktionen erinnert, die wir im Folgenden immer wieder verwenden werden.

Erinnerung 8.1. Es seien A, B zwei Mengen, $f : A \rightarrow B$ eine Funktion und I eine beliebige Indexmenge. Sind dann $C, C_i \subseteq A$, sowie $D, D_i \subseteq B$ für $i \in I$, so gelten die folgenden Aussagen:

- (a) $f(\bigcup_{i \in I} C_i) = \bigcup_{i \in I} f(C_i)$ und $f(\bigcap_{i \in I} C_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(C_i)$.
- (b) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} D_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(D_i)$ und $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} D_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(D_i)$.
- (c) $f^{-1}(f(C)) \supseteq C$ und $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$.
- (d) $f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$.

Definition 8.2. Eine Funktion $f : M \rightarrow N$ heißt

- (a) stetig in $x_0 \in M$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in M$ mit $d_M(x, x_0) < \delta$ gilt $d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
- (b) stetig auf M , wenn f in allen Punkten $x_0 \in M$ stetig ist.

Bemerkung 8.3. In Termen von ε -Umgebungen lässt sich obige Definition von Stetigkeit in x_0 auch schön so hinschreiben:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)).$$

Man beachte, dass dabei die Umgebung um x_0 in M bezüglich d_M gebildet wird und die Umgebung um $f(x_0)$ in N bezüglich d_N .

Schreibt man das noch konsequenter um, so ergibt sich, dass f in x_0 genau dann stetig ist, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$$

gilt.

8. Stetigkeit

Wie schon in $\mathbb{R}$ kann man Stetigkeit äquivalent auch mit Hilfe von Folgen Grenzwerten definieren. Außerdem gibt es noch eine dritte äquivalente Umformulierung mit Hilfe von Umgebungen. Das wollen wir nun zeigen.

Satz 8.4. *Sei $f : M \rightarrow N$ eine Funktion und $x_0 \in M$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (a) *f ist stetig in x_0 .*
- (b) *Für jede Folge (x_n) in M mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.
(Folgenstetigkeit)*
- (c) *Für jede Umgebung $V \subseteq N$ von $f(x_0)$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq M$ von x_0 mit $f(U) \subseteq V$.*

Beweis. Die Äquivalenz zwischen (a) und (b) ist analog zum Beweis in Analysis I. Wir zeigen noch, dass (a) und (c) äquivalent sind.

Zunächst sei also f in x_0 stetig und $V \subseteq N$ eine Umgebung von $f(x_0)$. Nach Definition einer Umgebung existiert dann ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq V$ und dank der Stetigkeit von f in x_0 gibt es zu diesem ε ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$, vgl. Bemerkung 8.3. Damit ist $U := U_\delta(x_0) \subseteq M$ eine Umgebung von x_0 mit $f(U) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq V$, d. h. U erfüllt die im Satz geforderten Bedingungen.

Wir wenden uns also noch der Implikation „(c) $\Rightarrow$ (a)“ zu. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir betrachten $V := U_\varepsilon(f(x_0))$ als Umgebung von $f(x_0)$. Nach (c) existiert dann eine Umgebung $U \subseteq M$ von x_0 mit $f(U) \subseteq V$. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq U$ und es gilt

$$f(U_\delta(x_0)) \subseteq f(U) \subseteq V = U_\varepsilon(f(x_0)),$$

d. h. f ist stetig in x_0 nach Bemerkung 8.3. □

Wir geben noch zwei äquivalente Beschreibungen für Stetigkeit auf M an, die die Stetigkeit nur mit Hilfe der Begriffe offen/abgeschlossen charakterisieren.

Satz 8.5 (Topologische Stetigkeit). *Es sei $f : M \rightarrow N$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (a) *f ist stetig auf M .*
- (b) *Für alle offenen Teilmengen $O \subseteq N$ ist $f^{-1}(O) \subseteq M$ offen.*
- (c) *Für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq N$ ist $f^{-1}(A) \subseteq M$ abgeschlossen.*

Beweis. „(a) $\Rightarrow$ (b)“ Sei $O \subseteq N$ eine offene Menge. Ist $f^{-1}(O) = \emptyset$, so ist $f^{-1}(O)$ offen. Wir können uns also auf den Fall $f^{-1}(O) \neq \emptyset$ konzentrieren. Sei $x_0 \in f^{-1}(O)$ gewählt. Dann ist unser Ziel nun nachzuweisen, dass x_0 ein innerer Punkt dieser Menge ist.

Wir haben $f(x_0) \in f(f^{-1}(O)) \subseteq O$ und O ist offen, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq O$. Zu diesem ε gibt es, dank der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq O$ ist. Also ist $U_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(O)$ und das bedeutet, dass x_0 ein innerer Punkt von $f^{-1}(O)$ ist. Da $x_0 \in f^{-1}(O)$ beliebig war, ist diese Menge damit offen.

„(b) $\Rightarrow$ (c)“ Sei $A \subseteq N$ abgeschlossen. Dann ist A^c offen in N und nach Voraussetzung ist somit $f^{-1}(A^c)$ offen in M . Wegen $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ ist damit $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in M .

„(c) $\Rightarrow$ (b)“ Genauso wie im vorigen Punkt ist für jede offene Menge $O \subseteq N$, die Urbildmenge $f^{-1}(O^c) = (f^{-1}(O))^c$ abgeschlossen und das bedeutet, dass $f^{-1}(O)$ offen ist.

„(b) $\Rightarrow$ (a)“ Sei $x_0 \in M$ beliebig und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ist $U_\varepsilon(f(x_0))$ eine offene Menge in N . Also ist nach Voraussetzung $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ offen in M . Nun liegt aber x_0 in dieser Menge und ist damit ein innerer Punkt. D. h. es gibt ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$. Das liefert

$$f(U_\delta(x_0)) \subseteq f(f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$$

und das bedeutet genau Stetigkeit von f in x_0 . □

Beispiel 8.6. Wir schauen uns wieder den Extremfall der diskreten Metrik an, vgl. Beispiel 4.15 (a). Ist die Metrik d_M auf M die diskrete Metrik, so ist nach Beispiel 5.11 jede Teilmenge von M offen. Also ist für eine Funktion $f : M \rightarrow N$ auch $f^{-1}(O)$ für jede offene Teilmenge O von N offen. Das bedeutet, dass in diesem Fall jede Abbildung auf M stetig ist.

Ist N mit der diskreten Metrik ausgestattet, so ist jede Teilmenge von N offen. Damit eine Funktion $f : M \rightarrow N$ in diesem Fall stetig ist, muss also $f^{-1}(B)$ für jede Teilmenge B von N eine offene Menge sein. Es gibt in diesem Fall also i. A. sehr wenige stetige Funktionen. Wie viele es gibt hängt von der Metrik auf M ab.

Wie im letzten Semester definieren wir:

Definition 8.7. Sei $D \subseteq M$, $f : D \rightarrow N$ eine Funktion, $x_0 \in M$ ein Häufungspunkt von D und $a \in N$. Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a,$$

falls für jede Folge (x_n) in $M \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

Auch der Beweis des folgenden Satzes lässt sich direkt aus der Analysis I übertragen.

8. Stetigkeit

Satz 8.8. Es sei $D \subseteq M$, $f : D \rightarrow N$ eine Funktion, $x_0 \in M$ ein Häufungspunkt von D und $a \in N$.

- (a) Ist für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(x_n))$ konvergent, so existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- (b) Es gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, genau dann wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in (D \cap U_\delta(x_0)) \setminus \{x_0\}$ gilt $f(x) \in U_\varepsilon(a)$.
- (c) Es ist f genau dann stetig in x_0 , wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.

In dieser Vorlesung werden wir uns die meiste Zeit mit Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ beschäftigen, also sollten wir auch noch ein solches Beispiel betrachten.

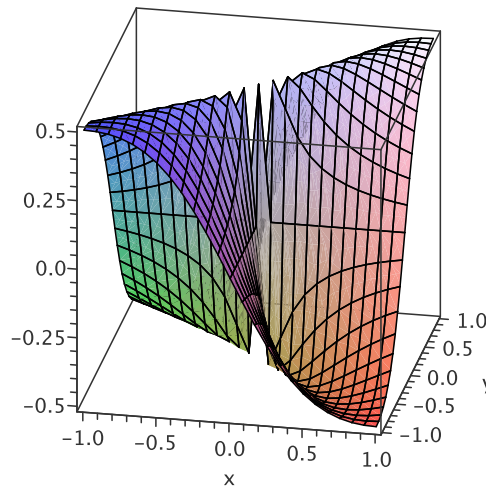


Abbildung 8.1.: Der Graph der Funktion $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$

Beispiel 8.9. Wir betrachten die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$
$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

vgl. Abbildungen 8.1 und 8.2. Zunächst ist in beiden Funktionsvorschriften der Nenner für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ immer ungleich Null, also sind beide Funktionen f und g in allen Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ nach den Grenzwertsätzen stetig. Es bleibt uns nur die Stetigkeit in $(0, 0)$ zu überprüfen. Hierzu greifen wir auf die Charakterisierung via Folgenstetigkeit zurück, vgl. Satz 8.4.

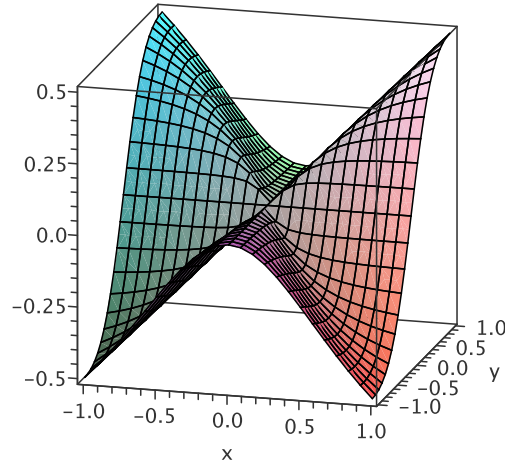


Abbildung 8.2.: Der Graph der Funktion $(x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

Zu f : Wir betrachten die Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

in $\mathbb{R}^2$. Diese konvergiert gegen $(0, 0)$, wobei $a_n \neq (0, 0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daher ist

$$f(a_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das liefert uns $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1/2 \neq 0 = f(0, 0)$. Also ist f in $(0, 0)$ nicht stetig.

Zu g : Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (0, 0)$. Dann ist $a_n = (x_n, y_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit den beiden reellen Koordinatenfolgen (x_n) und (y_n) . Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, für die $x_n \neq 0$ ist,

$$|g(a_n)| = \left| \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} \right| = \frac{x_n^2 |y_n|}{x_n^2 + y_n^2} \leq \frac{x_n^2 |y_n|}{x_n^2} = |y_n|.$$

Ist $x_n = 0$, so gilt auf jeden Fall $|g(a_n)| = 0 \leq |y_n|$, also haben wir diese Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da (y_n) und damit auch $(|y_n|)$ eine Nullfolge ist, gilt nach dem Sandwich-Theorem $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = 0 = g(0, 0)$, was gerade bedeutet, dass g in $(0, 0)$ stetig ist.

Da alle Normen auf $\mathbb{K}^d$ äquivalent sind, vgl. Satz 7.11, können wir die Stetigkeit von $\mathbb{K}^d$ -wertigen Funktionen wie im folgenden Satz beschrieben koordinatenweise betrachten. Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie der zur koordinatenweisen Konvergenz in Satz 7.14 und verbleibt als Übungsaufgabe.

8. Stetigkeit

Satz 8.10. Es sei $f : M \rightarrow \mathbb{K}^d$ eine Abbildung mit Koordinatenfunktionen $f_j : M \rightarrow \mathbb{K}$, $f_j(x) := f(x)_j$, $j = 1, 2, \dots, d$. Dann ist f genau dann stetig, wenn alle f_j , $j = 1, 2, \dots, d$, stetig sind.

Mit zu den einfachsten Abbildungen zwischen Vektorräumen gehören die linearen Abbildungen (Gruß an die Lineare Algebra!). Diese spielen in vielen Bereichen der Mathematik eine wichtige Rolle und werden auch in dieser Vorlesung zentral sein. Deshalb wollen wir uns nun mit der Stetigkeit dieser Funktionen befassen. Gibt es denn überhaupt unstetige lineare Abbildungen? Ja! Das zeigt das folgende Beispiel.

Übungsaufgabe 8.11. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ mit $T(f) = f'$ eine unstetige lineare Abbildung ist. Sie können dazu die Funktionen $f_n(t) = \sin(n^2 t)/n$ betrachten.

Satz 8.12. Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Vektorräume und $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (a) T ist stetig auf V .
- (b) Es gibt ein $x_0 \in V$, so dass T in x_0 stetig ist.
- (c) T ist Lipschitz-stetig.
- (d) Es gibt ein $C \geq 0$ mit $\|Tx\|_W \leq C\|x\|_V$ für alle $x \in V$.

Beweis. „(a) $\Rightarrow$ (d)“ Für $x = 0$ gilt wegen $Tx = 0$ die Aussage immer und für jedes $C \geq 0$. Sei also $x \in V \setminus \{0\}$. Nach Voraussetzung ist T stetig in 0, also existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $\|Ty\|_W = \|Ty - T0\|_W < 1$ für alle $y \in V$ mit $\|y\|_V = \|y - 0\|_V < \delta$. Es ist nun

$$\left\| \frac{\delta}{2\|x\|_V} x \right\|_V = \frac{\delta}{2} \frac{\|x\|_V}{\|x\|_V} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Also wissen wir dank der Linearität von T

$$\|Tx\|_W = \left\| \frac{2\|x\|_V}{\delta} T\left(\frac{\delta}{2\|x\|_V} x\right) \right\|_W = \frac{2}{\delta} \|x\|_V \underbrace{\left\| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|_V} x\right) \right\|_W}_{<1} \leq \frac{2}{\delta} \|x\|_V.$$

„(d) $\Rightarrow$ (c)“ Für alle $x, y \in V$ gilt dank der Linearität von T und nach Voraussetzung

$$\|Tx - Ty\|_W = \|T(x - y)\|_W \leq C\|x - y\|_V$$

und das ist gerade Lipschitz-Stetigkeit.

„(c) $\Rightarrow$ (b)“ Aus Lipschitz-Stetigkeit folgt sofort Stetigkeit in einem Punkt.

„(b) $\Rightarrow$ (a)“ Es sei nun T stetig in x_0 und $y \in V$ beliebig. Zum Nachweis, dass T auch in y stetig ist, betrachten wir eine Folge (x_n) in V mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$. Dann gilt wieder dank der Linearität von T

$$T(x_n) = T(x_n - y + x_0 + y - x_0) = T(x_n - y + x_0) + T(y - x_0).$$

Nun konvergiert die Folge $(x_n - y + x_0)$ gegen x_0 und da T dort stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n - y + x_0) + \lim_{n \rightarrow \infty} T(y - x_0) \\ &= T(x_0) + T(y - x_0) = T(x_0) + T(y) - T(x_0) = T(y). \end{aligned}$$

Nach Satz 8.4 ist also T in y stetig. □

Definition 8.13. Sind V, W zwei normierte Vektorräume, so notieren wir

$$\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ linear und stetig}\}.$$

Ist $V = W$, so schreibt man auch $\mathcal{L}(V)$ statt $\mathcal{L}(V, V)$.

Wir notieren weiterhin das folgende beruhigende Ergebnis:

Satz 8.14. Sind $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und ist V endlichdimensional, so ist jede lineare Abbildung $T : V \rightarrow W$ stetig.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|x\| := \|x\|_V + \|Tx\|_W$, $x \in V$. Dies ist eine Norm auf V (nachweisen!) und damit ist diese nach Satz 7.11 äquivalent zu $\|\cdot\|_V$, d. h. es gibt ein $C > 0$ mit $\|x\| \leq C\|x\|_V$ für alle $x \in V$. Also ist

$$\|Tx\|_W \leq \|x\|_V + \|Tx\|_W = \|x\| \leq C\|x\|_V \quad \text{für alle } x \in V.$$

Das liefert nach Satz 8.12 die Stetigkeit von T . □

Satz 8.15. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ und $(X, \|\cdot\|_X)$ drei normierte Vektorräume und $V, X \neq \{0\}$.

(a) Mit

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_W : x \in V \text{ mit } \|x\|_V = 1\}, \quad T \in \mathcal{L}(V, W),$$

ist $(\mathcal{L}(V, W), \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

(b) Die Norm aus (a) erfüllt

- i) $\|Tx\|_W \leq \|T\|\|x\|_V$ für alle $x \in V$ und alle $T \in \mathcal{L}(V, W)$ sowie
- ii) $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$ für alle $T \in \mathcal{L}(V, W)$ und $S \in \mathcal{L}(X, V)$.

8. Stetigkeit

Beweis. (a) Wir rechnen die drei Normaxiome nach. Seien $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$.

Definitheit: $\|T\| = 0$ ist gleichbedeutend zu $\|Tx\|_W = 0$, also $Tx = 0$, für alle $x \in V$ mit $\|x\|_V = 1$. Da T linear ist, ist das aber äquivalent zu $Tx = 0$ für alle $x \in V$, also zu $T = 0$.

Homogenität: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Für alle $x \in V$ mit $\|x\|_V = 1$ gilt $\|(\lambda T)x\|_W = \|\lambda Tx\|_W = |\lambda| \|Tx\|_W$. Im Übergang zum Supremum in x erhalten wir $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$.

Dreiecksungleichung: Für alle $x \in V$ mit $\|x\|_V = 1$ gilt

$$\|(T_1 + T_2)x\|_W = \|T_1x + T_2x\|_W \leq \|T_1x\|_W + \|T_2x\|_W \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

Per Definition des Supremums als kleinste obere Schranke folgt $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$.

(b) Die Aussage (b)i) stimmt für $x = 0$ und für $x \in V \setminus \{0\}$ gilt

$$\|Tx\|_W = \|x\|_V \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_V}\right) \right\|_W \leq \|x\|_V \|T\|.$$

Durch zweifaches Anwenden von (b)i) erhalten wir für $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$ nun

$$\|TSx\|_W = \|T(Sx)\|_W \leq \|T\| \|Sx\|_V \leq \|T\| \|S\|$$

und daher $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$ wie in (b)ii) behauptet. $\square$

Bemerkung 8.16. (a) Eine lineare Abbildung, die die Eigenschaft (d) aus Satz 8.12 erfüllt, wird oft als *beschränkt* bezeichnet. In diesem Sinne sagt Satz 8.12, dass eine lineare Abbildung genau dann stetig ist, wenn sie beschränkt ist.

Aber Vorsicht: Eine beschränkte lineare Abbildung ist keine beschränkte Funktion im dem üblichen Sinne, dass die Bildmenge der Funktion eine beschränkte Menge ist! Dessen muss man sich beim Umgang mit diesem Begriff immer bewusst sein.

(b) Die Norm in Satz 8.15 heißt *Operatornorm*, oder im Falle von endlichdimensionalen Vektorräumen auch (zu $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ assoziierte) *Matrixnorm*.

Übungsaufgabe 8.17. Zeigen Sie, dass im Fall $V = \mathbb{R}^d$ mit $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_\infty$ und $W = \mathbb{R}^p$ mit $\|\cdot\|_W = \|\cdot\|_\infty$ die assoziierte Matrixnorm in $\mathbb{R}^{p \times d}$ gegeben ist durch die *Zeilensummennorm*:

$$\|A\|_{ZS} := \max_{j=1}^p \sum_{k=1}^d |a_{jk}|, \quad A = (a_{jk})_{j=1, \dots, p, k=1, \dots, d} \in \mathbb{R}^{p \times d}.$$

9. Eigenschaften stetiger Funktionen

Nun ist es Zeit zu ernten und unsere zentralen Sätze über stetige Funktionen im neuen allgemeinen Gewand zu beweisen. Auch hier seien wieder (M, d_M) und (N, d_N) zwei metrische Räume.

Wir beginnen mit dem Satz, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Minimum und Maximum annehmen. Dieser ist so natürlich nicht mehr formulierbar, denn metrische Räume haben im Allgemeinen keine Ordnungsstruktur, aber eine verallgemeinerte Version lässt sich erfreulich kompakt hinschreiben.

Satz 9.1. *Sei $f : M \rightarrow N$ eine stetige Funktion. Ist M kompakt, so ist auch $f(M)$ kompakt.*

Bemerkung 9.2. (a) Ist $N = \mathbb{R}$, so die Kompaktheit von $f(M)$ gerade, dass f beschränkt ist, und dass das Supremum und Infimum von $f(M)$ zu $f(M)$ gehören. D. h. f nimmt dann sein Minimum und Maximum an.

(b) Der Satz ist für kompakte metrische Räume formuliert. Man beachte, dass jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes selbst (mit der induzierten Metrik) ein kompakter metrischer Raum ist. In diesem Sinne bekommt man also das gleiche Ergebnis, wenn f nur auf einer kompakten Teilmenge eines metrischen Raums definiert/stetig ist.

Beweis von Satz 9.1. Sei $\{O_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von $f(M)$ in N . Dann ist dank der Stetigkeit von f die Menge $f^{-1}(O_i)$ für alle $i \in I$ eine offene Teilmenge von M nach Satz 8.5. Außerdem ist

$$M \subseteq f^{-1}(f(M)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i).$$

Also ist $\{f^{-1}(O_i) : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von M . Da M kompakt ist, können wir eine endliche Teilüberdeckung $\{f^{-1}(O_{i_1}), f^{-1}(O_{i_2}), \dots, f^{-1}(O_{i_r})\}$ mit einem $r \in \mathbb{N}$ auswählen und es gilt

$$f(M) \subseteq f\left(\bigcup_{j=1}^r f^{-1}(O_{i_j})\right) = f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^r O_{i_j}\right)\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^r O_{i_j}.$$

Wir haben also damit eine endliche Teilüberdeckung von $f(M)$ gefunden und sind fertig. $\square$

9. Eigenschaften stetiger Funktionen

Wir wollen abschließend noch den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit verallgemeinern.

Definition 9.3. Eine Funktion $f : M \rightarrow N$ ist gleichmäßig stetig auf M , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in M$ mit $d_M(x, y) < \delta$ gilt, dass $d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ist.

Wie in Satz I.21.4 gilt auch in diesem allgemeinen Kontext, dass stetige Funktionen auf kompakten Räumen sogar gleichmäßig stetig sind. Der Beweis verläuft analog wie damals.

Satz 9.4. Es sei M kompakt und $f : M \rightarrow N$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf M .

Die wichtigste Eigenschaft gleichmäßig stetiger Funktionen ist, dass diese sich unter geeigneten Voraussetzungen auf den Rand ihres Definitionsgebietes stetig fortsetzen lassen. Dies formulieren wir exakt im folgenden Satz.

Satz 9.5. Es sei N vollständig und $D \subseteq M$. Ist $f : D \rightarrow N$ gleichmäßig stetig, so existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $\hat{f} : \overline{D} \rightarrow N$ von f .

Beweis. Wir zeigen, dass für jedes $x_0 \in \overline{D} \setminus D$ der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in D} f(x)$ existiert. Man beachte dabei, dass jedes $x \in \overline{D} \setminus D$ ein Häufungspunkt von D ist und damit der betrachtete Grenzwert sinnvoll ist. Haben wir das gezeigt, so ist

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D, \\ \lim_{y \rightarrow x, y \in D} f(y), & x \in \overline{D} \setminus D, \end{cases}$$

eine stetige Fortsetzung und diese ist auch eindeutig, denn der obige Funktionsgrenzwert ist ja die einzige Wahl, die zu einer stetigen Funktion führt.

Sei also $x_0 \in \overline{D} \setminus D$. Zum Nachweis der Existenz des Funktionsgrenzwertes zeigen wir, dass für jede Folge (x_n) in D , die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge ist. Dann ist diese Dank der vorausgesetzten Vollständigkeit von N konvergent und die Existenz von $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in D} f(x)$ folgt mit Satz 8.8 (a).

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert dank der gleichmäßigen Stetigkeit von f ein $\delta > 0$ mit $d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $d_M(x, y) < \delta$. Da (x_n) als konvergente Folge auch eine Cauchyfolge ist, bekommen wir dann weiter ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt $d_M(x_n, x_m) < \delta$. Also ist $d_N(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ und das bedeutet gerade, dass $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge in N ist. $\square$

Nun müssten wir ein großes Projekt starten und viele unserer Begriffe und Erkenntnisse über Folgen, Reihen und Funktionenfolgen aus der Analysis I auf allgemeine metrische Räume, normierte Vektorräume oder zumindest den $\mathbb{K}^d$ verallgemeinern. Das ist konzeptionell nicht besonders schwierig – meistens müssen nur Betragsstriche durch Normen ersetzt werden – würde allerdings die uns zur Verfügung stehende Zeit deutlich sprengen.

Die für das weitere Vorgehen wichtigsten Sätze sind darum in der folgenden Übungsaufgabe gesammelt. Diese gibt Ihnen eine gute Gelegenheit zu überprüfen, ob Sie ein Gefühl für unseren Übergang von $\mathbb{K}$ zu $\mathbb{K}^d$ bekommen haben. Zum Teil beinhalten diese Aussagen Begriffe, die wir hier noch gar nicht definiert haben, z. B. absolute Konvergenz einer Reihe. Das sollten Sie dann zunächst selbst erledigen. Keine Sorge, das geht jeweils ganz ohne Fußangeln.

Übungsaufgabe 9.6. (a) Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum. Dann ist jede in V absolut konvergente Reihe auch konvergent.

(b) Sind $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume, $D \subseteq V$, $f, g : D \rightarrow W$ stetig und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, so sind auch $\alpha f + \beta g$ und $\|f\|_W$ stetig.

Ist dabei $W = \mathbb{K}$, so sind auch fg und, falls g Nullstellen-frei ist, auch f/g stetig.

Ist schließlich $(X, \|\cdot\|_X)$ ein weiterer normierter Vektorraum, $H \subseteq W$ mit $f(D) \subseteq H$, und $h : H \rightarrow X$ stetig, so ist auch $h \circ f$ stetig.

(c) Sind $f_n : M \rightarrow N$ stetige Funktionen und ist die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $f : M \rightarrow N$, so ist auch f stetig.

10. Exkurs: Topologie

Wenn man über Konzepte wie Stetigkeit und Konvergenz reden will, scheint eine Metrik eine Mindestanforderung zu sein. Tatsächlich ist es durchaus möglich über diese Grundbegriffe der Mathematik zu reden, ohne einen Abstandsbegriff zu haben. Es reicht aus, zu wissen welche Teilmengen offen sind. Mit dieser „minimalistischen“ Mathematik beschäftigt sich die *Topologie* und auch wenn sich das jetzt etwas abgehoben anhören mag, ist das ein sehr fruchtbarer Zweig der Mathematik, der viele verborgene Zusammenhänge offenbart und von Zeit zu Zeit ist dieser Zugang sogar der einzig Mögliche, da man einfach keinen passenden Abstandsbegriff zur Verfügung hat.

In diesem Abschnitt machen wir einen kleinen Schnupperkurs in Topologie, der Ihnen die Grundidee zeigt und darlegt, wie die Grundkonzepte der Analysis in diesem allgemeinen Kontext definiert werden können. Für alle genaueren Betrachtungen muss an dieser Stelle dann auf die Literatur und weitergehende Vorlesungen verwiesen werden.

Wir wollen also mit einem Konzept von offenen Mengen starten. Diese sollen sich zumindest so verhalten, wie wir das von offenen Mengen in metrischen Räumen gewohnt sind. Das ist der Hintergrund der folgenden Definition.

Definition 10.1. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt Topologie auf X , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$,
- (b) Für alle $A, B \in \mathcal{T}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{T}$,
- (c) Für jedes Teilsystem $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ gilt $\bigcup_{B \in \mathcal{U}} B \in \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ nennt man in diesem Fall offen und $(X, \mathcal{T})$ wird als topologischer Raum bezeichnet.

Hat man zwei Topologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}$ auf einer Menge X und gilt $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, so sagt man, dass $\mathcal{S}$ gröber ist als $\mathcal{T}$ und nennt $\mathcal{T}$ feiner als $\mathcal{S}$.

Damit kann man leicht abgeleitete Begriffe, wie abgeschlossene Mengen und Umgebungen definieren.

Definition 10.2. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

10. Exkurs: Topologie

- (a) Eine Menge $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist, d. h. in $\mathcal{T}$ liegt.
- (b) Sei $x \in X$. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt Umgebung von x , wenn ein $O \in \mathcal{T}$ existiert mit $x \in O \subseteq U$.

Beispiel 10.3. (a) Ist (M, d) ein metrischer Raum, so bildet

$$\mathcal{T} := \{O \subseteq M : O \text{ offen}\}$$

nach Satz 5.6 eine Topologie. Jede Metrik erzeugt auf diese Weise kanonisch eine zu ihr passende Topologie. In diesem Sinne ist jeder metrische Raum auch ein topologischer Raum.

- (b) Wir hatten in Beispiel 5.11 festgestellt, dass bezüglich der diskreten Metrik jede Teilmenge offen ist. Diese Metrik führt also auf eine Topologie, in der jede Menge offen ist, d. h. es ist $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Diese heißt auch *diskrete Topologie* und ist die feinste Topologie, die möglich ist.
- (c) Am anderen Ende der Skala kann man auf jeder nicht-leeren Menge X die *indiskrete* oder auch *triviale Topologie* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ definieren. Dieses ist offensichtlich die gröbste mögliche Topologie und ein Beispiel einer Topologie, die, zumindest wenn X mehr als ein Element enthält, nicht im Sinne von (a) mit einer Metrik assoziiert ist, denn in dieser Topologie gilt das Hausdorff'sche Trennungsaxiom aus Satz 5.13 nicht: Sind $x, y \in X$ verschieden und U eine Umgebung von x , so muss sofort $U = X$ sein (mehr Umgebungen gibt es nicht!) und damit gilt auch $y \in U$.

Damit haben wir auch gleich gezeigt, dass die Hausdorff'sche Trennungseigenschaft nicht in jedem topologischen Raum gilt. Das erklärt auch den vielleicht auf den ersten Blick ungewöhnlichen Namen „Trennungsaxiom“ von Satz 5.13. In der Topologie muss dies im Bedarfsfall eben als zusätzliches Axiom gefordert werden.

Bemerkung 10.4. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$, so ist

$$\mathcal{T}|_Y := \{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf Y , die sogenannte *Spurtopologie*. In diesem Sinne ist jede Teilmenge eines topologischen Raumes wieder ein topologischer Raum. Ist die Topologie auf X durch eine Metrik d gegeben, so ist diese Konstruktion mit der induzierten Metrik auf der Teilmenge Y verträglich, d. h. die von d_Y auf Y erzeugte Topologie ist gleich der Spurtopologie der von d auf X erzeugten Topologie.

Viele der Begriffe, die wir in den vorhergehenden Abschnitten mit Hilfe von Metriken definiert haben, stellen sich als rein topologisch heraus, d. h. sie lassen sich nur über die Topologie-Struktur und damit auf jedem topologischen Raum definieren. Das betrifft ohne Änderung der Definition den Abschluss, das Innere und den Rand einer Menge (Definition 5.8) sowie den Kompaktheitsbegriff aus Definition 7.2. Minimale Änderungen sind in Definition 5.9 nötig. Hier muss man die ε -Kugeln durch beliebige Umgebungen ersetzen, da die Definition der Kugel nicht übertragbar ist.

Überraschender ist es, dass eben auch Konvergenz und Stetigkeit rein topologisch definierbar sind. Das wollen wir in diesem Kapitel noch tun. Für die Übertragung des Konvergenzbegriffs reicht es wieder aus, die ε -Kugeln durch Umgebungen zu ersetzen:

Definition 10.5. *Eine Folge (x_n) in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt konvergent gegen $x_0 \in X$, falls für jede Umgebung $U \subseteq X$ von x_0 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.*

Man muss in diesem allgemeinen Zusammenhang aber aufpassen, denn in ungewohnten Topologien kann sich auch der Konvergenzbegriff sehr ungewohnt verhalten.

Beispiel 10.6. Wir betrachten die beiden Extrembeispiele der diskreten und der indiskreten Topologie.

In Beispiel 6.3 haben wir bereits gesehen, dass die bezüglich der diskreten Topologie konvergenten Folgen genau die sind, die fast überall konstant sind. Wir haben hier also extrem wenig konvergente Folgen.

Wann konvergiert eine Folge in der indiskreten Topologie? Sei dazu X eine nicht-leere Menge mit der indiskreten Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, (x_n) eine Folge in X und $x_0 \in X$. Ist U eine Umgebung von x_0 , so gilt wieder sofort $U = X$. In dieser Umgebung ist aber bereits die ganze Folge enthalten, d. h. (x_n) konvergiert gegen x_0 .

Um es sich noch einmal auf der Zunge zergehen zu lassen: Wir haben gerade gezeigt, dass in einem indiskreten topologischen Raum jede Folge konvergiert und zwar gleich gegen jeden Punkt. Damit müssen wir insbesondere der Eindeutigkeit des Grenzwerts ganz klar Adieu sagen.

Wenn man sich noch einmal den Beweis von Satz 6.2 anschaut, in dem die Eindeutigkeit des Grenzwerts im metrischen Raum bewiesen wird, so sieht man, dass hier ganz zentral das Hausdorff'sche Trennungsaxiom eingeht, aber sonst eigentlich nichts. Tatsächlich ist der Grenzwert in jedem topologischen Raum eindeutig, der dieses Axiom erfüllt.

Für die Definition der Stetigkeit mit rein topologischen Methoden gibt es nun sogar zwei Möglichkeiten. Wir können zum Einen auf Satz 8.5 zurückgreifen:

Definition 10.7. *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion und $x_0 \in X$. Man nennt f*

10. Exkurs: Topologie

(a) stetig in x_0 , wenn für jede Umgebung V von $f(x_0)$ in Y eine Umgebung U von x_0 in X existiert mit $f(U) \subseteq V$.

(b) stetig (auf X), wenn für jedes $O \in \mathcal{S}$ gilt $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$.

Übungsaufgabe 10.8. (a) Eine Funktion wie in obiger Definition ist genau dann stetig auf X , wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist.

(b) Verkettungen von stetigen Funktionen sind stetig.

Zum Anderen kann man die Folgenstetigkeit verallgemeinern:

Definition 10.9. Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion und $x_0 \in X$. Man nennt f

(a) folgenstetig in x_0 , wenn für jede Folge (x_n) in X , die gegen x_0 konvergiert die Folge $(f(x_n))$ in Y gegen $f(x_0)$ konvergiert.

(b) folgenstetig auf X , wenn sie in jedem $x_0 \in X$ folgenstetig ist.

Satz 10.10. Jede stetige Funktion ist folgenstetig.

Beweis. Sei $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$ stetig, $x_0 \in X$ und (x_n) eine Folge in X , die gegen x_0 konvergiert. Wir wollen zeigen, dass die Folge $(f(x_n))$ in Y gegen $f(x_0)$ konvergiert. Sei dazu $V \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x_0)$. Da f in x_0 stetig ist, existiert dann eine Umgebung $U \subseteq X$ von x_0 mit $f(U) \subseteq V$. Nun gehen wir mit dieser Umgebung U in die Definition der Konvergenz von (x_n) . Das liefert uns ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$. Für all diese $n \geq n_0$ gilt dann aber $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$. Damit konvergiert $(f(x_n))$ in Y gegen $f(x_0)$. $\square$

Warnung 10.11. Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen nicht, Folgenstetigkeit ist also ein schwächeres Konzept als Stetigkeit.

Beispiel 10.12. Es sei X eine Menge und $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ seien Topologien auf X . Dann gilt für die Identität $\text{id} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{S})$:

$$\text{id stetig} \iff \forall S \in \mathcal{S} : \text{id}^{-1}(S) \in \mathcal{T} \iff \forall S \in \mathcal{S} : S \in \mathcal{T} \iff \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}.$$

Ist $\mathcal{T}$ eine echt feinere Topologie als $\mathcal{S}$, so ist $\text{id} : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{S})$ stetig, aber $\text{id} : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ nicht. Da diese beiden Abbildungen gerade Umkehrfunktionen voneinander sind, sieht man an diesem Beispiel auch, dass die Umkehrfunktion einer bijektiven, stetigen Funktion im Allgemeinen nicht wieder stetig ist.

Das führt uns auf die folgende Definition.

Definition 10.13. Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Dann heißt f Homöomorphismus, wenn sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

So wie die Vektorraum-Isomorphismen die strukturhaltenden Abbildungen zwischen Vektorräumen sind, bilden die Homöomorphismen die strukturhaltenden Abbildungen der Topologie. Deshalb sind sie dort von zentraler Wichtigkeit.

Bemerkung 10.14. Eine paar Merkgeln: Je feiner eine Topologie ist, desto **mehr**

- offene und abgeschlossene Mengen gibt es,
- innere Punkte hat eine Menge,
- Funktionen auf diesem Raum sind stetig,

und desto **weniger**

- Teilmengen sind kompakt,
- Folgen konvergieren,
- Punkte enthält der Abschluss einer Menge,
- Funktionen in diesen Raum sind stetig.

11. Zusammenhang

Für einige Aussagen war es im letzten Semester entscheidend, dass der Definitionsbereich einer Funktion ein Intervall war, z.B. für den Zwischenwertsatz. Das entscheidende an einem Intervall ist dabei, dass es sich um einen zusammenhängenden Klumpen Menge handelt. Einen entsprechenden Begriff wollen wir nun im Kontext metrischer Räume kennenlernen.

Wenn Sie genau hinschauen und sich mit dem Exkurs über topologische Räume beschäftigt haben, werden Sie feststellen, dass dieser ganze Abschnitt auch in allgemeinen topologischen Räumen funktioniert. Tatsächlich wird keiner der Beweise hier die Metrik d explizit nutzen. Damit der Exkurs ein Exkurs bleibt, ist aber ab hier wieder alles für metrische Räume aufgeschrieben.

Im gesamten Abschnitt seien (M, d_M) und (N, d_N) wieder metrische Räume.

Wie beschreibt man, dass eine Menge zusammenhängt, bzw. andersherum formuliert, dass sie nicht in mehrere Stücke zerfällt? Ein erster Versuch wäre: Es gibt nicht zwei nicht-leere, disjunkte Teilmengen, die vereinigt die ganze Menge ergeben. Dieser führt aber ins Leere, denn $\mathbb{R}$ halten wir als Intervall für zusammenhängend, aber natürlich ist z.B. $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$ und diese beiden Teilmengen sind disjunkt und nicht-leer. Der Trick ist zu verbieten, dass sich die betrachtete Menge in zwei nicht-leere, disjunkte und *offene* Teilmengen zerlegen lässt.

Definition 11.1. Der metrische Raum M heißt zusammenhängend, wenn für alle offenen Teilmengen O_1, O_2 von M gilt: Ist $O_1 \cup O_2 = M$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, so gilt entweder $O_1 = \emptyset$ oder $O_2 = \emptyset$.

Bemerkung 11.2. Für eine Teilmenge X von M erklärt sich der Begriff des Zusammenhangs über die induzierte Metrik: X ist zusammenhängend, wenn der metrische Raum $(X, (d_M)|_X)$ zusammenhängend ist. In diesem Zusammenhang sei dringend an Warnung 5.3(b) erinnert, vgl. Beispiel 11.4(a).

Satz 11.3. Der metrische Raum M ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Funktion $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ konstant ist. (Dabei ist $\{0, 1\}$ mit der diskreten Metrik versehen.)

Beweis. „ $\Rightarrow$ “ Sei M zusammenhängend und $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ stetig. Da $\{0\}$ und $\{1\}$ in $\{0, 1\}$ offen sind, gilt dasselbe für $O_1 := f^{-1}(\{0\})$ und $O_2 := f^{-1}(\{1\})$ nach der Definition von (topologischer) Stetigkeit. Außerdem gilt

$$O_1 \cup O_2 = f^{-1}(\{0, 1\}) = M \quad \text{und} \quad O_1 \cap O_2 = f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = \emptyset.$$

11. Zusammenhang

Da M zusammenhängend ist, muss also gelten $O_1 = \emptyset$ oder $O_2 = \emptyset$, d. h. f ist konstant 1 oder konstant 0.

„ $\Leftarrow$ “ Wir argumentieren per Kontraposition. Ist M nicht zusammenhängend, so gibt es nichtleere Mengen $O_1, O_2 \subseteq M$ mit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ und $O_1 \cup O_2 = M$. Damit definieren wir die Funktion $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in O_1, \\ 1, & \text{wenn } x \in O_2. \end{cases}$$

Diese ist auf ganz M wohldefiniert und nimmt sowohl den Wert 0 als auch den Wert 1 an. Schließlich sind wegen

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(\{0\}) = O_1, \quad f^{-1}(\{1\}) = O_2 \quad \text{und} \quad f^{-1}(\{0, 1\}) = M$$

die Urbilder aller offenen Teilmengen von $\{0, 1\}$ offen, d. h. f ist stetig. $\square$

Beispiel 11.4. (a) Die Menge $[1, 2] \cup [3, 4]$ in $\mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend. Man beachte dabei, vgl. Warnung 5.3(b) bzw. Bemerkung 11.2, dass $[1, 2]$ und $[3, 4]$ in dem metrischen Raum $[1, 2] \cup [3, 4]$ offene Mengen sind!

- (b) Die Mengen $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^d$ und die Einheitskugel $U_1(0)$ in $\mathbb{K}^d$ sind zusammenhängend, $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ist nicht zusammenhängend, wohl aber $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ für $d \geq 2$.
- (c) Betrachtet man eine Teilmenge mit der diskreten Metrik, so sind alle Teilmengen offen. Damit ist dort jede Teilmenge, die mindestens zwei Elemente hat, nicht zusammenhängend.
- (d) Die rationalen Zahlen sind als Teilmenge von $\mathbb{R}$ nicht zusammenhängend, denn es gilt $\mathbb{Q} = ((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \cup ((\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q})$.

Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle, wie der folgende Satz zeigt, dessen Beweis wir in den Übungen führen werden.

Satz 11.5. *Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.*

Nach dem Zwischenwertsatz bilden stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ Intervalle auf Intervalle (bzw. im Spezialfall einer konstanten Funktion auf einen Punkt) ab. Das ist nur ein spezieller Fall des folgenden allgemeinen Satzes.

Satz 11.6. *Ist $f : M \rightarrow N$ eine stetige Funktion und M zusammenhängend, so ist auch $f(M)$ eine zusammenhängende Teilmenge von N .*

Beweis. Sei $h : f(M) \rightarrow \{0, 1\}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch die Verkettung $h \circ f : M \rightarrow \{0, 1\}$ stetig. Da M zusammenhängend ist, liefert uns Satz 11.3, dass $h \circ f$ konstant sein muss. Dann ist aber auch h konstant und damit wiederum nach diesem Satz $f(M)$ zusammenhängend. $\square$

Als Korollar können wir nun die allgemeine Version des Zwischenwertsatzes formulieren, der sich als Spezialfall obigen Satzes erweist.

Korollar 11.7 (Zwischenwertsatz). *Es seien M zusammenhängend, $a, b \in M$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Als weitere Anwendung beweisen wir den folgenden topologischen Satz.

Satz 11.8. *Für $d \geq 2$ gibt es keine bijektive und stetige Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$.*

Beweis. Gäbe es eine solche Abbildung f , so müsste das Bild der zusammenhängenden Menge $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ zusammenhängend sein. Aus der Bijektivität von f folgt aber

$$f(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) = f(\mathbb{R}^d) \setminus \{f(0)\} = \mathbb{R} \setminus \{f(0)\} = (-\infty, f(0)) \cup (f(0), \infty)$$

und diese Menge ist offensichtlich nicht zusammenhängend. □

Wenn Sie nun sagen, ist doch klar, dass es so einen Quatsch nicht gibt, dann seien Sie vor voreiligen intuitiven Vermutungen gewarnt: Recherchieren Sie mal nach dem Stichwort „Peano-Kurve“.

Übungsaufgabe 11.9. Es seien I eine Indexmenge und X_i , $i \in I$, zusammenhängende Teilmengen eines metrischen Raums X mit $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} X_i$ zusammenhängend.

Teil III.

Analysis in $\mathbb{R}^d$

12. Kurven

Dieser erste Abschnitt zur Differentialrechnung in mehreren Variablen passt gar nicht wirklich zur Überschrift, da wir zunächst bei einer Variablen bleiben, aber Funktionen von (Teilmengen von) $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^d$ betrachten. Auf diesen Fall lässt sich die Differentialrechnung aus dem letzten Semester ganz geradeaus erweitern, so dass wir hier noch keine großen Schwierigkeiten haben werden. Darüberhinaus werden wir feststellen, dass der hier zentrale Begriff der Kurve auch noch einen schönen Zusammenhang zu unserer Diskussion über zusammenhängende Mengen im letzten Abschnitt hat, so dass dieses Kapitel ein bisschen eine Brückenfunktion einnimmt.

Eine Kurve ist intuitiv eine u. U. wild gebogene Linie in der Ebene oder im Raum oder gleich in einem metrischen Raum, z. B. der Funktionsgraph einer stetigen reellen Funktion oder eine Satellitenbahn. Dies wollen wir nun mathematisch beschreiben. Ein gutes Bild im Kopf ist dabei die Satellitenbahn: Zu deren Beschreibung kann man für jeden Zeitpunkt t den Ort im Raum angeben, an dem sich der Satellit zu diesem Zeitpunkt befindet. Das ergibt eine stetige¹ Funktion von $\mathbb{R}$ oder einem Intervall in $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^3$. Die Bildmenge dieser Abbildung ist dann eine Kurve als geometrische Linie. Diese entsteht als ein durch unsere Funktion „verbogenes“ Stück $\mathbb{R}$ im Raum.

In diesem Kapitel seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 12.1. (a) Eine stetige Funktion $\gamma : I \rightarrow M$ heißt Kurve in M .

(b) Ist $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve, so nennt man $\gamma(a)$ den Anfangspunkt und $\gamma(b)$ den Endpunkt der Kurve. Ist darüberhinaus $\gamma(a) = \gamma(b)$ so heißt die Kurve geschlossen.

(c) Die Bildmenge $\text{spur}(\gamma) := \{\gamma(t) : t \in I\} \subseteq M$ heißt Spur der Kurve oder auch Weg.

Bemerkung 12.2. (a) Im Umgang mit Kurven unterscheide man penibel zwischen der Kurve, die eine Abbildung ist, und dem Weg, der eine Punktmenge ist. Die Kurve enthält viel mehr Information, z. B. in welcher Richtung der Weg durchflogen wird oder wie schnell, während der Weg nur die bereiste Strecke nachzeichnet. Oder wie es Herr Große-Brauckmann in seinem Skript so schön beschreibt: Der Weg ist das Gleis, die Kurve enthält auch den ganzen Fahrplan.

¹Wir gehen mal davon aus, dass der Satellit nicht durch Wurmlöcher o.ä. fliegt.

12. Kurven

- (b) Die Satellitenbahn aus der Einleitung ist eine sehr nützliche Verwendung des Kurvenbegriffs und auch ein gutes Bild, das Sie im Kopf haben können, wenn Sie sich die folgenden Betrachtungen anschaulich machen wollen. Es ist in diesem Zusammenhang sehr gut, sich die Variable t als eine Zeitvariable vorzustellen und $\gamma(t)$ als den Ort, an dem sich ein Satellit, Atomkern oder irgendsenstein Teilchen zum Zeitpunkt t befindet.

Wir betrachten nun $M = \mathbb{K}^d$ und eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{K}^d$. Dann lässt sich deren Ableitung einfach wieder über den Differenzenquotienten definieren, sofern dessen Grenzwert existiert.

Definition 12.3. Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{K}^d$ heißt differenzierbar, wenn für alle $t_0 \in I$ der Grenzwert

$$\gamma'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

existiert. Für $t \in I$ heißt dann $\gamma'(t) \in \mathbb{K}^d$ auch Tangentialvektor von γ in t .

Weiter heißt eine differenzierbare Kurve stetig differenzierbar, wenn die Abbildung $t \mapsto \gamma'(t)$ stetig ist.

Bemerkung 12.4. (a) Nach Satz 7.14 gilt für eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{K}^d$ mit Koordinatenfunktionen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d : I \rightarrow \mathbb{K}$, falls die beteiligten Grenzwerte existieren,

$$\gamma'(t_0) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)}{t - t_0} \right)_{j=1}^d = (\gamma'_j(t_0))_{j=1}^d$$

für $t_0 \in I$. Wir können also einfach koordinatenweise differenzieren.

- (b) Physikalisch ist die Ableitung des Orts eines Teilchens nach der Zeitvariablen genau die Geschwindigkeit des Teilchens zu diesem Zeitpunkt. Das ist auch hier die Bedeutung des Tangentialvektors: Bei einer differenzierbaren Kurve zeigt der Tangentialvektor zu jedem Zeitpunkt $t_0 \in I$ in Richtung der aktuellen Bewegung, d. h. tangential zum Weg im Punkt $\gamma(t_0)$ und seine 2-Norm entspricht der (skalaren) Geschwindigkeit, mit der sich ein Teilchen entsprechend γ auf diesem bewegt.

Beispiel 12.5. (a) Sind $p, v \in \mathbb{R}^d$ fest vorgegeben, so entspricht die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\gamma(t) = p + tv$ einer gleichförmigen Bewegung entlang der durch den Aufpunkt p und den Richtungsvektor v gegebenen Gerade. Es gilt dann $\text{spur}(\gamma) = \{p + tv : t \in \mathbb{R}\}$ und $\gamma'(t) = v$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

- (b) Wir betrachten für ein $r > 0$ die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Diese Kurve beschreibt eine Bewegung entlang der Kreislinie um den Ursprung mit Radius r . Der Anfangs- und Endpunkt ist jeweils $(r, 0)$, es handelt sich also um eine geschlossene Kurve.

Der Tangentialvektor errechnet sich zu

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

und seine 2-Norm ist $\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} = r$. Es handelt sich also auch hier um eine Bewegung mit konstantem Wert der Geschwindigkeit, aber die Richtung ändert sich beständig, wie alle wissen, die schon einmal Karussell gefahren sind.

Diese Kurve ist auch besonders wichtig, wenn man sie in $\mathbb{C}$ statt in $\mathbb{R}^2$ begreift. Dort lässt sie sich einfacher als $\gamma_{\mathbb{C}} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_{\mathbb{C}}(t) = re^{it}$ beschreiben.

- (c) Ein nicht ganz so einfaches, aber doch alltägliches Beispiel ist die Zykloide $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Diese beschreibt die Kurve, vgl. Abbildung 12.1, die ein Punkt auf einem Kreis mit Radius 1 beschreibt, der auf einer Geraden abgerollt wird, d. h. den Weg den ein Punkt auf Ihrem Fahrradreifen zurücklegt, wenn Sie das Rad vorwärts schieben.

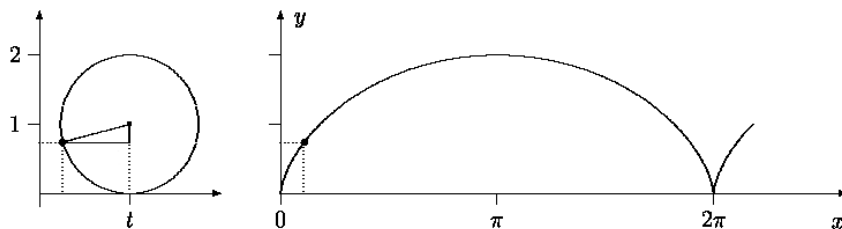


Abbildung 12.1.: Die Zykloide

Diese Kurve ist, auch wenn das Bild zunächst nicht so aussieht, differenzierbar mit

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Definition 12.6. Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^d$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist die Länge von γ gegeben durch

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

12. Kurven

Bemerkung 12.7. Diese Definition kann man sich wieder gut mit Hilfe der Anschauung einer Kurve als Flugbahn klar machen. Die Länge der Gesamtstrecke erhält man, indem man in jedem Punkt den Wert der Momentangeschwindigkeit aufsummiert, d. h. aufintegriert.

Man beachte, dass die verwendete Norm in der Definition der Kurvenlänge nicht egal ist. Bei verschiedener Wahl der Norm kommen natürlich auch verschiedene Kurvenlängen heraus. Üblicherweise wird man den alltäglichen Längenbegriff, d. h. die 2-Norm, verwenden wollen.

Beispiel 12.8. (a) Wir überprüfen diese Formel für die Weglänge auch anhand unseres obigen Beispiels 12.5(b). Wir betrachten also wieder

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{mit} \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \int_0^{2\pi} r \, dt = 2\pi r,$$

was recht gut mit unserer Erwartung an den Umfang eines Kreises vom Radius r harmonisiert.

- (b) Als zweites Beispiel können wir nun die Länge des Funktionsgraphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ berechnen. Dieser Graph als Linie in $\mathbb{R}^2$ lässt sich nämlich folgendermaßen als Spur einer Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisieren:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b].$$

Damit ist die Länge des Graphen gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt.$$

Bemerkung 12.9. Nun steht ein berechtigter Einwand in der Luft: Tatsächlich müssen wir in Beispiel 12.8 präziser sein und sollten besser sagen, dass wir in beiden Fällen die Länge der *Kurve* berechnen, denn dem Begriff der Länge der *Spur* (bzw. des Wegs) eine mathematisch saubere Definition zu geben, wird uns erst mit den Mitteln der Maßtheorie aus dem vierten Semester gelingen. Als warnendes Beispiel genügt es, die Kurve $\hat{\gamma} : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))^T$ zu betrachten. Ihre Spur ist die gleiche Kreislinie wie in Beispiel 12.8, aber nun wird die Kreislinie zweimal durchlaufen und die Länge dieser Kurve ist $4\pi r$.

Nichtsdestotrotz haben wir bei der Berechnung der Kurvenlänge eine gewisse Freiheit in der Wahl der Parametrisierung. So ist z.B.

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(2t) \\ r \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi], \quad \text{mit} \quad \tilde{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -2r \sin(2t) \\ 2r \cos(2t) \end{pmatrix}$$

ebenfalls eine Kurve, nur durchläuft $\tilde{\gamma}$ den Weg in der doppelten Geschwindigkeit und dafür in der halben Zeit. Durch eine solche *Umparametrisierung* sollte sich natürlich bitte die Kurvenlänge nicht ändern.

Um das einzusehen, sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^d$ eine stetig differenzierbare Kurve. Die Umparametrisierung auf ein weiteres kompaktes Intervall $[\alpha, \beta]$ in $\mathbb{R}$ wird beschrieben durch eine stetig differenzierbare und bijektive Funktion $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Dann ist auch $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{K}^d$ mit $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ eine stetig differenzierbare Kurve und es gilt $\text{spur}(\gamma) = \text{spur}(\tilde{\gamma})$.

Tatsächlich ist auch $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$. Dazu berechnen wir zunächst

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\tilde{\gamma}'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt.$$

Nun ist dank der Nullstellenfreiheit von φ' entweder $\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$ auf $[\alpha, \beta]$. Im ersten Fall ist $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$. Man nennt eine solche Umparametrisierung *orientierungserhaltend*. Im Fall, dass φ' überall negativ ist, gilt umgekehrt $\varphi(\alpha) = b$ und $\varphi(\beta) = a$. Eine solche Umparametrisierung wird *orientierungsumkehrend* genannt.

In beiden Fällen erhalten wir jedoch mit der Substitution $s = \varphi(t)$

$$L(\tilde{\gamma}) = \left\{ \begin{array}{ll} \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt & = \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds \quad \text{falls } \varphi' > 0 \\ - \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt & = \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds \quad \text{falls } \varphi' < 0 \end{array} \right\} = L(\gamma).$$

Kurven, bzw. Wege, bieten eine zweite Möglichkeit Zusammenhang von Mengen zu definieren. Intuitiv ist eine Menge ein zusammenhängendes Gebilde, wenn wir von jedem Punkt zu jedem anderen innerhalb der Menge gelangen können, wenn wir die beiden also durch einen Weg in der Menge verbinden können. Wir definieren zunächst den entsprechenden Begriff.

Definition 12.10. Ein metrischer Raum (M, d) heißt wegzusammenhängend, wenn für alle $x, y \in M$ ein Intervall $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ und eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ existieren, so dass $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ ist.

Tatsächlich sind die beiden Begriffe Zusammenhang und Wegzusammenhang nicht identisch, sondern es gibt hier subtile Unterschiede. Wir notieren jedoch die folgenden Zusammenhänge.

Satz 12.11. (a) Ist M wegzusammenhängend, so ist M zusammenhängend.

(b) Es sei D eine offene, zusammenhängende Teilmenge eines normierten Vektorraums. Dann gibt es für alle $x, y \in D$ eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$, die aus endlich vielen Geradenstücken besteht. Insbesondere ist D wegzusammenhängend.

12. Kurven

Beweis. (a) Sei M ein wegzusammenhängender metrischer Raum. Weiter seien $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ eine stetige Abbildung und $x, y \in M$. Dann gibt es nach Voraussetzung eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ und die Funktion $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \{0, 1\}$ ist als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Da $[a, b]$ als Intervall zusammenhängend ist, muss $f \circ \gamma$ nach Satz 11.3 konstant sein. Damit gilt

$$f(x) = f(\gamma(a)) = f(\gamma(b)) = f(y),$$

und da x und y in M beliebig waren, bekommen wir, dass f eine konstante Funktion ist. Das bedeutet aber wiederum mit Hilfe von Satz 11.3, dass M zusammenhängend ist.

- (b) Sei $x \in D$. Wir betrachten die Menge A aller $z \in D$, die mit x durch eine Kurve in D verbunden werden können, die aus endlich vielen Geradenstücken besteht, und setzen $B := D \setminus A$.

Im Folgenden zeigen wir, dass sowohl A als auch B offene Teilmengen von D sind. Nach Konstruktion gilt außerdem $D = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. Da D zusammenhängend vorausgesetzt ist, muss dann also eine der beiden Mengen leer sein. Mittels einer konstanten Kurve kann x mit x verbunden werden, also ist $x \in A$, d. h. B ist leer. Damit ist $D = A$ und wir sind fertig.

Zum Nachweis, dass A offen ist, wählen wir uns ein $z_0 \in A$. Dann gilt auch $z_0 \in D$ und wegen der Offenheit von D gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$. Sei nun $z \in U_\varepsilon(z_0)$. Da $z_0 \in A$ ist, gibt es eine Kurve γ_1 in D , die x und z_0 durch endlich viele Geradenstücke verbindet. Weiter ist die Verbindungslinie von z und z_0 ganz in der Kugel $U_\varepsilon(z_0)$ enthalten, vgl. Übungsaufgabe 5.5. Wir können an die Kurve γ_1 also ein weiteres Geradenstück anfügen und erhalten eine Kurve aus endlich vielen Geradenstücken, die x mit z verbindet. Damit ist $U_\varepsilon(z_0) \subseteq A$ und A offen.

Es fehlt noch die Offenheit von B . Zu vorgegebenem $z_0 \in B$ wählen wir wieder ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$ und zeigen $U_\varepsilon(z_0) \subseteq B$. Dazu nehmen wir an, es gäbe ein $z \in U_\varepsilon(z_0)$ mit $z \notin B$. Dann ist $z \in A$ und genau die gleiche Konstruktion, wie im vorhergehenden Beweisteil liefert uns eine Kurve aus endlich vielen Geradenstücken, die x und z_0 via z verbindet. Damit wäre dann aber z_0 in A , was einen Widerspruch darstellt. $\square$

Warnung 12.12. Im allgemeinen Kontext von metrischen Räumen können Zusammenhang und Wegzusammenhang auseinanderfallen, die Zusatzvoraussetzungen in Teil (b) des obigen Satzes sind also wichtig. Ein Beispiel einer zusammenhängenden aber nicht wegzusammenhängenden Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist der Graph einer geeigneten Flatter-Sinus-Funktion:

$$\{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\} \quad \text{mit} \quad f(x) := \begin{cases} \sin(1/x), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

13. Partielle Ableitungen

Wir betrachten nun Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit $G \subseteq \mathbb{R}^d$ und wollen den Ableitungsbegriff und die Differentialrechnung auf diese erweitern. Dazu sei im gesamten Abschnitt $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Die direkte Übertragung der Definition über den aus der Analysis I bekannten Differenzenquotienten

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ist nicht möglich, denn nun sind ja $x, x_0 \in G \subseteq \mathbb{R}^d$, bzw. $h \in \mathbb{R}^d$, Vektoren und durch Vektoren kann man nicht teilen. Wir haben hier also ein strukturelles Problem.

Dieses Problem ist natürlich nicht nur formaler Natur, sondern hat auch eine anschauliche Komponente. In $\mathbb{R}^d$ gibt es viel mehr Richtungen als nur hin und her. Diese reichhaltigere Geometrie kann das reine dividieren durch den Abstand nicht ausleuchten. Der Graph einer Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ lässt sich noch gut als Graph in $\mathbb{R}^3$ visualisieren, vgl. Abbildungen 8.2 und 8.1. Stellen Sie sich vor sie stehen auf diesem Graph und machen dort eine Wanderung. Wie groß ist nun die Steigung in einem Punkt? Das kommt eben darauf an, in welche Richtung Sie schauen, es gibt einfach nicht *die* Steigung.

In diesem und dem nächsten Abschnitt werden wir zwei Ansätze kennenlernen, um dieses Problem zu lösen, die beide im Wesentlichen zum selben Ergebnis führen. Trotzdem sind beide Zugänge wichtig, da der erste ohne den zweiten keine vernünftige Theorie ergibt und der zweite ohne den ersten zu einer nicht praktikabel zu berechnenden Ableitung führt.

Wir versuchen zunächst den Differenzenquotienten zu retten, indem wir uns darauf beschränken, mehrere eindimensionale Ableitungen zu berechnen, die zusammen das Verhalten der Funktion f beschreiben sollen. Dazu berechnen wir die Ableitung zunächst nur in eine Richtung.

Definition 13.1. Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine Funktion, $x_0 \in G$ und $v \in \mathbb{R}^d$. Existiert dann der Grenzwert

$$\partial_v f(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h},$$

so heißt f in x_0 in Richtung v differenzierbar und $\partial_v f(x_0)$ die Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung v .

13. Partielle Ableitungen

Anschaulich bedeutet diese Definition, dass wir uns nur die Funktionswerte von f entlang der Geraden $\{x_0 + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ in G anschauen und den Schnitt von f entlang dieser Geraden im eindimensionalen Sinne differenzieren. Wir bestimmen die Steigung am Hang, wenn wir stur in Richtung v laufen. Dies ist in Abbildung 13.1 angedeutet.

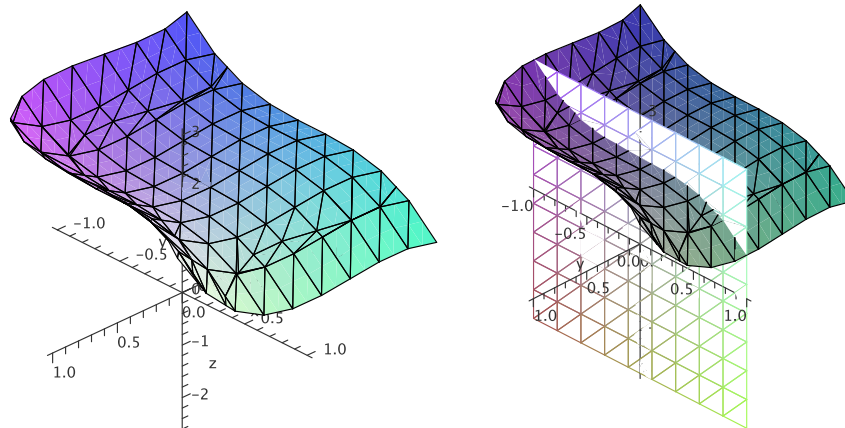


Abbildung 13.1.: Der Graph einer Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ und der Schnitt, der zu einer partiellen Ableitung, d. h. Richtungsableitung in Richtung einer Koordinatenachse, führt

Bemerkung 13.2. In obiger Definition ist bewusst auch die Ableitung in „Richtung“ des Nullvektors definiert. Diese ist für jede Funktion und an jeder Stelle immer Null und damit nicht besonders interessant. Dieses Vorgehen erspart aber im Folgenden viele unübersichtliche Fallunterscheidungen.

Übungsaufgabe 13.3. Definiert man $g_v(h) := f(x_0 + hv)$ für alle $h \in \mathbb{R}$, für die $x_0 + hv$ in G liegt, so gilt

$$\partial_v f(x_0) = g'_v(0).$$

Nun statten wir den $\mathbb{R}^d$ mit der Standardbasis aus. Die Ableitungen in Richtung der Standardbasisvektoren bekommen einen eigenen Namen.

Definition 13.4. Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine Funktion und $e_1, e_2, \dots, e_d$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^d$.

- (a) Existieren in einem $x_0 \in G$ die Richtungsableitungen von f in alle Richtungen $e_1, e_2, \dots, e_d$, so heißt f in x_0 partiell differenzierbar. Man schreibt dann für $j = 1, 2, \dots, d$ auch

$$\partial_j f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) := f_{x_j}(x_0) := \partial_{e_j} f(x_0)$$

für die partielle Ableitung von f in x_0 nach der j -ten Koordinate.

- (b) Ist f in allen $x_0 \in G$ partiell differenzierbar, so sagt man f ist in G partiell differenzierbar und schreibt $\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} = f_{x_j} : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ für die partielle Ableitung(sfunktion).
- (c) Ist f in G partiell differenzierbar und sind sämtliche partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_d f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ stetig, so nennt man f stetig partiell differenzierbar in G .

Bemerkung 13.5. Die Notation ist im Bereich der partiellen Ableitungen leider ziemlich vielfältig. Alle oben angeführten Bezeichnungen sind synonym und in der Literatur üblich, so dass man sich wohl oder übel an alle gewöhnen muss.

Beispiel 13.6. Wir betrachten die Identität $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $f(x) = x$. Dann gilt für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^d$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\partial_v f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + hv - x_0}{h} = v.$$

Damit gilt für die partiellen Ableitungen

$$\partial_j f(x_0) = e_j \quad \text{für alle } j = 1, 2, \dots, d.$$

Bemerkung 13.7. Die praktische Berechnung der partiellen Ableitungen ist einfach: Will man die j -te partielle Ableitung von f bestimmen, so behandelt man die anderen Variablen $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d$ als konstante Parameter und leitet ganz wie gewohnt nach der einen Variablen x_j ab. Das sieht man z.B. für $j = 1$ an der Rechnung

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x_1, \dots, x_d) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_1, \dots, x_d)^T + h(1, 0, \dots, 0)^T) - f(x_1, \dots, x_d)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_d) - f(x_1, x_2, \dots, x_d)}{h}. \end{aligned}$$

Beispiel 13.8. Für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = xe^{xz+y^2}$ gilt nach obiger Bemerkung damit

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y, z) &= e^{xz+y^2} + xe^{xz+y^2} \cdot z = (1 + xz)e^{xz+y^2}, \\ \partial_2 f(x, y, z) &= xe^{xz+y^2} \cdot 2y = 2xye^{xz+y^2}, \\ \partial_3 f(x, y, z) &= xe^{xz+y^2} \cdot x = x^2e^{xz+y^2}. \end{aligned}$$

Der Fall einer Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^p$ für $p > 1$ lässt sich wie schon bei der Stetigkeit auf den Fall $p = 1$ zurückspielen.

Satz 13.9. Ist $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine Funktion und $x_0 \in G$, so ist f in x_0 genau dann partiell differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_1, f_2, \dots, f_p : G \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 partiell differenzierbar sind. In diesem Fall gilt

$$\partial_j f(x_0) = (\partial_j f_1(x_0), \partial_j f_2(x_0), \dots, \partial_j f_p(x_0))^T, \quad j = 1, 2, \dots, d.$$

13. Partielle Ableitungen

Beweis. Die Funktion f ist in x_0 genau dann partiell nach der j -ten Koordinaten differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_j) - f(x_0)}{h}$$

in $\mathbb{R}^p$ existiert und der Wert ist dann die partielle Ableitung. Damit folgt die Behauptung aus Satz 7.14 über koordinatenweise Konvergenz. $\square$

Bemerkung 13.10. Mit Bemerkung 13.7 und diesem Satz haben wir das Problem der konkreten Berechnung von partiellen Ableitungen auf den Fall von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ zurückgespielt. Wir brauchen also keine neuen Ableitungsregeln, sondern können mit unserem bisherigen Wissen alle partiellen Ableitungen berechnen, sofern diese existieren.

Definition 13.11. Ist $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ partiell differenzierbar, so heißt die $p \times d$ -Matrix aller partiellen Ableitungen

$$J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \dots & \partial_d f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \dots & \partial_d f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_p(x_0) & \partial_2 f_p(x_0) & \dots & \partial_d f_p(x_0) \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix von f .

Im Spezialfall $p = 1$ nennt man die $1 \times d$ -Matrix, d. h. den $\mathbb{R}^d$ -Zeilenvektor

$$\nabla f(x_0) := J_f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \partial_2 f(x_0), \dots, \partial_d f(x_0))$$

Gradient von f .

Bemerkung 13.12. (a) Es gilt in dieser Notation

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla f_p(x) \end{pmatrix}.$$

- (b) Der Gradient einer Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ hat auch eine anschauliche Bedeutung. Ist f glatt genug, so gibt der Vektor $\nabla f(x_0)$ die Richtung an, in der der Graph von f an der Stelle x_0 am stärksten ansteigt und seine Länge entspricht dieser maximalen Steigung. Einen Beweis dieser Aussage können wir erst in Bemerkung 14.10 geben, dazu fehlt uns noch einiges theoretisches Rüstzeug.

Auf dieser Eigenschaft beruhen viele numerische Optimierungsverfahren, die zum Suchen des Optimums in Richtung des Gradienten der zu optimierenden Größe gehen („Gradientenmethoden“), getreu dem Motto: Der schnellste Weg zum Gipfel ist immer in die steilste Richtung den Hang hinauf und das ist eben die Richtung des Gradienten.

Beispiel 13.13. Wir betrachten wieder die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

vgl. Beispiel 8.9. Außerhalb von $(0, 0)$ ist diese offensichtlich partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= \frac{y(x^2 + y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{und} \\ \partial_2 f(x, y) &= \frac{x(x^2 + y^2) - 2y \cdot xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen im Ursprung berechnen sich über den Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \partial_1 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0, \quad \text{und} \\ \partial_2 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Versuchen wir nun die Richtungsableitung im Ursprung in eine Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ zu bestimmen, so bekommen wir den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + hv) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hv_1 hv_2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2}{h(v_1^2 + v_2^2)}.$$

Sobald v_1 und v_2 beide nicht Null sind, wir uns also nicht in Richtung einer Koordinatenachse bewegen, existiert dieser Grenzwert aber gar nicht. Die einzigen Richtungen in die hier Richtungsableitungen existieren, sind also gerade die Richtungen der Standardbasis, die zu den partiellen Ableitungen gehören. Betrachten Sie dazu auch noch einmal den Graphen der Funktion f in Abbildung 8.1.

Daran sieht man, dass man aus der Existenz der partiellen Ableitungen alleine nicht auf irgendwelche anderen Richtungsableitungen schließen kann.

Das Beispiel zeigt darüber hinaus auch aus einem anderen Grund, dass alleine mit dem Begriff der partiellen Differenzierbarkeit kein Staat zu machen ist. Wir haben hier nämlich eine im Ursprung partiell differenzierbare Funktion, die dort aber noch nicht einmal stetig ist wie wir in Beispiel 8.9 gesehen haben.

Beachten Sie, dass f im vorstehenden Beispiel nicht *stetig* partiell differenzierbar ist. Tatsächlich ist dies ein entscheidendes Detail, denn wenn die partiellen Ableitungen stetig sind, können solche Sauereien nicht passieren. Bis wir das in Satz 14.12 exakter formulieren können brauchen wir aber noch einen Stapel Theorie.

Wir führen zunächst die partiellen Ableitungen höherer Ordnung ein. Die Definition dürfte keine große Überraschung sein.

13. Partielle Ableitungen

Definition 13.14. Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, $x_0 \in G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine Funktion.

- (a) Man nennt f n -mal (stetig) partiell differenzierbar in x_0 , wenn sie schon $(n - 1)$ -mal (stetig) partiell differenzierbar auf G ist und alle $(n - 1)$ -ten partiellen Ableitungen in x_0 wieder (stetig) partiell differenzierbar sind.
- (b) Man nennt f n -mal (stetig) partiell differenzierbar auf G , wenn f dieses in jedem $x_0 \in G$ ist.
- (c) Es bezeichnet für $H \subseteq \mathbb{R}^p$ und $k \in \mathbb{N}$

$$C^k(G, H) := \{f : G \rightarrow H \mid f \text{ } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar auf } G\}.$$

Notiert werden mehrfache partielle Ableitungen durch Hintereinanderschreiben der einzelnen Ableitungen, also z.B.

$$\partial_1 \partial_3 \partial_1 f, \quad \partial_2^3 \partial_1 f, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} \quad \text{oder} \quad f_{x_1 x_2 x_3},$$

je nach der verwendeten Notation. Wie wir gleich sehen werden, ist die Reihenfolge der Ableitungen dabei meist egal, sollte das nicht der Fall sein, ist mit obigen Schreibweisen die folgende Klammerung gemeint:

$$\partial_1 \partial_2 f = \partial_1(\partial_2 f), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right), \quad f_{x_2 x_1} = (f_{x_2})_{x_1}.$$

Beispiel 13.15. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 y + x e^y$. Dann haben wir für die partiellen Ableitungen erster Ordnung

$$\partial_1 f(x, y) = 3x^2 y + e^y \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x, y) = x^3 + x e^y.$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned} \partial_1^2 f(x, y) &= 6xy & \partial_1 \partial_2 f(x, y) &= 3x^2 + e^y \\ \partial_2 \partial_1 f(x, y) &= 3x^2 + e^y & \partial_2^2 f(x, y) &= x e^y. \end{aligned}$$

So kann man nun natürlich ewig weitermachen. Hier ist noch die dritte Ordnung:

$$\begin{aligned} \partial_1^3 f(x, y) &= 6y & \partial_1 \partial_2^2 f(x, y) &= e^y \\ \partial_1 \partial_2 \partial_1 f(x, y) &= 6x & \partial_2^2 \partial_1 f(x, y) &= e^y \\ \partial_1^2 \partial_2 f(x, y) &= 6x & \partial_2 \partial_1 \partial_2 f(x, y) &= e^y \\ \partial_2 \partial_1^2 f(x, y) &= 6x & \partial_2^3 f(x, y) &= x e^y. \end{aligned}$$

Betrachtet man die partiellen Ableitungen in obigem Beispiel noch einmal genauer, so stellt man fest, dass das Ergebnis der Ableiterei nicht von der Reihenfolge der Differenziationen, sondern nur von der Anzahl abzuhängen scheint, wie oft jeweils nach der ersten bzw. der zweiten Koordinaten differenziert wird. So ist in obigem Beispiel z.B. $\partial_1 \partial_2 f(x, y) = \partial_2 \partial_1 f(x, y)$. Das ist tatsächlich kein Zufall, denn es gilt der folgende Satz.

Satz 13.16 (Satz von Schwarz). *Es seien $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine Funktion und $j, k \in \{1, 2, \dots, d\}$. Existieren in G die partiellen Ableitungen $\partial_j f$, $\partial_k f$ und $\partial_j \partial_k f$ und ist $\partial_j \partial_k f$ stetig in $x_0 \in G$, so existiert auch $\partial_k \partial_j f(x_0)$ und es gilt*

$$\partial_k \partial_j f(x_0) = \partial_j \partial_k f(x_0).$$

Beweis. Nach Satz 13.9 kann man die Existenz der Ableitungen von f in jeder Koordinaten getrennt überprüfen. Es reicht daher aus, den Satz im Spezialfall $p = 1$ zu zeigen, was wir im Folgenden tun werden.

Da G offen ist, gibt es ein $\delta > 0$, für das $x_0 + se_j + te_k \in G$ liegt für alle $(s, t) \in (-\delta, \delta)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir betrachten nun die Funktion $\varphi : (-\delta, \delta)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(s, t) = f(x_0 + se_j + te_k)$. Für diese gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 \varphi(s, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(s+h, t) - \varphi(s, t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + (s+h)e_j + te_k) - f(x_0 + se_j + te_k)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + se_j + te_k + he_j) - f(x_0 + se_j + te_k)}{h} \\ &= \partial_j f(x_0 + se_j + te_k). \end{aligned}$$

Genauso begründet man

$$\begin{aligned} \partial_2 \varphi(s, t) &= \partial_k f(x_0 + se_j + te_k), \\ \partial_1 \partial_2 \varphi(s, t) &= \partial_j \partial_k f(x_0 + se_j + te_k) \end{aligned}$$

und die zu zeigende Aussage ist gerade, dass auch $\partial_2 \partial_1 \varphi(0, 0) (= \partial_k \partial_j f(x_0))$ existiert und mit $\partial_1 \partial_2 \varphi(0, 0)$ übereinstimmt. Dazu betrachten wir für $t \in (-\delta, \delta)$ Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{\partial_1 \varphi(0, t) - \partial_1 \varphi(0, 0)}{t} &= \frac{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s, t) - \varphi(0, t)}{s} - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s, 0) - \varphi(0, 0)}{s}}{t} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{(\varphi(s, t) - \varphi(0, t)) - (\varphi(s, 0) - \varphi(0, 0))}{t}. \end{aligned}$$

13. Partielle Ableitungen

Gegeben $s \in (-\delta, \delta)$ definieren wir nun $\Phi_s(t) := \varphi(s, t) - \varphi(0, t)$ für $t \in (-\delta, \delta)$. Dann gilt $\Phi'_s(t) = \partial_2 \varphi(s, t) - \partial_2 \varphi(0, t)$ und mit dem Mittelwertsatz finden wir reelle Zahlen $\kappa_{s,t} \in (0, 1)$ mit

$$\begin{aligned} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{\Phi_s(t) - \Phi_s(0)}{t} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \Phi'_s(\kappa_{s,t} t) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial_2 \varphi(s, \kappa_{s,t} t) - \partial_2 \varphi(0, \kappa_{s,t} t)}{s}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung existiert $\partial_1 \partial_2 \varphi$, also gibt es erneut nach dem Mittelwertsatz $\eta_{s,t} \in (0, 1)$ mit

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \partial_1 \partial_2 \varphi(\eta_{s,t} s, \kappa_{s,t} t).$$

Nun greift die Voraussetzung, dass $\partial_1 \partial_2 \varphi$ in $(0, 0)$ stetig ist. Gegeben $\varepsilon > 0$ wählen wir $h < \delta$ so, dass gilt:

$$|s|, |t| < h \implies |\partial_1 \partial_2 \varphi(s, t) - \partial_1 \partial_2 \varphi(0, 0)| \leq \varepsilon.$$

Ist nun $|t| < h$, so folgt wegen $|\eta_{s,t} s| \leq |s|$ und $|\kappa_{s,t} t| \leq |t|$ aus obiger Rechnung

$$\left| \frac{\partial_1 \varphi(0, t) - \partial_1 \varphi(0, 0)}{t} - \partial_1 \partial_2 \varphi(0, 0) \right| = \left| \lim_{s \rightarrow 0} \partial_1 \partial_2 \varphi(\eta_{s,t} s, \kappa_{s,t} t) - \partial_1 \partial_2 \varphi(0, 0) \right| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, bedeutet dies gerade, dass $\partial_2 \partial_1(0, 0)$ existiert und mit $\partial_1 \partial_2 \varphi(0, 0)$ übereinstimmt. $\square$

Kein Satz bleibt ohne die Warnung auf die Voraussetzungen zu achten. Ist f zweimal partiell differenzierbar, aber sind die partiellen Ableitungen nicht stetig, so gilt der Satz von Schwarz im Allgemeinen nicht, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 13.17. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= \begin{cases} y \frac{x^4 + 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\ \partial_2 f(x, y) &= \begin{cases} x \frac{x^4 - 4x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\partial_2 \partial_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \frac{-h^4}{h^4} - 0}{h} = -1 \quad \text{und}$$

$$\partial_1 \partial_2 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \frac{h^4}{h^4}}{h} = 1.$$

14. Totale Differenzierbarkeit

Wir wollen nun die unbefriedigenden Anteile des vorigen Abschnittes auflösen und das Differenzierungsproblem im $\mathbb{R}^d$ noch mal ein wenig abstrakter anschauen. Das ist dringend nötig, denn wie wir in Beispiel 13.13 gesehen haben, lässt sich aus der reinen Existenz der partiellen Ableitungen noch nichts brauchbares folgern. In diesem Fall können diese Ableitungen in keiner Weise geometrisch interpretiert oder für eine Anwendung verwendet werden. Das liegt daran, dass der Begriff der partiellen Ableitungen zu schwach ist, es ist einfach noch nicht der richtige Ableitungsbegriff für Funktionen in mehreren Variablen. Diesen „richtigen“ Begriff wollen wir jetzt kennenlernen.

Dazu erinnern wir uns daran, dass in einer Variablen die Ableitung in ihrer Interpretation als Tangentensteigung eine lineare Approximation der Funktion darstellt. Wir können nun natürlich nicht mehr durch eine Gerade approximieren, aber weiterhin durch eine lineare Abbildung. Diese Idee haben wir in Satz I.22.6 kennengelernt. Dort wurde gezeigt, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, wenn es eine lineare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Funktion $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + g(h) + r(h) \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

In diesem Fall ist der Graph der Funktion $h \mapsto f(x_0) + g(h)$ dann genau die Tangente an f in x_0 und die Steigung von g ist die Ableitung von f in x_0 .

Auch diese Formulierung können wir nicht direkt für Vektoren x_0 und h nutzen, denn es würde dann immer noch durch den Vektor h geteilt. Der entscheidende Unterschied ist aber, dass der dabei betrachtete Grenzwert nun Null sein soll. Wir können also äquivalent um den hier betrachteten Bruch Betragsstriche oder in $\mathbb{R}^d$ Normstriche machen. Das beschert uns die folgende zentrale Definition.

Im gesamten Abschnitt sei wieder $G \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge.

Definition 14.1. Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ heißt (total) differenzierbar in $x_0 \in G$, wenn es eine lineare Abbildung $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ gibt, so dass gilt

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Th + r(h), \quad x_0 + h \in G,$$

mit einer Funktion $r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$, die

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

14. Totale Differenzierbarkeit

erfüllt.

Die lineare Abbildung $Df(x_0) := T$ heißt dann (totale) Ableitung von f in x_0 . Ist f in allen $x_0 \in G$ total differenzierbar, so heißt f (total) differenzierbar auf G und die Funktion $Df : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ die Ableitung(sfunktion) von f .

Bemerkung 14.2. (a) Wie üblich ist die konkrete Wahl der Norm in obiger Definition dank Satz 7.11 unerheblich. In diesem Sinne werden wir hier auch in allen weiteren Betrachtungen einfach $\|\cdot\|$ schreiben, wenn die konkrete Wahl der Norm egal ist.

- (b) Desweiteren ist es häufig von Vorteil sich klarzumachen, dass die Grenzwertbedingung an die Restfunktion r gleichbedeutend mit $\lim_{h \rightarrow 0} \|r(h)\|/\|h\| = 0$ als Grenzwert in $\mathbb{R}$ ist.

Um obige Definition wasserdicht zu machen brauchen wir noch die Eindeutigkeit der Ableitung.

Satz 14.3. Die totale Ableitung ist, sofern sie existiert, eindeutig.

Beweis. Übungsaufgabe

Beispiel 14.4. (a) Es sei $y \in \mathbb{R}^d$ fest gewählt, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$ und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \langle y, x \rangle$. Dann gilt für alle x_0 in $\mathbb{R}^d$ dank der Linearität des Skalarprodukts

$$f(x_0 + h) = \langle y, x_0 + h \rangle = \langle y, x_0 \rangle + \langle y, h \rangle = f(x_0) + y^T h.$$

Die Abbildung $h \mapsto y^T h$, $h \in \mathbb{R}^d$, ist aus $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Wir haben also eine Darstellung für $f(x)$ gefunden wie sie in Definition 14.1 gefordert ist. Hier ist sogar $r(h) = 0$, $h \in \mathbb{R}^d$, womit die Grenzwertbedingung sicher erfüllt ist. Die Ableitungsfunktion Df ist also konstant und ihr Wert ist die lineare Abbildung, die durch die Multiplikation mit y^T gegeben ist.

Allgemein gilt, dass die Ableitung einer linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ in jedem Punkt die Abbildung T selbst ist. Rechnen Sie das doch mal nach!

- (b) Für eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \langle x, Bx \rangle = \sum_{j,k=1}^d b_{jk} x_j x_k$. Dann ist für alle $x_0, h \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \langle x_0 + h, B(x_0 + h) \rangle \\ &= \langle x_0, Bx_0 \rangle + \langle x_0, Bh \rangle + \langle h, Bx_0 \rangle + \langle h, Bh \rangle \\ &= f(x_0) + 2\langle Bx_0, h \rangle + \langle h, Bh \rangle = f(x_0) + (2Bx_0)^T \cdot h + \langle h, Bh \rangle \\ &= f(x_0) + Th + r(h) \end{aligned}$$

mit der linearen Abbildung $T : v \mapsto 2(Bx_0)^T \cdot v$ und dem Rest $r(h) = \langle h, Bh \rangle$, für den mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung wie verlangt

$$\frac{|r(h)|}{\|h\|} = \frac{|\langle h, Bh \rangle|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\| \|Bh\|}{\|h\|} = \|Bh\| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

gilt, da lineare Abbildungen auf $\mathbb{R}^d$ nach Satz 8.14 stetig sind.

Also ist f in jedem $x_0 \in \mathbb{R}^d$ differenzierbar und es gilt $Df(x_0)v = 2\langle Bx_0, v \rangle$, $v \in \mathbb{R}^d$.

Wir wollen nun zunächst zeigen, dass die totale Differenzierbarkeit Stetigkeit der Funktion impliziert, im Gegensatz zur partiellen Differenzierbarkeit, vgl. Beispiel 13.13.

Satz 14.5. *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ total differenzierbar, so ist f auch stetig in x_0 .*

Beweis. Für alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $x_0 + h \in G$ gilt nach der Definition der totalen Differenzierbarkeit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + r(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Nun ist dank Satz 8.14 die lineare Abbildung $Df(x_0)$ stetig und deshalb gilt $\lim_{h \rightarrow 0} Df(x_0)h = 0$.

Außerdem impliziert die totale Differenzierbarkeit von f insbesondere

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} \cdot \|h\| = 0 \cdot 0 = 0.$$

Also haben wir

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0) + Df(x_0)h + r(h)) = f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0). \quad \square$$

Wir wollen nun eine erste Brücke von den totalen Ableitungen zu den partiellen schlagen und zeigen, dass der Begriff der totalen Ableitung stärker ist.

Satz 14.6. *Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine in $x_0 \in G$ total differenzierbare Funktion und $v \in \mathbb{R}^d$. Dann existiert in x_0 die Richtungsableitung von f in Richtung v und es gilt*

$$\partial_v f(x_0) = Df(x_0)v.$$

Beweis. Für $v = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also von nun an $v \neq 0$. Wir wenden für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x_0 + sv \in G$ die Definition der totalen Differenzierbarkeit 14.1 mit $h = sv$ an. Das ergibt

$$f(x_0 + sv) = f(x_0) + Df(x_0)(sv) + r(sv) \quad \text{mit} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\|r(sv)\|}{|s|\|v\|} = 0.$$

Also ist $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{r(sv)}{s} = 0$ und es gilt dank der Linearität von $Df(x_0)$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + sv) - f(x_0)}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Df(x_0)(sv) + r(sv)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sDf(x_0)v + r(sv)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[Df(x_0)v + \frac{r(sv)}{s} \right] = Df(x_0)v, \end{aligned}$$

was nach der Definition der Richtungsableitung 13.1 genau die Behauptung ist. $\square$

14. Totale Differenzierbarkeit

Damit können wir nun den folgenden zentralen Zusammenhang zwischen der totalen Ableitung und den partiellen Ableitungen beweisen.

Satz 14.7. *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ total differenzierbar, so ist f in x_0 auch partiell differenzierbar und die Abbildungsmatrix von $Df(x_0)$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{R}^p$ ist die Jacobi-Matrix $J_f(x_0)$.*

Beweis. In den Spalten der Abbildungsmatrix von $Df(x_0)$ stehen die Bilder der Basisvektoren. Nach Satz 14.6 gilt für die Standardbasisvektoren $e_1, e_2, \dots, e_d$ genau

$$Df(x_0)e_j = (\partial_{e_j}f)(x_0) = \partial_j f(x_0), \quad j = 1, 2, \dots, d,$$

also enthält die j -te Spalte die partielle Ableitung $\partial_j f(x_0)$ genau wie in der Jacobi-Matrix, vgl. Definition 13.11. $\square$

Bemerkung 14.8. (a) Man beachte, dass die Umkehrung dieses Satzes falsch ist. Das folgt aus Beispiel 13.13 und Satz 14.5.

(b) Im Folgenden werden wir oft $Df(x_0)$ mit der Jacobi-Matrix identifizieren, d. h. wir trennen nicht sauber zwischen der linearen Abbildung und der Abbildungsmatrix. Was in der linearen Algebra strikt verboten ist, ist hier opportun, um unnötige Haarspaltereien zu vermeiden. Das geht gut, weil wir im Folgenden nie von der oben getroffenen Wahl der Standardbasen abweichen werden.

Nimmt man Satz 14.6 und Satz 14.7 zusammen, so kann man unter der Voraussetzung totaler Differenzierbarkeit aus den partiellen Ableitungen jede Richtungsableitung bestimmen.

Korollar 14.9. *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ total differenzierbar, so gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^d$*

$$\partial_v f(x_0) = J_f(x_0)v.$$

Bemerkung 14.10. Nun können wir auch einen Beweis für die Behauptung in Bemerkung 13.12(b) geben, dass der Gradient in die Richtung des steilsten Anstiegs zeigt. Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in G$ total differenzierbar mit $\nabla f(x_0) \neq 0$. Sei $S := \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_2 = \|\nabla f(x_0)\|_2\}$ die Menge aller Richtungsvektoren mit der gleichen Norm wie $\nabla f(x_0)$. Wir zeigen, dass die Abbildung

$$S \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \partial_v f(x_0)$$

genau in $v = \nabla f(x_0)^T$ maximal wird. Nach Korollar 14.9 und mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, vgl. Satz 4.11 folgt

$$|\partial_v f(x_0)| = |\nabla f(x_0)v| = |\langle (\nabla f(x_0))^T, v \rangle| \leq \|\nabla f(x_0)\|_2 \|v\|_2 = \|\nabla f(x_0)\|_2^2$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\nabla f(x_0)^T$ und v linear abhängig sind, d. h. wenn $v = \pm \nabla f(x_0)^T$ gilt. Ohne Betragsstriche gilt für diese Richtungen v aber

$$\partial_v f(x_0) = \nabla f(x_0)v = \pm \nabla f(x_0) \cdot \nabla f(x_0)^T = \pm \|\nabla f(x_0)\|_2^2$$

und damit wird das eindeutige Maximum in $v = \nabla f(x_0)^T$ angenommen.

Wie schon für viele andere Dinge, so gilt auch für die totale Differenzierbarkeit, dass man sie komponentenweise nachprüfen kann.

Satz 14.11. *Eine Funktion $f = (f_1, f_2, \dots, f_p) : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ ist genau dann in $x_0 \in G$ total differenzierbar, wenn jede Koordinatenfunktion $f_j : G \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, p$, in x_0 total differenzierbar ist.*

Beweis. „ $\Rightarrow$ “ Nach Voraussetzung gilt

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + r(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Also gilt auch für jedes $j = 1, 2, \dots, p$

$$f_j(x_0 + h) = f_j(x_0) + (Df(x_0)h)_j + r_j(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_j(h)}{\|h\|} = 0,$$

da für die Nullfolge $(r(h)/\|h\|)$ von Vektoren auch jede Komponente gegen Null konvergiert. Nun ist die Abbildung, die h auf die j -te Komponente von $Df(x_0)h$ abbildet eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$, also ist f_j total differenzierbar in x_0 .

„ $\Leftarrow$ “ Nach Voraussetzung gilt für $j = 1, 2, \dots, p$ und alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $x_0 + h \in G$

$$f_j(x_0 + h) = f_j(x_0) + Df_j(x_0)h + r_j(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_j(h)}{\|h\|} = 0.$$

Wir setzen $Th := (Df_1(x_0)h, Df_2(x_0)h, \dots, Df_p(x_0)h)^T$, $h \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ und es gilt

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= (f_j(x_0 + h))_{j=1}^p = (f_j(x_0) + Df_j(x_0)h + r_j(h))_{j=1}^p \\ &= f(x_0) + Th + (r_j(h))_{j=1}^p \end{aligned}$$

mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(r_j(h))_{j=1}^p}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{r_j(h)}{\|h\|} \right)_{j=1}^p = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_j(h)}{\|h\|} \right)_{j=1}^p = 0.$$

Also ist f in x_0 total differenzierbar. □

14. Totale Differenzierbarkeit

Wir sind damit schon in einer ziemlich komfortablen Situation. Die totale Differenzierbarkeit verallgemeinert unser Konzept der Differenzierbarkeit in einer Variablen ins mehrdimensionale und wenn wir die Ableitungen konkret ausrechnen müssen, können wir uns an die einfach zu berechnenden partiellen Ableitungen halten, denn die totale Ableitung ergibt sich ja aus der Jacobi-Matrix. Es bleibt noch eine Frage zu klären: Wo bekommen wir die totale Differenzierbarkeit her? Oder anders formuliert: Können wir irgendwie schon an den partiellen Ableitungen sehen, ob eine Funktion total differenzierbar ist? Ja, es gibt ein sehr brauchbares hinreichendes Kriterium:

Satz 14.12. *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ stetig partiell differenzierbar, so ist f total differenzierbar in x_0 .*

Beweis. Zunächst einmal können wir uns dank Satz 14.11 auf den Fall $p = 1$ zurückziehen und wir können uns $\mathbb{R}^d$ mit der 1-Norm versehen.

Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(x_0) \subseteq G$ und $h \in U_\varepsilon(0)$ in $\mathbb{R}^d$. Dann setzen wir mit der Standardbasis $e_1, e_2, \dots, e_d$ des $\mathbb{R}^d$

$$z_0 := x_0 \quad \text{und} \quad z_k := z_{k-1} + h_k e_k = x_0 + \sum_{j=1}^k h_j e_j, \quad k = 1, 2, \dots, d.$$

Damit ist $z_d = x_0 + h_1 e_1 + h_2 e_2 + \dots + h_d e_d = x_0 + h$ und es gilt

$$\|x_0 - z_k\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^k h_j e_j \right\|_1 = \sum_{j=1}^k |h_j| \leq \sum_{j=1}^d |h_j| = \|h\|_1, \quad k = 1, 2, \dots, d. \quad (14.1)$$

Wegen $\|h\|_1 < \varepsilon$ sind damit alle $z_1, z_2, \dots, z_d$ in $U_\varepsilon(x_0)$. Also ist mit Hilfe einer Teleskopsumme und der Definition der z_k

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= f(z_d) - f(z_0) = \sum_{k=1}^d (f(z_k) - f(z_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^d (f(z_{k-1} + h_k e_k) - f(z_{k-1})). \end{aligned} \quad (14.2)$$

Wir betrachten nun die Funktionen $g_k(t) := f(z_{k-1} + t e_k)$ mit $t \in (-\delta, \delta)$, wobei $\delta > 0$ so klein gewählt ist, dass alle Argumente von f immer noch in $U_\varepsilon(x_0)$ liegen. Für diese Funktionen gilt

$$\begin{aligned} g'_k(t) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{g_k(t + \eta) - g_k(t)}{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(z_{k-1} + t e_k + \eta e_k) - f(z_{k-1} + t e_k)}{\eta} \\ &= \partial_k f(z_{k-1} + t e_k), \end{aligned}$$

da f nach Voraussetzung in $z_{k-1} + te_k$ partiell differenzierbar ist. Also können wir den eindimensionalen Mittelwertsatz anwenden und erhalten aus (14.2)

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \sum_{k=1}^d (g_k(h_k) - g_k(0)) = \sum_{k=1}^d g'_k(\tau_k)(h_k - 0) \\ &= \sum_{k=1}^d \partial_k f(z_{k-1} + \tau_k e_k) h_k \end{aligned}$$

mit τ_k jeweils zwischen 0 und h_k .

Nun können wir die totale Differenzierbarkeit von f zeigen. Wir wissen schon aus Satz 14.7: Wenn f in x_0 total differenzierbar ist, so muss die Ableitung durch $\nabla f(x_0) = (\partial_k f(x_0))_{k=1}^d$ gegeben sein. Wir schauen uns also den entsprechenden Rest an und erhalten mit unseren obigen Überlegungen

$$\begin{aligned} |r(h)| &:= |f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h| \\ &= \left| \sum_{k=1}^d \partial_k f(z_{k-1} + \tau_k e_k) h_k - \sum_{k=1}^d \partial_k f(x_0) h_k \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^d (\partial_k f(z_{k-1} + \tau_k e_k) - \partial_k f(x_0)) h_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^d |\partial_k f(z_{k-1} + \tau_k e_k) - \partial_k f(x_0)| |h_k|. \end{aligned}$$

Da $|h_k|/\|h\|_1 \leq \|h\|_1/\|h\|_1 = 1$ gilt, ist damit

$$\frac{|r(h)|}{\|h\|_1} \leq \sum_{k=1}^d |\partial_k f(z_{k-1} + \tau_k e_k) - \partial_k f(x_0)|.$$

Schicken wir nun h gegen Null, so geht auch jedes h_k gegen Null und da $|\tau_k| \leq |h_k|$ ist, muss dann auch τ_k gegen Null gehen. Außerdem geht dank (14.1) mit h gegen Null z_k gegen x_0 für jedes $k = 0, 1, \dots, d$. Wir bekommen also dank der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von f

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|r(h)|}{\|h\|_1} \leq \sum_{k=1}^d |\partial_k f(x_0 + 0e_k) - \partial_k f(x_0)| = 0$$

und damit die totale Differenzierbarkeit von f in x_0 . □

Bemerkung 14.13. Ist eine Funktion stetig partiell differenzierbar auf G , so ist sie nach obigem Satz auf G total differenzierbar und nach Satz 14.7 stimmt die Abbildungsmatrix der totalen Ableitung mit der Jacobi-Matrix überein, hängt also auch stetig von $x \in G$ ab. In diesem Sinne müssen wir bei stetig differenzierbaren Funktionen nicht zwischen partieller und totaler Differenzierbarkeit unterscheiden. Das rechtfertigt im Nachhinein die Notation aus Definition 13.14(c).

14. Totale Differenzierbarkeit

Es ist sinnvoll, zum Abschluss dieses Kapitels die verschiedenen Beziehungen zwischen totaler, partieller und Richtungs-Differenzierbarkeit noch einmal zusammenzufassen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{stetig partiell differenzierbar} & \implies & \text{total differenzierbar} & \implies & \text{stetig} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \text{partiell differenzierbar} & \iff & \text{alle Richtungsabl. existieren} & & \end{array}$$

Wichtig ist noch zu bemerken, dass bei *allen* Implikationen in diesem Diagramm die Rückrichtung im Allgemeinen falsch ist.

15. Ableitungsregeln und der Mittelwertsatz

Grundsätzlich haben wir die praktische Berechnung der Ableitungen durch die partiellen Ableitungen schon auf den eindimensionalen Fall zurückgespielt. Trotzdem lohnt es sich die relevanten Ableitungsregeln in die mehrdimensionale Sprache zu übersetzen. Insbesondere die Kettenregel ist in dieser Form oft mit Gewinn zu gebrauchen, während der Rückgriff auf die eindimensionale Kettenregel, obgleich natürlich möglich, meist zu einem Indexdschungel führt.

Hier und im folgenden werden wir oft nur von „differenzierbaren“ Funktionen sprechen, ohne den Zusatz „partiell“ oder „total“. Damit ist dann immer totale Differenzierbarkeit gemeint, denn mit reiner partieller Differenzierbarkeit kann man normalerweise nichts anfangen. Der Begriff „stetig differenzierbar“ ist sogar unproblematisch, vgl. Bemerkung 14.13.

Auch in diesem Abschnitt sei wieder $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Satz 15.1 (Kettenregel). *Es seien $H \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, sowie $g : G \rightarrow H$ und $f : H \rightarrow \mathbb{R}^q$ Funktionen, so dass g in $x_0 \in G$ und f in $g(x_0)$ differenzierbar sind. Dann ist auch die Funktion $f \circ g : G \rightarrow \mathbb{R}^q$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0))Dg(x_0),$$

bzw. in Matrixnotation

$$J_{f \circ g}(x_0) = J_f(g(x_0)) \cdot J_g(x_0).$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} g(x_0 + h) &= g(x_0) + Dg(x_0)h + r_g(h) && \text{mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_g(h)}{\|h\|} = 0 \\ f(g(x_0) + k) &= f(g(x_0)) + Df(g(x_0))k + r_f(k) && \text{mit } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{r_f(k)}{\|k\|} = 0 \end{aligned}$$

für $h \in \mathbb{R}^d$ mit $x_0 + h \in G$ und $k \in \mathbb{R}^p$ mit $g(x_0) + k \in H$. Wir betrachten nun speziell

$$k(h) := g(x_0 + h) - g(x_0) = Dg(x_0)h + r_g(h). \quad (15.1)$$

Man beachte, dass $\lim_{h \rightarrow 0} k(h) = 0$ ist, denn g ist in x_0 stetig. Dank der Offenheit von H können wir damit insbesondere das h so klein wählen, dass auch $g(x_0) +$

15. Ableitungsregeln und der Mittelwertsatz

$k(h) \in H$ liegt. Nun folgt

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x_0 + h) &= f(g(x_0 + h)) = f(g(x_0) + Dg(x_0)h + r_g(h)) = f(g(x_0) + k(h)) \\
 &= f(g(x_0)) + Df(g(x_0))k(h) + r_f(k(h)) \\
 &= f(g(x_0)) + Df(g(x_0))(Dg(x_0)h + r_g(h)) + r_f(k(h)) \\
 &= f(g(x_0)) + Df(g(x_0))Dg(x_0)h + Df(g(x_0))r_g(h) + r_f(k(h)) \\
 &=: f(g(x_0)) + Df(g(x_0))Dg(x_0)h + r(h).
 \end{aligned}$$

Wenn wir nun zeigen können, dass $r(h)/\|h\|$ für $h \rightarrow 0$ gegen Null geht, so sind wir fertig. Wegen der Stetigkeit der linearen Abbildung $Df(g(x_0))$ und dank unseres Wissens über r_g gilt schonmal

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{Df(g(x_0)) \frac{r_g(h)}{\|h\|}}_{\rightarrow 0} + \frac{r_f(k(h))}{\|h\|} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_f(k(h))}{\|k(h)\|} \frac{\|k(h)\|}{\|h\|}. \quad (15.2)$$

Außerdem ist

$$\frac{\|k(h)\|}{\|h\|} = \frac{\|Dg(x_0)h + r_g(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|Dg(x_0)h\|}{\|h\|} + \frac{\|r_g(h)\|}{\|h\|}.$$

Die Stetigkeit der linearen Abbildung $Dg(x_0)$ liefert nun, dass $\|Dg(x_0)h\|/\|h\|$ für $h \in \mathbb{R}^d$ beschränkt ist, vgl. Satz 8.12. Außerdem konvergiert $r_g(h)/\|h\|$ für $h \rightarrow 0$ gegen Null und ist damit insbesondere in einer Umgebung von Null beschränkt. Zusammengenommen ist also der Ausdruck $\|k(h)\|/\|h\|$ für h in einer Umgebung von Null durch ein $C \geq 0$ beschränkt und wir bekommen aus (15.2)

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} C \frac{\|r_f(k(h))\|}{\|k(h)\|} = C \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|r_f(k)\|}{\|k\|} = 0. \quad \square$$

Beispiel 15.2. Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3y + xe^y$, vgl. Beispiel 13.15, und interessieren uns für

$$\frac{d}{dt}(f(t^2, t^3)).$$

Damit ist gemeint, dass wir die ganz normale eindimensionale Ableitung der Funktion $t \mapsto f(t^2, t^3)$ suchen. Wir setzen also $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t^2, t^3)^T$ und berechnen mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(f(t^2, t^3)) = (f \circ g)'(t) = Df(g(t))Dg(t) = \nabla f(g(t)) \cdot J_g(t).$$

Es ist $J_g(t) = (2t, 3t^2)^T$ und in Beispiel 13.15 haben wir

$$\nabla f(x, y) = (3x^2y + e^y, x^3 + xe^y)$$

berechnet. Das liefert zusammen mit $(x, y) = g(t) = (t^2, t^3)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f(t^2, t^3)) &= (3t^4t^3 + e^{t^3}, t^6 + t^2e^{t^3}) \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} = 6t^8 + 2te^{t^3} + 3t^8 + 3t^4e^{t^3} \\ &= 9t^8 + (2t + 3t^4)e^{t^3}.\end{aligned}$$

Aus der Kettenregel kann man auch bequem die anderen bekannten Ableitungsregeln gewinnen. Wir führen hier beispielhaft die Linearität aus. Die Produktregel verbleibt dann als Übungsaufgabe.

Satz 15.3 (Linearität der Ableitung). *Sind $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ differenzierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha f + \beta g$ in x_0 differenzierbar und es gilt $D(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0)$.*

Beweis. Wir betrachten $h : G \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ und $T : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit

$$h(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}, \quad x \in G \quad \text{und} \quad T(u, v) = \alpha u + \beta v, \quad u, v \in \mathbb{R}^p.$$

Dann ist $T(h(x)) = \alpha h_1(x) + \beta h_2(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ für alle $x \in G$. Weiter ist h nach Voraussetzung und dank der Unterstützung von Satz 14.11 differenzierbar in x_0 mit $Dh(x_0) = (Df(x_0), Dg(x_0))^T$ und schließlich ist T als lineare Abbildung differenzierbar in $h(x_0)$ mit $DT(h(x_0)) = T$, vgl. Beispiel 14.4 (a). Nach der Kettenregel gilt also

$$\begin{aligned}D(\alpha f + \beta g)(x_0) &= D(T \circ h)(x_0) = DT(h(x_0))Dh(x_0) = T(Df(x_0), Dg(x_0)) \\ &= \alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0).\end{aligned} \quad \square$$

Satz 15.4 (Produktregel). *Sind $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in G$, so ist auch fg in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$D(fg)(x_0) = f(x_0)Dg(x_0) + g(x_0)Df(x_0).$$

Als nächstes nehmen wir uns den Mittelwertsatz vor. Um diesen auf Funktionen mehrerer Veränderlicher zu übertragen, müssen wir zunächst ein geeignetes „zwischen“ in $\mathbb{R}^d$ definieren.

Definition 15.5. Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ bezeichnet

$$\overline{ab} := \{a + \lambda(b - a) : \lambda \in [0, 1]\}$$

die Verbindungsstrecke von a nach b .

Damit gilt dann der folgende Satz.

Satz 15.6 (Mittelwertsatz). *Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Sind $a, b \in G$ so, dass $\overline{ab} \subseteq G$ gilt, so gibt es ein $\xi \in \overline{ab} \setminus \{a, b\}$ mit*

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)(b - a).$$

15. Ableitungsregeln und der Mittelwertsatz

Beweis. Wir definieren $g : [0, 1] \rightarrow G$ durch $g(\lambda) = a + \lambda(b - a)$ und $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ als $\varphi = f \circ g$. Da g mit $Dg(\lambda) = b - a$ differenzierbar ist, ist auch φ differenzierbar und es gilt nach der Kettenregel in Satz 15.1

$$\varphi'(\lambda) = \nabla f(g(\lambda)) \cdot Dg(\lambda) = \nabla f(g(\lambda)) \cdot (b - a), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Auf diese Funktion können wir nun den Mittelwertsatz für Funktionen in einer Variablen, Satz I.23.5, anwenden. Es gibt also ein $\tau \in (0, 1)$, für das

$$f(b) - f(a) = f(g(1)) - f(g(0)) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)(1 - 0) = \nabla f(g(\tau))(b - a)$$

gilt. Mit $\xi := g(\tau)$ folgt die Behauptung. $\square$

Warnung 15.7. Der Mittelwertsatz gilt nur für reellwertige Funktionen. Ist der Zielraum mehrdimensional, so ist eine entsprechende Aussage im Allgemeinen falsch!

Oft nutzt man den Mittelwertsatz allerdings nicht um eine Gleichheit zu bekommen, sondern ist nur an einer Abschätzung interessiert. In diesem Fall kann man sich ein Substitut für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^p$ bauen, das wir nun betrachten wollen.

Satz 15.8 (Schränkensatz). *Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar. Gibt es ein $L \geq 0$ mit $\|J_f(x)\| \leq L$ für alle $x \in G$, so gibt es ein $C \geq 0$ mit*

$$\|f(a) - f(b)\| \leq CL\|a - b\| \quad \text{für alle } a, b \in G \text{ mit } \overline{ab} \subseteq G.$$

Beweis. Im Satz sind die verwendeten Normen in $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^{p \times d}$ bewusst nicht spezifiziert. Wir wählen hier in $\mathbb{R}^{p \times d}$ die Zeilensummennorm aus Übungsaufgabe 8.17 und zeigen

$$\|f(a) - f(b)\|_\infty \leq L\|a - b\|_\infty, \quad (15.3)$$

die allgemeine Aussage im Satz folgern wir dann mal wieder daraus, dass in den betrachteten Räumen jeweils alle Normen äquivalent sind, vgl. Satz 7.11.

Seien $a, b \in G$ mit $\overline{ab} \subseteq G$. Dann gilt mit dem Mittelwertsatz 15.6, angewandt auf die einzelnen reellwertigen Koordinatenfunktionen $f_1, f_2, \dots, f_p$ mit $\xi_j \in \overline{ab}$, $j = 1, 2, \dots, p$,

$$\begin{aligned} \|f(a) - f(b)\|_\infty &= \max_{j=1}^p |f_j(a) - f_j(b)| = \max_{j=1}^p |\nabla f_j(\xi_j)(a - b)| \\ &= \max_{j=1}^p \left| \sum_{k=1}^d \partial_k f_j(\xi_j)(a_k - b_k) \right| \leq \max_{j=1}^p \sum_{k=1}^d |\partial_k f_j(\xi_j)| |a_k - b_k| \\ &\leq \|a - b\|_\infty \max_{j=1}^p \sum_{k=1}^d |\partial_k f_j(\xi_j)| \leq \|a - b\|_\infty \max_{j=1}^p \|J_f(\xi_j)\|_{ZS} \\ &\leq L\|a - b\|_\infty. \end{aligned}$$

Für die allgemeine Aussage nutzen wir die Äquivalenz der Normen und erhalten Konstanten $C_1, C_2, C_3 \geq 0$ mit $\|J_f(x)\|_{ZS} \leq C_1 \|J_f(x)\|$ für alle $x \in G$ und mit

$$\|f(a) - f(b)\| \leq C_2 \|f(a) - f(b)\|_\infty \leq C_2 C_1 L \|a - b\|_\infty \leq C_3 C_2 C_1 L \|a - b\|. \quad \square$$

Bemerkung 15.9. Wir halten die Beobachtung aus obigem Beweis explizit fest: Für die ∞ -Normen auf $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^d$ und die Zeilensummennorm auf $\mathbb{R}^{p \times d}$ können wir $C = 1$ in Satz 15.8 wählen. Für konkrete Rechnungen, in denen es auf die Größe der Konstanten wirklich ankommt, ist das zuweilen sehr praktisch.

Beispiel 15.10. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\arctan(x+1)}{(\sin(y)+3)^2} \\ \frac{1}{4} e^{\sin(x+y)/3} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Koordinatenfunktionen f_1 und f_2

$$\nabla f_1(x, y) = \left(\frac{1}{(\sin(y)+3)^2} \cdot \frac{1}{1+(x+1)^2}, \frac{-2 \arctan(x+1) \cos(y)}{(\sin(y)+3)^3} \right)$$

und

$$\begin{aligned} \nabla f_2(x, y) &= \frac{1}{4} \left(e^{\sin(x+y)/3} \frac{1}{3} \cos(x+y), e^{\sin(x+y)/3} \frac{1}{3} \cos(x+y) \right) \\ &= \frac{1}{12} e^{\sin(x+y)/3} \cos(x+y) (1, 1). \end{aligned}$$

Nun gilt für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\nabla f_1(x, y)\|_1 &= \frac{1}{(\sin(y)+3)^2} \frac{1}{1+(x+1)^2} + \frac{2 |\arctan(x+1)| |\cos(y)|}{(\sin(y)+3)^3} \\ &\leq \frac{1}{(-1+3)^2} \cdot 1 + \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1}{(-1+3)^3} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \leq \frac{1}{4} + \frac{4}{8} = \frac{3}{4}, \\ \|\nabla f_2(x, y)\|_1 &= \frac{1}{12} e^{\sin(x+y)/3} |\cos(x+y)| \|(1, 1)\|_1 \\ &\leq \frac{1}{12} e^{1/3} \cdot 1 \cdot 2 \leq \frac{1}{12} 8^{1/3} \cdot 2 = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

also ist für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\|J_f(x, y)\|_{ZS} = \max\{\|\nabla f_1(x, y)\|_1, \|\nabla f_2(x, y)\|_1\} \leq \max\{3/4, 1/3\} = 3/4.$$

und das liefert mit (15.3) für alle $a, b \in \mathbb{R}^2$

$$\|f(a) - f(b)\|_\infty \leq \frac{3}{4} \|a - b\|_\infty,$$

15. Ableitungsregeln und der Mittelwertsatz

wobei die Bedingung $\overline{ab} \subseteq \mathbb{R}^2$ natürlich immer erfüllt ist.

Wir haben also gezeigt, dass f auf $\mathbb{R}^2$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $3/4$. Und was soll das nun? Damit ist f eine strikte Kontraktion auf dem Banachraum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, also hat f nach dem Banach'schen Fixpunktsatz 6.15 genau einen Fixpunkt in $\mathbb{R}^2$. Wir haben damit gezeigt, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x(\sin(y) + 3)^2 &= \arctan(x + 1) \\ 4y &= e^{\sin(x+y)/3}\end{aligned}$$

genau eine Lösung in $\mathbb{R}^2$ hat. Hätten Sie das dem Gleichungssystem angesehen?

16. Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

Auch in diesem Kapitel sei grundsätzlich $G \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge.

Mehrfache partielle Ableitungen haben wir schon in Definition 13.14 kennengelernt. Im Prinzip sind auch höhere totale Ableitungen nicht komplizierter, es wird nur etwas unübersichtlich rekursiv, denn für eine ausreichend oft stetig partiell differenzierbare Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ ist nach Definition 14.1, die totale Ableitung Df eine Funktion von G nach $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$. Dementsprechend gilt für deren totale Ableitung dann $D(Df) : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p))$ und für die dritte totale Ableitung gilt dann $DD Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)))$ für jedes $x_0 \in G$.

Das gibt zwar ein schönes Strickmuster, aber so richtig viel darunter vorstellen kann man sich nicht. Es gibt zum Glück noch eine andere Sichtweise auf die Sache, die wir hier anhand der zweiten totalen Ableitung einer reellwertigen Funktion entwickeln wollen.

Es sei also nun $f \in C^2(G, \mathbb{R})$. Die zweite Ableitung $D(Df)(x_0)$ von f an einer Stelle x_0 ist ein Element von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}))$, also ist für jedes $v \in \mathbb{R}^d$ die Anwendung dieser Ableitung auf v , d. h. $D(Df)(x_0)v$, ein Element von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und die Zuordnung $v \mapsto D(Df)(x_0)v$ ist linear in v . Wenn wir diese lineare Abbildung wiederum auf ein $u \in \mathbb{R}^d$ anwenden, so ist

$$[D(Df)(x_0)v]u \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad u \mapsto [D(Df)(x_0)v]u \text{ linear in } u.$$

Für ein fixes x_0 ist damit $(u, v) \mapsto [D(Df)(x_0)v]u$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$, die in u und v linear ist, also eine Bilinearform.

Weiter gilt nach Satz 14.6

$$[D(Df)(x_0)v]u = [D(\partial_v f)(x_0)]u = \partial_u \partial_v f(x_0).$$

Wir können also die zweite totale Ableitung von f an der Stelle x_0 als die folgende Bilinearform auffassen:

$$D^2 f(x_0) : \begin{cases} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto \partial_u \partial_v f(x_0). \end{cases}$$

Damit ordnet dann die zweite Ableitungsfunktion $D^2 f$ jedem $x_0 \in G$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^d$ zu.

16. Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

Diese Bilinearform kann man auch mit Hilfe einer Matrix darstellen. Es gilt für alle $x_0 \in G$ und für alle $u, v \in \mathbb{R}^d$ nach Korollar 14.9

$$\begin{aligned} [D^2 f(x_0)](u, v) &= \partial_u \partial_v f(x_0) = [\nabla \partial_v f(x_0)]u = \sum_{j=1}^d \partial_j \partial_v f(x_0) u_j \\ &= \sum_{j=1}^d \partial_j (\nabla f(x_0) \cdot v) u_j = \sum_{j=1}^d \partial_j \sum_{k=1}^d \partial_k f(x_0) v_k u_j \\ &= \sum_{j,k=1}^d \partial_j \partial_k f(x_0) v_k u_j = u^T (\partial_j \partial_k f(x_0))_{j,k=1}^d v. \end{aligned}$$

Die Matrix in diesem Ausdruck bekommt nun einen Namen.

Definition 16.1. Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar in $x_0 \in G$. Dann heißt die $d \times d$ -Matrix

$$H_f(x_0) := (\partial_j \partial_k f(x_0))_{j,k=1}^d = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) & \dots & \partial_1 \partial_d f(x_0) \\ \partial_2 \partial_1 f(x_0) & \partial_2^2 f(x_0) & \dots & \partial_2 \partial_d f(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_d \partial_1 f(x_0) & \partial_d \partial_2 f(x_0) & \dots & \partial_d^2 f(x_0) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f in x_0 .

Bemerkung 16.2. (a) Ist f sogar zweimal stetig partiell differenzierbar, also in $C^2(G, \mathbb{R})$, so ist die Hesse-Matrix dank des Satzes von Schwarz 13.16 für jedes $x_0 \in G$ eine symmetrische Matrix.

(b) In ähnlicher Weise wie oben kann man für eine Funktion $f \in C^k(G, \mathbb{R})$ die k -te Ableitung $D^k f(x_0)$ als k -Linearform in $\mathbb{R}^d$ auffassen mit

$$D^k f(x_0)(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}) = \partial_{v^{(1)}} \partial_{v^{(2)}} \dots \partial_{v^{(k)}} f(x_0).$$

für $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{R}^d$.

Das Notieren von Ableitungen beliebig hoher Ordnung ist mit den bisher betrachteten Mitteln sehr mühsam und schnell unübersichtlich. Deshalb wollen wir nun mit der Multiindex-Schreibweise ein notationelles Hilfsmittel dafür kennenlernen.

Definition 16.3. (a) Ein Tupel $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ heißt Multiindex.

(b) Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ schreibt man

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d && (\text{Betrag von } \alpha) \\ \alpha! &:= \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!. \end{aligned}$$

Der Betrag wird, vor allem im Zusammenhang mit Ableitungen, oft auch Ordnung des Multiindex genannt.

(c) Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex der Ordnung $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(G, \mathbb{R}^p)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ so schreibt man kurz

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$$

$$D^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} f$$

und ist $0 = (0, 0, \dots, 0)$ der Null-Multiindex, so setzen wir wieder $D^0 f := f$.

Beispiel 16.4. Für $\alpha = (3, 5, 7, 0, 6)$ ist

$$|\alpha| = 3 + 5 + 7 + 6 = 21,$$

$$\alpha! = 3! \cdot 5! \cdot 7! \cdot 6!,$$

$$D^\alpha f = \partial_1^3 \partial_2^5 \partial_3^7 \partial_5^6 f,$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix}^\alpha = 5^3 \cdot 3^5 \cdot (-1)^7 \cdot 1^6 = -5^3 \cdot 3^5.$$

Bemerkung 16.5. Die Multiindexschreibweise ist für Ableitungen nur dann sinnvoll, wenn stetige Differenzierbarkeit vorliegt, da im Multiindex keine Information darüber enthalten ist, in welcher Reihenfolge abgeleitet werden soll und der Satz von Schwarz 13.16 die Unabhängigkeit der Ableitung von der Reihenfolge der partiellen Ableitungen nur bei stetiger Differenzierbarkeit garantieren kann.

Wir wollen die Multiindizes nun einmal bei der Arbeit sehen und formulieren und beweisen mit ihrer Hilfe eine „Multinomialformel“, also eine Binomialformel für mehrere Summanden unter der Potenz.

Lemma 16.6. Für alle $a \in \mathbb{R}^d$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_d)^\ell = \ell! \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{a^\alpha}{\alpha!}.$$

Die Schreibweise $\sum_{|\alpha|=\ell}$ bedeutet hier, dass über alle möglichen Multiindizes vom Betrag ℓ summiert wird.

Beweis. Wir beweisen die Formel per Induktion über d . Für den Induktionsanfang stellen wir fest, dass es für $d = 1$ nur einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^1$ mit $|\alpha| = \ell$ gibt, nämlich (ℓ) . Also ist

$$\ell! \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{a^\alpha}{\alpha!} = \ell! \frac{a^\ell}{\ell!} = a^\ell = a_1^\ell$$

16. Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

und die Behauptung ist für $d = 1$ gezeigt.

Für den Induktionsschluss von d nach $d + 1$ gehen wir davon aus, dass die Behauptung für d gilt. Im Folgenden zerlegen wir Multiindizes α aus $\mathbb{N}_0^{d+1}$ als $\alpha = (\alpha', \alpha_{d+1})$ mit $\alpha' \in \mathbb{N}_0^d$ und genauso $a \in \mathbb{R}^{d+1}$ als $a = (a', a_{d+1})$ mit $a' \in \mathbb{R}^d$. Es sei nun $a \in \mathbb{R}^{d+1}$ und $\ell \in \mathbb{N}$. Wir setzen $b := a_1 + a_2 + \dots + a_d$. Dann gilt mit der Binomialformel

$$(a_1 + \dots + a_d + a_{d+1})^\ell = (b + a_{d+1})^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} a_{d+1}^j b^{\ell-j}.$$

Nun können wir für den Ausdruck $b^{\ell-j}$ die Induktionsvoraussetzung verwenden und erhalten

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} a_{d+1}^j (\ell-j)! \sum_{|\alpha'|=\ell-j} \frac{a'^{\alpha'}}{\alpha'!} \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{|\alpha'|=\ell-j} \frac{\ell!}{j!} \frac{a'^{\alpha'} a_{d+1}^j}{\alpha'!}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\{(\alpha', j) \in \mathbb{N}_0^{d+1} : |\alpha'| = \ell - j, j = 0, 1, \dots, \ell\} = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^{d+1} : |\alpha| = \ell\},$$

also folgt durch Ersetzung von j durch α_{d+1}

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_d + a_{d+1})^\ell &= \sum_{\alpha_{d+1}=0}^{\ell} \sum_{|\alpha'|=\ell-\alpha_{d+1}} \frac{\ell!}{\alpha_{d+1}!} \frac{a'^{\alpha'} a_{d+1}^{\alpha_{d+1}}}{\alpha'!} \\ &= \ell! \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{a^\alpha}{\alpha!}. \end{aligned} \quad \square$$

Wenn Sie das immer noch sehr unübersichtlich finden – und das dürfen Sie mit gutem Gewissen – dann versuchen Sie mal dieses Lemma ohne die Verwendung von Multiindizes zu formulieren und zu beweisen!

Ein anderer praktischer Nutzen von Multiindizes ergibt sich beim Umgang mit Polynomen in mehreren Variablen. Ein allgemeines Polynom vom Grad $m \in \mathbb{N}$ in d Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$ können wir nun einfach hinschreiben als

$$p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$$

mit *Koeffizienten* $a_\alpha \in \mathbb{K}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq m$. Das hat den übersichtlichen Vorteil, dass das nun, bis auf die ungewohnte Angabe des Summationsbereichs unter dem Summenzeichen, genauso aussieht, wie wir das in einer Variablen gewohnt sind. Machen Sie sich aber unbedingt klar, dass man auf diese Weise tatsächlich alle Polynome in d Variablen erwischt!

Definition 16.7. Sei $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ ein Polynom in d Variablen wie oben. Dann heißt

$$p(D) : \begin{cases} C^m(G, \mathbb{R}) & \rightarrow C(G, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto p(D)f := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha f \end{cases}$$

linearer Differentialoperator der Ordnung m mit Koeffizienten a_α , $|\alpha| \leq m$.

Bemerkung 16.8. (a) Für jedes Polynom p ist $p(D)$ wie oben angegeben eine lineare Abbildung. Dahinter steckt nichts als die Linearität der Differentiation.

(b) Der Übergang vom Polynom zum zugehörigen Differentialoperator entsteht formal, indem jeweils für $j = 1, 2, \dots, d$ die j -te Variable ξ_j durch die partielle Ableitung ∂_j ersetzt wird. Diese Aktion verträgt sich brav mit den gängigen Rechenoperationen für Polynome: Überzeugen Sie sich, dass

$$(p + q)(D) = p(D) + q(D) \quad \text{und} \quad (p \cdot q)(D) = p(D)q(D)$$

für alle Polynome p, q gilt.

Beispiel 16.9. (a) Der wichtigste Differentialoperator ist gegeben durch

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_d^2 = \sum_{j=1}^d \partial_j^2.$$

Dieser heißt *Laplace-Operator* oder kurz nur *Laplace* und entsteht aus dem Polynom $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_d^2$.

Man beachte, dass für jede Funktion $f \in C^2(G, \mathbb{R})$ gilt $\Delta f = \text{spur} H_f$.

Dieser Operator taucht in vielen für Physik, Mechanik, Wirtschaft, Chemie, ... fundamental wichtigen Differentialgleichungen auf, z.B.

$$\text{Wellengleichung: } \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \Delta_x u(t, x),$$

$$\text{Wärmeleitungsgleichung: } \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \Delta_x u(t, x),$$

$$\text{Schrödingergleichung: } \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = i \Delta_x u(t, x).$$

(b) Das zweite Beispiel ist bei weitem nicht so prominent, wir brauchen es aber gleich im Beweis des Satzes von Taylor.

Es sei $h \in \mathbb{R}^d$ ein fix gewählter Vektor. Dann ist

$$p(\xi) := \langle h, \xi \rangle = \sum_{j=1}^d h_j \xi_j$$

16. Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

ein Polynom vom Grad 1 (bzw. das Nullpolynom für $h = 0$). Dieses liefert uns den linearen Differentialoperator

$$\langle h, \nabla \rangle := p(D) = \sum_{j=1}^d h_j \partial_j.$$

Wenden wir diesen nun $\ell \in \mathbb{N}$ mal auf eine Funktion $f \in C^\ell(G, \mathbb{R})$ an, so gilt mit Hilfe von Lemma 16.6 und Bemerkung 16.8(b)

$$\begin{aligned} \langle h, \nabla \rangle^\ell f &= (h_1 \partial_1 + h_2 \partial_2 + \dots + h_d \partial_d)^\ell f = \ell! \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{(h_1 \partial_1, h_2 \partial_2, \dots, h_d \partial_d)^\alpha}{\alpha!} f \\ &= \ell! \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{h_1^{\alpha_1} \partial_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \partial_2^{\alpha_2} \dots h_d^{\alpha_d} \partial_d^{\alpha_d}}{\alpha!} f = \ell! \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{h^\alpha D^\alpha}{\alpha!} f. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Eigentlich sollte es in diesem Abschnitt ja um den Satz von Taylor gehen und dem wollen wir uns nun auch zuwenden. Alle bisherigen Vorbereitungen über Multiindizes und lineare Differenzialoperatoren werden dabei zusammenfließen. Zunächst erinnern wir uns an die eindimensionale Situation: Ist $f \in C^{m+1}(I)$ für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und sind $x, x_0 \in I$, so gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^m \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + R_{m+1}f(x, x_0),$$

wobei wir für das Restglied $R_{m+1}f(x, x_0)$ die beiden Darstellungen

$$R_{m+1}f(x, x_0) = \begin{cases} \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1}, & \text{für ein } \xi \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x, \\ \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt \end{cases}$$

hergeleitet hatten.

Satz 16.10 (Taylor). *Seien $x_0, x \in G$ mit $\overline{x_0 x} \subseteq G$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C^{m+1}(G, \mathbb{R})$. Dann gibt es ein $\xi \in \overline{x_0 x}$ mit*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \\ &=: T_m f(x, x_0) + R_{m+1}f(x, x_0). \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $h = (h_j)_{j=1}^d := x - x_0 \in \mathbb{R}^d$. Damit betrachten wir die Funktion $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(t) := f(x_0 + th)$, $t \in [0, 1]$. Dann ist $F \in C^{m+1}([0, 1])$ und es gilt für $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt} (f(x_0 + th)) = \nabla f(x_0 + th) \cdot h = \sum_{j=1}^d h_j \partial_j f(x_0 + th) \\ &= \langle h, \nabla \rangle f(x_0 + th) \end{aligned}$$

und genauso

$$F''(t) = \frac{d}{dt}(\langle h, \nabla \rangle f(x_0 + th)) = \langle h, \nabla \rangle (\langle h, \nabla \rangle f)(x_0 + th) = \langle h, \nabla \rangle^2 f(x_0 + th),$$

bzw. induktiv für $\ell = 1, 2, \dots, m+1$

$$F^{(\ell)}(t) = \langle h, \nabla \rangle^\ell f(x_0 + th).$$

Wir wenden nun auf F den eindimensionalen Satz von Taylor I.27.3 mit Entwicklungspunkt 0 an und erhalten für ein $\tau \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + h) = F(1) = \sum_{\ell=0}^m \frac{F^{(\ell)}(0)}{\ell!} (1-0)^\ell + \frac{F^{(m+1)}(\tau)}{(m+1)!} (1-0)^{m+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^m \frac{\langle h, \nabla \rangle^\ell f(x_0)}{\ell!} + \frac{\langle h, \nabla \rangle^{m+1} f(x_0 + \tau h)}{(m+1)!}. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun unsere Überlegungen aus (16.1) in Beispiel 16.9(b), so liefert das mit $\xi := x_0 + \tau h = x_0 + \tau(x - x_0) \in \overline{x_0 x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\ell=0}^m \frac{1}{\ell!} \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{h^\alpha D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} + \frac{1}{(m+1)!} (m+1)! \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{h^\alpha D^\alpha f(\xi)}{\alpha!} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 16.11. (a) Das Polynom $T_m f(x, x_0)$ heißt dann natürlich wieder *Taylorpolynom* der Ordnung m von f in x_0 und $R_{m+1} f(x, x_0)$ ist das zugehörige *Restglied* in *Lagrange-Darstellung*.

(b) Genau wie in einer Dimension fällt der Satz von Taylor für $m = 0$ mit dem Mittelwertsatz zusammen.

(c) Am häufigsten wird der Satz von Taylor im Fall $m = 1$ verwendet. Dann lässt sich die Formel recht schön so schreiben:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1 f(x, x_0) + R_2 f(x, x_0) \\ &= f(x_0) + \sum_{j=1}^d \partial_j f(x_0) (x_j - x_{0,j}) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \partial_j \partial_k f(\xi) (x_j - x_{0,j}) (x_k - x_{0,k}) \\ &= f(x_0) + \nabla f(x_0) (x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T H_f(\xi) (x - x_0) \end{aligned}$$

mit einem $\xi \in \overline{x_0 x}$.

16. Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

Übungsaufgabe 16.12. Ist $f \in C^{m+1}(G, \mathbb{R})$ und $x_0 \in G$, so ist die Approximation von $T_m f(x, x_0)$ an f in der Nähe von x_0 von Ordnung m , d. h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_m f(x, x_0)}{\|x - x_0\|^m} = 0.$$

Beispiel 16.13. Wir suchen das Taylorpolynom 2. Ordnung von

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{x+2y}{2}\right) + \cos\left(\frac{2x-y}{2}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$. Es ist nach einiger Ableiterei

$$\begin{aligned} & T_2 f((x, y), (0, 0)) \\ &= f(0, 0) + \frac{f_x(0, 0)}{1!}(x-0) + \frac{f_y(0, 0)}{1!}(y-0) \\ &\quad + \frac{f_{xx}(0, 0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f_{xy}(0, 0)}{1!1!}(x-0)(y-0) + \frac{f_{yy}(0, 0)}{2!}(y-0)^2 \\ &= \dots = 1 + \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{8}y^2. \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch die bekannten Reihen von Sinus und Cosinus nutzen:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{x+2y}{2}\right)^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{2x-y}{2}\right)^{2k} \\ &= \frac{x+2y}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{x+2y}{2}\right)^3 + \dots + 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2x-y}{2}\right)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{8}(2x-y)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{8}y^2 + \dots, \end{aligned}$$

wobei die Auslassungspunktchen Terme bezeichnen, die mindestens vom Grad 3 sind.

Zur Information ist hier noch eine Version des Satzes von Taylor mit Integralrestglied in mehreren Variablen aufgeführt.

Satz 16.14 (Satz von Taylor mit Integralrestglied). *Es seien $x_0, x \in G$ so, dass $\overline{x_0 x} \subseteq G$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C^{m+1}(G, \mathbb{R})$. Dann gilt mit $h := x - x_0$*

$$f(x) = T_m f(x, x_0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} \langle h, \nabla \rangle^{m+1} f(x_0 + th) dt.$$

17. Lokale Extrema

Wir gehen weiter im Programm unsere Ergebnisse aus der Analysis I mehrdimensional zu erweitern und wenden uns dem Auffinden lokaler Extrema mithilfe der Differentialrechnung zu. In diesem Abschnitt sei grundsätzlich $G \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition 17.1. (a) Die Funktion f hat in $x_0 \in G$ ein lokales (oder relatives) Maximum, wenn es eine Umgebung $U \subseteq G$ von x_0 gibt mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U$.

(b) Die Funktion f hat in $x_0 \in G$ ein lokales (oder relatives) Minimum, wenn es eine Umgebung $U \subseteq G$ von x_0 gibt mit $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U$.

(c) Die Funktion f hat in $x_0 \in G$ ein lokales (oder relatives) Extremum, wenn f in x_0 ein lokales Maximum oder Minimum besitzt.

Für das Vorliegen eines lokalen Extremums gibt es auch in mehreren Variablen das übliche notwendige Kriterium. Man beachte, dass dafür eine sehr schwache Differenzierbarkeitsbedingung schon ausreicht.

Satz 17.2 (Notwendige Bedingung für Extrema). Ist f partiell differenzierbar in $x_0 \in G$ und hat f dort ein lokales Extremum, so gilt $\nabla f(x_0) = 0$.

Beweis. Es sei $e_1, e_2, \dots, e_d$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^d$. Da G offen ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $x_0 + te_j \in G$ für alle $j = 1, 2, \dots, d$ und alle $t \in [-\delta, \delta]$.

Wir betrachten nun für $j = 1, 2, \dots, d$ die Funktionen $g_j : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_j(t) = f(x_0 + te_j)$, d. h. g_j entspricht der Einschränkung von f auf eine kurze Strecke durch den Punkt x_0 in Richtung des j -ten Koordinateneinheitsvektors, wobei $g(0) = f(x_0)$ ist. Damit hat g_j in Null ebenfalls ein lokales Extremum.

Außerdem ist g_j nach Voraussetzung differenzierbar in Null mit

$$g'_j(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_j(t) - g_j(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t} = \partial_j f(x_0).$$

Nach dem bekannten eindimensionalen Resultat über kritische Punkte I.23.3 gilt also $\partial_j f(x_0) = g'_j(0) = 0$ für jedes $j = 1, 2, \dots, d$ und das bedeutet gerade $\nabla f(x_0) = 0$. $\square$

Definition 17.3. Ist f in x_0 partiell differenzierbar und gilt $\nabla f(x_0) = 0$, so heißt x_0 ein kritischer Punkt von f .

17. Lokale Extrema

Es dürfte nicht überraschend sein, dass die Welt in mehreren Variablen nicht schöner wird als in einer: Nicht jeder kritische Punkt ist auch eine lokale Extremstelle. Hier sind die notorischen Beispiele.

Beispiel 17.4. (a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dann ist $f(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $f(0, 0) = 0$. Also hat f in $(0, 0)$ ein lokales (sogar globales) Minimum und tatsächlich ist $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ und damit $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

(b) Wir betrachten jetzt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - y^2$. Dann ist $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ und damit auch hier $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, d. h. $(0, 0)$ ist ein kritischer Punkt von f . Hier gilt aber $f(x, 0) > 0$ für alle $x \neq 0$ und $f(0, y) < 0$ für alle $y \neq 0$. In jeder Umgebung von Null ohne den Ursprung sind also die Werte von f auf der x -Achse strikt positiv und auf der y -Achse strikt negativ. Damit kann im Ursprung kein lokales Extremum vorliegen.

Man nennt einen solchen kritischen Punkt, an dem kein Extremum vorliegt, einen *Sattelpunkt*.

Wie unterscheidet man nun einen Sattelpunkt von einer Extremstelle? Die Idee ist genau die gleiche wie im letzten Semester: Ist $f \in C^2(G, \mathbb{R})$ und $x_0 \in G$ ein kritischer Punkt von f , so entwickeln wir f in sein Taylorpolynom erster Ordnung mit Entwicklungsstelle x_0 .

Dazu sei $\varrho > 0$ so, dass $U_\varrho(x_0) \subseteq G$ gilt. Dann ist für alle $x \in U_\varrho(x_0)$ die Verbindungsstrecke $\overline{xx_0} \subseteq U_\varrho(x_0) \subseteq G$, so dass es nach dem Satz von Taylor 16.10, vgl. auch Bemerkung 16.11(c), ein $\xi \in \overline{xx_0}$ gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(\xi)(x - x_0).$$

Also ist

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(\xi)(x - x_0) = \frac{1}{2}\langle x - x_0, H_f(\xi)(x - x_0) \rangle \quad (17.1)$$

und das Vorzeichen der rechten Seite bestimmt das Vorzeichen der linken Seite und das entscheidet darüber ob eine, und wenn ja, was für eine, Extremstelle vorliegt. Dabei hilft uns folgende Definition weiter, die wahrscheinlich nur eine Erinnerung an die Lineare Algebra ist.

Definition 17.5. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ heißt

(a) positiv definit, falls $\langle x, Ax \rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt.

(b) negativ definit, falls $\langle x, Ax \rangle < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt.

(c) indefinit, falls $x, y \in \mathbb{R}^d$ existieren mit $\langle x, Ax \rangle > 0$ und $\langle y, Ay \rangle < 0$.

Lemma 17.6. *Die Mengen der positiv definiten, der negativ definiten und der indefiniten Matrizen sind offene Teilmengen von $\{T \in \mathbb{R}^{d \times d} : T \text{ symmetrisch}\}$.*

Beweis. Wir führen den Beweis nur für die Menge der positiv definiten Matrizen. Die Argumente in den anderen Fällen sind mehr oder weniger analog.

Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ positiv definit. Da die Einheitssphäre $K := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$ kompakt ist und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \langle x, Ax \rangle$ stetig auf K ist, nimmt die Abbildung f auf K ihr Minimum an. Wir nennen diesen Minimalwert α und beobachten, dass wegen $f(x) > 0$ für alle $x \in K$ auch $\alpha > 0$ gelten muss.

In $\mathbb{R}^{d \times d}$ können wir uns noch eine Norm aussuchen und da wir wegen des Skalarprodukts in $\mathbb{R}^d$ sinnigerweise mit der 2-Norm arbeiten, versehen wir $\mathbb{R}^{d \times d}$ mit der zur 2-Norm assoziierten Operatornorm $\|\cdot\|$, vgl. Satz 8.15.

Wir weisen nun nach, dass $U_{\alpha/2}(A)$ in der Menge der positiv definiten Matrizen enthalten ist, womit diese dann offen ist. Sei also $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine symmetrische Matrix mit $\|B - A\| < \alpha/2$. Dann gilt für alle $x \in K$

$$\langle x, Bx \rangle = \langle x, Ax - (A - B)x \rangle = \langle x, Ax \rangle - \langle x, (A - B)x \rangle.$$

Wir wenden im letzten Skalarprodukt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung an, ziehen damit mehr ab und erhalten für alle $x \in K$

$$\langle x, Bx \rangle \geq \langle x, Ax \rangle - \underbrace{\|x\|_2}_{=1} \|(A - B)x\|_2 \geq \alpha - \|(A - B)x\|_2.$$

Nun verwenden wir Satz 8.15(b)i) und erhalten weiterhin für alle $x \in K$

$$\langle x, Bx \rangle \geq \alpha - \|A - B\| \|x\|_2 = \alpha - \|A - B\| > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Damit haben wir schließlich für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$$\langle x, Bx \rangle = \|x\|_2^2 \left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, B \frac{x}{\|x\|_2} \right\rangle \geq \|x\|_2^2 \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Also ist auch B eine positiv definite Matrix und $U_{\alpha/2}(A)$ eine Teilmenge der positiv definiten Matrizen. $\square$

Satz 17.7 (Hinreichende Bedingung für Extrema). *Ist $f \in C^2(G, \mathbb{R})$ und $x_0 \in G$ ein kritischer Punkt von f , so gilt:*

- (a) *Ist $H_f(x_0)$ positiv definit, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.*
- (b) *Ist $H_f(x_0)$ negativ definit, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.*
- (c) *Ist $H_f(x_0)$ indefinit, so hat f in x_0 kein Extremum.*

17. Lokale Extrema

Beweis. (a) Wir haben in (17.1) bereits gesehen, dass

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle x - x_0, H_f(\xi)(x - x_0) \rangle \quad \text{mit einem } \xi \in \overline{xx_0}$$

ist, solange $x \in U_\varrho(x_0)$ mit einem geeigneten $\varrho > 0$ gilt.

Ist nun $H_f(x_0)$ positiv definit, so gibt es nach Lemma 17.6 ein $\kappa > 0$, so dass alle symmetrischen Matrizen, die näher als κ an $H_f(x_0)$ liegen, ebenfalls positiv definit sind. Die Abbildung $x \mapsto H_f(x)$ ist nach Voraussetzung in G stetig, also gibt es ein $\delta > 0$ mit $H_f(x) \in U_\kappa(H_f(x_0))$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$, d. h. $H_f(x)$ ist dann positiv definit.

Ist nun $\varepsilon := \min\{\delta, \varrho\}$, so gilt für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$, dass auch das zugehörige ξ in $U_\varepsilon(x_0)$ liegt und damit $H_f(\xi)$ positiv definit ist. Also ist für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle x - x_0, H_f(\xi)(x - x_0) \rangle \geq 0$$

und damit $f(x) \geq f(x_0)$, d. h. in x_0 liegt ein relatives Minimum vor.

(b) Ist $H_f(x_0)$ negativ definit, so ist $H_{-f}(x_0) = -H_f(x_0)$ positiv definit und nach unseren obigen Erkenntnissen hat dann $-f$ ein lokales Minimum in x_0 , d. h. f hat ein lokales Maximum in x_0 . Man beachte dabei, dass die Voraussetzungen des Satzes, wenn sie für f erfüllt sind, auch für $-f$ gelten.

(c) Ist $H_f(x_0)$ indefinit, so gibt es $v, w \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\langle v, H_f(x_0)v \rangle > 0 \quad \text{und} \quad \langle w, H_f(x_0)w \rangle < 0$$

und v und w sind offensichtlich nicht Null. Da G offen ist, können wir dann ein $\varepsilon > 0$ finden mit $x_0 + tv, x_0 + tw \in G$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Wir betrachten die beiden Funktionen $\varphi_v, \varphi_w : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi_v(t) = f(x_0 + tv)$ und $\varphi_w(t) = f(x_0 + tw)$. Dann sind $\varphi_v, \varphi_w \in C^2((-\varepsilon, \varepsilon))$ mit

$$\varphi'_v(t) = \nabla f(x_0 + tv) \cdot v, \quad \text{also} \quad \varphi'_v(0) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0$$

und genauso $\varphi'_w(0) = 0$. Weiterhin gilt

$$\varphi''_v(t) = \langle v, H_f(x_0 + tv)v \rangle, \quad \text{und damit} \quad \varphi''_v(0) = \langle v, H_f(x_0)v \rangle > 0$$

und genauso $\varphi''_w(0) < 0$. Damit hat die Einschränkung von f auf die Gerade durch x_0 in Richtung v , also φ_v , in x_0 ein striktes lokales Minimum und die Einschränkung auf die Gerade durch x_0 in Richtung w in x_0 ein striktes lokales Maximum. In Summe kann damit f in x_0 kein Extremum haben. $\square$

Die Frage wie man nun feststellt, ob eine gegebene symmetrische Matrix positiv, negativ oder indefinit ist, gehört in den Zuständigkeitsbereich der Linearen Algebra. Wir zitieren hier die wichtigsten Methoden.

Satz 17.8. Sei $A = (a_{j,k})_{j,k=1}^d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch. Dann ist A

- (a) genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A strikt positiv sind und das ist genau dann der Fall, wenn die Minoren von A alle strikt positiv sind, d. h. für alle $m = 1, 2, \dots, d$ gilt $\det((a_{j,k})_{j,k=1}^m) > 0$.
- (b) genau dann negativ definit, wenn alle Eigenwerte von A strikt negativ sind und das ist genau dann der Fall, wenn die Vorzeichen der Minoren von A alternieren mit $(-1)^m \det((a_{j,k})_{j,k=1}^m) > 0$ für alle $m = 1, 2, \dots, d$.
- (c) genau dann indefinit, wenn A sowohl einen strikt positiven als auch einen strikt negativen Eigenwert hat.

Beispiel 17.9. Wir bestimmen die relativen Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2},$$

vgl. Abbildung 17.1.

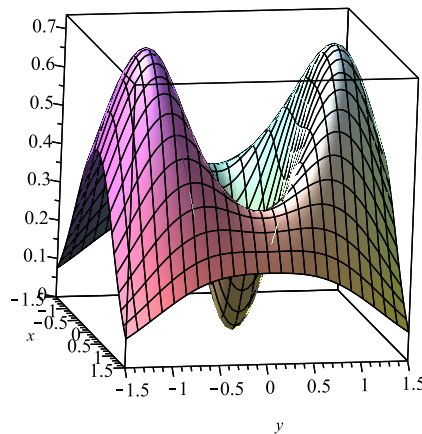


Abbildung 17.1.: Der Graph der Funktion $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2}$

Wir bestimmen die kritischen Punkte mit $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Da

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (2xe^{-x^2 - y^2} - 2x(x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2}, 4ye^{-x^2 - y^2} - 2y(x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2}) \\ &= 2e^{-x^2 - y^2}(x(1 - x^2 - 2y^2), y(2 - x^2 - 2y^2)), \end{aligned}$$

ist, bekommen wir die kritischen Punkte als die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x(1 - x^2 - 2y^2) &= 0 \\ y(2 - x^2 - 2y^2) &= 0. \end{cases}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $x = 0$. Dann ist die erste Gleichung erfüllt und die zweite vereinfacht sich zu $y(2 - 2y^2) = 0$. Diese hat die drei Lösungen 0, 1

17. Lokale Extrema

und -1 . Also haben wir bereits die drei Nullstellen des Gradienten $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(0, -1)$.

Im Fall $x \neq 0$ können wir die erste Gleichung durch x dividieren und verbleiben mit $-x^2 - 2y^2 = -1$. Setzen wir das in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir $0 = y(2 - 1) = y$. In diesem Fall muss also $y = 0$ sein. Dann ist die zweite Gleichung auf jeden Fall erfüllt und nun vereinfacht sich die erste Gleichung zu $1 - x^2 = 0$, also muss dann $x = 1$ oder $x = -1$ sein.

Insgesamt haben wir fünf kritische Stellen $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ und $(-1, 0)$. Wir bestimmen nun die Hesse-Matrix $H_f(x, y)$ zu

$$2e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1 - 5x^2 - 2y^2 + 2x^4 + 4x^2y^2 & -2xy(3 - x^2 - 2y^2) \\ -2xy(3 - x^2 - 2y^2) & 2 - x^2 - 10y^2 + 2x^2y^2 + 4y^4 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$H_f(0, 0) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Eigenwerte: } 2, 4 \rightsquigarrow \text{pos. def.} \quad \rightsquigarrow \text{Minimum,}$$

$$H_f(0, 1) = \frac{2}{e} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{Eigenwerte: } \frac{-2}{e}, \frac{-8}{e} \rightsquigarrow \text{neg. def.} \quad \rightsquigarrow \text{Maximum,}$$

$$H_f(0, -1) = H_f(0, 1) \quad \rightsquigarrow \text{Maximum,}$$

$$H_f(1, 0) = \frac{2}{e} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Eigenwerte: } \frac{-4}{e}, \frac{2}{e} \rightsquigarrow \text{indefinit} \quad \rightsquigarrow \text{kein Extr.,}$$

$$H_f(-1, 0) = H_f(1, 0) \quad \rightsquigarrow \text{kein Extr..}$$

Bemerkung 17.10. In $\mathbb{R}^d$ können ein paar Dinge passieren, die im eindimensionalen nicht vorkommen, z.B. kann eine auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion zwei relative Maxima haben, ohne ein relatives Minimum zu besitzen, vgl. Abbildung 17.2. Hüten Sie sich also vor eindimensionalem Denken!

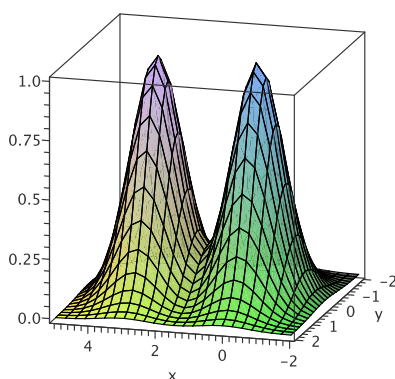


Abbildung 17.2.: Der Graph der Funktion $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} + e^{-(x-3)^2-y^2}$

18. Umkehrfunktionen

Ein Grundproblem der Mathematik ist das Auflösen von Gleichungen. Ein allgemeines Gleichungssystem mit d Unbekannten und p Gleichungen können wir schreiben als $f(x) = b$ mit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$, wobei $b \in \mathbb{R}^p$ gegeben und $x \in \mathbb{R}^d$ gesucht ist.

Besonders übersichtlich ist der Fall von linearen Gleichungssystemen, den Sie aus der Linearen Algebra kennen:

- Ist $p > d$, so ist das LGS überbestimmt und hat i. A. keine Lösung.
- Ist $p = d$ und die Matrix des LGS regulär, so hat dieses genau eine Lösung.
- Ist $p < d$, so ist das LGS unterbestimmt und hat, falls es lösbar ist, einen affinen Unterraum als Lösungsmenge.

Wir haben nun genug analytisches Rüstzeug zusammen, um uns mit nichtlinearen Gleichungssystemen zu beschäftigen. Deren Behandlung ist naturgemäß deutlich komplizierter und von der Idee, so etwas wie ein allgemeines Lösungsverfahren finden zu wollen, sollten Sie sich gleich verabschieden. Das Ziel wird vielmehr sein, analog zu obiger Aufstellung, anhand von Eigenschaften der Funktion f Aussagen darüber treffen zu können, wie die Struktur der Lösungsmenge aussieht.

Für überbestimmte Gleichungssysteme ist auch hier nichts zu holen, keine Lösung ist keine Lösung.

Für den Fall $p = d$ erhoffen wir uns eine eindeutige Lösung, wenn irgendetwas regulär genug ist. Wir werden in diesem Kapitel dazu den Satz über die Umkehrfunktion 18.5 zeigen, der grob gesprochen besagt: Ist $a \in \mathbb{R}^d$ eine Lösung unserer Gleichung, d. h. $f(a) = b$ und ist $Df(a)$ regulär, so gibt es für jedes y nahe bei b genau ein x nahe bei a mit $f(x) = y$. Oder anders gesagt: In diesem Fall gibt es in einer kleinen Umgebung von b eine Umkehrfunktion von f , d. h. f ist in einer kleinen Umgebung von a injektiv.

Im Fall von unterbestimmten Gleichungssystemen erwarten wir viele Lösungen zu einer gegebenen rechten Seite. Das Ziel wird hier sein, zu zeigen, dass sich diese Menge an Lösungen geeignet parametrisieren, d. h. als Graph einer Funktion darstellen lässt. Diese wird allerdings nicht wie bei linearen Gleichungssystemen affin sein und ist auch im allgemeinen nicht zu bestimmen. Der im nächsten Kapitel präsentierte Satz über implizit definierte Funktionen 19.2, der unter geeigneten Voraussetzungen eine solche Parametrisierung garantiert, ist demnach ein eher nicht konstruktives Existenztheorem, aber trotzdem ein ungemein nützliches Resultat.

18. Umkehrfunktionen

Definition 18.1. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^d$ und $H \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Eine Funktion $f : G \rightarrow H$ heißt Diffeomorphismus, wenn sie bijektiv und stetig differenzierbar auf G ist sowie ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : H \rightarrow G$ ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Bemerkung 18.2. So wie alle „-morphisamen“ ist ein Diffeomorphismus eine strukturerhaltende Abbildung. Hier wird die Struktur der Differenzierbarkeit übertragen.

Man beachte, dass die Forderung nach stetiger Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion nicht redundant ist, denn sie folgt nicht von selbst. Das sieht man schon an dem relativ einfachen Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$. Diese Funktion ist stetig differenzierbar und bijektiv, aber *kein* Diffeomorphismus, da ihre Umkehrfunktion in Null nicht differenzierbar ist.

In Analysis I haben wir gezeigt, dass jede stetig differenzierbare Funktion f auf einem Intervall I , deren Ableitung nie verschwindet, eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion hat, dass dann also $f : I \rightarrow f(I)$ ein Diffeomorphismus ist. Außerdem besagt die Regel über die Ableitung der Umkehrfunktion, dass dann $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

In mehreren Variablen ist die Sache deutlich komplizierter: Erstens verkommt dieses Kriterium zu einer nur noch notwendigen Bedingung und es geht auch nicht darum, dass die Ableitung nur ungleich null ist. Stattdessen muss sie als lineare Abbildung – bzw. Matrix – invertierbar sein, ein Unterschied, der bei 1×1 -Matrizen nicht sichtbar ist.

Satz 18.3. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^d$ und $H \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Ist $f : G \rightarrow H$ ein Diffeomorphismus, so gilt $d = p$ und es ist $\det Df(x) \neq 0$ sowie $(Df(x))^{-1} = Df^{-1}(f(x))$ für alle $x \in G$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $f^{-1} \circ f = \text{id}_G$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_H$. Also ist nach der Kettenregel für alle $x \in G$ und alle $y \in H$

$$Df^{-1}(f(x))Df(x) = \text{id}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{und} \quad Df(f^{-1}(y))Df^{-1}(y) = \text{id}_{\mathbb{R}^p},$$

d. h. mit $y := f(x)$

$$Df^{-1}(f(x))Df(x) = \text{id}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{und} \quad Df(x)Df^{-1}(f(x)) = \text{id}_{\mathbb{R}^p}.$$

Also ist $Df(x)$ für jedes $x \in G$ eine invertierbare lineare Abbildung. Damit sind alle Behauptungen aus obigem Satz alte Bekannte aus der Linearen Algebra. $\square$

Das nächste Beispiel zeigt, dass die Regularität der Ableitung in jedem Punkt in mehreren Variablen tatsächlich nur noch eine notwendige Bedingung für die Umkehrbarkeit einer Funktion darstellt.

Beispiel 18.4. Wir betrachten die Funktion, die Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten umrechnet, d. h.

$$f : \begin{cases} (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

vgl. Abbildung 18.1.

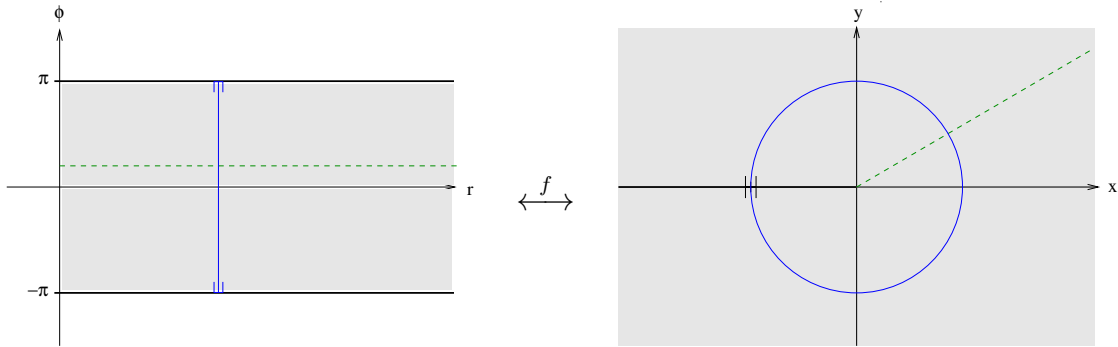


Abbildung 18.1.: Die Polarkoordinaten-Abbildung f bildet $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ diffeomorph auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ ab, ist aber auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ nicht bijektiv.

Dann ist f eine stetig differenzierbare Funktion auf der offenen und zusammenhängenden Menge $G := (0, \infty) \times \mathbb{R}$ und für alle $(r, \varphi) \in G$ ist die Jacobi-Matrix

$$J_f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

wegen $\det(J_f(r, \varphi)) = r \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi) = r \neq 0$ invertierbar. Trotzdem ist f nicht bijektiv, denn es gilt z.B. $f(1, 0) = f(1, 2\pi) = (1, 0)$.

Das Problem ist, dass man in $\mathbb{R}^2$ im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ im Kreis laufen kann, man kann so zum Ausgangspunkt zurückkehren ohne umzukehren.

Wir müssen also ein wenig bescheidener sein. Tatsächlich kann man zeigen, dass die Regularität der Ableitung es gestattet, zumindest eine lokale Umkehrfunktion zu definieren. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes von der Umkehrfunktion. Dieser ist ein sehr tiefliegendes Resultat und wir werden den bisher aufwändigsten Beweis der ganzen Analysis I/II führen.

Theorem 18.5 (Satz von der Umkehrfunktion). *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x_0 \in G$ und $f \in C^1(G; \mathbb{R}^d)$. Ist $Df(x_0)$ invertierbar, so existieren offene Umgebungen $U \subseteq G$ von x_0 und $V \subseteq \mathbb{R}^d$ von $y_0 := f(x_0)$, so dass $\hat{f} := f|_U : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist.*

18. Umkehrfunktionen

Bemerkung 18.6. Der Satz von der Umkehrfunktion sagt, wie am Anfang des Abschnitts schon formuliert, etwas über die Lösbarkeit nichtlinearer quadratischer Gleichungssysteme aus: Hat man ein x_0 mit $f(x_0) = y_0$ und ist $Df(x_0)$ regulär, so gibt es für jedes y nahe bei y_0 eine eindeutige Lösung x nahe bei x_0 der Gleichung $f(x) = y$.

Dabei macht der Satz *keine* Aussage über globale Eindeutigkeit der Lösung, es kann durchaus noch andere Punkte $w \in G$ mit $f(w) = y$ geben, diese sind dann aber „weit weg“ von x_0 . Dass eine solche Aussage im Allgemeinen auch nicht gilt, sieht man an Beispiel 18.4. Der Nachweis, dass eine gegebene Abbildung ein globaler Diffeomorphismus ist, ist im Allgemeinen ein sehr schwieriges Problem.

Bevor wir in den Beweis des Satzes von der Umkehrfunktion einsteigen, brauchen wir noch zwei vorbereitende Lemmata, deren Aussagen allerdings auch für sich genommen wesentliche Resultate sind. Für diese Betrachtungen stattdessen wir $\mathbb{K}^d$ mit irgendeiner Norm aus und notieren die zugehörige Matrixnorm, vgl. Satz 8.15(a), mit $\|\cdot\|$.

Lemma 18.7 (Neumann-Reihe). *Für alle $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$ mit $\|A\| < 1$ ist $I - A$ invertierbar¹ und es gilt*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad \text{sowie} \quad \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Beweis. Dank Satz 8.15(b)ii) und wegen $\|A\| < 1$ gilt mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|},$$

und damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ absolut konvergent in $\mathbb{K}^{d \times d}$. Nach Übungsaufgabe 9.6(a) ist sie also konvergent und der Reihenwert ist in Norm nicht größer als $(1 - \|A\|)^{-1}$. Weiter gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$(I - A) \sum_{n=0}^N A^n = \sum_{n=0}^N A^n - \sum_{n=0}^N A^{n+1} = I + \sum_{n=1}^N A^n - \sum_{n=1}^N A^n - A^{N+1} = I - A^{N+1}.$$

Es ist

$$0 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|A^{N+1}\| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|A\|^{N+1} = 0,$$

also gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} A^{N+1} = 0$ in $\mathbb{K}^{d \times d}$ und wir bekommen zusammengefasst

$$(I - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \lim_{N \rightarrow \infty} (I - A) \sum_{n=0}^N A^n = \lim_{N \rightarrow \infty} (I - A^{N+1}) = I,$$

woraus alles Behauptete folgt. □

¹Mit I ist hier die Einheitsmatrix bezeichnet.

Lemma 18.8 (Stetigkeit der Matrixinversion). *Die Menge aller invertierbaren Matrizen $\text{GL}(d, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{d \times d} : A \text{ invertierbar}\}$ ist offen in $\mathbb{K}^{d \times d}$ und die Matrixinversionsabbildung*

$$\text{inv} : \begin{cases} \text{GL}(d, \mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{K}^{d \times d} \\ A & \mapsto A^{-1} \end{cases}$$

ist stetig.

Beweis. Sei $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$ eine invertierbare Matrix und $\varepsilon := 1/\|A^{-1}\|$. Wir zeigen zunächst, dass $U_\varepsilon(A)$ nur invertierbare Matrizen enthält. Das liefert uns, dass jedes $A \in \text{GL}(d, \mathbb{K})$ ein innerer Punkt dieser Menge ist, d. h. diese ist offen. Sei also $B \in U_\varepsilon(A)$. Dann ist $\|B - A\| < \varepsilon = 1/\|A^{-1}\|$. Weiter gilt

$$B = A + B - A = A(I + A^{-1}(B - A)),$$

und es ist nach Satz 8.15(b)ii)

$$\|A^{-1}(B - A)\| \leq \|A^{-1}\| \|B - A\| < \|A^{-1}\| \frac{1}{\|A^{-1}\|} = 1. \quad (18.1)$$

Nach Lemma 18.7 ist also die Matrix $I + A^{-1}(B - A)$ invertierbar und wir bekommen aus (18.1), dass auch B invertierbar ist mit

$$B^{-1} = (I + A^{-1}(B - A))^{-1} A^{-1}.$$

und daher

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(B - A)\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B - A\|}. \quad (18.2)$$

Damit ist der erste Teil des Lemmas erledigt und wir müssen noch die Stetigkeit der Inversionsabbildung zeigen. Dazu sei $A \in \text{GL}(d, \mathbb{K})$ und $B \in U_\varepsilon(A)$ wie oben. Mit (18.2) folgt

$$\begin{aligned} \|\text{inv}(A) - \text{inv}(B)\| &= \|A^{-1} - B^{-1}\| = \|A^{-1}(B - A)B^{-1}\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|B - A\| \|B^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|B - A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B - A\|} \end{aligned}$$

Dieser Bruch geht nun für $B \rightarrow A$ gegen $0/1 = 0$, also ist

$$\lim_{B \rightarrow A} \text{inv}(B) = \text{inv}(A)$$

und das bedeutet gerade Stetigkeit von inv in A . □

18. Umkehrfunktionen

Beweis von Theorem 18.5. Die Hauptarbeit in diesem Beweis wird es sein, die Aussage in dem Spezialfall

$$x_0 = 0, \quad f(x_0) = f(0) = 0 \quad \text{und} \quad Df(x_0) = Df(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^d} \quad (18.3)$$

zu zeigen. Wir unterteilen diese Herausforderung in mehrere Teile.

Ouvertüre:

Unsere Aufgabe ist es für jedes gegebene y nahe bei 0 ein x nahe bei 0 zu finden, das die Gleichung $f(x) = y$ löst. Dazu betrachten wir für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ die Funktion

$$\varphi_y : \begin{cases} G \rightarrow \mathbb{R}^d \\ x \mapsto y + x - f(x). \end{cases}$$

Dann ist

$$y = f(x) \iff \varphi_y(x) = x \iff x \text{ Fixpunkt von } \varphi_y. \quad (18.4)$$

Unser Problem lässt sich auf diese Weise als Fixpunktproblem formulieren und wir wollen dieses mit dem Banach'schen Fixpunktsatz angehen. Dazu müssen wir zeigen, dass φ_y auf einem geeigneten vollständigen metrischen Raum eine strikte Kontraktion ist. Dazu stattdessen wir $\mathbb{R}^d$ mit der ∞ -Norm aus und verstehen alle vorkommenden Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ als metrische Räume mit der durch $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Metrik, vgl. Satz 4.14(b).

1. Akt: $\exists \varrho > 0 : \varphi_y : \overline{U_{2\varrho}(0)} \rightarrow \overline{U_{2\varrho}(0)}$ ist strikte Kontraktion für alle $y \in U_\varrho(0)$.

Die Abbildung φ_y ist für jedes y nach Voraussetzung stetig differenzierbar auf G mit

$$J_{\varphi_y}(x) = I - J_f(x), \quad x \in G.$$

Die Funktion $I - J_f(x)$ ist auf G nach Voraussetzung stetig und wegen (18.3) verschwindet sie an der Stelle $x = 0$. Also gibt es ein $\varrho > 0$ mit $U_{3\varrho}(0) \subseteq G$ und

$$\|I - J_f(x)\|_{ZS} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in U_{3\varrho}(0). \quad (18.5)$$

Nun liefert der Schrankensatz 15.8, insbesondere Bemerkung 15.9, für alle $x_1, x_2 \in U_{3\varrho}(0)$ und alle $y \in \mathbb{R}^d$

$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_\infty. \quad (18.6)$$

Insbesondere gilt das für alle $x_1, x_2 \in \overline{U_{2\varrho}(0)}$. Um den ersten Akt zu beenden müssen wir nun noch zeigen, dass für alle $y \in U_\varrho(0)$ gilt $\varphi_y(\overline{U_{2\varrho}(0)}) \subseteq \overline{U_{2\varrho}(0)}$. Sei also $y \in U_\varrho(0)$ und $x \in \overline{U_{2\varrho}(0)}$. Dann gilt mit Hilfe von (18.6) und der Definition

von φ_y

$$\begin{aligned}
\|\varphi_y(x)\|_\infty &\leq \|\varphi_y(x) - \varphi_y(0)\|_\infty + \|\varphi_y(0)\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{2}\|x - 0\|_\infty + \|y - f(0)\|_\infty = \frac{1}{2}\|x\|_\infty + \|y\|_\infty \\
&< \frac{1}{2} \cdot 2\varrho + \varrho = 2\varrho.
\end{aligned} \tag{18.7}$$

Also ist $\varphi_y(x) \in \overline{U_{2\varrho}(0)}$.

2. Akt: Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes.

Die Menge $\overline{U_{2\varrho}(0)}$ ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$, also nach Heine-Borel 7.10 kompakt in $\mathbb{R}^d$. Satz 7.7 liefert dann, dass der metrische Raum $\overline{U_{2\varrho}(0)}$ vollständig ist. Damit sind für jedes $y \in U_\varrho(0)$ für die Funktionen φ_y die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes 6.15 erfüllt. Also gibt es für jedes $y \in U_\varrho(0)$ genau ein $x \in \overline{U_{2\varrho}(0)}$ mit $\varphi_y(x) = x$, d. h. mit $f(x) = y$, vgl. (18.4). Tatsächlich haben wir nach (18.7) für jedes solchermaßen gefundene x

$$\|x\|_\infty = \|\varphi_y(x)\|_\infty < 2\varrho,$$

also ist sogar jeweils $x \in U_{2\varrho}(0)$.

Zusammen haben wir also nun als Ergebnis für ein geeignetes $\varrho > 0$:

Für alle $y \in U_\varrho(0)$ existiert genau ein $x \in U_{2\varrho}(0)$ mit $f(x) = y$.

3. Akt: Definition von U , V und $\hat{f}$.

Wir setzen nun

$$V := U_\varrho(0), \quad U := f^{-1}(V) \cap U_{2\varrho}(0).$$

Dann gilt $U \subseteq U_{2\varrho}(0) \subseteq G$ nach der Wahl von ϱ . Desweiteren sind U und V offene Mengen, es gilt offensichtlich $0 \in V$ und wegen $f(0) = 0$ ist auch $0 \in f^{-1}(V)$ und damit $0 \in U$. Also ist $U \subseteq G$ eine offene Umgebung von 0 und V eine offene Umgebung von $0 = f(0)$. Schließlich besagen unsere Ergebnisse aus dem 2. Akt, dass $\hat{f} := f|_U : U \rightarrow V$ bijektiv ist. Man beachte dabei, dass für jedes $y \in V$ das zugehörige $x \in U_{2\varrho}(0)$ aus dem 2. Akt wegen $f(x) = y \in V$ automatisch in $f^{-1}(V)$ und damit in U liegt.

Uns verbleibt nun „nur noch“ zu zeigen, dass $\hat{f}^{-1} : V \rightarrow U$ auf V stetig differenzierbar ist. Wir fangen mit kleineren Brötchen an.

4. Akt: $\hat{f}^{-1} : V \rightarrow U$ ist Lipschitz-stetig.

Es seien $y_1, y_2 \in V$. Wir setzen $x_1 := \hat{f}^{-1}(y_1)$ und $x_2 := \hat{f}^{-1}(y_2)$. Dann gilt

$$x_1 = (x_1 - f(x_1)) + f(x_1) = \varphi_0(x_1) + y_1$$

18. Umkehrfunktionen

und analog für x_2 . Folglich,

$$\begin{aligned}\|\hat{f}^{-1}(y_1) - \hat{f}^{-1}(y_2)\|_\infty &= \|x_1 - x_2\|_\infty = \|\varphi_0(x_1) + y_1 - \varphi_0(x_2) - y_2\|_\infty \\ &\leq \|\varphi_0(x_1) - \varphi_0(x_2)\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty\end{aligned}$$

unter weiterer Verwendung von (18.6),

$$\begin{aligned}&\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty \\ &= \frac{1}{2}\|\hat{f}^{-1}(y_1) - \hat{f}^{-1}(y_2)\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty.\end{aligned}$$

Umstellen dieser Ungleichung liefert

$$\|\hat{f}^{-1}(y_1) - \hat{f}^{-1}(y_2)\|_\infty \leq 2\|y_1 - y_2\|_\infty,$$

d. h. die gewünschte Lipschitz-Stetigkeit.

5. Akt: Für alle $x \in U$ ist $Df(x)$ invertierbar.

Sei $x \in U$. Nach (18.5) ist $\|I - J_f\|_{ZS} \leq 1/2$. Da $\|\cdot\|_{ZS}$ die zu $\|\cdot\|_\infty$ passende Operatornorm ist (vgl. Übungsaufgabe 8.17), ist $J_f(x) = I - (I - J_f(x))$ nach Lemma 18.7 invertierbar.

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns der Differenzierbarkeit von $\hat{f}^{-1}$ widmen.

6. Akt: $\hat{f}^{-1}$ ist stetig differenzierbar auf V .

Sei $y \in V$ und $k \in \mathbb{R}^d$ so, dass $y + k \in V$. Dann ist $x := \hat{f}^{-1}(y) \in U$ und mit $h_k := \hat{f}^{-1}(y + k) - \hat{f}^{-1}(y)$ gilt

$$f(x) + k = y + k = \hat{f}(\hat{f}^{-1}(y + k)) = f(h_k + \hat{f}^{-1}(y)) = f(x + h_k).$$

Das liefert dank der Differenzierbarkeit von f in x

$$k = f(x + h_k) - f(x) = Df(x)h_k + r(h_k) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|_\infty} = 0. \quad (18.8)$$

Nun stützen wir uns auf den 5. Akt und erhalten mit den bisherigen Überlegungen

$$\begin{aligned}\hat{f}^{-1}(y + k) - \hat{f}^{-1}(y) &= h_k = h_k + (Df(x))^{-1}k - (Df(x))^{-1}k \\ &= h_k + (Df(x))^{-1}k - (Df(x))^{-1}(Df(x)h_k + r(h_k)) \\ &= h_k + (Df(x))^{-1}k - h_k - (Df(x))^{-1}r(h_k) \\ &= (Df(x))^{-1}k - (Df(x))^{-1}r(h_k).\end{aligned}$$

Unser nächstes Ziel ist nun zu zeigen, dass $\lim_{k \rightarrow 0} (Df(x))^{-1}r(h_k)/\|k\|_\infty = 0$ ist. Wenn das erreicht ist, so liefert das die Differenzierbarkeit von $\hat{f}^{-1}$ in y .

Es ist nach den Ergebnissen des 4. Akts

$$\|h_k\|_\infty = \|\hat{f}^{-1}(y+k) - \hat{f}^{-1}(y)\|_\infty \leq 2\|k\|_\infty$$

und wir bekommen zum Einen, dass $\lim_{k \rightarrow 0} h_k = 0$ ist, und zum Anderen mit Hilfe von (18.8)

$$0 \leq \frac{\|r(h_k)\|_\infty}{\|k\|_\infty} \leq \frac{2\|r(h_k)\|_\infty}{\|h_k\|_\infty} \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow 0).$$

Da die lineare Abbildung $(Df(x))^{-1}$ auf $\mathbb{R}^d$ stetig ist, liefert das

$$\lim_{k \rightarrow 0} (Df(x))^{-1} \frac{r(h_k)}{\|k\|_\infty} = (Df(x))^{-1} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{r(h_k)}{\|k\|_\infty} = (Df(x))^{-1} 0 = 0.$$

Es ist also $\hat{f}^{-1}$ in y differenzierbar und es gilt

$$D\hat{f}^{-1}(y) = (Df(x))^{-1} = (Df(\hat{f}^{-1}(y)))^{-1} = \text{inv}(Df(\hat{f}^{-1}(y))).$$

Nun ist $\hat{f}^{-1}$ stetig nach Akt 4, Df stetig nach Voraussetzung und die Matrixinversion stetig nach Lemma 18.8. Damit ist $y \mapsto D\hat{f}^{-1}(y)$ als Verkettung von stetigen Funktionen stetig, d. h. $\hat{f}^{-1}$ ist auf V stetig differenzierbar.

Finale: Vom Spezialfall zum allgemeinen Fall.

Wir haben den Satz für die Situation in (18.3) gezeigt und machen uns nun daran, diese Einschränkungen wieder los zu werden. Es sei f also irgendeine Funktion, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Dann betrachten wir auf $\tilde{G} := G - x_0 := \{z - x_0 : z \in G\}$ die Funktion $g : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit

$$g(x) := (Df(x_0))^{-1}(f(x+x_0) - f(x_0)).$$

Dann gilt erstens $g(0) = (Df(x_0))^{-1}(f(x_0) - f(x_0)) = 0$. Zweitens haben wir $Dg(x) = (Df(x_0))^{-1}Df(x+x_0)$ und damit $Dg(0) = (Df(x_0))^{-1}Df(x_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^d}$. Wir können also auf unsere Funktion g das bisher Bewiesene anwenden.

Das liefert offene Umgebungen $\tilde{U}, \tilde{V}$ von 0 in $\mathbb{R}^d$, für die $\hat{g} = g|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ ein Diffeomorphismus ist. Außerdem gilt $D\hat{g}^{-1}(0) = (Dg(0))^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^d}^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^d}$.

Wir setzen nun

$$U := \tilde{U} + x_0, \quad V := Df(x_0)(\tilde{V}) + f(x_0).$$

Dann ist U eine offene Umgebung von x_0 und V ist eine offene Umgebung von $f(x_0)$, da $Df(x_0)(\tilde{V}) = ((Df(x_0))^{-1})^{-1}(\tilde{V})$ das Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist. Wir zeigen nun, dass $\hat{f} = f|_U : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist.

Zunächst steckt die stetige Differenzierbarkeit von $\hat{f}$ direkt in der Voraussetzung. Zum Nachweis der Bijektivität sei $y \in V$. Dann gibt es nach Definition von V

18. Umkehrfunktionen

und dank der Bijektivität von $Df(x_0)$ genau ein $\tilde{y} \in \tilde{V}$ mit $y = Df(x_0)\tilde{y} + f(x_0)$. Weiter gibt es, da $\hat{g} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ ein Diffeomorphismus ist, genau ein $\tilde{x} \in \tilde{U}$ mit $\hat{g}(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Das bedeutet ausgeschrieben

$$(Df(x_0))^{-1}(f(\tilde{x} + x_0) - f(x_0)) = g(\tilde{x}) = \tilde{y} = (Df(x_0))^{-1}(y - f(x_0)).$$

Da $(Df(x_0))^{-1}$ invertierbar ist, haben wir also ein eindeutiges $\tilde{x} \in \tilde{U}$ mit

$$f(\tilde{x} + x_0) - f(x_0) = y - f(x_0), \quad \text{d. h.} \quad f(\tilde{x} + x_0) = y.$$

Damit ist $x := \tilde{x} + x_0 \in U$ ein eindeutiges Element aus U mit $f(x) = y$ und wir haben gezeigt, dass $\hat{f} : U \rightarrow V$ bijektiv ist.

Obige Rechnung zeigt außerdem, dass

$$\hat{f}^{-1}(y) = x = \tilde{x} + x_0 = \hat{g}^{-1}(\tilde{y}) + x_0 = \hat{g}^{-1}((Df(x_0))^{-1}(y - f(x_0))) + x_0$$

und aus dieser Darstellung können wir nun ablesen, dass mit $\hat{g}^{-1}$ auch $\hat{f}^{-1}$ differenzierbar ist und die Ableitungsfunktion

$$y \mapsto D\hat{f}^{-1}(y) = D\hat{g}^{-1}((Df(x_0))^{-1}(y - f(x_0)))(Df(x_0))^{-1}$$

ist stetig. □

Wenn wir nun so viel Arbeit investiert haben, wollen wir natürlich auch ein bisschen Ertrag haben. Hier kommen zwei direkte Folgerungen aus diesem Satz und auch das nächste große Resultat dieser Vorlesung, der Satz über implizite Funktionen, wird im wesentlichen aus dem Satz über die Umkehrfunktion folgen. Die wahre Stärke all dieser Resultate kann allerdings in dieser Veranstaltung noch nicht präsentiert werden.

Korollar 18.9. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(G; \mathbb{R}^d)$ so, dass $Df(x)$ in allen $x \in G$ invertierbar ist. Dann ist $f(G)$ offen in $\mathbb{R}^d$.*

Die Offenheit von $f(G)$ folgt nicht automatisch aus der Stetigkeit von f ! Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen sind immer offen, aber nicht unbedingt Bilder. Betrachten Sie z.B. das Bild von $(-1, 1)$ unter der reellen Funktion $f(x) = x^2$.

Beweis. Sei $y \in f(G)$ und $x \in G$ ein Punkt mit $f(x) = y$. Dann sagt der Satz über die Umkehrfunktion 18.5, dass es offene Umgebungen V von y und $U \subseteq G$ von x gibt, so dass $f|_U : U \rightarrow V$ bijektiv ist. Also ist $y \in V = f(U) \subseteq f(G)$ und V ist offen, d. h. y ist ein innerer Punkt von $f(G)$. □

Korollar 18.10. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(G; \mathbb{R}^d)$. Ist f injektiv und $Df(x)$ für alle $x \in G$ invertierbar, so ist $f : G \rightarrow f(G)$ ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Die Funktion $f : G \rightarrow f(G)$ ist nach Voraussetzung bijektiv und stetig differenzierbar. Die stetige Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion folgt aus Theorem 18.5. □

19. Satz über implizite Funktionen

Wir wenden uns nun dem Satz über implizite Funktionen zu, in dem es um unterbestimmte Gleichungssysteme geht. Es sei also $G \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine Funktion mit $p < d$. Wir wollen nun für $w \in \mathbb{R}^p$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $f(u) = w$ beschreiben. Dazu beschränken wir uns auf den Fall $w = 0$, denn für beliebiges w kann man sonst einfach die Funktion $f - w$ betrachten.

Wir setzen $k := d - p$ und identifizieren $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{k+p} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$. In diesem Sinne notieren wir ein $u \in G$ als

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+p}) = (x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_p) =: (x, y).$$

Der einfachste Fall ist natürlich der eines linearen Gleichungssystems. Um diese Notation zu durchschauen und um zu demonstrieren, was das Ziel dieses Abschnitts ist, betrachten wir als Beispiel das folgende LGS $f(x, y) = 0$ mit $d = 4$ und $p = k = 2$

$$\begin{array}{cccc|c} y_1 & y_2 & x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Um die Lösungsmenge zu beschreiben kann man nun z.B. x_1, x_2 als freie Parameter wählen und erhält

$$y_2 = -x_2, \quad y_1 = x_1 - x_2$$

als Parametrisierung der Lösungsmenge. Dabei drückt man die restlichen Variablen y_1 und y_2 durch die freien Variablen x_1 und x_2 aus, d. h. man gibt eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, so dass die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^4$ mit $y = g(x)$ genau die Lösungen des LGS sind. Es gilt also dann $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. In diesem Fall wäre $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, -x_2)$.

Wir wollen nun untersuchen unter welchen Voraussetzungen eine solche Parametrisierung der Lösungsmenge nach geeigneten freien Variablen für allgemeine nichtlineare unterbestimmte Gleichungssysteme möglich ist, wann es also eine solche Funktion g gibt. Da diese durch die Gleichung $f(x, g(x)) = 0$ bestimmt wird, sagt man dann die Funktion g ist *implizit definiert*.

Für allgemeine Gleichungssysteme ist es nicht zu erwarten, dass diese Gleichung explizit auflösbar ist, d. h. dass wir wie im obigen linearen System eine explizite Formel für g erhalten. Desweiteren können wir hier, genau wie beim Satz über

19. Satz über implizite Funktionen

die Umkehrfunktion, nur ein lokales Resultat erwarten, d. h. eine Bedingung an f unter der, in der Nähe einer gegebenen Lösung (a, b) (d. h. $f(a, b) = 0$) eine solche auflösende Funktion g existiert.

Wir führen dazu zunächst für die Belange der folgenden Betrachtungen ein paar abkürzende Notationen ein.

Definition 19.1. Es seien $k, p \in \mathbb{N}$.

(a) Für $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^p$ bezeichne

$$(x, y) := (x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^{k+p}.$$

(b) Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^{k+p}$ offen und $f \in C^1(G; \mathbb{R}^p)$. Für $(a, b) \in G$ sei

$$D_x f(a, b) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a, b) & \partial_2 f_1(a, b) & \dots & \partial_k f_1(a, b) \\ \partial_1 f_2(a, b) & \partial_2 f_2(a, b) & \dots & \partial_k f_2(a, b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_p(a, b) & \partial_2 f_p(a, b) & \dots & \partial_k f_p(a, b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times k},$$

$$D_y f(a, b) = \begin{pmatrix} \partial_{k+1} f_1(a, b) & \partial_{k+2} f_1(a, b) & \dots & \partial_{k+p} f_1(a, b) \\ \partial_{k+1} f_2(a, b) & \partial_{k+2} f_2(a, b) & \dots & \partial_{k+p} f_2(a, b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{k+1} f_p(a, b) & \partial_{k+2} f_p(a, b) & \dots & \partial_{k+p} f_p(a, b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}.$$

Theorem 19.2 (Satz über implizite Funktionen). Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar und $(a, b) \in G$ mit $f(a, b) = 0$ und $\det(D_y f(a, b)) \neq 0$. Dann existieren offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^k$ von a und $V \subseteq \mathbb{R}^p$ von b mit $U \times V \subseteq G$, sowie eine eindeutige Funktion $g : U \rightarrow V$, so dass für alle $x \in U$ und $y \in V$ gilt

$$f(x, y) = 0 \iff y = g(x).$$

Insbesondere ist $g(a) = b$.

Schließlich ist g stetig differenzierbar mit

$$Dg(x) = -(D_y f(x, g(x)))^{-1} D_x f(x, g(x)) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Beweis. Wir führen dieses Theorem auf den Umkehrsatz 18.5 zurück. Dazu betrachten wir die Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$ mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in G.$$

Dann ist F nach Voraussetzung stetig differenzierbar und es ist für alle $(x, y) \in G$

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \text{id}_{\mathbb{R}^k} & 0 \\ D_x f(x, y) & D_y f(x, y) \end{pmatrix}. \quad (19.1)$$

Um den Umkehrsatz 18.5 in einer Umgebung von (a, b) auf F anwenden zu können, müssen wir nachweisen, dass $DF(a, b)$ invertierbar ist. Das zeigen wir, indem wir nachweisen, dass der Kern dieser linearen Abbildung trivial ist. Sei also $(v, w) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$ mit $DF(a, b) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0$. Dann ist

$$0 = \begin{pmatrix} I_{\mathbb{R}^k} & 0 \\ D_x f(a, b) & D_y f(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ D_x f(a, b)v + D_y f(a, b)w \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Zeile folgt sofort $v = 0$, also reduziert sich die zweite Zeile zu $D_y f(a, b)w = 0$. Nach Voraussetzung ist aber die (quadratische!) Matrix $D_y f(a, b)$ invertierbar, also ist auch $w = 0$ und wir haben die benötigte Invertierbarkeit von $DF(a, b)$ nachgewiesen.

Der Umkehrsatz 18.5 liefert uns nun offene Umgebungen $\hat{U} \subseteq G$ von (a, b) und $\hat{V} \subseteq \mathbb{R}^{k+p}$ von $F(a, b) = (a, 0)$, so dass $\hat{F} := F|_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$ ein Diffeomorphismus ist. Gegeben $(v, w) \in \hat{V}$ betrachten wir $(x, y) := \hat{F}^{-1}(v, w)$ und sehen mit der Definition von F , dass

$$(v, w) = \hat{F}(x, y) = (x, f(x, y)).$$

Somit ist $x = v$ und wenn wir die hinteren p Komponenten von $\hat{F}^{-1}$ in der stetig differenzierbare Funktion $\hat{g} : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}^p$ zusammenfassen, erhalten wir

$$\hat{F}^{-1}(v, w) = (v, \hat{g}(v, w)).$$

Diese Funktion $\hat{g}$ erfüllt nun für alle $(x, y) \in \hat{U}$ mit $(x, 0) \in \hat{V}$, dass

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\iff \hat{F}(x, y) = F(x, y) = (x, 0) \\ &\iff (x, y) = \hat{F}^{-1}(x, 0) = (x, \hat{g}(x, 0)) \iff y = \hat{g}(x, 0). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\hat{g}(a, 0) = b$, denn $(a, b) \in \hat{U}$ und $f(a, b) = 0$. Ein Abgleich mit der angestrebten Behauptung im Theorem zeigt, dass die gesuchte Funktion g durch $g(x) := \hat{g}(x, 0)$ gegeben ist.

Zu unserem Glück fehlen uns also nur noch die geeigneten offenen Umgebungen U von a und V von b , so dass $g(U) \subseteq V$ ist, $U \times V \subseteq \hat{U}$ gilt und $(x, 0) \in \hat{V}$ für alle $x \in U$ erfüllt ist.

Wir wissen, dass $\hat{U}$ eine Umgebung von (a, b) ist. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon((a, b)) \subseteq \hat{U}$. Wir nehmen uns nun die Freiheit diese Umgebung bezüglich der ∞ -Norm zu nehmen. Das hat den Vorteil, dass in diesem Fall einfach

$$\begin{aligned} U_\varepsilon((a, b)) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+p} : \|(x, y) - (a, b)\|_\infty < \varepsilon\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+p} : \max\{\max_{j=1}^k |x_j - a_j|, \max_{n=1}^p |y_n - b_n|\} < \varepsilon\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+p} : \|x - a\|_\infty < \varepsilon \text{ und } \|y - b\|_\infty < \varepsilon\} \\ &= U_\varepsilon(a) \times U_\varepsilon(b) \end{aligned}$$

19. Satz über implizite Funktionen

gilt.

Wir setzen zunächst $V := U_\varepsilon(b)$. Dank der Stetigkeit von g in a und wegen $g(a) = b$ gibt es nun ein $\delta \in (0, \varepsilon)$, für das $g(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(b)$ ist. Außerdem können wir δ so klein wählen, dass für alle $x \in U := U_\delta(a)$ auch $(x, 0) \in \widehat{V}$ gilt, denn $(a, 0) \in \widehat{V}$ und $\widehat{V}$ ist offen.

Mit dieser Wahl von U und V ist dann außerdem $g(U) = g(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(b) = V$ und

$$U \times V = U_\delta(a) \times U_\varepsilon(b) \subseteq U_\varepsilon(a) \times U_\varepsilon(b) = U_\varepsilon((a, b)) \subseteq \widehat{U}$$

und damit passt alles zusammen.

Schließlich müssen wir noch die im Theorem angegebene Formel für die Ableitung von g nachrechnen. Dazu differenzieren wir für alle $x \in U$ die Gleichung $f(x, g(x)) = 0$. Das liefert mit viel Kettenregel

$$0 = D_x f(x, g(x)) \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^k} + D_y f(x, g(x)) \cdot Dg(x).$$

Es ist $(x, g(x)) \in U \times V \subseteq \widehat{U}$. Also ist F in einer Umgebung von $(x, g(x))$ umkehrbar und damit $DF(x, g(x))$ invertierbar. Nach (19.1) impliziert das aber, dass $D_y f(x, g(x))$ invertierbar ist. Wir können also obige Gleichung nach $Dg(x)$ auflösen und erhalten

$$D_y f(x, g(x)) \cdot Dg(x) = -D_x f(x, g(x))$$

und damit

$$Dg(x) = -(D_y f(x, g(x)))^{-1} \cdot D_x f(x, g(x)). \quad \square$$

Beispiel 19.3. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x^3 + y_1^3 + y_2^3 &= 7 \\ xy_1 + y_1 y_2 + xy_2 &= -2. \end{cases} \quad (19.2)$$

Eine Lösung dieses Systems ist durch $(a, b_1, b_2) = (2, -1, 0)$ gegeben und wir interessieren uns lokal in einer Umgebung U um den Punkt $a = 2$ für eine Parametrisierung der Lösungsmenge als

$$\{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x \in U \text{ und } (x, y_1, y_2) \text{ löst (19.2)}\} = \{(x, g(x)) : x \in U\} \quad (19.3)$$

durch eine Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$. D. h. wir untersuchen, ob sich das System lokal um $a = 2$ mit dem Parameter x nach y_1 und y_2 auflösen lässt.

Um genau ins Fahrwasser des Satzes über implizite Funktionen 19.2 zu kommen, müssen wir die Gleichungen in (19.2) noch so umformen, dass auf der rechten Seite Null steht. Deshalb definieren wir $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2) \\ f_2(x, y_1, y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 \\ xy_1 + y_1 y_2 + xy_2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Da f offensichtlich stetig differenzierbar ist, bleibt als Voraussetzung noch sicherzustellen, dass $D_y f(a, b_1, b_2) = D_y f(2, -1, 0)$ invertierbar ist. Tatsächlich ist

$$D_y f(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ x + y_2 & y_1 + x \end{pmatrix}, \quad (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2,$$

und damit

$$D_y f(2, -1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar.

Der Satz über implizite Funktionen 19.2 liefert uns also eine offene Umgebung U von $a = 2$, eine offene Umgebung V von $(b_1, b_2) = (-1, 0)$ und die Existenz unserer Auflösungsfunktion $g : U \rightarrow V$ mit $g(2) = (-1, 0)$ und $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$, d. h. wir haben (19.3) erreicht und es sind nahe bei $(2, -1, 0)$ genau $y_1 = g_1(x)$ und $y_2 = g_2(x)$ die Lösungen von (19.2) bei gegebenem $x \in U$.

Nun hätte man g natürlich gerne konkret, das ist aber, wie schon erwähnt im Allgemeinen ein hoffnungsloses Unterfangen, mit dem wir uns hier auch nicht herumplagen wollen. Trotzdem können wir mit wenig Aufwand noch einiges über g herausbringen, denn der Satz über implizite Funktionen macht ja noch eine Aussage über die Ableitung von g . Diese liefert

$$\begin{aligned} g'(2) &= \begin{pmatrix} g'_1(2) \\ g'_2(2) \end{pmatrix} = -(D_y f(2, -1, 0))^{-1} D_x f(2, -1, 0) \\ &= -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3x^2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \Big|_{(x, y_1, y_2) = (2, -1, 0)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition 19.4. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^p)$ und $c \in \mathbb{R}^p$. Dann heißt

$$N_f(c) := \{x \in G : f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$$

Niveaumenge von f zur Höhe c . Im Fall von $d = 2$ und $p = 1$ sagt man auch Niveaulinie oder Höhenlinie.

Bemerkung 19.5. (a) Mit dem Begriff Höhenlinie ist ein bisschen Vorsicht angeraten, denn im Allgemeinen ist diese Menge nicht unbedingt eine Linie. Ein krasses Beispiel ist die Funktion, die konstant c ist, für die dann die Niveaumenge zur Höhe c ganz G ist und alle Niveaumengen zu anderen Höhen einfach leer sind.

Aber es gibt auch weniger banale Beispiele. So ergibt sich für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - y^2$ für die Höhenlinie zur Höhe Null, dass diese wegen

$$N_f(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$$

die Vereinigung der beiden Winkelhalbierenden mit $x = y$ und $x = -y$ ist.

19. Satz über implizite Funktionen

- (b) Der Satz über implizite Funktionen 19.2 hilft uns Situationen zu beschreiben, in denen die Höhenlinie wirklich eine Linie ist. Es sei dazu $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^1(G, \mathbb{R})$. Nehmen wir nun ein $c \in \mathbb{R}$, für das $N_f(c) \neq \emptyset$ gilt und ist $(a, b) \in N_f(c)$, so ist die Frage ob $N_f(c)$, also die Menge aller (x, y) mit $f(x, y) = c$, sich lokal um (a, b) als Linie, d. h. als Graph einer ausreichend glatten Funktion beschreiben lässt, genau die Sorte Frage, für die der Satz über implizite Funktionen gemacht ist.

Dieser sagt nun: Ist $D_y(f(a, b) - c) = \partial_2 f(a, b) \neq 0$, so existieren Umgebungen U von a und V von b , so dass

$$\begin{aligned} N_f(c) \cap (U \times V) &= \{(x, y) \in U \times V : f(x, y) - c = 0\} \\ &= \{(x, g(x)) : x \in U\} \end{aligned}$$

ist mit einer stetig differenzierbaren Funktion $g : U \rightarrow V$. D. h. aber gerade, dass in $U \times V$, also nahe bei (a, b) die Höhenlinie von f durch den Graph einer stetig differenzierbaren reellwertigen Funktion in einer Variablen gegeben ist, er ist also eine Linie.

Gleiches gilt im Falle von $\partial_1 f(a, b) \neq 0$, denn dann kann man in obiger Überlegung die Rollen von x und y vertauschen und bekommt eine Auflösung der Höhenlinie mit $x = \hat{g}(y)$ in einer Umgebung von b .

Zusammen bekommen wir, dass die Höhenlinie einer stetig differenzierbaren Funktion in der Nähe jedes Punktes (a, b) mit $\nabla f(a, b) \neq 0$ eine Linie ist.

Tatsächlich ist bei den Beispielen in Teil (a), in denen wir lokal keine Linie haben, der Gradient der entsprechenden Funktion an dieser Stelle jeweils Null.

Übungsaufgabe 19.6. Zeigen Sie, dass der Gradient immer senkrecht auf der Höhenlinie steht. Präziser formuliert: Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $x_0 \in N_f(c)$ und $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\text{spur}(\gamma) \subseteq N_f(c)$ und $\gamma(0) = x_0$. Zeigen Sie, dass $\nabla f(x_0)$ und $\gamma'(0)$ orthogonal zueinander sind.

20. Untermannigfaltigkeiten

In Bemerkung 19.5 haben wir uns mit „schönen“ und „unschönen“ Höhenlinien in $\mathbb{R}^2$ beschäftigt. Wir wollen diese Betrachtungen nun ausweiten und in beliebiger Dimension d gebogene Linien, Flächen, Hyperflächen u.ä. anschauen. Dabei wollen wir weiterhin nur solche Gebilde zulassen, die lokal wie ein Stückchen verbogener $\mathbb{R}^k$ für ein $k \leq d$ aussehen. Das führt auf den folgenden Begriff.

Definition 20.1. *Es seien $d, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq d$. Ein $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine k -dimensionale (differenzierbare) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$, wenn es für jedes $a \in M$ eine offene Umgebung U von a in $\mathbb{R}^d$ und eine offene Teilmenge V von $\mathbb{R}^d$ gibt, sowie einen Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ mit*

$$\varphi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\}).$$

Flapsig gesprochen ist eine k -dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ also eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, die in einer Umgebung jeder ihrer Punkte diffeomorph so glattgezogen werden kann, dass sie dort wie ein Stückchen k -dimensionaler Raum aussieht. Damit sind 1-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeiten schöne Kurven, 2-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeiten schöne Flächen und $(d-1)$ -dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeiten schöne Hyperflächen in $\mathbb{R}^d$. Eine Visualisierung der Definition gibt Abbildung 20.1, vgl. auch Abbildung 20.2.

Dreht man in obiger Definition an der Glattheitsanforderung an φ , so kann man verschieden edle Formen von Untermannigfaltigkeiten unterscheiden. In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns ausschließlich mit dem oben definierten Fall und lassen deshalb den Zusatz „differenzierbar“ üblicherweise weg. Es ist aber immer eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit gemeint, wenn in diesem Skript nur Untermannigfaltigkeit steht.

Eine Untermannigfaltigkeit erhält man z.B., wenn man den Graph einer stetig differenzierbaren Funktion von $G \subseteq \mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^m$ anschaut. Diese ist d -dimensional und liegt in $\mathbb{R}^{d+m}$. In diesem Fall kann man sogar einen globalen Diffeomorphismus φ konstruieren, der für jedes a im Graph die Voraussetzungen von Definition 20.1 erfüllt. Das wollen wir im folgenden Satz zeigen.

Satz 20.2. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$ und*

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in G\} \subseteq \mathbb{R}^{d+m}.$$

20. Untermannigfaltigkeiten

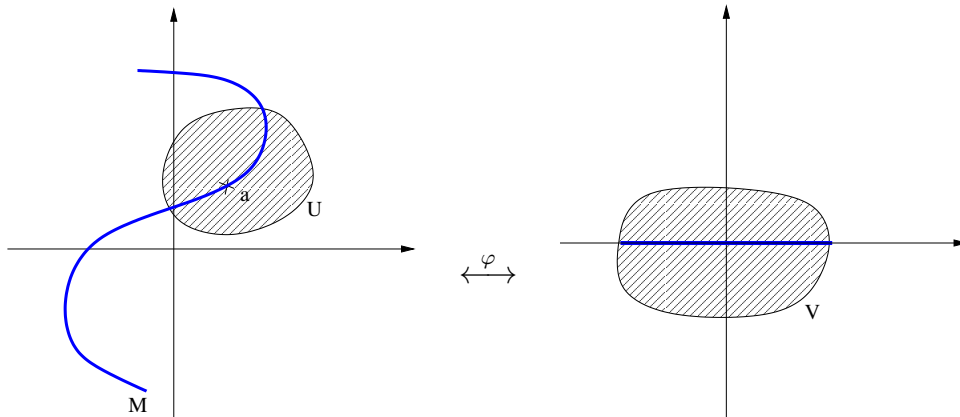


Abbildung 20.1.: Definition einer Untermannigfaltigkeit: In einer Umgebung von a lässt sich die eindimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^2$ zu einem geraden Stück $\mathbb{R}$ diffeomorph glattziehen.

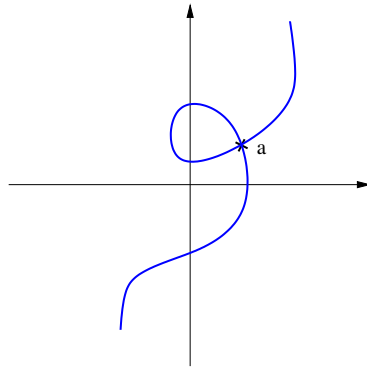


Abbildung 20.2.: Dies ist *keine* Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, denn diese Menge lässt sich in keiner Umgebung von a diffeomorph auf eine Strecke abbilden.

Dann gibt es für $U := G \times \mathbb{R}^m$ einen Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow U$ mit

$$\varphi(\text{graph}(f)) = U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^m}\}).$$

Insbesondere ist $\text{graph}(f)$ eine d -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{d+m}$.

Beweis. Wir definieren $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{d+m}$ für $(x, y) \in U$ als $\varphi(x, y) = (x, y - f(x))$. Diese Funktion ist stetig differenzierbar auf U und es gilt $\varphi(U) \subseteq U$, denn für alle $(x, y) \in U = G \times \mathbb{R}^m$ ist

$$\varphi(x, y) = (x, y - f(x)) \in G \times \mathbb{R}^m = U.$$

Den Nachweis, dass $\varphi : U \rightarrow U$ bijektiv ist, führen wir nun, indem wir die Umkehrfunktion einfach angeben. Dazu definieren wir $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{d+m}$ durch

$\psi(v, z) = (v, z + f(v))$. Mit dieser Wahl gilt für alle $(x, y), (v, z) \in U$

$$\begin{aligned}\psi(\varphi(x, y)) &= \psi(x, y - f(x)) = (x, y - f(x) + f(x)) = (x, y), \\ \varphi(\psi(v, z)) &= \varphi(v, z + f(v)) = (v, z + f(v) - f(v)) = (v, z).\end{aligned}$$

Schließlich sieht man an der Definition von $\varphi^{-1} = \psi$ sofort, dass auch diese Funktion stetig differenzierbar ist. Zusammen ist also $\varphi : U \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus und es gilt

$$\varphi(\text{graph}(f)) = \varphi(\text{graph}(f) \cap U) = U \cap (\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^m}\}).$$

Insbesondere gibt es damit für jedes $a \in \text{graph}(f)$ eine offene Umgebung (nämlich U) und einen Diffeomorphismus auf U (nämlich φ) mit der gewünschten Eigenschaft. Damit ist $\text{graph}(f)$ eine d -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{d+m}$. $\square$

Übungsaufgabe 20.3. (a) Zeigen Sie, dass jeder k -dimensionale affine Teilraum des $\mathbb{R}^d$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ ist.

(b) Es sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ und $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $M \cap O \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann auch $M \cap O$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ ist.

(c) Sind umgekehrt $M \subseteq \mathbb{R}^d$ und $k \in \mathbb{N}$ so, dass für jeden Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^d$ von a existiert, für die $M \cap U$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ ist, so ist M selbst auch eine.

Für unsere angestrebten Betrachtungen, wann die Niveaumengen einer stetig differenzierbaren Funktion schöne Untermannigfaltigkeiten sind, ist es lohnend sich den einfachen Fall einer linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ anzuschauen. Die Niveaumenge $N_T(c) = T^{-1}(\{c\})$ für ein $c \in \mathbb{R}^m$ ist dann die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Tx = c$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass diese für surjektives T ein affiner Teilraum des $\mathbb{R}^d$ der Dimension $d - m$ ist.

Unser Ziel ist nun, wie oben schon angedeutet, eine Beschreibung dieser Niveaumengen für allgemeinere Funktionen. Dabei werden natürlich keine affinen Teilräume mehr herauskommen, aber wir können hoffen, dass für ein stetig differenzierbares $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ und geeignete $c \in \mathbb{R}^m$ die Menge $N_f(c) = f^{-1}(\{c\}) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = c\}$ eine $(d - m)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ ist. Wir brauchen allerdings eine Bedingung an c , die die im Falle der linearen Abbildung gemachte Surjektivitätsvoraussetzung verallgemeinert. Diese wird uns das folgende Begriffspaar liefern.

Definition 20.4. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$.

(a) Ein $x \in G$ wird regulärer Punkt von f genannt, falls die lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ surjektiv ist.

20. Untermannigfaltigkeiten

- (b) Ein $y \in \mathbb{R}^m$ heißt regulärer Wert von f , wenn jedes $x \in f^{-1}(\{y\})$ ein regulärer Punkt von f ist.

Bemerkung 20.5. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Für die regulären Punkte und Werte von $f \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$ ergeben sich die folgenden Zusammenhänge direkt aus der Definition.

- (a) Ist $y \in \mathbb{R}^m$ nicht im Bild von f enthalten, so ist y ein regulärer Wert, aber kein besonders spannender.
- (b) Gilt $d < m$, so kann f keine regulären Punkte haben.
- (c) Da man die Surjektivität einer linearen Abbildung am Rang erkennen kann, ist $x \in G$ genau dann ein regulärer Punkt von f , wenn $\text{rang}(Df(x)) = m$ gilt.

Für $m = 1$ bedeutet das gerade, dass $\nabla f(x) \neq 0$ sein muss.

- (d) Aus dem letzten Punkt ergibt sich, dass y genau dann ein regulärer Wert von f ist, wenn $\text{rang}(Df(x)) = m$ für jedes $x \in f^{-1}(\{y\})$ gilt.

Im Fall $m = 1$ reduziert sich die Bedingung wieder darauf, dass $\nabla f(x) \neq 0$ für jedes $x \in f^{-1}(\{y\})$ gelten muss.

Wir können nun zeigen, dass die Niveaumengen zu Höhen, die einen regulären Wert der betrachteten Funktion darstellen, tatsächlich Untermannigfaltigkeiten sind.

Satz 20.6 (Satz vom regulären Wert). *Es seien $d, m \in \mathbb{N}$ mit $d > m$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$. Ist $c \in f(G)$ ein regulärer Wert von f , so bildet $N_f(c) = f^{-1}(\{c\})$ eine $(d - m)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$.*

Beweis. Sei $a \in N_f(c)$. Nun ist nach der Definition einer Untermannigfaltigkeit unsere Aufgabe eine Umgebung U von a und einen Diffeomorphismus auf U zu finden, der $N_f(c) \cap U$ glattzieht.

Nach Voraussetzung ist a ein regulärer Punkt von f , womit wir wissen, dass die $\mathbb{R}^{m \times d}$ -Matrix $Df(a)$ Rang m und damit m linear unabhängige Spalten hat. Wir benennen die Koordinaten zu diesen m linear unabhängigen Spalten $y_1, y_2, \dots, y_m$ und die restlichen $x_1, x_2, \dots, x_{d-m}$.

Damit können wir nun die Funktion $\hat{f}(x, y) = f(x, y) - c$ für $(x, y) \in G$ betrachten und unser Ziel wird es sein, den Satz über implizite Funktionen 19.2 auf $\hat{f}$ anzuwenden. Dazu beobachten wir zunächst, dass mit $(x_0, y_0) := a$ gilt $\hat{f}(x_0, y_0) = f(a) - c = 0$. Desweiteren hat nach der obigen Koordinatenwahl die $(m \times m)$ -Matrix $D_y \hat{f}(a) = D_y f(a)$ Rang m , ist also invertierbar.

Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren damit offene Umgebungen $X \subseteq \mathbb{R}^{d-m}$ von x_0 und $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ von y_0 mit $X \times Y \subseteq G$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : X \rightarrow Y$, so dass für alle $(x, y) \in X \times Y$ gilt

$$\hat{f}(x, y) = 0 \iff y = g(x), \quad \text{d. h.} \quad f(x, y) = c \iff y = g(x).$$

Damit ist

$$N_f(c) \cap (X \times Y) = \{(x, y) \in U \times V : y = g(x)\} = \text{graph}(g).$$

Nach Satz 20.2 ist $N_f(c) \cap (X \times Y)$ eine $(d - m)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ und nach Übungsaufgabe 20.3 ist $N_f(c)$ auch eine solche. $\square$

Beispiel 20.7. (a) Wir betrachten in $\mathbb{R}^d$ die *Euklidische d -Sphäre*

$$S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$$

und zeigen, dass diese eine $(d - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ ist. Dazu betrachten wir die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \|x\|_2^2$. Für diese gilt $S^{d-1} = f^{-1}(\{1\})$. Nach dem Satz vom regulären Wert 20.6 müssen wir also nur noch sicherstellen, dass 1 ein regulärer Wert von f ist.

Für $x \in f^{-1}(\{1\})$ gilt $\|x\|_2^2 = 1$, also $\|x\|_2 = 1$ und damit insbesondere $x \neq 0$. Weiter ist damit, vgl. Beispiel 14.4(b),

$$\nabla f(x) = \nabla(x \mapsto \langle x, x \rangle) = 2x^T \neq 0,$$

d. h. 1 ist ein regulärer Wert von f nach Bemerkung 20.5(d).

(b) Für eine gegebene symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit $\det(A) \neq 0$ betrachten wir

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^d : x^T A x = 1\}.$$

Eine solche Menge wird *Kegelschnitt* oder *Quadrik* genannt. Sie ist eine $(d - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$, denn für die Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^T A x$ ist $Q = f^{-1}(\{1\})$ und da dank der Invertierbarkeit von A für alle $x \neq 0$ auch $\nabla f(x) = 2x^T A \neq 0$ ist, ist 1 ein regulärer Wert von f .

Definition 20.8. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ und $x_0 \in M$. Dann heißt $v \in \mathbb{R}^d$ Tangentialvektor von M in x_0 , falls es ein $\varepsilon > 0$ und eine differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ gibt mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$. Die Menge

$$T_{x_0}M := \{v \in \mathbb{R}^d : v \text{ Tangentialvektor von } M \text{ in } x_0\}$$

heißt Tangentialraum von M in x_0 .

Beispiel 20.9. Das einfachste Beispiel einer Untermannigfaltigkeit ist ein affiner Raum und anschaulich erwarten wir, dass der zugehörige Tangentialraum der den affinen Raum aufspannende Untervektorraum ist. Das wollen wir nun sauber nach Definition nachweisen. Für einen Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^d$ des $\mathbb{R}^d$, $p \in \mathbb{R}^d$ und $M := \{p + u : u \in U\}$ ist also zu zeigen, dass $T_{x_0}M = U$ für alle $x_0 \in M$ gilt.

20. Untermannigfaltigkeiten

Für die Inklusion „ $\subseteq$ “ sei dazu $v \in T_{x_0}M$. Dann gibt es nach Definition ein $\varepsilon > 0$ und eine differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$. Da γ eine Kurve in M ist, gilt $\gamma = p + \nu$ mit einer differenzierbaren Kurve $\nu : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$. Nun ist U ein Untervektorraum, weshalb für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ der Differenzenquotient $(\nu(t) - \nu(0))/t$ in U liegt. Schließlich ist U abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$, also gilt

$$v = \gamma'(0) = \nu'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\nu(t) - \nu(0)}{t} \in U.$$

Wir zeigen noch die Inklusion „ $\supseteq$ “ und wählen dazu ein $v \in U$. Dann ist durch $\gamma : (-1, 1) \rightarrow M$ mit $\gamma(t) = x_0 + tv$ eine differenzierbare Kurve in M gegeben, für die $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$ gilt, also ist $v \in T_{x_0}M$ und wir sind fertig.

Übungsaufgabe 20.10. Ist M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$, $x_0 \in M$ und $O \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Umgebung von x_0 , so gilt $T_{x_0}M = T_{x_0}(M \cap O)$. Mit anderen Worten: Der Tangentialraum hängt nur von der lokalen Struktur von M nahe x_0 ab.

Wir können nun zeigen, dass der Tangentialraum seinen Namen zurecht trägt.

Satz 20.11. Ist M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$, so ist für jedes $x_0 \in M$ der Tangentialraum $T_{x_0}M$ ein k -dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^d$.

Beweis. Sei $x_0 \in M$. Dann gibt es nach der Definition einer Untermannigfaltigkeit eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^d$ von x_0 und eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^d$, sowie einen Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ mit

$$\varphi(M \cap U) = (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\}) \cap V =: N \cap V.$$

Die Anschauung, dass ein Diffeomorphismus die Struktur der Differenzierbarkeit überträgt, wollen wir uns nun folgendermaßen zunutzen machen:

Ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \cap U$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = x_0$, so ist $\hat{\gamma} := \varphi \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N \cap V$ eine differenzierbare Kurve mit $\hat{\gamma}(0) = \varphi(x_0)$. Ferner ist jede differenzierbare Kurve $\hat{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N \cap V$ mit $\hat{\gamma}(0) = \varphi(x_0)$ von dieser Form — wir können ja einfach $\gamma := \varphi^{-1} \circ \hat{\gamma}$ betrachten. Weil nach Kettenregel

$$\hat{\gamma}'(0) = D\varphi(\gamma(x_0))\gamma'(0) = D\varphi(x_0)\gamma'(0)$$

gilt, und die möglichen Werte von $\hat{\gamma}'(0)$ und $\gamma'(0)$ gerade die entsprechenden Tangentialräume beschreiben, folgt

$$T_{\varphi(x_0)}(N \cap V) = D\varphi(x_0)(T_{x_0}(M \cap U)).$$

Nach Satz 18.3 über die Ableitung der Umkehrfunktion eines Diffeomorphismus ist $D\varphi(x_0)$ invertierbar und wir erhalten

$$T_{x_0}(M \cap U) = D\varphi(x_0)^{-1}(T_{\varphi(x_0)}(N \cap V)).$$

Nun nutzen wir noch, dass nach Übungsaufgabe 20.10 $T_{\varphi(x_0)}(N \cap V) = T_{\varphi(x_0)}(N)$ gilt und dass nach Beispiel 20.9 der Untervektorraum N sein eigener Tangentialraum ist. Zusammengefasst ist

$$T_{x_0}(M \cap U) = D\varphi(x_0)^{-1}(N)$$

als isomorphes Bild eines k -dimensionalen Untervektorraums selbst ein solcher. $\square$

Ist die Untermannigfaltigkeit als Niveauläche einer Funktion in einem regulären Wert gegeben, vgl. den Satz vom regulären Wert 20.6, so können wir den Tangentialraum durch die Ableitung dieser Funktion genauer beschreiben.

Satz 20.12. *Es seien $d, m \in \mathbb{N}$ mit $d > m$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$. Ist $c \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von f , so gilt für $M := f^{-1}(\{c\})$ in jedem $x_0 \in M$*

$$T_{x_0}M = \ker(Df(x_0)) = \{v \in \mathbb{R}^d : Df(x_0)v = 0\}.$$

Beweis. Sei zunächst $v \in T_{x_0}M$ und $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine zugehörige differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$. Dann ist $\gamma(t) \in M = N_f(c)$ für jedes $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, es ist also $f(\gamma(t)) = c$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Differenzieren wir diese Gleichung, so erhalten wir $Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und damit insbesondere für $t = 0$

$$Df(x_0)v = Df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0,$$

d. h. $v \in \ker(Df(x_0))$. Bisher haben wir also $T_{x_0}M \subseteq \ker(Df(x_0))$ gezeigt. Um Gleichheit zu bekommen, genügt es noch zu zeigen, dass diese beiden Untervektorräume die gleiche Dimension haben.

Nach Satz 20.11 ist $\dim(T_{x_0}M) = d - m$. Da x_0 nach Voraussetzung ein regulärer Punkt von f ist, ist $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ surjektiv und die Dimensionsformel liefert

$$\dim(\ker(Df(x_0))) = d - \text{rang}(Df(x_0)) = d - m = \dim(T_{x_0}M). \quad \square$$

Nun da wir den Tangentialraum im Griff haben, können wir uns den auf einer Untermannigfaltigkeit senkrecht stehenden Vektoren, den Normalenvektoren zuwenden.

Definition 20.13. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Untermannigfaltigkeit und $x_0 \in M$. Der Untervektorraum von $\mathbb{R}^d$*

$$N_{x_0}M := (T_{x_0}M)^\perp = \{v \in \mathbb{R}^d : \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in T_{x_0}M\}$$

heißt Normalenraum von M in x_0 und jedes $v \in N_{x_0}M$ heißt Normalenvektor an M in x_0 .

20. Untermannigfaltigkeiten

Im Fall, dass die Untermannigfaltigkeit als reguläre Niveauläche einer Funktion gegeben ist, können wir auch den Normalenraum mit Hilfe dieser Funktion beschreiben.

Satz 20.14. *Es seien $d, m \in \mathbb{N}$ mit $d > m$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$, $c \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von f und $M = f^{-1}(\{c\})$. Dann gilt für jedes $x_0 \in M$*

$$N_{x_0}M = \text{span}\{\nabla f_1(x_0), \nabla f_2(x_0), \dots, \nabla f_m(x_0)\}.$$

Beweis. Nach Satz 20.12 ist $T_{x_0}M = \ker(Df(x_0))$. Per Definition ist das orthogonale Komplement der linken Seite gerade $N_{x_0}M$ und aus der linearen Algebra wissen wir, dass das orthogonale Komplement der rechten Seite $\text{ran}(Df(x_0)^T)$, das Bild der transponierten Matrix, ist. Folglich ist $N_{x_0}M = \text{ran}(Df(x_0)^T)$. Dieser Raum wird von den Spalten von $Df(x_0)^T$, d. h. den Zeilen $\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_m(x_0)$ von $Df(x_0)$ aufgespannt. $\square$

Beispiel 20.15. Wir nehmen das Beispiel der Euklidischen d -Sphäre S^{d-1} in $\mathbb{R}^d$ aus 20.7(a) wieder auf und bestimmen den Normalenraum. Wir hatten bereits gesehen, dass $S^{d-1} = f^{-1}(\{1\})$ gilt, wobei 1 ein regulärer Wert der Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \|x\|_2^2$ ist.

Nach Satz 20.14 ist der Normalenraum durch den Aufspann der Gradienten der Koordinatenfunktionen von f gegeben. Das ist hier nur eine, es gilt also für jedes $x_0 \in S^{d-1}$

$$N_{x_0}S^{d-1} = \text{span}\{\nabla f(x_0)\} = \text{span}\{2x_0\} = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Der Tangentialraum $T_{x_0}S^{d-1}$ ist dann das orthogonale Komplement davon.

21. Extrema unter Nebenbedingungen

Mit dem Auffinden von Extrema von Funktionen haben wir uns bereits in Abschnitt 17 beschäftigt. In vielen Problemen, vor allem auch in solchen die aus Anwendungen kommen, ist die Auswahl der erlaubten Konfigurationen aber eingeschränkt, was sich mathematisch darin ausdrückt, dass man die Extrema einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ nicht in ganz $\mathbb{R}^d$ oder in einer offenen Teilmenge davon sucht, sondern nur auf einer Untermannigfaltigkeit von kleinerer Dimension.

Definition 21.1. Sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen f hat in $x_0 \in M$ ein Maximum (Minimum) auf M , wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) für alle $x \in M \cap U$. Liegt ein solches Maximum oder Minimum vor, so spricht man wieder von einem Extremum auf M .

Ein übersichtliches konkretes Beispiel wäre die Frage nach Maximalwerten der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - y^3$ auf $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

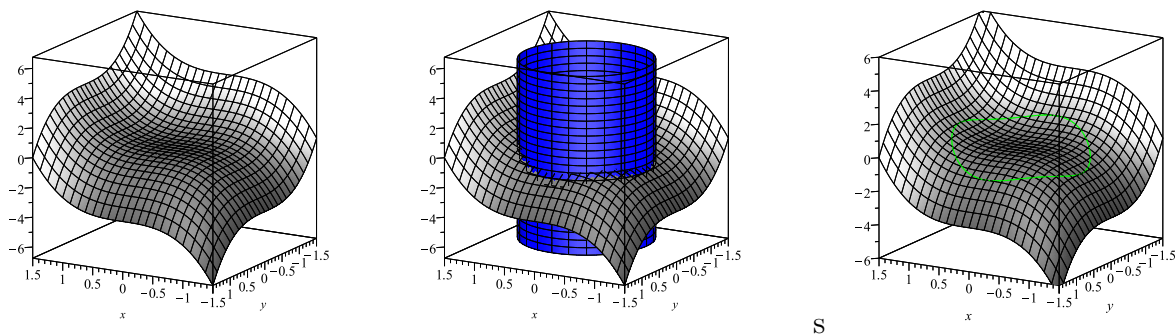


Abbildung 21.1.: Links der Graph der Funktion $f(x, y) = x^3 - y^3$, in der Mitte der selbe Graph mit dem Zylinder, dessen Rand genau S^1 ist. Rechts die Schnittlinie des Zylinders mit dem Graphen. Der Maximalwert von f auf S^1 entspricht dem höchsten Punkt auf dieser grünen Linie.

Unsere Ergebnisse aus Kapitel 17 helfen hier nicht weiter, denn an diesen Maximalstellen wird der Gradient von f im Allgemeinen nicht Null, wie man auch in

21. Extrema unter Nebenbedingungen

Abbildung 21.1 erkennt.

Zur Lösung des Problems wollen wir uns die Sache von der Anschauung her betrachten. Ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so können wir uns diese durch ihr Höhenlinienbild veranschaulichen. Denken Sie z.B. an eine Landkarte. Eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ erzeugt nun so wie in Abbildung 21.1 einen Weg in dieser Landschaft. Woran erkennt man nun einen Punkt, an dem dieser Weg auf maximaler Höhe liegt? Bis zum Scheitelpunkt des Weges schneiden wir im Laufen die Höhenlinien nach oben und am Scheitelpunkt erreichen wir genau eine Höhenlinie ohne diese zu überqueren und steigen dann wieder ab. Wir berühren die maximale Höhenlinie also *tangential*, d. h. am Scheitelpunkt muss die Höhenlinie genau dem Tangentialraum der Mannigfaltigkeit parallel sein.

In Übungsaufgabe 19.6 haben Sie gezeigt, dass der Gradient von f immer senkrecht auf der Höhenlinie steht, wir würden also vermuten, dass die Extremalstellen von f auf M dadurch ausgezeichnet sind, dass der Gradient im Normalenraum von M liegt. Tatsächlich ergibt das ein notwendiges Kriterium für Extrema auf M .

Satz 21.2. *Sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $M \subseteq G$ und $f \in C^1(G, \mathbb{R})$. Hat f in $x_0 \in M$ ein Extremum auf M , so ist $\nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass wenn $x_0 \in M$ eine Extremalstelle von f auf M ist, immer $\langle \nabla f(x_0)^T, v \rangle = 0$ für jedes $v \in T_{x_0}M$ gilt.

Sei also $v \in T_{x_0}M$. Dann gibt es nach Definition eine differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$. Da γ nach M abbildet und $\gamma(0) = x_0$ eine Extremalstelle von f auf M ist, hat $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Extremum an der Stelle $t = 0$. Nach dem bekannten notwendigen Kriterium aus der Analysis I gilt dann

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

und wir sind fertig. □

Bemerkung 21.3. Richtig interpretiert ist obiger Satz auch ein Kriterium, in dem so etwas wie ein Gradient Null sein muss. Da $\mathbb{R}^d = N_{x_0}M \oplus T_{x_0}M$ gilt, können wir den Gradienten von f in x_0 in seine jeweiligen Anteile normal und tangential zu M zerlegen. Das Kriterium $\nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$ bedeutet dann, dass der tangential Anteil von ∇f in x_0 Null sein muss, damit dort eine Extremalstelle auf M vorliegen kann.

In Satz 20.14 haben wir den Normalenraum für eine Untermannigfaltigkeit, die als reguläre Niveaufäche einer Funktion entsteht, genauer beschreiben können. Dieses gibt zusammen mit obigem Satz ein starkes Hilfsmittel zur Bestimmung von Extrema unter Nebenbedingungen.

Satz 21.4 (Methode von Lagrange). *Es seien $d, m \in \mathbb{N}$ mit $d > m$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R})$ sowie $g \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$, $c \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von g und $M := g^{-1}(\{c\}) \neq \emptyset$. Hat dann f in $x_0 \in M$ ein Extremum auf M , so gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (sogenannte Lagrange-Multiplikatoren) mit*

$$\nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(x_0).$$

Beweis. Wir müssen nur noch alles zusammensetzen. Hat f in $x_0 \in M$ ein Extremum, so muss nach Satz 21.2 der Vektor $\nabla f(x_0)$ in $N_{x_0}M$ liegen. Nach Satz 20.14 ist also

$$\nabla f(x_0) \in N_{x_0}M = \text{span}\{\nabla g_1(x_0), \nabla g_2(x_0), \dots, \nabla g_m(x_0)\},$$

was uns genau die gesuchten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ liefert. □

Wir kehren nun zum Beispiel vom Beginn des Kapitels zurück.

Beispiel 21.5. Wir suchen die Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - y^3$ auf

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = g^{-1}(\{1\}) \quad \text{für} \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

Man sagt dann auch: Wir suchen die Extrema von f unter der *Nebenbedingung* $x^2 + y^2 = 1$.

Wir haben es hier nur mit einer Nebenbedingung zu tun und in Satz 21.4 ist $m = 1$. Wir wissen schon aus Beispiel 20.7(a), dass 1 ein regulärer Wert von g ist, und können damit Satz 21.4 anwenden. Die Extremstellen von f können also nur an den Stellen $x_0 \in S^1$ liegen, für die es jeweils ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$. Das führt auf

$$(3x^2, -3y^2) = \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) = \lambda(2x, 2y).$$

Löst man das resultierende Gleichungssystem

$$\begin{cases} 3x^2 &= 2\lambda x \\ -3y^2 &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1, \end{cases}$$

so erhält man die sechs kritischen Punkte

$$(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \text{ und } (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}).$$

Nicht alle diese kritischen Punkte müssen nun Extremstellen sein. Hier kommt uns zugute, dass die Mannigfaltigkeit S^1 kompakt und f stetig ist. Nach Satz 9.1

21. Extrema unter Nebenbedingungen

muss f also auf S^1 mal mindestens eine Maximal- und eine Minimalstelle haben. Setzen wir die kritischen Stellen in f ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= f(0, -1) = 1, \\ f(-1, 0) &= f(0, 1) = -1, \\ f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) &= 1/\sqrt{2}, \\ f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) &= -1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Also sind $(1, 0)$ und $(0, -1)$ die Maximalstellen von f auf S^1 mit Funktionswert 1 und $(-1, 0)$ sowie $(0, 1)$ die Minimalstellen auf S^1 mit Funktionswert -1 .

Die Lagrange-Methode dient aber nicht nur zur Lösung konkreter Optimierungsprobleme, sondern kann auch theoretisch mit Gewinn eingesetzt werden. Zur Demonstration wollen wir hier mit ihrer Hilfe einen wichtigen Satz der linearen Algebra noch einmal beweisen.

Satz 21.6 (Spektralsatz für symmetrische Matrizen). *Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch. Dann existieren $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d \in \mathbb{R}$ und eine Orthonormalbasis $x_1, x_2, \dots, x_d$ des $\mathbb{R}^d$ mit $Ax_j = \lambda_j x_j$ für jedes $j = 1, 2, \dots, d$.*

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass sich dieser Satz per vollständiger Induktion nach der Dimension d beweisen lässt, sofern wir zeigen können, dass jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ überhaupt einen Eigenwert besitzt. Diesen Teil erledigt die Analysis nun sehr effizient und liefert darüberhinaus eine Formel für den größten Eigenwert.

Lemma 21.7. *Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine symmetrische Matrix. Dann ist*

$$\lambda := \max_{x \in S^{d-1}} \langle x, Ax \rangle$$

ein Eigenwert von A und jedes $x_0 \in S^{d-1}$ mit $\langle x_0, Ax_0 \rangle = \lambda$ ist ein zugehöriger Eigenvektor. Weiterhin ist λ der größte Eigenwert von A .

Beweis. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \langle x, Ax \rangle$ auf der Untermannigfaltigkeit S^{d-1} und beschreiben letztere durch $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \|x\|_2^2$ als $S^{d-1} = g^{-1}(\{1\})$, vgl. Beispiel 20.7 (a).

Da S^{d-1} kompakt und f stetig ist, muss f auf S^{d-1} eine Maximalstelle $x_0 \in S^{d-1}$ haben. Nach dem Satz von Lagrange in der Formulierung aus Satz 21.2 und Beispiel 20.7 (a) gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

Die beiden Gradienten der quadratischen Formen haben wir in Beispiel 14.4 berechnet zu

$$2x_0^T A = 2\lambda x_0^T$$

woraus sich schließlich $Ax_0 = \lambda x_0$ ergibt. Also ist λ ein Eigenwert von A und jedes solche $x_0 \in S^{d-1}$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Es bleibt zu zeigen, dass das gefundene λ der größte Eigenwert von A ist. Ist aber μ irgendein anderer Eigenwert, so ist μ reell (A ist symmetrisch) und mit $v \in S^{d-1}$ einem zugehörigen normierter Eigenvektor erhalten wir

$$\mu = \langle v, \mu v \rangle = \langle v, Av \rangle = f(v) \leq f(x_0) = \lambda. \quad \square$$

22. Parameterintegrale

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit ganz gewöhnlichen eindimensionalen Integralen, allerdings lassen wir sie nun von einem (oder mehreren) Parametern abhängen und interessieren uns für die Abhängigkeit des Integrals von diesem Parameter. Dabei werden uns dann unsere Erkenntnisse über die Differentiation von Funktionen in mehreren Variablen helfen. Die betrachteten Fragestellungen ersieht man aus folgendem Beispiel.

Beispiel 22.1. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$g(x) := \int_1^2 \frac{e^{xy} - e^y}{y} dy.$$

Für das Integral ist x ein Parameter, deshalb nennt man ein solches *Parameterintegral*. Wir interessieren uns nun für die Abhängigkeit des Integralwerts von diesem Parameter, also für die Funktion g . Ist diese stetig, wenn der Integrand stetig ist? Unter welchen Voraussetzungen ist sie differenzierbar?

Für die erste Frage im obigen Beispiel gibt es eine positive Antwort.

Satz 22.2. *Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ offen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$g(x) = \int_a^b f(x, y) dy, \quad x \in X,$$

stetig.

Beweis. Wir verwenden in diesem Beweis die ∞ -Norm. Es sei weiterhin $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$.

Da X offen ist, können wir ein $\varrho > 0$ finden, für das $U_{2\varrho}(x_0) \subseteq X$ gilt. Dann ist für $K_\varrho(x_0) = \overline{U_\varrho(x_0)}$ die Menge $K_\varrho(x_0) \times [a, b]$ in $X \times [a, b]$ enthalten und kompakt. Wir bekommen also aus Satz 9.4, dass f auf $K_\varrho(x_0) \times [a, b]$ sogar gleichmäßig stetig ist. Folglich existiert ein $\delta \in (0, \varrho)$, so dass für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K_\varrho(x_0) \times [a, b]$ gilt

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty < \delta \implies \|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Weil insbesondere für alle $x \in U_\delta(x_0)$ und alle $y \in [a, b]$ gilt, dass

$$\|(x, y) - (x_0, y)\|_\infty = \|x - x_0\|_\infty < \delta,$$

22. Parameterintegrale

erhalten wir für alle $x \in U_\delta(x_0)$ nach der Standardabschätzung für Integrale

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \int_a^b f(x, y) \, dy - \int_a^b f(x_0, y) \, dy \right| \\ &= \left| \int_a^b (f(x, y) - f(x_0, y)) \, dy \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, y) - f(x_0, y)| \, dy < (b - a) \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 22.3. Obiger Satz gilt auch falls X statt als offen als kompakt vorausgesetzt wird. Sehen Sie warum?

Wir wollen uns nun der zweiten Frage zuwenden, also unter welchen Umständen die Funktion g sogar differenzierbar ist. Damit das funktionieren kann, sollte natürlich zumindest einmal die Funktion f nach x differenzierbar sein. Aber selbst dann ist es kein Selbstläufer, denn um das auszunutzen müssten wir ja die Differentiation, die wir ausführen wollen, unter das Integralzeichen schieben, d. h. wir müssen dazu zwei Grenzwerte vertauschen, was bekanntlich immer eine delikate Angelegenheit ist. Tatsächlich haben wir hier Glück und das Differenzieren unter dem Integral ist unter sehr schwachen Voraussetzungen erlaubt.

Satz 22.4 (Differentiation unter dem Integral). *Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $[a, b] \times [c, d] \subseteq G$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy.$$

Existiert $\partial_1 f : G \rightarrow \mathbb{R}$ und ist stetig, so ist g stetig differenzierbar auf $[a, b]$ und es gilt

$$g'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x, y) \, dy, \quad x \in [a, b].$$

Beweis. Über den Differenzenquotienten ist

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_c^d f(x+h, y) \, dy - \int_c^d f(x, y) \, dy \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_c^d \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \, dy. \end{aligned}$$

Daran sieht man nun deutlich, dass unser einziges Problem ist, den Limes unter das Integral zu bekommen. Gelingt uns dieses, so erhalten wir im Integranden genau $\partial_1 f(x, y)$ und die resultierende Ableitungsfunktion g' ist nach Satz 22.2 auch stetig, den $\partial_1 f$ ist ja stetig vorausgesetzt.

Im letzten Semester haben wir in Satz I.30.13 festgestellt, dass wir den Grenzwert in das Integral holen können, wenn die Konvergenz im Integranden gleichmäßig ist. Das müssen wir nun nachweisen. Dazu sei also $\varepsilon > 0$.

Nach Voraussetzung ist $\partial_1 f$ auf der kompakten Menge $[a, b] \times [c, d]$ stetig, also ist wieder mit Satz 9.4 diese Funktion dort sogar gleichmäßig stetig. Das liefert uns auf die gleiche Weise wie im Beweis von Satz 22.2 ein $\delta > 0$, so dass für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ und alle $y \in [c, d]$ gilt

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |\partial_1 f(x_1, y) - \partial_1 f(x_2, y)| < \varepsilon.$$

Es sei nun $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ und $h \in \mathbb{R}$ sei so, dass zum Einen $x + h \in [a, b]$ gilt und zum Anderen $|h| < \delta$ ist. Dann bekommen wir aus dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen 0 und h (und damit insbesondere $|\xi| < |h| < \delta$) für das gilt:

$$\left| \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} - \partial_1 f(x, y) \right| = |\partial_1 f(x + \xi, y) - \partial_1 f(x, y)| < \varepsilon.$$

Dabei ist die Wahl unseres δ nur von ε und nicht von y abhängig, wir haben also gleichmäßige Konvergenz nachgewiesen und sind damit nach den obigen Überlegungen fertig. $\square$

Beispiel 22.5. (a) Wir kehren zum Ausgangsbeispiel 22.1 zurück und betrachten das Parameterintegral

$$g(x) = \int_1^2 \frac{e^{xy} - e^y}{y} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hier ist der Integrand $f(x, y) = (e^{xy} - e^y)/y$ für $y \in [1, 2]$ offensichtlich stetig und außerdem nach x stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{ye^{xy}}{y} = e^{xy}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in [1, 2].$$

Wir können also Satz 22.4 anwenden und erhalten, dass g auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist mit

$$g'(x) = \int_1^2 \partial_1 f(x, y) dy = \int_1^2 e^{xy} dy.$$

Für $x = 0$ ist damit

$$g'(0) = \int_1^2 1 dy = (2 - 1) = 1$$

und für $x \neq 0$ finden wir

$$g'(x) = \frac{1}{x} e^{xy} \Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{e^{2x} - e^x}{x}.$$

Man beachte, dass wir damit g' explizit bestimmen konnten, während das g definierende Integral nicht elementar integrierbar ist.

22. Parameterintegrale

- (b) Wir können nun den Schwierigkeitsgrad etwas erhöhen. Für $x > 0$ betrachten wir

$$h(x) := \int_{x+1}^{x^2} f(x, y) \, dy = \int_{x+1}^{x^2} \frac{e^{xy} - e^y}{y} \, dy$$

und suchen auch hier die Ableitung. Das Problem ist dabei, dass nun auch die Integralgrenzen von x abhängen und man gar nicht weiß, wo man anfangen soll abzuleiten. Hier kann uns, vielleicht etwas unerwartet, die mehrdimensionale Differentialrechnung helfen. Wir betrachten als Hilfsfunktion $\varphi : (0, \infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x, u, v) = \int_u^v \frac{e^{xy} - e^y}{y} \, dy.$$

Wir haben damit die drei Aufkommen von x in h voneinander entkoppelt, bekommen aber h zurück durch $h(x) = \varphi(x, x+1, x^2)$ für $x > 0$. Nun bekommen wir mit der Kettenregel

$$h'(x) = \nabla \varphi(x, x+1, x^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen von φ bekommen wir zum Einen aus Satz 22.4, vgl. auch Teil (a), zu

$$\partial_1 \varphi(x, u, v) = \int_u^v \partial_1 f(x, y) \, dy = \int_u^v e^{xy} \, dy = \frac{e^{xy}}{x} \Big|_{y=u}^{y=v} = \frac{e^{vx} - e^{ux}}{x}.$$

Zum Anderen haben wir die Unbekannte in der Integralgrenze stehen. Hier bekommen wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\partial_2 \varphi(x, u, v) = -\frac{e^{xu} - e^u}{u} \quad \text{und} \quad \partial_3 \varphi(x, u, v) = \frac{e^{xv} - e^v}{v}.$$

Nun müssen wir nur noch alles zusammensetzen:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\partial_1 \varphi(x, x+1, x^2), \partial_2 \varphi(x, x+1, x^2), \partial_3 \varphi(x, x+1, x^2)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{e^{x^2 \cdot x} - e^{(x+1)x}}{x}, -\frac{e^{x(x+1)} - e^{x+1}}{x+1}, \frac{e^{x \cdot x^2} - e^{x^2}}{x^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x} (e^{x^3} - e^{x^2} e^x) - \frac{1}{x+1} (e^{x^2} e^x - e^x e) + \frac{2x}{x^2} (e^{x^3} - e^{x^2}) \\ &= \frac{1}{x} (3e^{x^3} - e^{x^2} (e^x + 2)) - \frac{e^x}{x+1} (e^{x^2} - e). \end{aligned}$$

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir uns noch Integrale von Parameterintegralen anschauen. Wir betrachten dazu für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$ eine stetige Funktion $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ und wieder wie oben $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy, \quad x \in [a, b].$$

Nach Satz 22.2 zusammen mit Bemerkung 22.3 ist dann auch g stetig und wir können das Integral von g über $[a, b]$ anschauen. Natürlich kann man das auch in der umgekehrten Reihenfolge der Variablen machen und die natürliche Frage, die sich daraus ergibt, ist, ob

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

gilt? Da hier mal wieder zwei Grenzwerte vertauscht werden, ist das eine interessante Frage, deren Antwort der folgende Satz gibt.

Satz 22.6 (Satz von Fubini). *Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Ist $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Beweis. Für $t \in [c, d]$ betrachten wir die Funktion $h : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x, t) = \int_c^t f(x, y) \, dy.$$

Diese Funktion ist stetig, wie wir am Ende des Beweises noch nachweisen werden. Also können wir sie von a bis b über x integrieren und erhalten nach Satz 22.2 die ebenfalls stetige Funktion

$$F(t) := \int_a^b h(x, t) \, dx = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) \, dy \right) dx, \quad t \in [c, d].$$

Es gilt sogar noch mehr, denn h ist nach dem Hauptsatz in der zweiten Koordinaten differenzierbar mit $\partial_2 h(x, t) = f(x, t)$ und diese Ableitungsfunktion ist stetig. Also ist nach Satz 22.4 die Funktion F stetig differenzierbar mit

$$F'(t) = \int_a^b \partial_2 h(x, t) \, dx = \int_a^b f(x, t) \, dx.$$

Somit ist F eine Stammfunktion für das auf der rechten Seite der Behauptung zu berechnende Integral in y und mit dem Hauptsatz erhalten wir

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = F(d) - F(c) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx - 0$$

22. Parameterintegrale

wie gewünscht.

Es bleibt noch die Stetigkeit von h zu zeigen. Sei dazu (x_n, t_n) eine Folge in $[a, b] \times [c, d]$ mit Grenzwert (x, t) . Wir schreiben

$$\begin{aligned} h(x_n, t_n) - h(x, t) &= (h(x_n, t_n) - h(x_n, t)) + (h(x_n, t) - h(x, t)) \\ &= \int_t^{t_n} f(x_n, y) \, dy + \int_c^t f(x_n, y) - f(x, y) \, dy \end{aligned}$$

und begründen, dass für $n \rightarrow \infty$ beide Integrale gegen 0 konvergieren. Für das zweite Integral folgt dies direkt Satz 22.2. Für das erste Integral nutzen wir, dass f als stetige Funktion auf der kompakten Mengen $[a, b] \times [c, d]$ beschränkt ist und erhalten

$$\left| \int_t^{t_n} f(x_n, y) \, dy \right| \leq |t_n - t| \|f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad \square$$

23. Kurvenintegrale

Arbeit ist Kraft mal Weg, oder, wenn die Kraft über die zurückgelegte Strecke nicht konstant, sondern eine Funktion $f(x)$ mit $x \in [a, b]$, ist, so bekommt man die Arbeit als das Integral $\int_a^b f(x) dx$. Heuristisch „summiert“ man dabei das Produkt der an der Stelle $x \in [a, b]$ wirkenden Kraft $f(x)$ mit dem infinitesimalen Wegstück dx .

Was machen wir nun, wenn die Kraft auf einen Gegenstand wirkt, der sich entlang einer gebogenen Linie bewegt? Zunächst mal wissen wir, wie wir die Linie beschreiben können, denn im Kapitel 12 haben wir uns ja schon mit Kurven beschäftigt. Wir wollen nun in diesem Abschnitt klären, wie wir eine Funktion entlang einer Kurve integrieren können.

Dabei müssen wir ein wenig aufpassen, denn wir haben ja schon festgestellt, dass wir ein und dieselbe Linie durch viele verschiedene Kurven beschreiben können und es sollte für den Wert der Arbeit, die anfällt um einen Gegenstand entlang eines vorgegebenen Weges von A nach B zu bringen, unerheblich sein, welche spezielle Parametrisierung des Weges wir nutzen. Wir brauchen also einen Integralbegriff, der unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen invariant ist. (Bei orientierungsumkehrenden Umparametrisierungen sollte der Wert des Integrals das Vorzeichen wechseln.)

In diesem gesamten Abschnitt sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Definition 23.1. Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ eine stetig differenzierbare Kurve, so heißt

$$\int_{\gamma} f(x) dx := \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Kurvenintegral von f längs γ .

Bemerkung 23.2. Eine stetige Funktion von (einer Teilmenge des) $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^d$ selbst wird auch oft *Vektorfeld* genannt.

Diese Definition des Kurvenintegrals führt tatsächlich auf das korrekte Verhalten unter Umparametrisierungen, wie wir nun zeigen werden.

Satz 23.3. Es seien $f : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ eine stetig differenzierbare Kurve. Ist $[\alpha, \beta]$ ein weiteres Intervall in $\mathbb{R}$ und $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$

23. Kurvenintegrale

eine orientierungserhaltende Uparametrisierung, d. h. φ ist ein streng monoton wachsender Diffeomorphismus, so gilt

$$\int_{\gamma} f(x) \, dx = \int_{\gamma \circ \varphi} f(x) \, dx.$$

Ist φ orientierungsumkehrend, so gilt

$$\int_{\gamma} f(x) \, dx = - \int_{\gamma \circ \varphi} f(x) \, dx.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} f(x) \, dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle f((\gamma \circ \varphi)(s)), (\gamma \circ \varphi)'(s) \rangle \, ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle f(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s) \rangle \, ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle f(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) \, ds. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $t = \varphi(s)$ gilt $\varphi'(s)ds = dt$ und, wenn φ orientierungserhaltend ist, haben wir $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$. Das liefert

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(x) \, dx = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_{\gamma} f(x) \, dx.$$

Ist hingegen φ orientierungsumkehrend, so gilt $\varphi(\alpha) = b$ und $\varphi(\beta) = a$ und wir erhalten

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(x) \, dx = \int_b^a \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = - \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = - \int_{\gamma} f(x) \, dx. \quad \square$$

Beispiel 23.4. Wir betrachten das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{-v}{u^2 + v^2} \\ \frac{u}{u^2 + v^2} \end{pmatrix}.$$

und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x) \, dx &= \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-\sin(t)}{1} \\ \frac{\cos(t)}{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) \, dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Auch reellwertige Funktionen wollen zuweilen entlang von Kurven integriert werden. Das führt auf einen zweiten Typ von Kurvenintegralen, den man sich anhand eines Vorhangs veranschaulichen kann: Stellen Sie sich einen Vorhang von variabler Länge vor, der entlang einer Kurve aufgehängt ist. Die Gesamtfläche des Vorhangs bekommt man dann anschaulich, wenn man die Längenfunktion entlang der Kurve integriert. Auch hier müssen wir wieder darauf achten, dass wir einen Wert des Integrals bekommen, der sich durch Umparametrisierung der Kurve nicht verändert. Das gewährleistet die folgende Definition.

Definition 23.5. Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_{\gamma} f(x) \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Kurvenintegral von f längs γ .

Bemerkung 23.6. Die Schreibweise „ ds “ im Kurvenintegral aus Definition 23.5 ist eine rein formale und hat nichts mit einer Variablen s zu tun. Sie dient hier im Wesentlichen dazu die beiden Typen der Kurvenintegrale zu unterscheiden.

Übungsaufgabe 23.7. Das Kurvenintegral aus Definition 23.5 ist invariant unter Umparametrisierung, d. h. sind f und γ wie dort und ist $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ ein monotoner Diffeomorphismus für ein Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$, so gilt

$$\int_{\gamma} f(x) \, ds = \int_{\gamma \circ \varphi} f(x) \, ds.$$

Man beachte, dass in diesem Fall auch bei einer orientierungsumkehrenden Umparametrisierung der Wert derselbe bleibt und nicht das Vorzeichen wechselt!

Beispiel 23.8. Wir berechnen das Kurvenintegral von $f(x, y) = \sqrt{1+y}$ längs der Kurve $\gamma(t) = (t - \cos(t), \sin(t))^T$, $t \in [0, \pi]$, in Euklidischer Länge. Es ist $\gamma'(t) = (1 + \sin(t), \cos(t))^T$ und damit

$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{1 + 2\sin(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)} = \sqrt{2 + 2\sin(t)}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x) \, ds &= \int_0^{\pi} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin(t)} \cdot \sqrt{2 + 2\sin(t)} \, dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi} (1 + \sin(t)) \, dt = \sqrt{2}\pi - \sqrt{2}\cos(t) \Big|_0^{\pi} = \sqrt{2}\pi - \sqrt{2}(-1 - 1) \\ &= \sqrt{2}(\pi + 2). \end{aligned}$$

23. Kurvenintegrale

Bemerkung 23.9. In den Definitionen 23.1 und 23.5 ist für die Kurve γ jeweils stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt. Das kann jeweils zu „stückweise stetig differenzierbar“ abgeschwächt werden. Damit ist gemeint, dass es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass $\gamma|_{(t_{j-1}, t_j)}$ für jedes $j = 1, 2, \dots, n$ stetig differenzierbar ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_{\gamma} f(x) \, dx := \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt, \quad \text{bzw.}$$

$$\int_{\gamma} f(x) \, ds := \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Man beachte dabei, dass jede Kurve nach Definition eine stetige Abbildung ist.

Für praktische Berechnungen führt sogar die Verallgemeinerung auf stückweise stetig differenzierbare Kurven oft noch zu einem sehr unhandlichen Kalkül. Durch Umparametrisierung der Kurve auf einzelnen Teilintervallen kann man auch noch zulassen, dass die einzelnen Stücke auf voneinander unabhängigen Intervallen definiert werden. Das soll im Folgenden an einem Beispiel illustriert werden.

Beispiel 23.10. Wir wollen das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ y \end{pmatrix}$$

entlang des in Abbildung 23.1 skizzierten einmal durchlaufenen Weges integrieren.

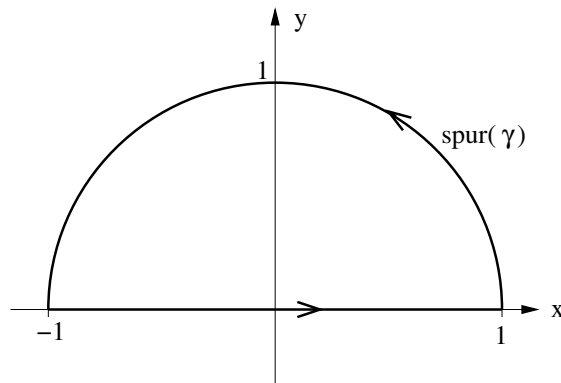


Abbildung 23.1.: Der Weg γ aus Beispiel 23.10

Dies ist ein geschlossener Weg, den wir gut in zwei Stücken definieren können. Für das gerade Stück betrachten wir

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1] \quad \text{und für den Kreisbogen}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi].$$

Dann ist $\gamma_1(1) = (1, 0)^T = \gamma_2(0)$ und $\gamma_2(\pi) = (-1, 0)^T = \gamma_1(-1)$, die Wege „passen also richtig zusammen“, aber natürlich passen Sie so nicht zu einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve zusammen. Man könnte nun einen der beiden mühsam so umparametrisieren, dass es passt. Aber, da das Umparametrisieren sowieso nichts am Kurvenintegral ändert, kann man auch gleich mit diesen Kurven rechnen und erhält

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x) \, dx &= \int_{-1}^1 \langle f(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t) \rangle \, dt + \int_0^{\pi} \langle f(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t) \rangle \, dt \\ &= \int_{-1}^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \, dt + \int_0^{\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \cos^2(t) + \sin^2(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\ &= \int_{-1}^1 t^2 \, dt + \int_0^{\pi} (-\sin(t) + \sin(t) \cos(t)) \, dt \\ &= \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1}^1 + \cos(t) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \sin^2(t) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + (-1) - 1 + 0 - 0 = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Wir wenden uns nun einer speziellen Klasse von Vektorfeldern f zu, nämlich den sogenannten Gradientenfeldern, die sich dadurch auszeichnen, dass $f = \nabla \varphi$ für eine geeignete Funktion φ ist. Für solche Gradientenfelder vereinfacht sich die Berechnung von Kurvenintegralen erheblich, denn es ist dann mit dem Hauptsatz

$$\int_{\gamma} f(x) \, dx = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \nabla \varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \quad (23.1)$$

$$= \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) \, dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)). \quad (23.2)$$

Das bedeutet zunächst einmal ganz praktisch, dass wir zur Berechnung des Kurvenintegrals über f längs γ nur die Funktion φ am Anfangs- und am Endpunkt der Kurve auswerten müssen, hat aber noch viel weitreichendere Konsequenzen. Zunächst einmal bedeutet das umgekehrt gedacht, dass es für die Berechnung des Kurvenintegrals überhaupt nicht darauf ankommt wie der Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ kommt. Man kann also in diesem Fall den Weg dazwischen sogar beliebig verändern ohne den Wert des Kurvenintegrals zu beeinflussen. Man sagt dazu, dass das Kurvenintegral in diesem Fall *wegunabhängig* ist.

Schließlich zeigt obige Rechnung sofort, dass für einen geschlossenen Weg, d. h. für $\gamma(a) = \gamma(b)$, das Kurvenintegral über jedes Gradientenfeld verschwindet.

Definition 23.11. Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig. Existiert eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \nabla \varphi(x)$ für alle $x \in G$, so nennt man φ ein Potenzial oder auch eine Stammfunktion von f und f wird in diesem Fall Gradientenfeld genannt.

Der folgende Satz fasst unsere bisherigen Überlegungen zusammen.

23. Kurvenintegrale

Satz 23.12. *Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Gradientenfeld mit Potenzial $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow G$*

$$\int_{\gamma} f(x) \, dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Insbesondere ist, falls γ zusätzlich geschlossen ist, dieses Integral Null.

Tatsächlich gilt für zusammenhängende Mengen G auch so etwas wie die Umkehrung dieses Satzes. Wir wollen das hier allerdings nur unter einer deutlich stärkeren geometrischen Bedingung beweisen.

Definition 23.13. *Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt sternförmig, falls es ein $x_0 \in D$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt $\overline{xx_0} \subseteq D$. Jedes solche x_0 heißt dann Sternzentrum von D .*

Beispiel 23.14. (a) Beispiele für sternförmige Mengen sind:

- Konvexe Mengen. Dann kann jeder Punkt der Menge als x_0 gewählt werden.
- Sterne.
- Die geschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x < 0\}$. Hier erfüllt z.B. der Punkt $x_0 = (1, 0)$ die Bedingung aus der Definition.

(b) Nicht sternförmig sind z. B. Hanteln und Mondsicheln, sowie $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Satz 23.15. *Sei G sternförmig. Eine stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn für jede geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve γ in G gilt*

$$\int_{\gamma} f(x) \, dx = 0.$$

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen, dass f ein Gradientenfeld ist, wenn jedes Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve Null ist. Sei dazu y_0 ein Sternzentrum von G .

Für $y, z \in G$ können wir die Kurve $\gamma_{y,z} : [0, 1] \rightarrow G$ mit $\gamma_{y,z}(t) = y + t(z - y)$ betrachten, falls die gesamte Verbindungsstrecke von y und z in G enthalten ist. Da y_0 ein Sternzentrum von G ist, können wir $\gamma_{y_0,y}$ für jedes $y \in G$ betrachten. Die Rechnung (23.1) zeigt dann, dass bis auf eine additive Konstante $\varphi(y_0)$ die einzige mögliche Wahl für ein Potenzial durch

$$\varphi(y) := \int_{\gamma_{y_0,y}} f(x) \, dx, \quad y \in G$$

gegeben ist. Wir wollen nun zeigen, dass so definiertes φ tatsächlich stetig differenzierbar mit $\nabla \varphi = f$ und damit ein Potenzial von f ist.

Seien also $y \in G$ und $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(y) \subseteq G$ gilt. Dann ist für alle $h \in U_\varepsilon(0)$ auch die Verbindungsstrecke von y und $y + h$ in $U_\varepsilon(y) \subseteq G$ enthalten und wir erhalten

$$\int_{\gamma_{y_0, y}} f(x) \, dx + \int_{\gamma_{y, y+h}} f(x) \, dx + \int_{\gamma_{y+h, y_0}} f(x) \, dx = 0$$

nach Voraussetzung, denn der Weg von y_0 über y und $y + h$ zurück zu y_0 ist geschlossen. Weiter ist der erste Summand auf der linken Seite genau $\varphi(y)$ und für den dritten ergibt sich

$$\varphi(y + h) = \int_{\gamma_{y_0, y+h}} f(x) \, dx = - \int_{\gamma_{y+h, y_0}} f(x) \, dx,$$

da der Weg γ_{y+h, y_0} aus dem Weg $\gamma_{y_0, y+h}$ durch die orientierungsumkehrende Umparametrisierung $\psi(t) = 1 - t$, $t \in [0, 1]$, entsteht (nachrechnen!), vgl. Satz 23.3. Zusammengenommen haben wir also

$$\varphi(y + h) - \varphi(y) = \int_{\gamma_{y, y+h}} f(x) \, dx,$$

womit wir schon fast beim Differenzenquotienten für φ sind. Um die partiellen Ableitungen von φ auszurechnen, sei $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, e_j der j -te Standardbasisvektor und $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(y + se_j) - \varphi(y)}{s} &= \frac{1}{s} \int_{\gamma_{y, y+se_j}} f(x) \, dx = \frac{1}{s} \int_0^1 \langle f(\gamma_{y, y+se_j}(t)), \gamma'_{y, y+se_j}(t) \rangle \, dt \\ &= \frac{1}{s} \int_0^1 \langle f(y + t(y + se_j - y)), (y + se_j - y) \rangle \, dt \\ &= \frac{1}{s} \int_0^1 \langle f(y + tse_j), se_j \rangle \, dt = \int_0^1 f_j(y + tse_j) \, dt. \end{aligned}$$

Nach Satz 22.2 hängt nun der Wert dieses Integrals stetig vom Parameter s ab, es ist also dank der Stetigkeit von f

$$\partial_j \varphi(y) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(y + se_j) - \varphi(y)}{s} = \int_0^1 \lim_{s \rightarrow 0} f_j(y + tse_j) \, dt = \int_0^1 f_j(y) \, dt = f_j(y).$$

Nimmt man die partiellen Ableitungen von φ zum Gradienten zusammen, folgt $\nabla \varphi = f$ wie gewünscht. $\square$

Bemerkung 23.16. Für reelle Funktionen hatten wir in Analysis I festgestellt, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt. Das ist in mehreren Variablen leider fundamental anders, hier sind Potenziale etwas höchst seltenes und damit kostbares. Zum Beispiel hat schon das äußerst einfache Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

23. Kurvenintegrale

kein Potenzial. Der Grund: Gäbe es ein Potenzial $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so wäre dieses, da f stetig differenzierbar ist, sogar zweimal stetig differenzierbar. Das führt aber auf einen Widerspruch zum Satz von Schwarz 13.16, denn es gilt dann

$$\begin{aligned}\partial_2 \partial_1 \varphi(x, y) &= \partial_2 f_1(x, y) = 1 \quad \text{und} \\ \partial_1 \partial_2 \varphi(x, y) &= \partial_1 f_2(x, y) = -1.\end{aligned}$$

Anders formuliert bedeutet das, dass es keine Hoffnung gibt, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in mehrere Variablen herüberzuretten. Darüber wird vor allem in der Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ zu jammern sein.

Allgemein ergibt sich mit der selben Argumentation wie oben aus dem Satz von Schwarz die folgende notwendige Bedingung dafür, dass eine stetig differenzierbare Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Potenzial besitzt:

$$\begin{aligned}\forall j, k \in \{1, 2, \dots, d\} \quad \forall x \in G : \partial_j f_k(x) &= \partial_k f_j(x) \\ (\text{Integrabilitätsbedingung}).\end{aligned} \tag{23.3}$$

Eine naheliegende Frage ist nun, ob diese Bedingung auch hinreichend ist, ob wir damit also auch die Existenz eines Potenzials überprüfen können. Die Antwort ist im Allgemeinen leider negativ, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 23.17. Wir nehmen Beispiel 23.4 wieder auf. Dort hatten wir das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$ betrachtet und gefunden, dass das Kurvenintegral von f längs γ den Wert 2π hat und das, obwohl der Weg γ geschlossen ist und f die Integrabilitätsbedingung erfüllt, denn es ist

$$\begin{aligned}\partial_1 f_2(x, y) &= \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{und} \\ \partial_2 f_1(x, y) &= \frac{(-1) \cdot (x^2 + y^2) + 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

Was hier passiert, sieht man, wenn man versucht ein Potenzial φ von f auszurechnen. Ein solches müsste zunächst einmal $f_2(x, y) = \partial_2 \varphi(x, y)$ erfüllen, also wäre mit einer u. U. von x abhängigen Integrationskonstanten $c(x)$

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \int f_2(x, y) \, dy + c(x) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy + c(x) \\ &= \frac{x}{x^2} \int \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \, dy + c(x)\end{aligned}$$

und mit der Substitution $u = y/x$ bekommen wir

$$= \frac{1}{x} \int \frac{1}{1+u^2} x \, du + c(x) = \arctan(u) + c(x) = \arctan(y/x) + c(x).$$

Wie sieht es dann mit $\partial_1 \varphi(x, y) = f_1(x, y)$ aus? Wir berechnen

$$\partial_1 \varphi(x, y) = \arctan'(y/x) \left(-\frac{y}{x^2} \right) + c'(x) = -\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{y}{x^2} + c'(x) = \frac{-y}{x^2 + y^2} + c'(x).$$

Das geht alles wunderbar auf, wir können also $c(x) = 0$ setzen und erhalten mit $\varphi(x, y) = \arctan(y/x)$ tatsächlich ein Potenzial φ von f .

Aber das kann doch nicht sein! Schließlich ist obiges Kurvenintegral nicht Null und das müsste ja nach Satz 23.12 dann gelten. Des Rätsels Lösung ist, dass wir ein bisschen zu falsch gerechnet haben. Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definiert, aber im Potenzial φ wird durch x geteilt, hier ist der maximale Definitionsbereich durch alle Punkte mit $x \neq 0$, also durch $\mathbb{R}^2$ ohne die y -Achse, gegeben. Die entstehende Unstetigkeit von φ sieht man auch schön in Abbildung 23.2. Damit existiert das Potenzial überhaupt nicht entlang der ganzen Kurve γ und das Kurvenintegral verschwindet nicht, obwohl f entlang der ganzen Kurve definiert ist. Die Singularität von f im Nullpunkt „strahlt aus“ und wir haben mit unserer geschlossenen Kurve γ die Singularität einmal komplett umkreist.

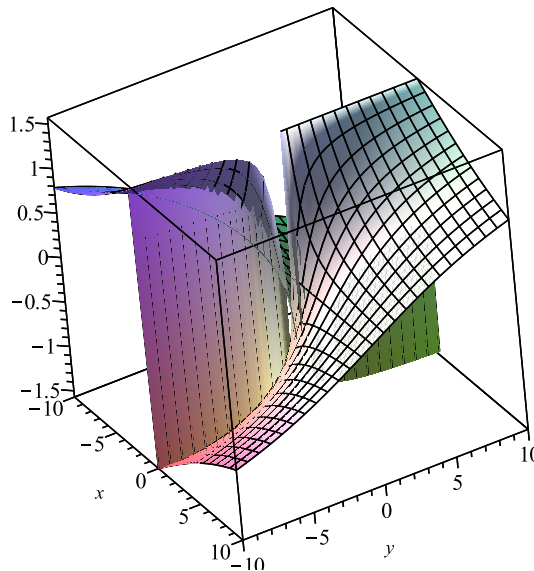


Abbildung 23.2.: Der Graph der Funktion $\varphi(x, y) = \arctan(y/x)$ ist entlang der gesamten y -Achse unstetig.

Die Integrabilitätsbedingung scheint also doch recht nahe daran zu sein, eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Potenzials zu sein. Das Problem liegt

23. Kurvenintegrale

in der Geometrie des Definitionsbereichs von f und erneut geht auf sternförmigen Mengen alles gut.

Satz 23.18. *Sei G sternförmig und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^d)$ erfülle die Integrabilitätsbedingung, d. h. für alle Wahlen von $j, k \in \{1, 2, \dots, d\}$ haben wir $\partial_j f_k = \partial_k f_j$. Dann besitzt f ein Potenzial auf G .*

Beweis. Sei $x_0 \in G$ ein Sternzentrum. Dann können wir für jedes $x \in G$ wieder die Kurven $\gamma_{x_0, x}$ aus dem Beweis von Satz 23.15 betrachten und wir wissen auch schon, dass es bis auf eine additive Konstante nur einen Kandidaten für das Potenzial von f gibt, nämlich $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_{\gamma_{x_0, x}} f(y) \, dy = \int_0^1 \langle f(\gamma_{x_0, x}(t)), \gamma'_{x_0, x}(t) \rangle \, dt \\ &= \int_0^1 \langle f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle \, dt.\end{aligned}$$

Unsere Aufgabe besteht daher erneut darin nachzurechnen, dass $\nabla \varphi = f$ gilt; diesmal allerdings mit der Integrabilitätsbedingung als Voraussetzung.

Nach Satz 22.4 ist φ partiell differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}\partial_j \varphi(x) &= \int_0^1 \partial_j \langle f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle \, dt \\ &= \int_0^1 \langle J_f(x_0 + t(x - x_0))(te_j), x - x_0 \rangle + \langle f(x_0 + t(x - x_0)), e_j \rangle \, dt \\ &= \int_0^1 t \langle \partial_j f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle + f_j(x_0 + t(x - x_0)) \, dt.\end{aligned}\quad (23.4)$$

Andererseits ist mit Hilfe der vorausgesetzten Integrabilitätsbedingung

$$\begin{aligned}t \langle \partial_j f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle &= t \sum_{k=1}^d \partial_j f_k(x_0 + t(x - x_0))(x_k - x_{0,k}) \\ &= t \sum_{k=1}^d \partial_k f_j(x_0 + t(x - x_0))(x_k - x_{0,k}) \\ &= t \nabla f_j(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) \\ &= \frac{d}{dt} [t f_j(x_0 + t(x - x_0))] - f_j(x_0 + t(x - x_0)).\end{aligned}$$

Zusammen haben wir also

$$\partial_j \varphi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t f_j(x_0 + t(x - x_0))] \, dt$$

und mit dem Hauptsatz folgt

$$\partial_j \varphi(x) = t f_j(x_0 + t(x - x_0)) \Big|_{t=0}^{t=1} = f_j(x_0 + x - x_0) = f_j(x).$$

Also ist φ ein Potenzial von f auf G . □

Im $\mathbb{R}^3$ kann die Integrabilitätsbedingung schön mit Hilfe der sogenannten Rotation eines Vektorfeldes geschrieben werden.

Definition 23.19. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$. Dann ist die Rotation von f gegeben durch*

$$\operatorname{rot} f(x) := \begin{pmatrix} \partial_2 f_3(x) - \partial_3 f_2(x) \\ \partial_3 f_1(x) - \partial_1 f_3(x) \\ \partial_1 f_2(x) - \partial_2 f_1(x) \end{pmatrix}, \quad x \in D.$$

Bemerkung 23.20. Ein optischer Abgleich mit der Integrabilitätsbedingung aus (23.3) zeigt, dass eine Funktion $f \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen die Integrabilitätsbedingung genau dann erfüllt, wenn $\operatorname{rot} f = 0$ auf D ist.

Tabelle der griechischen Buchstaben

groß	klein	Name
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ϵ, ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	$\kappa, \varkappa$	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π, ϖ	Pi
P	ρ, ϱ	Rho
Σ	σ, ς	Sigma
T	τ	Tau
Y	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

Index

- ∞ -Norm, 26, 28
- 1-Norm, 26
- 2-Norm, 26
- abgeschlossene
 - Kugel, 33
 - Menge, 33
 - topologisch, 70
- Ableitung
 - links-/rechtsseitige, 10
 - partielle, 89
 - Richtungs-, 87
 - totale, 98
- Ableitungsfunktion
 - partielle, 89
 - totale, 98
- Abschluss einer Menge, 36
- Anfangspunkt, 81
- äquivalente Normen, 27, 55
- Banach'scher Fixpunktsatz, 45, 110, 131
- Banachraum, 42
- Baseler Problem, 15
- beschränkte
 - Folge, 39
 - lineare Abbildung, 64
 - Menge, 33
- Besselsche Ungleichung, 20
- Betrag eines Multiindex, 112
- Bilinearform, 111
- $C^n(G, H)$, 92
- Cantorscher Durchschnittssatz, 45
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 29
- Cauchyfolge, 40
- Cosinusreihe, 14
- Definitheit (Matrix), 120
- Definitheit (Metrik), 30
- Definitheit (Norm), 25
- Definitheit (Skalarprodukt), 28
- Diameter, 44
- dichte Teilmenge, 37
- Diffeomorphismus, 126
- Differentialoperator, 115
- differenzierbare Kurve, 82
- differenzierbare Untermannigfaltigkeit, 141
- Differenzierbarkeit
 - in eine Richtung, 87
 - links-/rechtsseitige, 10
 - partielle, 88
 - n -fache, 92
 - stetig partielle, 89
 - n -fache, 92
 - totale, 97
- Differenzieren unter dem Integral, 156
- Dimension einer Untermannigfaltigkeit, 141
- Dirichlet-Kern, 7
- Dirichletsches Lemma, 10
- diskrete Topologie, 70
- diskrete Metrik, 31, 37, 39, 59, 76
- Dreiecksungleichung, 25, 30
 - umgekehrte, 30
- Durchschnittssatz, Cantorscher, 45
- Einheitskugel, 26

- Endpunkt, 81
- Euklidische Norm, 27
- Euklidische Sphäre, 145
- Extrema
 - hinreichende Bedingung, 121
 - notwendige Bedingung, 119
- Extremum
 - lokales, 119
 - relatives, 119
 - unter Nebenbedingung, 149
- Fakultät eines Multiindex, 112
- Fehlerabschätzung
 - a posteriori, 47
 - a priori, 47
- feinere Topologie, 69
- Fixpunktsatz von Banach, 45, 110, 131
- Folge
 - beschränkte, 39
 - Cauchy-, 40
 - konvergente, 39
 - topologisch, 71
 - Koordinaten-, 56
 - quadratsummierbare, 44
- Folgenkompaktheit, 51
- Folgenstetigkeit, 58
 - topologisch, 72
- Fourier
 - koeffizient, 5
 - polynom, 6
 - reihe, 6
- französische Eisenbahn-Metrik, 32
- Fubini, Satz von, 159
- Funktion
 - Ableitungs-
 - partielle, 89
 - totale, 98
 - folgenstetige, 72
 - implizite, 136
 - Koordinaten-, 62
 - Stamm-, 165
 - stetige, 57
 - topologisch, 72
 - Zeta, 22
- Funktionsgrenzwert, 59
 - geschlossene Kurve, 81
 - gleichmäßig stetig, 66
 - gleichmäßige Konvergenz, 40
 - Grad, eines trigon. Polynoms, 5
 - Gradient, 90
 - Gradientenfeld, 165
 - Gradientenmethode, 90
 - Graph, 141
 - Grenzwert, 39
 - Funktions-, 59
 - größere Topologie, 69
- Häufungspunkt, 36
- Häufungswert, 40
- Heine-Borel, Satz von, 54, 56
- Hesse-Matrix, 112
- Hilbertraum, 42
- Höhenlinie, 139
- Homogenität, 25
- Homöomorphismus, 72
- implizite Funktionen, Satz über, 136
- indefinite Matrix, 120
- indiskrete Topologie, 70
- induzierte Metrik, 30
- innerer Punkt, 36
- Inneres einer Menge, 36
- Integrabilitätsbedingung, 168
- Integral
 - Kurven-, 161, 163
 - Parameter-, 155
- Jacobi-Matrix, 90
- $K_r(x_0)$, 33
- Kegelschnitt, 145
- Kern
 - Dirichlet-, 7
- Kettenregel, 105
- kompakte Menge, 50

- Folgen-, 51
- kompakter metrischer Raum, 50
- Kontraktion, strikte, 45
- konvergente Folge, 39
 - topologisch, 71
- Konvergenz im quadratischen Mittel, 17
- konvexe Menge, 34
- Koordinatenfolge, 56
- Koordinatenfunktion, 62
- Kreis, 83
- kritischer Punkt, 119
- Kugel
 - abgeschlossene, 33
 - offene, 33
- Kurve, 81
 - differenzierbare, 82
 - geschlossene, 81
 - Länge einer, 83
 - Peano-, 77
 - Spur einer, 81
 - stetig differenzierbare, 82
 - umparametrisierte, 85
- Kurvenintegral
 - einer skalaren Funktion, 163
 - eines Vektorfeldes, 161
 - wegunabhängiges, 165
- L^2 -Skalarprodukt, 29
- $\ell^2(\mathbb{N})$, 44
- $\ell^2(\mathbb{Z})$, 44
- Lagrange
 - Darstellung, 117
 - Multiplikator, 151
 - Methode von, 151
- Länge einer Kurve, 83
- Laplace-Operator, 115
- Lemma
 - Dirichletsches, 10
 - Riemannsches, 9
 - von Riemann-Lebesgue, 20
- Limes, 39
- lineare Abbildung, beschränkte, 64
- linearer Differentialoperator, 115
- Linearität der Ableitung, 107
- linksseitige Ableitung, 10
- lokales Extremum, 119
- lokales Maximum, 119
- lokales Minimum, 119
- Matrix
 - Hesse-, 112
 - indefinite, 120
 - Jacobi-, 90
 - negativ definite, 120
 - positiv definite, 120
- Matrixinversion, Stetigkeit der, 129
- Matrixnorm, assoziierte, 64
- Maximum
 - lokales, 119
 - relatives, 119
 - unter Nebenbedingung, 149
- Maximumsnorm, 26, 28
- Menge
 - abgeschlossene, 33
 - topologisch, 70
 - beschränkte, 33
 - Diameter einer, 44
 - dichte Teil-, 37
 - kompakte, 50
 - konvexe, 34
 - Niveau-, 139
 - offene, 33
 - topologisch, 69
 - sternförmige, 166
- Methode von Lagrange, 151
- Metrik, 30
 - diskrete, 31, 37, 39, 59, 76
 - französische Eisenbahn-, 32
 - induzierte, 30
- metrischer Raum, 30
 - kompakter, 50
 - vollständiger, 42
 - wegzusammenhängender, 85
 - zusammenhängender, 75
- Minimum

- lokales, 119
- relatives, 119
- unter Nebenbedingung, 149
- Mittelwertsatz, 107
- Multiindex, 112
 - Betrag eines, 112
 - Fakultät eines, 112
 - Ordnung eines, 112
- Multiplikator, Lagrange-, 151
- Nebenbedingung, 151
- Nebenbedingung, Extremum unter, 149
- negativ definit, 120
- Neumann-Reihe, 128
- Niveaulinie, 139
- Niveaumenge, 139
- Norm, 25
 - ∞ -, 26, 28
 - 1-, 26
 - 2-, 26
 - äquivalente, 27, 55
 - assoziiert zu Skalarprodukt, 29
 - Euklidische, 27
 - Matrix-, 64
 - Maximums-, 26, 28
 - Operator-, 64
 - p -, 26, 28
 - Supremums-, 28, 40
 - Unendlich-, 28
 - Zeilensummen-, 64
- Normalenraum, 147
- Normalenvektor, 147
- normierter Raum, 25
- offene
 - Kugel, 33
 - Menge, 33
 - topologisch, 69
 - Überdeckung, 49
- Operatornorm, 64
- Ordnung
 - eines Differentialoperators, 115
 - eines Multiindex, 112
- orientierungserhaltende Umparametrisierung, 85
- orientierungsumkehrende Umparametrisierung, 85
- p -Norm, 26, 28
- Parameterintegral, 155
- Parsevalsche Gleichung, 21, 22
- partiell differenzierbar, 88
 - n -fach stetig, 92
 - n -fach, 92
 - stetig, 89
- partielle Ableitung, 89
 - n -fache, 92
- Peano-Kurve, 77
- Polarkoordinaten, 127
- Polynom
 - Fourier-, 6
 - in mehreren Variablen, 114
 - trigonometrisches, 5
 - Grad eines, 5
- positiv definit, 120
- Potenzial, 165
- Produktregel, 107
- Punkt
 - Häufungs-, 36
 - kritischer, 119
 - regulärer, 143
 - Sattel-, 120
- quadratisches Mittel, Konvergenz im, 17
- quadratsummierbare Folge, 44
- Quadrik, 145
- Radius, 33
- Rand einer Menge, 36
- Randpunkt, 36
- Raum
 - Banach-, 42
 - Hilbert-, 42
 - metrischer, 30
 - kompakter, 50
 - vollständiger, 42

- zusammenhängender, 75
- Normalen-, 147
- normierter, 25
- Tangential-, 145
- topologischer, 69
 - zusammenhängender, 75
- rechtsseitige Ableitung, 10
- regulärer Punkt, 143
- regulärer Wert, 144
 - Satz vom, 144
- Reihe
 - Cosinus-, 14
 - Fourier-, 6
 - Neumann-, 128
 - Sinus-, 14
- relatives
 - Extremum, 119
 - Maximum, 119
 - Minimum, 119
- Restglied, 117
- Richtungsableitung, 87
- Riemann-Lebesgue, Lemma von, 20
- Riemannsches Lemma, 9
- Rotation, 171
- $S_{2\pi}(\mathbb{R})$, 4
- Sattelpunkt, 120
- Satz
 - Banach'scher Fixpunkt-, 45, 110, 131
 - Cantorscher Durchschnitts-, 45
 - Fixpunkt- von Banach, 45, 110, 131
 - implizite Funktionen, 136
 - Mittelwert-, 107
 - Parsevalsche Gleichung, 21, 22
 - Schranken-, 108
 - Spektral- für symmetrische Matrizen, 152
 - vom regulären Wert, 144
 - von der Umkehrfunktion, 127
 - von Fubini, 159
 - von Heine-Borel, 54, 56
 - von Lagrange, 151
 - von Schwarz, 93
 - von Taylor, 116
 - Zwischenwert-, 77
- Schrankensatz, 108
- Schwarz, Satz von, 93
- Sinusreihe, 14
- Skalarprodukt, 28
 - assoziierte Norm, 29
 - L^2 -, 29
 - ℓ^2 -, 44
 - Standard-, 29
- Spektralsatz für symmetrische Matrizen, 152
- Sphäre, Euklidische, 145
- Spur einer Kurve, 81
- Spurtopologie, 70
- Stammfunktion, 165
- Standardskalarprodukt, 29
- sternförmige Menge, 166
- Sternzentrum, 166
- stetig differenzierbare Kurve, 82
- stetig partiell differenzierbar, 89
 - n -fach, 92
- Stetigkeit, 57
 - der Matrixinversion, 129
 - Folgen-, 58, 72
 - gleichmäßige, 66
 - topologische, 58, 72
- strikte Kontraktion, 45
- Supremumsnorm, 28, 40
- Tangentialraum, 145
- Tangentialvektor
 - an eine Kurve, 82
 - an eine Untermannigfaltigkeit, 145
- Taylor, Satz von, 116
- Taylorpolynom, 117
- Teilüberdeckung, 50
- Teilmenge
 - dichte, 37
- Topologie, 69
 - diskrete, 70

- feinere, 69
 - gröbere, 69
 - indiskrete, 70
 - Spur-, 70
 - triviale, 70
- topologische Stetigkeit, 58
- topologischer Raum, 69
 - zusammenhängend, 75
- total differenzierbar, 97
- totale Ableitung, 98
- trigonometrisches Polynom, 5
 - Grad eines, 5
- triviale Topologie, 70
- Tür, 34
- $U_r(x_0)$, 33
- Überdeckung, offene, 49
- Umgebung, 33
 - topologisch, 70
- umgekehrte Dreiecksungleichung, 30
- Umkehrfunktion, Satz von der, 127
- Umparametrisierung, 85
 - orientierungserhaltende, 85
 - orientierungsumkehrende, 85
- Unendlich-Norm, 26, 28
- Ungleichung
 - Besselsche, 20
 - Cauchy-Schwarz-, 29
- Untermannigfaltigkeit, differenzierbare, 141
- Vektorfeld, 161
 - Kurvenintegral eines, 161
 - Rotation eines, 171
- Verbindungsstrecke, 107
- vollständiger metrischer Raum, 42
- Weg, 81
- Wegunabhängigkeit, 165
- Wegzusammenhang, 85
- Wert, regulärer, 144
 - Satz vom, 144
- Zeilensummennorm, 64
- Zeta-Funktion, 22
- Zusammenhang, 75
- Zwischenwertsatz, 77
- Zykloide, 83