

Vorlesung  
Maß- und Integrationstheorie  
Robert Haller  
SoSe 2022

---

Dieses Skript ist von Herrn Roch geschrieben und von mir lediglich in Details angepasst worden. Ich danke ihm sehr herzlich für das freundliche Überlassen des Materials.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundbegriffe der Maßtheorie</b>	<b>5</b>
1.1	Einstimmung . . . . .	5
1.2	Messbare Mengen und $\sigma$ -Algebren . . . . .	7
1.3	Messbare Funktionen . . . . .	13
1.4	Maße . . . . .	17
1.5	Nullmengen und Vollständigkeit von Maßräumen . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Allgemeine Integrationstheorie</b>	<b>24</b>
2.1	Stufenfunktionen . . . . .	24
2.2	Das Lebesgue-Integral . . . . .	26
2.3	Konvergenzsätze . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Konstruktion des Lebesgue-Maßes</b>	<b>37</b>
3.1	Äußere Maße . . . . .	37
3.2	Der Satz von Carathéodory . . . . .	38
3.3	Fortsetzung von relativ äußeren Maßen . . . . .	40
3.4	Metrische äußere Maße <sup>◊</sup> . . . . .	42
3.5	Konstruktion des Lebesgue-Maßes . . . . .	44
3.6	Regularität . . . . .	51
3.7	Nicht Lebesgue-messbare Mengen <sup>◊</sup> . . . . .	54
3.8	Lebesgue- und Regelintegral . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Satz von Fubini und Transformationsformel</b>	<b>59</b>
4.1	Das Prinzip von Cavalieri und der Satz von Fubini . . . . .	59
4.2	Der Transformationssatz . . . . .	68
4.3	Nullmengen <sup>◊</sup> . . . . .	73
4.4	Koordinatentransformationen . . . . .	76
<b>5</b>	<b><math>L^p</math>-Räume</b>	<b>80</b>
5.1	Die Räume $\mathcal{L}^p$ , $p < \infty$ . . . . .	80
5.2	Der Raum $\mathcal{L}^\infty$ . . . . .	84
5.3	Die $L^p$ -Räume . . . . .	87
5.4	Vergleich von $L^p$ -Räumen . . . . .	88
5.5	Berechnung der $L^p$ -Norm . . . . .	90
5.6	Dichte Teilräume in $L^p$ . . . . .	93
5.7	Der Lebesguesche Differentiationssatz . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Faltung und Fouriertransformation auf <math>\mathbb{R}^d</math></b>	<b>102</b>
6.1	Die Translation auf $L^p$ . . . . .	102
6.2	Die Faltung . . . . .	103
6.3	Approximative Einsen und Mollifier . . . . .	106
6.4	Faltung und Ableitung . . . . .	108

6.5	Das Fourier-Integral: $L^1$ -Theorie . . . . .	109
6.6	Fouriertransformation und Ableitung . . . . .	112
6.7	Fourier-Inversion . . . . .	115
6.8	Der Schwartz-Raum . . . . .	116
6.9	Das Fourier-Integral: $L^2$ -Theorie . . . . .	119
6.10	Anwendungen . . . . .	122
6.11	$L^p$ -Theorie <sup>◊</sup> . . . . .	123
6.12	Komplexe Theorie <sup>◊</sup> . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Integration über Untermannigfaltigkeiten</b>	<b>129</b>
7.1	Untermannigfaltigkeiten . . . . .	129
7.2	Integration über Untermannigfaltigkeiten, Teil 1 . . . . .	135
7.3	Integration über Untermannigfaltigkeiten, Teil 2 . . . . .	138
<b>8</b>	<b>Integralsätze</b>	<b>145</b>
8.1	Kompakta mit glattem Rand . . . . .	145
8.2	Der Gaußsche Integralsatz . . . . .	150
8.3	Der Greensche Integralsatz in der Ebene . . . . .	156
8.4	Der Stokessche Integralsatz im Raum . . . . .	158
	<b>Index</b>	<b>162</b>

Wir haben in der Analysis-Vorlesung das Riemann- oder Regel-Integral für Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher kennengelernt. Damit können wir zwar bereits eine ganze Reihe nützlicher Funktionen integrieren und praktische Probleme wie etwa die Berechnung des Volumens und der Oberfläche einer Kugel lösen. Bei verschiedenen Anwendungen in der Analysis stößt man aber schnell an die Grenzen dieser Integralbegriffe. Hier sind zwei Beispiele:

- Möchte man den Grenzwert einer konvergenten Folge integrierbarer Funktionen mit dem Integral vertauschen, benötigt man die *gleichmäßige* Konvergenz der Funktionenfolge.
- Wir wissen, dass unter allen Normen auf dem  $\mathbb{R}^d$  die Euklidische Norm  $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^d x_i^2)^{1/2}$  dadurch ausgezeichnet ist, dass sie durch  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$  mit dem Skalarprodukt  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$  und damit mit der (Euklidischen) Geometrie des  $\mathbb{R}^d$  verknüpft ist. Man möchte daher auf analoge Weise ein Skalarprodukt und eine Norm von Funktionen, etwa auf  $[0, 1]$ , durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) dx \quad \text{und} \quad \|f\|_2 := \left( \int_0^1 f(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

eingeführen. Nun wird hierdurch z. B. auf dem Raum  $C([0, 1])$  der stetigen Funktionen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tatsächlich ein Skalarprodukt und eine Norm definiert; der Raum der stetigen Funktionen ist bzgl. dieser Norm aber nicht vollständig, was es schwierig macht, dort Analysis zu betreiben. (Es gibt zwar ein abstraktes Verfahren der Vervollständigung metrischer Räume; statt mit stetigen Funktionen hätte man dann mit Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen von stetigen Funktionen zu arbeiten, was auch nicht sehr bequem ist.)

Wir betrachten daher in dieser Vorlesung einen Zugang zur Integration, der uns über die Maßtheorie zum Lebesgueschen Integral führen wird. Die Vorteile des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann- oder Regel-Integral werden dabei schnell deutlich werden. Insbesondere werden wir z. B. sehen, dass unter geeigneten (recht schwachen) Voraussetzungen bereits die *punktweise* Konvergenz einer Funktionenfolge für das Vertauschen von Limes und Lebesgue-Integral ausreichend ist. Auch wird uns das Lebesgue-Integral einen recht komfortablen Weg zu Banachräumen von Funktionen, in denen die Norm durch ein Skalarprodukt generiert wird, eröffnen (sogenannte Hilberträume).

Im ersten Kapitel sehen wir uns einige Grundbegriffe der Maßtheorie an, die für das Weitere unentbehrlich sind. Im zweiten Kapitel werden wir allgemein Integrale definieren und uns derer Eigenschaften ansehen. Im dritten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Konstruktion von Maßen und führen ein spezielles Maß auf dem  $\mathbb{R}^d$  ein, das sogenannte Lebesgue-Maß. Im vierten Kapitel erarbeiten wir den Satz von Fubini und die Transformationsformel für Lebesgue-Integrale auf

dem  $\mathbb{R}^d$ . Damit stehen uns Wege zur Berechnung zahlreicher konkreter Integrale offen. Im fünften Kapitel untersuchen wir die oben bereits kurz angesprochenen Banachräume integrierbarer Funktionen, die in der modernen (Funktional-) Analysis unentbehrlich geworden sind. Zentrales Thema von Kapitel 6 ist die Fouriertransformation. Schließlich wenden wir uns in den beiden letzten Kapiteln der Integration über Untermannigfaltigkeiten und den Integralsätzen von Gauß, Green und Stokes zu.

Einige Abschnitte, Sätze und Beweise sind mit einem hochgestellten  $\diamond$ -Zeichen versehen. Dies bezeichnet fakultative Inhalte, die in der Vorlesung aus Zeitgründen häufig weggelassen werden. Sie sind dennoch als Referenz und zum bei Bedarf Nachschlagen aufgenommen.

Ich habe dieses Skript von Herrn Roch übernommen, der sich stark an den Skripten von Herrn Neeb und Herrn Farkas orientiert und auch kürzere Anleihen in den Skripten von Herrn Glöckner und Herrn Farwig genommen hat. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Als ergänzende Literatur kann dienen:

Barner/Flohr: Analysis II,

Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie,

Bröcker: Analysis II, Analysis III,

Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie,

Floret: Maß- und Integrationstheorie,

Forster: Analysis 3,

Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 2,

Rudin: Principles of Mathematical Analysis, Real and Complex Analysis.

## 1 Grundbegriffe der Maßtheorie

Wir bezeichnen die Potenzmenge einer Menge  $X$ , d.h. die Menge aller Teilmengen von  $X$ , mit  $\mathcal{P}(X)$  und verwenden gewöhnlich kalligraphische Buchstaben wie  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ , ... zur Bezeichnung von Teilmengen von  $\mathcal{P}(X)$ .

Weiter bezeichnen wir im Folgenden für eine Teilmenge  $A$  von  $X$  stets mit  $\chi_A$  die *charakteristische Funktion* oder *Indikatorfunktion* von  $A$ , d.h.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

### 1.1 Einstimmung

Wir möchten jeder Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}^d$  ein *Maß* (oder *Volumen*)  $\mu(A)$  zuweisen. Folgende Eigenschaften sollten dabei natürlicherweise erfüllt sein:

- (1)  $\mu(\emptyset) = 0$  und  $\mu(A) \geq 0$  für alle  $A \subseteq \mathbb{R}^d$ .
- (2) Sind  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$  disjunkt, so gilt  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .
- (3) Sind  $A$  und  $B$  kongruent, d.h. entsteht  $B$  aus  $A$  durch Verschiebung, Drehung oder Spiegelung, so ist  $\mu(A) = \mu(B)$ .
- (4)  $\mu([0, 1]^d) = 1$  (d.h. Würfel haben das „richtige“ Volumen).

Um Approximationsargumente zu ermöglichen (z. B. das Ausschöpfen einer Menge durch eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen), werden wir eine Version von (2) mit abzählbar vielen Mengen benötigen:

- (2)' Für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

**Satz 1.1.** *Es gibt keine Funktion  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$  mit den Eigenschaften (1), (2)', (3) und (4).*

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage nur für  $d = 1$  (der allgemeine Fall ist nicht schwieriger und folgt aus dem eindimensionalen Fall). Dazu definieren wir eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}$  durch

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

und betrachten eine Menge  $A \subseteq [0, 1)$ , die aus jeder Äquivalenzklasse bzgl.  $\sim$  genau einen Repräsentanten enthält. Eine solche Menge heißt *Vitali-Menge*. Die Existenz von Vitali-Mengen ist eine Konsequenz des Auswahlaxioms!

Für  $p \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$  setzen wir

$$A_p := \{x + p : x \in A \cap [0, 1 - p)\} \cup \{x + p - 1 : x \in A \cap [1 - p, 1)\}.$$

Wegen  $(A \cap [0, 1 - p)) \cup (A \cap [1 - p, 1)) = A$  und Eigenschaft (2) ist dann

$$\mu(A) = \mu(A \cap [0, 1 - p)) + \mu(A \cap [1 - p, 1)),$$

und Eigenschaft (3) ergibt weiter

$$\mu(A) = \mu((A + p) \cap [p, 1)) + \mu((A + p - 1) \cap [0, p)) = \mu(A_p).$$

Wir zeigen, dass  $A_p \cap A_q = \emptyset$  für  $p, q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$  und  $p \neq q$ . Angenommen, es ist  $z \in A_p \cap A_q$ . Dann gibt es  $x, y \in A$  mit  $z = x + p$  oder  $z = x + p - 1$  und  $z = y + q$  oder  $z = y + q - 1$ . In jedem Fall folgt  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Nach Definition von  $A$  ist dann aber bereits  $x = y$  und folglich  $p = q$  oder  $p - 1 = q$  oder  $p = q - 1$ .

Wegen  $p, q \in [0, 1)$  ist  $|p - q| < 1$ , und es verbleibt  $p = q$  als einzige Möglichkeit. Dies war aber ausgeschlossen.

Als Nächstes zeigen wir, dass

$$[0, 1) = \bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} A_p.$$

Die Inklusion  $\supseteq$  ist klar. Für die umgekehrte Inklusion sei  $x \in [0, 1)$ . Dann gibt es ein  $y \in A$  mit  $x \sim y$ . Es ist also  $q := x - y \in \mathbb{Q}$ . Sei  $p = q + 1$  falls  $q < 0$  und  $p = q$  sonst. Dann ist  $p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$  und  $x \in A_p$ .

Wir verwenden nun (2)' und erhalten

$$\begin{aligned} \mu([0, 1)) &= \mu\left(\bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} A_p\right) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} \mu(A_p) = \sum_{p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} \mu(A) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu(A) = 0, \\ \infty & \text{falls } \mu(A) > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (4). □

Es kommt noch verblüffender!

**Satz 1.2** (Banach-Tarski-Paradox). *Sei  $d \geq 3$ , und seien  $A$  und  $B$  zwei disjunkte abgeschlossene Kugeln vom Radius 1 in  $\mathbb{R}^d$ . Dann gibt es  $n \in \mathbb{N}$ , paarweise disjunkte Teilmengen  $A_1, \dots, A_n$  von  $A$  und Kongruenzabbildungen  $T_1, \dots, T_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  so, dass*

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = A \quad \text{und} \quad T_1(A_1) \cup \dots \cup T_n(A_n) = A \cup B.$$

Es ist also möglich, eine Kugel so in endlich viele paarweise disjunkte Teile zu zerlegen, dass sich aus kongruenten Bildern dieser Teile zwei Kugeln der Größe des Originals zusammensetzen lassen! Es kann daher für  $d \geq 3$  keine Abbildung  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$  mit den Eigenschaften (1) – (4) geben! (Für  $d = 1, 2$  gibt es solche Abbildungen. Alle diese Aussagen machen vom Auswahlaxiom Gebrauch.)

## 1.2 Messbare Mengen und $\sigma$ -Algebren

Die Überlegungen aus dem vorigen Abschnitt lassen uns davon Abstand nehmen, ein Maß auf der gesamten Potenzmenge definieren zu wollen. Der abstrakte Rahmen der Maßtheorie sieht für uns daher wie folgt aus: Gegeben ist eine nichtleere Menge  $X$ , ein Mengensystem  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  und eine Funktion  $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ . Wir betrachten die Elemente von  $\mathcal{S}$  als diejenigen Teilmengen  $A$  von  $X$ , die man messen kann, denen man also ein Maß  $\mu(A)$  zuordnen kann.

Das Mengensystem  $\mathcal{S}$  sollte zu unseren Anforderungen (1) und (2) aus obiger Liste passen. (Die Bedingungen (3) und (4) ergeben in diesem allgemeinen Kontext keinen Sinn.) Das führt uns auf den Begriff der  $\sigma$ -Algebra in folgender Definition.

**Definition 1.3.** Sei  $X$  eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  heißt  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ , wenn

(a)  $\emptyset \in \mathcal{S}$ ,

(b) für jedes  $A \in \mathcal{S}$  ist  $X \setminus A \in \mathcal{S}$ ,

(c) für jede Folge  $(A_n)_{n \geq 1}$  von Mengen  $A_n \in \mathcal{S}$  ist  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{S}$ .

Ist  $\mathcal{S}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ , so heißt das Paar  $(X, \mathcal{S})$  ein messbarer Raum, und die Elemente von  $\mathcal{S}$  heißen messbare Mengen.

**Bemerkung 1.4.** Mengensysteme, die  $\sigma$ -Algebren sind, sind nach (b) also abgeschlossen bzgl. Komplementbildung und wegen (c) sind sie abgeschlossen bzgl. abzählbarer Vereinigungen. Dank (b), (c) und der de Morganschen Identität

$$X \setminus \left( \bigcap_{n \geq 1} A_n \right) = \bigcup_{n \geq 1} (X \setminus A_n),$$

sind  $\sigma$ -Algebren weiterhin abgeschlossen bzgl. abzählbarer Durchschnitte und wegen  $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$  auch bzgl. Mengendifferenzen.

**Beispiel 1.5.** Auf jeder nichtleeren Menge  $X$  gibt es zwei „triviale“  $\sigma$ -Algebren. So ist  $\{\emptyset, X\}$  die kleinste und  $\mathcal{P}(X)$  die größte  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .

Wir zeigen nun, dass das machtvolle mathematische Instrument der „Hüllenbildung“ auch für  $\sigma$ -Algebren funktioniert. Außerdem schauen wir uns die Einschränkung einer  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  auf Teilmengen von  $X$  an. Den Beweis dieses Lemmas sollen Sie in der Übung führen.

**Lemma 1.6.** (a) Ist  $\mathbb{S}$  eine Familie von  $\sigma$ -Algebren über  $X$ , so ist ihr Durchschnitt

$$\bigcap \mathbb{S} := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathcal{S} \text{ für alle } \mathcal{S} \in \mathbb{S}\}$$

ebenfalls eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$ .

(b) Ist  $\mathcal{S}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $X$  und  $Y$  eine nichtleere Teilmenge von  $X$ , so ist

$$\mathcal{S}|_Y := \{E \cap Y : E \in \mathcal{S}\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra über  $Y$ .

**Definition 1.7.** In der Situation von (b) heißt  $\mathcal{S}|_Y$  Spur- $\sigma$ -Algebra oder kurz Spur von  $\mathcal{S}$ .



Teil (a) des obigen Lemmas erlaubt nun die folgende Konstruktion: Ist  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , so betrachten wir die Menge  $\mathbb{S}(\mathcal{E})$  aller  $\sigma$ -Algebren über  $X$ , die  $\mathcal{E}$  umfassen. Da  $\mathcal{E}$  in der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{P}(X)$  enthalten ist, ist  $\mathbb{S}(\mathcal{E})$  nicht leer. Der Durchschnitt aller  $\sigma$ -Algebren aus  $\mathbb{S}(\mathcal{E})$  ist nach Lemma 1.6 (a) wieder eine  $\sigma$ -Algebra. Diese enthält offenbar  $\mathcal{E}$  und ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $X$ , die  $\mathcal{E}$  enthält.

**Definition 1.8.** Sei  $X$  eine nichtleere Menge und  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$  ein Mengensystem. Die eben konstruierte  $\sigma$ -Algebra

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \mathbb{S}(\mathcal{E}) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathcal{S} \text{ für alle } \mathcal{S} \in \mathbb{S}(\mathcal{E})\}$$

heißt die durch  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra.

Das Mengensystem  $\mathcal{E}$  nennt man dann ein Erzeugersystem von  $\sigma(\mathcal{E})$ .

Ein besonders wichtiges Beispiel einer solchen erzeugten  $\sigma$ -Algebra ist die folgende Konstruktion, die in jedem metrischen bzw. jedem topologischen Raum möglich ist.

**Definition 1.9.** Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $\mathcal{O}$  das System der offenen Teilmengen von  $X$ , so heißt die durch  $\mathcal{O}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O})$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ , und die Elemente von  $\mathcal{B}(X)$  heißen Borelmengen.

**Bemerkung 1.10.** Es ist klar, dass alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen Borelmengen sind, ebenso alle abzählbaren Durchschnitte offener Mengen (sogenannte  $G_\delta$ -Mengen) und alle abzählbaren Vereinigungen abgeschlossener Mengen (sogenannte  $F_\sigma$ -Mengen).

Versehen wir den  $\mathbb{R}^d$  mit der Euklidischen Metrik, so erhalten wir die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  der Borelmengen auf dem  $\mathbb{R}^d$ . Das werden – grob gesagt – später die Mengen sein, die wir messen und über die wir integrieren wollen.

Wir überlegen uns einige äquivalente Beschreibungen von  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

**Lemma 1.11.** Jedes der folgenden Mengensysteme  $\mathcal{E}_j$  erzeugt die Borelsche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &:= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}, \\ \mathcal{E}_2 &:= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{E}_3 &:= \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{E}_4 &:= \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{E}_5 &:= \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{S}_j := \sigma(\mathcal{E}_j)$ ,  $j = 1, \dots, 5$ . Wir zeigen

$$\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}_3 \subseteq \mathcal{S}_4 \subseteq \mathcal{S}_5 \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_1.$$

Dann müssen alle diese Mengen identisch sein.

Wegen  $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$  ist  $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$ . Aus

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ a + \frac{1}{n}, b \right)$$

folgt  $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{S}_3$  und damit  $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}_3$ . Analog folgt aus

$$[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ a, b - \frac{1}{n} \right),$$

das  $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathcal{S}_4$  und  $\mathcal{S}_3 \subseteq \mathcal{S}_4$ , und aus

$$[a, b] = (-\infty, b] \setminus \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( -\infty, a - \frac{1}{n} \right] \right)$$

folgt, dass  $\mathcal{E}_4 \subseteq \mathcal{S}_5$  und  $\mathcal{S}_4 \subseteq \mathcal{S}_5$ . Schließlich ist wegen

$$(-\infty, b] = \mathbb{R} \setminus (b, \infty),$$

auch jede Menge aus  $\mathcal{E}_5$  in  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  und damit  $\mathcal{S}_5 \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Es bleibt noch  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_1$  zeigen. Da  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  durch die offenen Mengen erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass  $\mathcal{S}_1$  jede offene Menge enthält. Sei also  $U \subseteq \mathbb{R}$  offen. Dann gibt es zu jedem  $x \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  mit  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$ . Wir wählen  $a \in (x - \varepsilon, x) \cap \mathbb{Q}$  und  $b \in (x, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ . Dann ist  $x \in (a, b) \subseteq U$  und folglich

$$U = \bigcup_{(a,b) \subseteq U \text{ mit } a, b \in \mathbb{Q}} (a, b).$$

Da die rechte Seite eine abzählbare Vereinigung ist, folgt  $U \in \mathcal{S}_1$ .  $\square$

Ein analoges Resultat gilt im  $\mathbb{R}^d$ . Erklären wir für  $a = (a_1, \dots, a_d)^T$  und  $b = (b_1, \dots, b_d)^T$  mit  $a_j \leq b_j$  das *halboffene Intervall in  $\mathbb{R}^d$*   $[a, b)$  durch

$$[a, b) := \{(x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d : a_j \leq x_j < b_j \text{ für alle } j\},$$

so erhalten wir wie in Lemma 1.11:

**Lemma 1.12.** *Das System  $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d\}$  der halboffenen Intervalle erzeugt  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Auch die analog definierten offenen und abgeschlossenen Intervalle erzeugen jeweils  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .*

Wir betrachten nun das Verhalten von  $\sigma$ -Algebren unter Abbildungen.

**Satz 1.13.** *Seien  $X, Y$  nichtleere Mengen,  $\mathcal{S}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$  und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Das Mengensystem  $f^{-1}(\mathcal{S}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{S}\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ .*

(b) Wird  $\mathcal{S}$  von einem Mengensystem  $\mathcal{E}$  erzeugt, so erzeugt  $f^{-1}(\mathcal{E})$  die  $\sigma$ -Algebra  $f^{-1}(\mathcal{S})$ .

*Beweis.* Der Teil (a) ergibt sich direkt aus der Operationstreu der Abbildung  $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  und verbleibt als Übung. Wir beweisen noch (b).

Da  $f^{-1}(\mathcal{S})$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, die  $f^{-1}(\mathcal{E})$  umfasst, folgt  $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{S})$ . Für den Beweis der umgekehrten Inklusion verwenden wir eine Schlussweise, die als *Prinzip der guten Mengen* bekannt ist: Wir betrachten alle „guten“ Teilmengen von  $Y$ , d.h. alle Teilmengen von  $Y$ , deren Urbild zu  $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$  gehört. Die Menge  $\mathcal{C} := \{C \subseteq Y : f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\}$  der guten Mengen ist eine  $\sigma$ -Algebra über  $Y$  ( $\nearrow$  Übung), und offenbar gilt  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$ . Dann ist aber auch  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ , d.h.  $f^{-1}(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ .  $\square$

Die beiden folgenden Aussagen ergeben sich als unmittelbare Folgerungen. Dazu wendet man Satz 1.13 auf die Inklusionsabbildung  $f : Y \rightarrow X$ ,  $x \mapsto x$  an.

**Folgerung 1.14.** Sei  $\mathcal{E}$  ein Erzeugersystem einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{S}$  über  $X$  und  $Y \subseteq X$ . Dann ist  $\mathcal{E}|_Y := \{E \cap Y : E \in \mathcal{E}\}$  ein Erzeugersystem für die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{S}|_Y$ .

*Beweis.* Mit  $f : Y \rightarrow X$ ,  $x \mapsto x$ , ist nach Satz 1.13

$$f^{-1}(\mathcal{S}) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{S}\} = \{A \cap Y : A \in \mathcal{S}\} = \mathcal{S}|_Y$$

erzeugt von

$$f^{-1}(\mathcal{E}) = \{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{E}\} = \{E \cap Y : E \in \mathcal{E}\} = \mathcal{E}|_Y. \quad \square$$

**Folgerung 1.15.** Seien  $X$  ein metrischer Raum,  $\mathcal{O}$  das System der offenen Teilmengen von  $X$  und  $Y \subseteq X$ . Dann erzeugt das System  $\mathcal{O}|_Y$  der relativ offenen Teilmengen von  $Y$  die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(X)|_Y$ , d.h. es ist  $\mathcal{B}(X)|_Y = \mathcal{B}(Y)$ , wobei  $\mathcal{B}(Y)$  die von  $\mathcal{O}|_Y$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra der Borelschen Teilmengen von  $Y$  bezeichnet.

Eng mit dem Begriff einer  $\sigma$ -Algebra ist der folgende verknüpft.

**Definition 1.16.** Sei  $X$  eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$  heißt Dynkin-System auf  $X$ , wenn

- (a)  $\emptyset \in \mathcal{D}$ ,
- (b) für jedes  $A \in \mathcal{D}$  ist  $X \setminus A \in \mathcal{D}$ ,
- (c) für jede Folge  $(A_n)_{n \geq 1}$  paarweise disjunkter Mengen  $A_n \in \mathcal{D}$  ist  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{D}$ .

**Bemerkung 1.17.** (a) Jede  $\sigma$ -Algebra ist ein Dynkin-System, umgekehrt gibt es aber Dynkin-Systeme, die keine  $\sigma$ -Algebra sind. Man betrachte beispielsweise  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  und nehme als  $\mathcal{D}$  die Menge aller Teilmengen von  $X$  mit einer geraden Anzahl an Elementen. Dann ist  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System, aber keine  $\sigma$ -Algebra (warum?).

- (b) Ist  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System auf einer nichtleeren Menge  $X$  und sind  $A, B \in \mathcal{D}$  mit  $B \subseteq A$ , so sind  $X \setminus A$  und  $B$  disjunkt, und wegen

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B) = X \setminus ((X \setminus A) \cup B) = X \setminus ((X \setminus A) \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots)$$

folgt  $A \setminus B \in \mathcal{D}$ . Dynkin-Systeme sind also abgeschlossen bzgl. Mengendifferenzen wenn eine der Mengen in er anderen enthalten ist.

Man beachte, dass das für allgemeine Mengendifferenzen nicht gilt, wie man sich ebenfalls anhand des Beispiels in (a) klar machen kann.

**Satz 1.18.** *Ein Dynkin-System ist genau dann eine  $\sigma$ -Algebra, wenn es abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte („durchschnittsstabil“) ist.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{S}$  eine  $\sigma$ -Algebra. Dann ist  $\mathcal{S}$  ein Dynkin-System und da  $\mathcal{S}$  nach den de Morganschen Regeln abgeschlossen bzgl. abzählbarer Durchschnitte ist, ist es wegen  $A_1 \cap \dots \cap A_k = A_1 \cap \dots \cap A_k \cap X \cap X \dots$  für  $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{S}$  auch abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte.

Sei nun  $\mathcal{D}$  ein durchschnittstabiles Dynkin-System. Es ist nur (c) aus der Definition einer  $\sigma$ -Algebra zu zeigen. Sind  $A, B \in \mathcal{D}$ , so ist wegen Eigenschaft (b) und der Durchschnittsstabilität auch  $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{D}$ , d.h. das System  $\mathcal{D}$  ist abgeschlossen bzgl. Differenzen und, wegen der de Morganschen Regeln, auch bzgl. endlicher Vereinigungen. Sei schließlich  $(E_n)$  eine Folge in  $\mathcal{D}$ . Wir setzen  $A_1 := E_1$  und  $A_n := E_n \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})$  für  $n > 1$ . Mit vollständiger Induktion folgt leicht, dass alle  $A_n$  in  $\mathcal{D}$  liegen, dass  $A_1 \cup \dots \cup A_n = E_1 \cup \dots \cup E_n$  für alle  $n$  gilt, und dass die  $A_n$  paarweise disjunkt sind. Dann ist  $\bigcup_{n \geq 1} E_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{D}$  wegen Eigenschaft (c) eines Dynkin-Systems, d.h.  $\mathcal{D}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.  $\square$

Man kann leicht sehen, dass für Dynkin-Systeme eine Aussage analog zu Lemma 1.6 gilt. Es gibt also für jedes Mengensystem  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$  ein kleinstes Dynkin-System das  $\mathcal{E}$  umfasst und dieses ist gegeben durch den Schnitt aller Dynkin-Systeme, die  $\mathcal{E}$  enthalten.

**Definition 1.19.** *Sei  $X$  eine nichtleere Menge und  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Dann heißt das kleinste Dynkin-System, das  $\mathcal{E}$  umfasst, das von  $\mathcal{E}$  erzeugte Dynkin-System und wir bezeichnen dieses mit  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ . Weiter nennt man dann  $\mathcal{E}$  Erzeugersystem dieses Dynkin-Systems.*

Die Bedeutung der Dynkin-Systeme in der Maßtheorie beruht darauf, dass jedes von einem durchschnittsstabilen Mengensystem erzeugte Dynkin-System automatisch eine  $\sigma$ -Algebra ist, wie folgender Satz zeigt.

**Satz 1.20.** *Ist  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$  durchschnittsstabil, so ist das von  $\mathcal{E}$  erzeugte Dynkin-System gleich der von  $\mathcal{E}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra.*

*Beweis.* Nach Satz 1.18 genügt es zu zeigen, dass das durch  $\mathcal{E}$  erzeugte Dynkin-System  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$  durchschnittsstabil ist. Für  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  sei

$$\mathcal{C}_D := \{M \subseteq X : M \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}.$$

Dann ist  $\mathcal{C}_D$  ein Dynkin-System über  $X$ . Für jedes  $M \in \mathcal{C}_D$  ist nämlich  $(X \setminus M) \cap D = D \setminus (M \cap D) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$  (siehe Bemerkung 1.17 (b)), und für jede Folge paarweise disjunkter Mengen  $A_k \in \mathcal{C}_D$  ist

$$D \cap \left( \bigcup_{k \geq 1} A_k \right) = \bigcup_{k \geq 1} (A_k \cap D) \in \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Weiter: für jedes  $E \in \mathcal{E}$  ist  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}_E$ , da ja  $\mathcal{E}$  durchschnittsstabil ist. Dann ist aber auch  $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{C}_E$  für jedes  $E \in \mathcal{E}$ .

Sind nun  $E \in \mathcal{E}$  und  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ , so ist (wie soeben gesehen)  $D \in \mathcal{C}_E$ , also auch  $E \in \mathcal{C}_D$ . Daher ist  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}_D$  und, da  $\mathcal{C}_D$  ein Dynkin-System ist, auch  $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{C}_D$  für jedes  $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ . Folglich ist  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$  durchschnittsstabil.  $\square$

Dieser Satz ist oft in folgender Situation nützlich: Wir wollen eine Eigenschaft „Blubb“ für die Elemente einer  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\mathcal{E})$  zeigen. Dazu zeigt man nur:

- 1) Elemente von  $\mathcal{E}$  haben die Eigenschaft „Blubb“.
- 2)  $\mathcal{E}$  ist durchschnittsstabil.
- 3)  $\mathcal{D} := \{A \subseteq X : A \text{ hat Eigenschaft „Blubb“}\}$  ist ein Dynkin-System.

Das durch  $\mathcal{E}$  erzeugte Dynkin-System liegt dann in  $\mathcal{D}$ , also haben die Elemente dieses Dynkin-Systems die Eigenschaft „Blubb“, und dieses Dynkin-System stimmt wegen Satz 1.20 mit  $\sigma(\mathcal{E})$  überein.

Man nennt dieses Vorgehen *Prinzip der guten Mengen*.

### 1.3 Messbare Funktionen

Wir wenden uns nun den Funktionen zu, die wir später integrieren wollen.

**Definition 1.21.** *Seien  $(X_1, \mathcal{S}_1), (X_2, \mathcal{S}_2)$  messbare Räume. Eine Funktion  $f : X_1 \rightarrow X_2$  heißt messbar, wenn das Urbild jeder messbaren Menge messbar ist, d. h. wenn  $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}_1$  für jede Menge  $E \in \mathcal{S}_2$ .*

Man beachte die formale Ähnlichkeit zur Charakterisierung stetiger Funktionen durch die Eigenschaft, dass Urbilder offener Mengen offen sind.

**Satz 1.22.** *Verknüpfungen messbarer Funktionen sind messbar. Genauer: sind  $(X_1, \mathcal{S}_1), (X_2, \mathcal{S}_2)$  und  $(X_3, \mathcal{S}_3)$  messbare Räume und  $f : X_1 \rightarrow X_2$  und  $g : X_2 \rightarrow X_3$  messbare Funktionen, so ist auch  $g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$  messbar.*

*Beweis.* Für jedes  $E \in \mathcal{S}_3$  gilt  $g^{-1}(E) \in \mathcal{S}_2$  dank der Messbarkeit von  $g$ . Also ist

$$(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E)) \in f^{-1}(\mathcal{S}_2) \subseteq \mathcal{S}_1.$$

Damit ist  $g \circ f$  messbar. □

Der folgende Satz zeigt, dass es für das Überprüfen der Messbarkeit einer Funktion nicht erforderlich ist, die Urbilder *aller* messbaren Mengen zu betrachten.

**Satz 1.23.** *Seien  $(X_1, \mathcal{S}_1)$ ,  $(X_2, \mathcal{S}_2)$  messbare Räume, wobei  $\mathcal{S}_2 = \sigma(\mathcal{E}_2)$  für eine Teilmenge  $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{P}(X_2)$  ist, und sei  $f : X_1 \rightarrow X_2$ . Ist  $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}_1$  für jedes  $E \in \mathcal{E}_2$ , so ist  $f$  bereits messbar.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist

$$\mathcal{E}_2 \subseteq \{E \in \mathcal{P}(X_2) : f^{-1}(E) \in \mathcal{S}_1\}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass die rechte Seite eine  $\sigma$ -Algebra ist. Dann muss aber auch

$$\mathcal{S}_2 = \sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \{E \in \mathcal{P}(X_2) : f^{-1}(E) \in \mathcal{S}_1\}$$

sein, d.h.  $f$  ist messbar. □

Ist also  $(X_2, d)$  ein metrischer Raum, so ist  $f : (X_1, \mathcal{S}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{B}(X_2))$  genau dann messbar, wenn das Urbild jeder offenen Menge messbar ist. Da bei stetigen Abbildungen Urbilder offener Mengen offen sind, folgt sofort:

**Folgerung 1.24.** *Sind  $X, Y$  metrische Räume, so ist jede stetige Funktion  $f : X \rightarrow Y$  messbar bzgl. der  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{B}(X)$  und  $\mathcal{B}(Y)$  der Borelmengen.*

**Folgerung 1.25.** *Sei  $(X, \mathcal{S})$  ein messbarer Raum und  $f : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a)  $f$  ist messbar.
- (b) Urbilder offener Intervalle sind messbar.
- (c) Urbilder halboffener Intervalle sind messbar.
- (d) Urbilder abgeschlossener Intervalle sind messbar.
- (e) Für alle  $b \in \mathbb{R}$  ist  $f^{-1}((-\infty, b])$  messbar.

Dies folgt sofort aus Satz 1.23 und Lemma 1.11. Mit Lemma 1.12 bekommt man eine analoge Aussage für den  $\mathbb{R}^d$ . Insbesondere gilt

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ messbar} \iff \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}^d \text{ mit } a \leq b \text{ gilt } f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{S}. \quad (1.1)$$

Darüberhinaus gilt:

**Satz 1.26.** Sei  $(X, \mathcal{S})$  ein messbarer Raum und  $f := (f_1, \dots, f_d) : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a)  $f : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  ist messbar.

(b) Jede der Koordinatenfunktionen  $f_j : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  ist messbar.

*Beweis.* (a)  $\Rightarrow$  (b): Die Projektionen  $p_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, \dots, x_d)^T \mapsto x_j$  sind stetig und daher messbar (Folgerung 1.24). Nach Satz 1.22 sind auch die Funktionen  $f_j = p_j \circ f$  messbar.

(b)  $\Rightarrow$  (a): Seien  $a = (a_1, \dots, a_d)^T$ ,  $b = (b_1, \dots, b_d)^T \in \mathbb{R}^d$ . Sind alle Koordinatenfunktionen messbar, so sind alle Urbilder

$$f^{-1}([a, b]) = \bigcap_{j=1}^d f_j^{-1}([a_j, b_j])$$

messbar. Die Aussage (1.1) liefert die Messbarkeit von  $f$ .  $\square$

**Satz 1.27.** Seien  $(X, \mathcal{S})$  ein messbarer Raum und  $f, g : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  messbare Funktionen. Dann sind auch die Funktionen  $|f|$ ,  $f + g$ ,  $fg$ ,  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar.

*Beweis.* Die Messbarkeit von  $|f|$  folgt aus der Stetigkeit (und folglich Messbarkeit) der Betragsfunktion mit Satz 1.22. Weiter wissen wir aus Satz 1.26, dass die Funktion  $F = (f, g) : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$  messbar ist. Aus der Stetigkeit der Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y, xy, \max(x, y), \min(x, y)$$

und aus Satz 1.22 folgen die übrigen Behauptungen.  $\square$

Da konstante Funktionen messbar sind (warum?), bildet nach Satz 1.27 die Menge aller messbaren Funktionen von  $X$  nach  $\mathbb{R}$  einen reellen Vektorraum.

**Bemerkung 1.28.** Es ist oft praktisch und sinnvoll, statt mit reellwertigen Funktionen mit Funktionen zu arbeiten, deren Werte in der *erweiterten Zahlengeraden*  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  liegen. Man kann leicht zeigen, dass die Menge

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \{A \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}) : A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\overline{\mathbb{R}}$  ist und dass man  $\overline{\mathbb{R}}$  mit einer Metrik versehen kann, so dass die Elemente von  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  gerade die Borelmengen von  $\overline{\mathbb{R}}$  sind ( $\nearrow$  Übung). Wir nennen daher  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen auf  $\overline{\mathbb{R}}$ . Weiter setzen wir die Relation  $<$  auf  $\mathbb{R}$  durch  $-\infty < x < \infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  auf ganz  $\overline{\mathbb{R}}$  fort.

Zum Rechnen mit  $\pm\infty$  vereinbaren wir folgende Regeln:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \infty &= \infty \cdot 0 &= 0, \\ x \cdot \infty &= \infty \cdot x &= \infty \quad \text{falls } x > 0, \\ x \cdot \infty &= \infty \cdot x &= -\infty \quad \text{falls } x < 0, \\ x + \infty &= \infty + x &= \infty \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

**Achtung:**  $\infty - \infty$  ist nicht erklärt.

**Lemma 1.29.** Sei  $(X, \mathcal{S})$  ein messbarer Raum und  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Die Funktion  $f : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  ist messbar.
- (b) Die Funktion  $-f : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  ist messbar.
- (c) Für jedes  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  ist  $\{x \in X : f(x) \leq b\}$  messbar.
- (d) Für jedes  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  ist  $\{x \in X : f(x) > a\}$  messbar.
- (e) Für jedes  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  ist  $\{x \in X : f(x) \geq a\}$  messbar.
- (f) Für jedes  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  ist  $\{x \in X : f(x) < b\}$  messbar.

*Beweis.* Die Äquivalenz (a)  $\Leftrightarrow$  (b) folgt aus  $-\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ , die Implikation (a)  $\Rightarrow$  (c) folgt aus  $[-\infty, b] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ , und (c)  $\Rightarrow$  (d) folgt durch Komplementbildung:

$$\{x \in X : f(x) > a\} = X \setminus \{x \in X : f(x) \leq a\}.$$

Wir zeigen nun (d)  $\Rightarrow$  (a): Nach Satz 1.23 genügt es zu zeigen, dass die Intervalle  $(a, \infty]$  die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  erzeugen. Sei  $\mathcal{A}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $\overline{\mathbb{R}}$ , die alle Intervalle  $(a, \infty]$  mit  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  enthält. Offenbar ist  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ .

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Dann liegt  $(a, b] = (a, \infty] \setminus (b, \infty]$  in  $\mathcal{A}$  und wie in Lemma 1.11 folgt  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$ . Weiter ist  $\overline{\mathbb{R}} \setminus (-\infty, \infty] = \{-\infty\} \in \mathcal{A}$  und ebenso

$$\{\infty\} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \left( \{-\infty\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, n] \right) \in \mathcal{A}.$$

Da jede Borelmenge auf  $\overline{\mathbb{R}}$  die Vereinigung einer Menge aus  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  mit einer der Mengen  $\emptyset, \{-\infty\}, \{\infty\}, \{-\infty, \infty\}$  ist, folgt  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{A}$  und damit  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{A}$ .

Die Implikationen (a)  $\Rightarrow$  (e)  $\Rightarrow$  (f)  $\Rightarrow$  (a) zeigt man analog.  $\square$

Die folgenden Resultate zeigen, dass die Messbarkeit bemerkenswert stabil gegenüber Grenzprozessen ist.



**Satz 1.30.** Sei  $(X, \mathcal{S})$  ein messbarer Raum und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f_n : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  eine messbare Funktion. Dann sind auch die Funktionen

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

messbar.

*Beweis.* Sei  $g := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Für alle  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  ist dann

$$\{x \in X : g(x) > a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) > a\}.$$

Nach Voraussetzung und Lemma 1.29 ist die rechte Seite messbar. Also ist für jedes  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  die linke Seite messbar, und  $g$  ist messbar nach Lemma 1.29. Genauso folgt die Messbarkeit von  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Aus

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq n} f_j$$

folgt nun die Messbarkeit von  $\limsup f_n$ . Die von  $\liminf f_n$  zeigt man analog.  $\square$

Damit sind insbesondere auch Grenzwerte von Folgen messbarer Funktionen messbar. Dieses wichtige Ergebnis halten wir gesondert fest:

**Satz 1.31.** Punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar, d. h. ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : (X, \mathcal{S}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  und existiert der Grenzwert  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  für jedes  $x \in X$ , so ist  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar.

## 1.4 Maße

Wir wenden uns nun dem Messen messbarer Mengen eines messbaren Raumes zu und beginnen mit einer Axiomatisierung des Maßbegriffes.

**Definition 1.32.** Sei  $(X, \mathcal{S})$  ein messbarer Raum. Ein Maß auf  $(X, \mathcal{S})$  ist eine Funktion  $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  mit folgenden Eigenschaften:

(a)  $\mu(\emptyset) = 0$ .

(b)  $\mu$  ist  $\sigma$ -additiv, d. h. für jede Folge  $(E_n)_{n \geq 1}$  paarweise disjunkter Mengen  $E_n \in \mathcal{S}$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \quad (1.2)$$

Ist  $\mu$  ein Maß auf  $(X, \mathcal{S})$ , so heißt das Tripel  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum. Das Maß  $\mu$  heißt endlich, wenn  $\mu(X) < \infty$ .

Man beachte, dass in (1.2) durchaus einzelne oder alle Summanden unendlich sein können. Hierzu sei auf Bemerkung 1.28 verwiesen.

**Beispiel 1.33.** Sei  $X$  eine nichtleere Menge.

(a) Ist  $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$ , so kann  $\mu(X) \in [0, \infty]$  beliebig gewählt werden, und man erhält mit  $\mu(\emptyset) = 0$  ein Maß auf  $(X, \mathcal{S})$ .

(b) Für jedes  $x \in X$  wird durch

$$\delta_x(E) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in E \\ 0 & \text{wenn } x \notin E \end{cases}, \quad E \in \mathcal{P}(X),$$

ein Maß auf  $(X, \mathcal{P}(X))$  festgelegt, das sogenannte *Punkt-* oder *Dirac-Maß* in  $x$ .

(c) Durch

$$\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}, \quad E \mapsto \text{Anzahl der Elemente von } E$$

wird das *Zählmaß* auf  $(X, \mathcal{P}(X))$  definiert.

(d) Ist  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum und  $E \in \mathcal{S}$ , so ist auch  $(E, \mathcal{S}|_E, \mu|_{\mathcal{S}|_E})$  ein Maßraum, vgl. Lemma 1.6 (b)).

Wir sammeln erste elementare Eigenschaften von Maßen.

**Lemma 1.34.** Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum. Dann gilt:

(a)  $\mu$  ist additiv, d.h. für alle  $A, B \in \mathcal{S}$  mit  $A \cap B = \emptyset$  gilt  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

(b)  $\mu$  ist monoton, d.h. für alle  $A, B \in \mathcal{S}$  mit  $A \subseteq B$  gilt  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

(c) Ist  $(E_j)_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{S}$  monoton wachsend (d.h.  $E_j \subseteq E_{j+1}$  für alle  $j$ ), dann ist

$$\mu\left(\bigcup_{j \geq 1} E_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j). \quad (\text{Stetigkeit von unten})$$

(d) Ist  $(E_j)_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{S}$  monoton fallend (d.h.  $E_j \supseteq E_{j+1}$  für alle  $j$ ) und  $\mu(E_1) < \infty$ , dann ist

$$\mu\left(\bigcap_{j \geq 1} E_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j). \quad (\text{Stetigkeit von oben})$$

(e)  $\mu$  ist  $\sigma$ -subadditiv, d. h. für beliebige Folgen  $(E_j)_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{S}$  ist

$$\mu\left(\bigcup_{j \geq 1} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

*Beweis.* (a) Man wende die  $\sigma$ -Additivität auf die Folge  $A, B, \emptyset, \emptyset, \dots$  an.

(b) Aus (a) folgt  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

(c) Sei  $E := \bigcup_{j \geq 1} E_j$ ,  $E_0 := \emptyset$  und  $A_j := E_j \setminus E_{j-1}$  für  $j \geq 1$ . Dann sind die Mengen  $A_j$  paarweise disjunkt, und für jedes  $n$  ist  $E_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$  sowie  $E = \bigcup_{j \geq 1} A_j$ . Aus der  $\sigma$ -Additivität und Teil (a) folgt

$$\mu(E_k) = \sum_{j=1}^k \mu(A_j) \quad \text{sowie} \quad \mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Hieraus ergibt sich aber  $\mu(E_k) \rightarrow \mu(E)$  für  $k \rightarrow \infty$ .

(d) Sei  $E := \bigcap_{j \geq 1} E_j$  und  $C_j := E_1 \setminus E_j$  für  $j \geq 1$ . Die Folge  $(C_j)_{j \geq 1}$  ist monoton wachsend, und aus (c) und den de Morganschen Identitäten folgt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C_j) = \mu\left(\bigcup_{j \geq 1} C_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j \geq 1} (E_1 \setminus E_j)\right) = \mu\left(E_1 \setminus \bigcap_{j \geq 1} E_j\right) = \mu(E_1 \setminus E).$$

Aus  $\mu(E_1) = \mu(E_j) + \mu(C_j)$  und  $\mu(E_1) = \mu(E) + \mu(E_1 \setminus E)$  sowie  $\mu(E_1) < \infty$  folgt

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E_1) - \mu(E_1 \setminus E) = \mu(E_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C_j) \\ &= \mu(E_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} (\mu(E_1) - \mu(E_j)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j). \end{aligned}$$

(e) Sei  $A_1 := E_1$  und  $A_k := E_k \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_{k-1})$  für  $k > 1$ . Die Mengen  $A_k$  sind paarweise disjunkt, und es ist  $\bigcup_{k \geq 1} A_k = \bigcup_{k \geq 1} E_k$  sowie  $\mu(A_k) \leq \mu(E_k)$  für alle  $k$  wegen (b). Aus der  $\sigma$ -Additivität folgt

$$\mu\left(\bigcup_{k \geq 1} E_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k). \quad \square$$

**Satz 1.35** (Eindeutigkeitssatz für endliche Maße). *Es sei  $(X, \mathcal{S})$  ein messbarer Raum und  $\mathcal{E}$  ein durchschnittsstabiler Erzeuger von  $\mathcal{S}$  mit  $X \in \mathcal{E}$ . Sind  $\mu, \nu$  endliche Maße auf  $\mathcal{S}$  mit  $\mu(E) = \nu(E)$  für alle  $E \in \mathcal{E}$ , so gilt bereits  $\mu(A) = \nu(A)$  für alle  $A \in \mathcal{S}$ .*

*Beweis.* Wir verwenden das Prinzip der guten Mengen, vgl. Seite 13, und zeigen dazu, dass  $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{S} : \mu(A) = \nu(A)\}$  ein Dynkin-System ist. Da  $\mathcal{E}$  durchschnittstabil ist, liefert dann Satz 1.20 für das von  $\mathcal{E}$  erzeugte Dynkin-System  $\mathcal{D}(\mathcal{E})$

$$\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}.$$

Es ist also  $\mathcal{D} = \mathcal{S}$ , und wir sind fertig.

Zum Nachweis, dass  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System ist, beobachten wir zunächst, dass nach der Definition von Maßen  $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset)$  ist und damit  $\emptyset \in \mathcal{D}$ . Wir zeigen weiter, dass  $X \setminus A \in \mathcal{D}$  wenn  $A \in \mathcal{D}$ . Aus  $A \cup (X \setminus A) = X$  folgt  $\mu(A) + \mu(X \setminus A) = \mu(X)$  und  $\nu(A) + \nu(X \setminus A) = \nu(X)$ . Wegen  $\mu(A) = \nu(A)$  und  $\mu(X) = \nu(X)$  ( $X \in \mathcal{E}$ !) und der Endlichkeit der Maße folgt daraus  $\mu(X \setminus A) = \nu(X \setminus A)$ , also  $X \setminus A \in \mathcal{D}$ .

Sei noch  $(E_k)$  eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus  $\mathcal{D}$ . Dann ist

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(E_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(E_k) = \nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right).$$

Also ist auch  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \in \mathcal{D}$ , und  $\mathcal{D}$  ist ein Dynkin-System.  $\square$

**Warnung 1.36.** Die Aussage in obigem Satz gilt für unendliche Maße im Allgemeinen nicht!

**Definition 1.37.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Ein Maß auf  $(X, \mathcal{B}(X))$  heißt ein Borel-Maß.

Der folgende Satz ist ein Spezialfall von Satz 1.35.

**Satz 1.38.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und seien  $\mu, \nu$  endliche Borel-Maße auf  $X$ . Wenn  $\mu(G) = \nu(G)$  für alle offenen Mengen  $G \subseteq X$ , dann ist  $\mu(B) = \nu(B)$  für alle  $B \in \mathcal{B}(X)$ .

**Satz 1.39.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $\mu$  ein endliches Borel-Maß auf  $X$  und  $B \in \mathcal{B}(X)$ .

(a) Es gilt

$$\mu(B) = \inf \{ \mu(G) : B \subseteq G, G \text{ offen} \}, \quad (1.3)$$

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(F) : F \subseteq B, F \text{ abgeschlossen} \}. \quad (1.4)$$

(b) Es gibt eine  $F_\sigma$ -Menge  $A$  und eine  $G_\delta$ -Menge  $C$  mit  $A \subseteq B \subseteq C$  und  $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C)$ .

*Beweis.* Wegen der Monotonie gilt immer „ $\leq$ “ in (1.3) und „ $\geq$ “ in (1.4).

Wir zeigen, dass

$$\mathcal{D} := \{ B \in \mathcal{B}(X) : B \text{ erfüllt (1.3) und (1.4)} \}$$

ein Dynkin-System ist. Da  $\emptyset$  offen und abgeschlossen ist, ist offenbar  $\emptyset \in \mathcal{D}$ . Als Nächstes überlegen uns, dass  $X \setminus A \in \mathcal{D}$  für alle  $A \in \mathcal{D}$ . Sei  $A \in \mathcal{D}$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $\mu(A)$  das Infimum aller Maße von offenen Obermengen von  $A$  ist, gibt es eine offene Menge  $G$  mit  $A \subseteq G$  und  $\mu(G) < \mu(A) + \varepsilon$ . Genauso gibt es eine abgeschlossene Menge  $F$  mit  $F \subseteq A$  und  $\mu(F) > \mu(A) - \varepsilon$ .

Nun sind  $F^c$  offen und  $G^c$  abgeschlossen mit  $G^c \subseteq A^c \subseteq F^c$  und es gilt dank der Endlichkeit des Maßes

$$\mu(F^c) - \mu(A^c) = \mu(F^c \setminus A^c) = \mu(A \setminus F) < \varepsilon,$$

d. h.  $\mu(A^c) > \mu(F^c) - \varepsilon/2$ . Da  $\varepsilon$  beliebig war, ist damit  $\mu(A^c) \geq \inf\{\mu(G) : G \subseteq A^c, G \text{ offen}\}$ . Da wir zu Beginn des Beweises schon beobachtet hatten, dass die umgekehrte Ungleichung immer gilt, haben wir hier sogar Gleichheit, d. h.  $A$  erfüllt (1.3). Analog zeigt man mit Hilfe von  $G^c$ , dass für  $A$  auch (1.4) gilt. Damit ist  $X \setminus A \in \mathcal{D}$ .

Wir zeigen weiter:  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{D}$  für jede Folge paarweise disjunkter Mengen  $A_n \in \mathcal{D}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Für jedes  $n \geq 1$  gibt es mit dem gleichen Argument wie eben eine abgeschlossene Menge  $F_n$  und eine offene Menge  $G_n$  mit

$$F_n \subseteq A_n \subseteq G_n \quad \text{und} \quad \mu(G_n \setminus F_n) \leq \varepsilon 2^{-n-1}.$$

Sei  $G := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$  und  $\tilde{F} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Dann ist  $G$  offen. Da die  $F_n$  ebenfalls paarweise disjunkt sind, folgt

$$\mu(\tilde{F}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(F_n).$$

Es gibt daher ein  $n_0 \geq 1$  so, dass für die Menge  $F := \bigcup_{n=1}^{n_0} F_n$  gilt  $\mu(\tilde{F} \setminus F) \leq \varepsilon/2$ . Offenbar ist  $F$  abgeschlossen, und es ist  $F \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n \subseteq G$  sowie

$$\begin{aligned} \mu(G \setminus F) &= \mu(G \setminus \tilde{F}) + \mu(\tilde{F} \setminus F) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} (G_n \setminus F_n)\right) + \mu(\tilde{F} \setminus F) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mu(G_n \setminus F_n) + \mu(\tilde{F} \setminus F) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Insbesondere ist also mit den gleichen Argumenten wie oben  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) > \mu(G) - \varepsilon$  sowie  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) < \mu(F) + \varepsilon$  und das liefert wiederum, dass  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  sowohl (1.3) als auch (1.4) erfüllt. Somit ist  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System.

Wir zeigen schließlich: Jede abgeschlossene Menge  $F \subseteq X$  gehört zu  $\mathcal{D}$ . Offenbar gilt (1.4) für  $F$ . Um auch (1.3) einzusehen, setzen wir

$$G_n := \{x \in X : \text{es gibt ein } f \in F \text{ mit } d(x, f) < 1/n\} = \bigcup_{f \in F} U_{1/n}(f).$$

Die Mengen  $G_n$  sind offen, sie bilden eine monoton fallende Folge, und es ist  $F = \bigcap_{n \geq 1} G_n$ . Aus Lemma 1.34 (d) (Man beachte, dass  $\mu$  als endliches Maß vorausgesetzt ist.) folgt dann

$$\mu(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n).$$

Also ist auch (1.3) erfüllt und  $F \in \mathcal{D}$ . Dann enthält  $\mathcal{D}$  aber auch alle offenen Mengen, und wir erhalten  $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{D}$  mit Satz 1.20 (Prinzip der guten Mengen). Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der ersten.  $\square$

Auch dieser Satz gilt für nicht endliche Borel-Maße im Allgemeinen nicht. Borel-Maße, die trotzdem (1.3) und (1.4) erfüllen, bekommen daher ein besonderes Qualitätssiegel:

**Definition 1.40.** *Ein Borel-Maß heißt regulär, falls für jede Borelmenge  $B$  (1.3) und (1.4) gelten.*

Satz 1.39 bedeutet damit kurz und knapp: Jedes endliche Borel-Maß auf einem metrischen Raum ist regulär.

Maßräume mit unendlichem Maß kommen häufig vor, beispielsweise ist das Volumen des  $\mathbb{R}^d$  sinnvollerweise unendlich groß. In der folgenden Definition führen wir einen Begriff ein, der einige dieser unendlichen Maßräume als „einigermaßen brav“ auszeichnet.

**Definition 1.41.** *Ein Maßraum  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  bzw. das Maß  $\mu$  heißt  $\sigma$ -endlich, wenn es eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Mengen aus  $\mathcal{S}$  gibt mit  $\mu(A_n) < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .*

## 1.5 Nullmengen und Vollständigkeit von Maßräumen

Viele Begriffe und Aussagen der Maß- und Integrationstheorie werden einfacher und natürlicher, wenn der Maßraum vollständig in folgendem Sinn ist.

**Definition 1.42.** *Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum. Eine Teilmenge  $N$  von  $X$  heißt eine  $\mu$ -Nullmenge, wenn sie Teilmenge einer Menge  $E \in \mathcal{S}$  mit  $\mu(E) = 0$  ist. Gehört jede  $\mu$ -Nullmenge von  $X$  zu  $\mathcal{S}$ , so heißt  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  vollständig.*

Liegt eine  $\mu$ -Nullmenge  $N$  in  $\mathcal{S}$ , so ist  $\mu(N) = 0$  nach Lemma 1.34 (b). In vollständigen Maßräumen stimmen also die Begriffe  $\mu$ -Nullmenge und Menge vom Maß 0 überein.

Wir sehen uns zwei einfache Aussagen an, in denen die Vollständigkeit eine Rolle spielt. Dazu treffen wir noch eine Vereinbarung:

**Definition 1.43.** *Ist  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum und gilt eine Eigenschaft  $P$  für alle Punkte von  $X$  mit Ausnahme von Punkten in einer  $\mu$ -Nullmenge, so sagen wir, dass  $P$  fast überall (oder genauer  $\mu$ -fast überall) gilt.*

**Lemma 1.44.** *Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum,  $(X', \mathcal{S}')$  ein messbarer Raum und seien  $f, g : X \rightarrow X'$  Funktionen, die fast überall übereinstimmen. Ist  $f$  messbar, dann ist auch  $g$  messbar.*

*Beweis.* Sei  $N \subseteq X$  eine  $\mu$ -Nullmenge so, dass  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in X \setminus N$ , und sei  $E \in \mathcal{S}'$ . Dann ist

$$\begin{aligned} g^{-1}(E) &= (g^{-1}(E) \cap (X \setminus N)) \cup (g^{-1}(E) \cap N) \\ &= (f^{-1}(E) \cap (X \setminus N)) \cup (g^{-1}(E) \cap N). \end{aligned}$$

Die Menge  $f^{-1}(E) \cap (X \setminus N)$  ist messbar nach Voraussetzung, und  $g^{-1}(E) \cap N$  ist Teilmenge der  $\mu$ -Nullmenge  $N$ , also selbst eine  $\mu$ -Nullmenge und damit messbar. Also ist  $g^{-1}(E) \in \mathcal{S}$  für jedes  $E \in \mathcal{S}'$ , d.h.  $g$  ist messbar.  $\square$

**Lemma 1.45.** *Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum, und die Funktionen  $f_n : (X, \mathcal{S}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  seien messbar und sollen fast überall gegen eine Funktion  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  konvergieren. Dann ist  $f$  messbar.*

*Beweis.* Sei  $N \subseteq X$  eine  $\mu$ -Nullmenge so, dass  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x \in X \setminus N$ . Aus Satz 1.31 folgt die Messbarkeit von  $f|_{X \setminus N}$ . Aus der Vollständigkeit folgt weiter, dass auch  $f|_N$  messbar ist. Für jede Menge  $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  ist ja  $(f|_N)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap N$  Teilmenge einer  $\mu$ -Nullmenge, also messbar. Für beliebiges  $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  erhalten wir somit die Messbarkeit von

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= (f^{-1}(B) \cap (X \setminus N)) \cup (f^{-1}(B) \cap N) \\ &= (f|_{X \setminus N})^{-1}(B) \cup (f|_N)^{-1}(B). \end{aligned}$$

Also ist  $f$  messbar.  $\square$

Nichtvollständige Maßräume lassen sich auf natürliche Weise zu vollständigen Maßräumen erweitern. Sei dazu  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum. Die Menge  $\widetilde{\mathcal{S}}$  bestehe aus allen Teilmengen von  $X$ , die Vereinigung einer Menge aus  $\mathcal{S}$  und einer  $\mu$ -Nullmenge sind. Ist  $E \in \mathcal{S}$  und  $N$  eine  $\mu$ -Nullmenge, so setzen wir  $\widetilde{\mu}(E \cup N) := \mu(E)$ . Diese Definition von  $\widetilde{\mu}$  ist korrekt. Sind nämlich  $E, F \in \mathcal{S}$  und  $M \subseteq \widetilde{M} \in \mathcal{S}$ ,  $N \subseteq \widetilde{N} \in \mathcal{S}$  mit  $\mu(\widetilde{M}) = \mu(\widetilde{N}) = 0$  und  $E \cup M = F \cup N$ , so ist  $F \subseteq F \cup N = E \cup M \subseteq E \cup \widetilde{M}$  und folglich

$$\mu(F) \leq \mu(E \cup \widetilde{M}) \leq \mu(E) + \mu(\widetilde{M}) = \mu(E).$$

Analog zeigt man, dass  $\mu(E) \leq \mu(F)$  und somit  $\mu(E) = \mu(F)$  ist. Der folgende Satz soll in der Übung bewiesen werden.

**Satz 1.46.**  *$(X, \widetilde{\mathcal{S}}, \widetilde{\mu})$  ist ein vollständiger Maßraum.*

## 2 Allgemeine Integrationstheorie

Ziel dieses Abschnittes ist es, für einen beliebigen Maßraum  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  messbare Funktionen  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  zu integrieren. Das Motto dabei lautet: Jedes Maß schenkt uns ein Integral.

Dazu gehen wir schrittweise vor. Das Maß  $\mu$  wird uns vorgeben, was das Integral der charakteristischen Funktion einer messbaren Menge sein soll. Davon ausgehend definieren wir das Integral von nichtnegativen messbaren Funktionen mit nur endlich vielen Werten (Stufenfunktionen) und dann für beliebige nichtnegative messbare Funktionen, die wir von unten durch Stufenfunktionen annähern. Schließlich spalten wir allgemeine messbare Funktionen in ihren Positiv- und Negativteil auf, für die wir die Integrale bereits definiert haben.

Wir werden sehen, dass das so erklärte Lebesgue-Integral wesentlich allgemeiner und flexibler ist als das Riemann-Integral.

Im gesamten Abschnitt ist, sofern nichts anderes explizit dabeisteht, die Menge  $\mathbb{R}$  mit der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  und  $\overline{\mathbb{R}}$  mit  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  versehen.

### 2.1 Stufenfunktionen

In diesem Unterabschnitt sei durchgängig  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum.

**Definition 2.1.** *Eine messbare Funktion  $s : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stufenfunktion (oder einfache Funktion), wenn ihr Wertebereich  $s(X)$  endlich ist.*

**Beispiel 2.2.** Jede konstante Funktion ist eine Stufenfunktion und die charakteristische Funktion  $\chi_A$  einer Menge  $A \subseteq X$  ist genau dann eine Stufenfunktion, wenn  $A$  messbar ist. Beispielsweise ist  $\chi_{\mathbb{Q}}$  eine Stufenfunktion für  $(X, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ .

**Lemma 2.3.** *Eine Funktion  $s : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann eine Stufenfunktion, wenn es paarweise verschiedene Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  und paarweise disjunkte Mengen  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{S}$  so gibt, dass  $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$ .*

*Beweis.* Sind  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  und  $A_j \in \mathcal{S}$  für  $j = 1, \dots, k$ , so ist  $\sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$  messbar nach Satz 1.27 und damit eine Stufenfunktion. Sei umgekehrt  $s$  eine Stufenfunktion und  $s(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  mit paarweise verschiedenen Zahlen  $\alpha_j$ . Dann sind die Mengen  $A_j := s^{-1}(\{\alpha_j\})$  messbar und paarweise disjunkt, und es ist  $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$ .  $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass positive, messbare Funktionen durch Stufenfunktionen approximiert werden können. Das sieht harmlos aus, ist aber der Dreh- und Angelpunkt der weiteren Betrachtungen in diesem Abschnitt, denn er wird es uns erlauben, das Integral einer beliebigen positiven messbaren Funktion durch die Integrale von Stufenfunktionen zu approximieren.



**Satz 2.4.** Sei  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  eine messbare Funktion. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen  $s_n : X \rightarrow [0, \infty)$  so, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in X$$

und so, dass die Konvergenz auf jeder Menge  $\{x \in X : f(x) \leq c\}$  mit  $c \in [0, \infty)$  gleichmäßig ist.

*Beweis.* Für  $n \geq 1$  sei

$$s_n(x) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{falls } f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \text{ mit } 0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1, \\ n & \text{falls } f(x) \in [n, \infty]. \end{cases}$$

Dann ist jedes  $s_n$  messbar, denn für  $0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1$  gilt

$$s_n^{-1}\left(\left\{\frac{k}{2^n}\right\}\right) = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) \in \mathcal{S},$$

da Intervalle in  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  liegen und  $f$  messbar ist.

Also ist  $(s_n)_{n \geq 1}$  eine Folge von Stufenfunktionen, die nach Konstruktion monoton wachsend ist. Weiter gilt für alle  $c \in [0, \infty)$  und  $n > c$

$$|f(x) - s_n(x)| < 2^{-n} \quad \text{für alle } x \text{ mit } f(x) \leq c.$$

Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen  $s_n$  auf der Menge  $\{x \in X : f(x) \leq c\}$  sowie die punktweise Konvergenz auf  $\{x \in X : f(x) < \infty\}$ . Die punktweise Konvergenz auf  $\{x \in X : f(x) = \infty\}$  ist offensichtlich.  $\square$

Um auch messbare Funktionen mit negativen Werten in den Griff zu bekommen, führen wir die folgende Notation ein.

**Definition 2.5.** Sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Dann nennen wir

$$\begin{aligned} f_+ &:= \max\{0, f\} && \text{Positivteil} \\ f_- &:= \max\{0, -f\} && \text{Negativteil} \end{aligned}$$

von  $f$ .

**Bemerkung 2.6.** (a) Man beachte, dass der Negativteil von  $f$  mit dieser Definition eine Funktion mit Werten in  $[0, \infty]$  ist, d.h. dieser hat *positive* Werte!

(b) Es gilt  $f = f_+ - f_-$  und  $|f| = f_+ + f_-$ . Außerdem ist nach Satz 1.27 die Funktion  $f$  genau dann messbar, wenn  $f_+$  und  $f_-$  messbar sind.

**Folgerung 2.7.** Eine Funktion  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ist genau dann messbar, wenn sie punktweiser Grenzwert einer Folge von Stufenfunktionen ist.

*Beweis.* Punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar nach Satz 1.31. Ist umgekehrt  $f$  messbar, so sind die Funktionen  $f_{\pm}$  messbar und nichtnegativ. Nach Satz 2.4 sind beide Funktionen punktweise Grenzwerte von Stufenfunktionen. Dann hat auch  $f = f_+ - f_-$  diese Eigenschaft.  $\square$

## 2.2 Das Lebesgue-Integral

Im diesem gesamten Unterabschnitt sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum,  $E \in \mathcal{S}$  und  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Wir definieren das Integral von  $f$  über  $E$  bzgl. des Maßes  $\mu$  in mehreren Schritten.

**Schritt 1:** Für  $f = \chi_A$  mit  $A \in \mathcal{S}$  definieren wir  $I_E(f) := \mu(A \cap E)$ .

**Schritt 2:** Sei  $f$  eine nichtnegative Stufenfunktion. Mit Lemma 2.3 schreiben wir  $f$  als  $\sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$  mit paarweise verschiedenen  $\alpha_j \in [0, \infty)$  und mit paarweise disjunkten Mengen  $A_j \in \mathcal{S}$  und definieren

$$I_E(f) := \sum_{j=1}^k \alpha_j I_E(\chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j \cap E).$$

**Schritt 3:** Ist  $f$  messbar und nichtnegativ, so definieren wir

$$\int_E f d\mu := \sup \{ I_E(s) : s \text{ ist Stufenfunktion und } 0 \leq s \leq f \}.$$

Die Menge auf der rechten Seite enthält dank der Nullfunktion die Null und ist daher nicht leer. Man beachte, dass  $\int_E f d\mu$  den Wert  $+\infty$  annehmen kann. Ist  $f$  selbst eine nichtnegative Stufenfunktion, so ist  $\int_E f d\mu = I_E(f)$ . Für alle Stufenfunktionen  $0 \leq s \leq f$  ist nämlich  $I_E(s) \leq I_E(f)$ .

**Schritt 4:** Schließlich sei  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Nach Satz 1.27 sind die Funktionen  $f_+$  und  $f_-$  messbar, es ist  $f = f_+ - f_-$ , und die Integrale

$$\int_E f_+ d\mu, \quad \int_E f_- d\mu \tag{2.1}$$

sind wie in Schritt 3 erklärt.

**Definition 2.8.** (a) Ist eines der Integrale in (2.1) endlich, so definieren wir das Integral von  $f$  als

$$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{2.2}$$

(b) Sind beide Integrale in (2.1) endlich, so heißt  $f$  Lebesgue-integrierbar, und wir schreiben  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$  bzw.  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  falls  $E = X$ .

(c) Für komplexwertige Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir kanonisch: Die Funktion  $f$  heißt Lebesgue-integrierbar, wenn ihr Real- und ihr Imaginärteil in  $\mathcal{L}^1(\mu, E)$  liegen. In diesem Fall setzen wir

$$\int_E f d\mu := \int_E \operatorname{Re} f d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f d\mu.$$

Man beachte, dass wir das Integral von  $f$  auch dann definiert haben, wenn  $f$  nicht Lebesgue-integrierbar ist, aber eine der Funktionen  $f_+$ ,  $f_-$  diese Eigenschaft hat. Das ist in vielen Situationen bequem.

**Bemerkung 2.9.** Wir beschränken die Betrachtungen im Weiteren auf reellwertige Funktionen. Viele der nachstehenden Sätze lassen sich aber ohne Mühe auf den Fall komplexwertiger Funktionen übertragen.

Wir sehen uns einige elementare Eigenschaften des Lebesgue-Integrals an.

**Lemma 2.10.** (a) Ist  $f$  messbar und beschränkt auf  $E$  und  $\mu(E) < \infty$ , so ist  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ .

(b) Seien  $f, g$  messbar auf  $E$  mit  $0 \leq f \leq g$  auf  $E$  oder  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$  mit  $f \leq g$  auf  $E$ . Dann gilt

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

(c) Ist  $f$  messbar und  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq f \leq b$  auf  $E$  und ist  $\mu(E) < \infty$ , so ist

$$a \cdot \mu(E) \leq \int_E f \, d\mu \leq b \cdot \mu(E).$$

(d) Ist  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$  und  $c \in \mathbb{R}$ , so ist  $cf \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$  und

$$\int_E cf \, d\mu = c \int_E f \, d\mu.$$

(e) Ist  $f$  messbar und  $\mu(E) = 0$ , so ist  $\int_E f \, d\mu = 0$ .

(f) Ist  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$  und  $A \in \mathcal{S}$  Teilmenge von  $E$ , so ist  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, A)$ .

*Beweis.* (a) Sei  $|f| \leq M < \infty$  auf  $E$ . Dann ist  $f_{\pm} \leq M$  auf  $E$ , und hieraus folgt

$$\begin{aligned} \int_E f_{\pm} \, d\mu &= \sup\{I_E(s) : s \text{ Stufenfunktion, } 0 \leq s \leq f_{\pm}\} \\ &\leq I_E(x \mapsto M) = M\mu(E). \end{aligned}$$

Damit ist  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ .

(b) Aus  $f \leq g$  folgt  $f_+ \leq g_+$  und  $g_- \leq f_-$  auf  $E$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_E f_+ \, d\mu &= \sup\{I_E(s) : s \text{ Stufenfunktion, } 0 \leq s \leq f_+\} \\ &\leq \sup\{I_E(s) : s \text{ Stufenfunktion, } 0 \leq s \leq g_+\} = \int_E g_+ \, d\mu \end{aligned}$$

und genauso

$$\int_E g_- d\mu \leq \int_E f_- d\mu.$$

Daher ist

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \leq \int_E g_+ d\mu - \int_E g_- d\mu = \int_E g d\mu.$$

- (c) Dies folgt sofort aus (b), wenn wir  $f$  mit den Konstanten  $a, b$  vergleichen.  
 (d) Für Stufenfunktionen  $s$  ist offenbar  $I_E(cs) = cI_E(s)$ . Ist nun etwa  $c > 0$  und  $f \geq 0$ , so folgt

$$\begin{aligned} \int_E cf d\mu &= \sup\{I_E(s) : 0 \leq s \leq cf\} = \sup\left\{I_E(s) : 0 \leq \frac{1}{c}s \leq f\right\} \\ &= \sup\left\{cI_E\left(\frac{1}{c}s\right) : 0 \leq \frac{1}{c}s \leq f\right\} \\ &= c \sup\left\{I_E(t) : 0 \leq t \leq f\right\} = c \int_E f d\mu. \end{aligned}$$

Die übrigen Fälle behandelt man ähnlich.

- (e) Für *jede* Stufenfunktion  $s$  ist in diesem Fall  $I_E(s) = 0$ . Also ist  $\int_E f_{\pm} d\mu = 0$  und  $\int_E f d\mu = 0$ .  
 (f) Für alle Stufenfunktionen  $0 \leq s \leq f_+$  ist  $I_A(s) \leq I_E(s)$  und daher

$$\begin{aligned} \int_A f_+ d\mu &= \sup\{I_A(s) : 0 \leq s \leq f_+\} \\ &\leq \sup\{I_E(s) : 0 \leq s \leq f_+\} = \int_E f_+ d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Für  $f_-$  argumentiert man analog. □

**Satz 2.11.** (a) Sei  $f \geq 0$  messbar auf  $X$ . Für  $A \in \mathcal{S}$  definieren wir

$$\varphi(A) := \int_A f d\mu. \tag{2.3}$$

Dann ist  $\varphi$  ein Maß auf  $(X, \mathcal{S})$ .

- (b) Ist  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , so ist die Funktion  $\varphi$   $\sigma$ -additiv.

*Beweis.* Die Aussage in (b) folgt sofort, wenn wir Teil (a) auf die Funktionen  $f_{\pm}$  anwenden und  $f = f_+ - f_-$  beachten. Wir zeigen also (a). Da  $\varphi(\emptyset) = 0$  nach Lemma 2.10 (e), müssen wir noch die  $\sigma$ -Additivität zeigen. Sei also  $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$

mit paarweise disjunkten messbaren Mengen  $A_n$ . Zu zeigen ist, dass  $\varphi(A) = \sum_{n \geq 1} \varphi(A_n)$ .

Ist  $C \in \mathcal{S}$  und  $f = \chi_C$  eine charakteristische Funktion, so ist  $\int_A f d\mu = \mu(A \cap C)$ , und die Behauptung folgt aus der  $\sigma$ -Additivität von  $\mu$ . Ist  $f = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{C_j}$  eine Stufenfunktion mit paarweise disjunkten Mengen  $C_j \in \mathcal{S}$ , so ist

$$\int_A f d\mu = \sum_{j=1}^k c_j \mu(A \cap C_j),$$

und die Behauptung folgt aus der  $\sigma$ -Additivität der einzelnen Summanden. Sei nun  $f \geq 0$  messbar. Aus dem bereits Bewiesenen folgt für jede Stufenfunktion  $s$  mit  $0 \leq s \leq f$ , dass

$$\int_A s d\mu = \sum_{n \geq 1} \int_{A_n} s d\mu \leq \sum_{n \geq 1} \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n \geq 1} \varphi(A_n).$$

Bilden wir links das Supremum über alle Stufenfunktionen  $s$  mit  $0 \leq s \leq f$ , folgt

$$\varphi(A) = \int_A f d\mu \leq \sum_{n \geq 1} \varphi(A_n),$$

und es verbleibt noch  $\sum_{n \geq 1} \varphi(A_n) \leq \varphi(A)$  zu zeigen. Für  $\varphi(A) = \infty$  ist dies klar. Sei also  $\varphi(A) < \infty$  und damit auch  $\varphi(A_n) < \infty$  für alle  $n$ . Mit der Definition des Integrals finden wir für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Stufenfunktion  $s_\varepsilon$  mit  $0 \leq s_\varepsilon \leq f$  und

$$\int_{A_1} s_\varepsilon d\mu \geq \int_{A_1} f d\mu - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sowie} \quad \int_{A_2} s_\varepsilon d\mu \geq \int_{A_2} f d\mu - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Folglich ist, da wir die  $\sigma$ -Additivität für Stufenfunktionen schon gezeigt haben,

$$\varphi(A_1 \cup A_2) \geq \int_{A_1 \cup A_2} s_\varepsilon d\mu = \int_{A_1} s_\varepsilon d\mu + \int_{A_2} s_\varepsilon d\mu \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\varphi(A_1 \cup A_2) \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$ . Induktiv erhalten wir

$$\varphi\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \sum_{j=1}^n \varphi(A_j) \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Wegen  $\bigcup_{j=1}^n A_j \subseteq A$  führt dies auf

$$\varphi(A) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \varphi(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j).$$

Damit ist alles gezeigt. □

**Folgerung 2.12.** Sind  $A, B \in \mathcal{S}$  mit  $A \subseteq B$  und  $\mu(B \setminus A) = 0$  und ist  $f$  Lebesgue-integrierbar, so ist

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu.$$

*Beweis.* Die Funktion  $\varphi(E) := \int_E f d\mu$  ist additiv nach Satz 2.11. Folglich ist  $\varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B \setminus A)$ . Nach Lemma 2.10 (e) ist aber  $\varphi(B \setminus A) = 0$ .  $\square$

**Folgerung 2.13.** Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  vollständig, die Funktionen  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  seien fast überall gleich, und sei  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$  für  $E \in \mathcal{S}$ . Dann ist auch  $g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$  und

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

*Beweis.* Die Funktion  $g$  ist messbar nach Lemma 1.44. Sei  $N$  eine  $\mu$ -Nullmenge so, dass  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in X \setminus N$ . Dann ist  $f_{\pm} = g_{\pm}$  auf  $X \setminus N$  und

$$\begin{aligned} \int_E f_+ d\mu &= \int_{E \setminus N} f_+ d\mu && \text{(nach Folgerung 2.12)} \\ &= \int_{E \setminus N} g_+ d\mu && \text{(nach Voraussetzung)} \\ &= \int_{E \setminus N} g_+ d\mu + \int_{N \cap E} g_+ d\mu && \text{(nach Lemma 2.10 (e))} \\ &= \int_E g_+ d\mu. && \square \end{aligned}$$

**Satz 2.14** (Dreiecksungleichung). Mit  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$  ist auch  $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ , und es gilt

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

*Beweis.* Sei  $A_+ := \{x \in E : f(x) \geq 0\}$  und  $A_- = E \setminus A_+$ . Nach Satz 2.11 (a) ist

$$\int_E |f| d\mu = \int_{A_+} |f| d\mu + \int_{A_-} |f| d\mu = \int_{A_+} f_+ d\mu + \int_{A_-} f_- d\mu < \infty$$

und somit  $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ . Wegen  $f \leq |f|$  und  $-f \leq |f|$  ist nach Lemma 2.10 (b) und (d)

$$\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu \quad \text{und} \quad - \int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu.$$

Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.15.** (a) Ist  $f$  messbar,  $|f| \leq g$  und  $g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ , so ist auch  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ .

(b) Ist  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  vollständig,  $f$  messbar,  $|f| \leq g$  fast überall und  $g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ , so ist  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ .

*Beweis.* Die Aussage in Teil (a) folgt sofort aus  $f_+ \leq g$  und  $f_- \leq g$ , wir zeigen also (b).

Sei  $N$  eine  $\mu$ -Nullmenge so, dass  $|f(x)| \leq g(x)$  für alle  $x \in X \setminus N$ , und sei

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in X \setminus N, \\ g(x) & \text{falls } x \in N. \end{cases}$$

Nach Lemma 1.44 ist  $\tilde{f}$  messbar, und es gilt  $|\tilde{f}| \leq g$  überall. Nach Teil (a) ist  $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ , und mit Folgerung 2.13 finden wir  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ .  $\square$

## 2.3 Konvergenzsätze

Wir behandeln in diesem Abschnitt die wichtigsten Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral. Diese Sätze sind unentbehrliche Werkzeuge der Analysis.

**Satz 2.16** (Beppo Levi, Satz über monotone Konvergenz). *Es sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum,  $E \in \mathcal{S}$ , und  $(f_n)_{n \geq 1}$  eine Folge messbarer Funktionen mit*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty \quad \text{für fast alle } x \in X. \quad (2.4)$$

*Dann konvergiert  $(f_n)$  fast überall punktweise gegen eine messbare Funktion  $f$ , und  $\int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu$ .*

*Ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit gilt die Aussage immer noch, wenn man (2.4) für alle  $x \in X$  fordert.*

*Beweis.* Sei  $N$  eine  $\mu$ -Nullmenge so, dass (2.4) für alle  $x \in X \setminus N$  erfüllt ist. Für jedes  $x \in X \setminus N$  konvergiert dann die Folge  $(f_n(x))$  gegen einen Wert  $\tilde{f}(x) \in [0, \infty]$ . Wir setzen

$$f(x) := \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{für } x \in X \setminus N, \\ \infty & \text{für } x \in N. \end{cases}$$

Nach Lemma 1.45 ist  $f$  messbar. Sei  $\alpha_n := \int_E f_n d\mu$ . Nach Lemma 2.10 (b) und Folgerung 2.12 ist die Folge  $(\alpha_n)$  monoton wachsend. Sei

$$\alpha := \sup\{\alpha_n : n \geq 1\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \in [0, \infty].$$

Dank der Monotonie des Integrals aus Lemma 2.10 (b) gilt  $\alpha_n \leq \int_E f d\mu$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit auch  $\alpha \leq \int_E f d\mu$ .

Wir zeigen noch die umgekehrte Ungleichung  $\alpha \geq \int_E f d\mu$ . Dabei reicht es den Fall  $\alpha < \infty$  zu betrachten, denn sonst ist nichts zu beweisen. Seien  $s$  eine Stufenfunktion mit  $0 \leq s \leq f$ ,  $c \in (0, 1)$  und  $E_n := \{x \in E \setminus N : f_n(x) \geq cs(x)\}$

für  $n \geq 1$ . Dann ist  $E_n \subseteq E_{n+1}$  für alle  $n$  (Monotonie der Folge  $(f_n)$  außerhalb von  $N$ ) und  $\bigcup_{n \geq 1} E_n = E \setminus N$  (wegen  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  und  $cs(x) < f(x)$  für alle  $x \in X \setminus N$ ).

Mit Satz 2.11 (a) und Lemma 2.10 (b) erhalten wir außerdem, dass

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu. \quad (2.5)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich daher wieder mit Satz 2.11 (a), (2.5) und Lemma 1.34 (c)

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \geq c \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} s d\mu = c \int_{E \setminus N} s d\mu = c \int_E s d\mu.$$

Da  $c \in (0, 1)$  beliebig war, folgt  $\alpha \geq \int_E s d\mu$  für alle Stufenfunktionen  $s$  mit  $0 \leq s \leq f$ . Dann ist aber  $\alpha \geq \int_E f d\mu$ .  $\square$

**Satz 2.17.** Sind  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$  und ist  $f+g$  erklärt, so ist auch  $f+g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$  und es gilt

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \quad (2.6)$$

**Bemerkung 2.18.** Der Satz gilt auch, wenn  $f, g$  nichtnegative messbare Funktionen sind. Dies wird zu Beginn des folgenden Beweises gezeigt.

*Beweis von Satz 2.17.* Zuerst zeigen wir (2.6) für den Spezialfall von nichtnegativen Stufenfunktionen. Ist  $s = \sum_j c_j \chi_{E_j}$  eine nichtnegative Stufenfunktion (mit *nicht notwendig* paarweise disjunkten Mengen  $E_j$ ), so kann man  $s$  schreiben als  $\sum_k d_k \chi_{F_k}$  mit paarweise disjunkten Mengen  $F_k$  und mit  $d_k := \sum_{j: F_k \subseteq E_j} c_j$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_E s d\mu &= \sum_k d_k \mu(F_k \cap E) = \sum_k \sum_{j: F_k \subseteq E_j} c_j \mu(F_k \cap E) \\ &= \sum_j c_j \sum_{k: F_k \subseteq E_j} \mu(F_k \cap E) = \sum_j c_j \mu(E_j \cap E) = \sum_j c_j \int_E \chi_{E_j} d\mu. \end{aligned}$$

Da man zwei Stufenfunktionen  $s, t$  immer als  $s = \sum_j c_j \chi_{E_j}$  und  $t = \sum_j d_j \chi_{E_j}$  (also mit *gleichen* Mengen  $E_j$ ) schreiben kann, folgt hieraus (2.6) für nichtnegative Stufenfunktionen.

Seien nun  $f, g$  nichtnegative messbare Funktionen. Nach Satz 2.4 gibt es monoton wachsende Folgen  $(s_n)$  bzw.  $(t_n)$  von Stufenfunktionen, die punktweise gegen  $f$  bzw.  $g$  konvergieren. Dann ist  $(s_n + t_n)$  eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, die punktweise gegen  $f + g$  konvergiert. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert

$$\int_E s_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu, \quad \int_E t_n d\mu \rightarrow \int_E g d\mu, \quad \int_E (s_n + t_n) d\mu \rightarrow \int_E (f + g) d\mu.$$



Aus  $\int_E s_n d\mu + \int_E t_n d\mu = \int_E (s_n + t_n) d\mu$  folgt (2.6) auch in diesem Fall.

Seien schließlich  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ . Dann sind nach Satz 2.14 auch  $|f|$  und  $|g|$  integrierbar und nach dem schon gezeigten gilt dann dasselbe für  $|f| + |g|$ . Wegen  $|f + g| \leq |f| + |g|$  liefert Satz 2.15, dass  $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$  ist. Zum Nachweis von (2.6) zerlegen wir zunächst sowohl  $f + g$  als auch  $f$  und  $g$  in Positiv- und Negativteile. Das liefert

$$f_+ - f_- + g_+ - g_- = f + g = (f + g)_+ - (f + g)_-.$$

Sind alle hier auftretenden Ausdrücke endlich, so finden wir durch Umstellen dieser Gleichung:

$$f_+ + g_+ + (f + g)_- = (f + g)_+ + f_- + g_-.$$

Ist einer der Terme unendlich, so zeigt eine akribische Fallunterscheidung, dass diese Gleichung weiterhin erfüllt ist. Beachten Sie dabei, dass wegen der Voraussetzung, dass  $f + g$  definiert sein soll, niemals die Ausdrücke  $f_+$  und  $g_-$ , bzw.  $f_-$  und  $g_+$  gleichzeitig unendlich sein können.

In dieser letzten Gleichung stehen nur noch nichtnegative Funktionen, die addiert werden. Wir können also auf beiden Seiten der Gleichung über  $E$  integrieren und dann die bereits gezeigte Linearität des Integrals für nichtnegative messbare Funktionen benutzen. Damit gilt

$$\int_E f_+ d\mu + \int_E g_+ d\mu + \int_E (f + g)_- d\mu = \int_E (f + g)_+ d\mu + \int_E f_- d\mu + \int_E g_- d\mu.$$

Schließlich gelangt man so zu

$$\begin{aligned} \int_E (f + g) d\mu &= \int_E (f + g)_+ d\mu - \int_E (f + g)_- d\mu \\ &= \int_E f_+ d\mu + \int_E g_+ d\mu - \int_E f_- d\mu - \int_E g_- d\mu \\ &= \int_E f d\mu + \int_E g d\mu \end{aligned}$$

und der Beweis ist beendet.  $\square$

Wir haben hier nur die schwächere Form von Satz 2.16 benutzt. Satz 2.17 gilt also ohne Vollständigkeitsvoraussetzung. Für Reihen liefert Satz 2.16:

**Folgerung 2.19.** *Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  vollständig,  $f_j : X \rightarrow [0, \infty]$  für jedes  $j \in \mathbb{N}$  messbar, und  $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$  fast überall. Dann ist  $f$  messbar, und für jedes  $E \in \mathcal{S}$  ist*

$$\int_E f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j d\mu.$$

*Beweis.* Sei  $g_n := \sum_{j=1}^n f_j$ . Die Folge  $(g_n)$  ist monoton wachsend und konvergiert fast überall gegen  $f$ . Nach Lemma 1.45 ist  $f$  messbar, und die Sätze 2.16 und 2.17 liefern

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &\stackrel{2.16}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \sum_{j=1}^n f_j \, d\mu \\ &\stackrel{2.17}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_E f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j \, d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Unser nächstes Ziel ist der Satz von der majorisierten Konvergenz, das wohl wichtigste Werkzeug, um die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration zu zeigen. Vorbereitend überlegen wir uns ein Lemma.

**Lemma 2.20** (Fatou). *Seien  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , messbare Funktionen und  $E \in \mathcal{S}$ . Dann ist*

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

*Beweis.* Für  $k \geq 1$  sei  $g_k := \inf_{j \geq k} f_j$ . Dann ist  $g_k \leq f_k$  und somit  $\int_E g_k \, d\mu \leq \int_E f_k \, d\mu$ . Weiter ist die Folge  $(g_k)$  monoton wachsend, und sie konvergiert punktweise gegen  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Der Satz über monotone Konvergenz (schwache Fassung) liefert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_k \, d\mu = \int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu$$

und damit

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \, d\mu \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k \, d\mu \geq \int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu. \quad \square$$

**Satz 2.21** (Lebesgue, Satz über majorisierte Konvergenz). *Es sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum,  $E \in \mathcal{S}$ , und  $(f_n)$  eine Folge messbarer Funktionen  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , die fast überall gegen eine Funktion  $f$  konvergieren. Weiter sei  $g$  eine messbare Funktion mit  $|f_n| \leq g$  fast überall für alle  $n$ . Ist  $g \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ , so gehören auch  $f$  und  $f_n$  zu  $\mathcal{L}^1(\mu, E)$ , und es gilt*

$$\int_E f_n \, d\mu \rightarrow \int_E f \, d\mu.$$

*Ohne Vollständigkeitsvoraussetzung gilt die Aussage weiter, wenn alle „fast“ in der Formulierung gestrichen werden.*

*Beweis.* Sei  $N$  eine Nullmenge so, dass  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $|f_n(x)| \leq g(x)$  für alle  $n$  und alle  $x \in X \setminus N$ . Dann ist  $|f(x)| \leq g(x)$  für alle  $x \in X \setminus N$ , und nach Satz 2.15 (b) sind  $f, f_n \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ . Weiter ist  $|f - f_n| \leq 2g$  auf  $X \setminus N$ . Wir

wenden das Fatousche Lemma auf die Folge der Funktionen  $(2g - |f - f_n|)|_{X \setminus N}$  an und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_E 2g \, d\mu &= \int_{E \setminus N} 2g \, d\mu = \int_{E \setminus N} \liminf_{n \rightarrow \infty} (2g - |f_n - f|) \, d\mu \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{E \setminus N} (2g - |f_n - f|) \, d\mu \\
&= \int_{E \setminus N} 2g \, d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{E \setminus N} -|f_n - f| \, d\mu \\
&= \int_E 2g \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu \leq \int_E 2g \, d\mu.
\end{aligned}$$

Also gilt hier überall Gleichheit. Da  $\int_E 2g \, d\mu = 2 \int_E g \, d\mu < \infty$  ist, erhalten wir  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0$  und da der Integrand und damit das Integral positiv sind, ist dieser Limes Superior sogar ein Limes. Dies hat schließlich mit Hilfe von Satz 2.17 und Satz 2.14

$$\left| \int_E f_n \, d\mu - \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

zur Folge und wir sind fertig.  $\square$

Als eine erste Anwendung dieses Satzes könne wir unsere Aussagen über parameterabhängige Integrale aus der Analysis II nun wesentlich verallgemeinern.

**Satz 2.22.** Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum und  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  offen. Weiter sei  $f : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für jedes  $u \in U$  die Funktion

$$\hat{f}_u : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x, u)$$

zu  $\mathcal{L}^1(\mu, X)$  gehört. Schließlich sei  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion

$$u \mapsto \int_X \hat{f}_u \, d\mu = \int_X f(x, u) \, d\mu(x).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

- (a) Sind alle Funktionen  $f_x : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto f(x, u)$  stetig in  $p \in U$  und existiert eine Funktion  $h \in \mathcal{L}^1(\mu, X)$  mit  $|f(x, u)| \leq h(x)$  für alle  $(x, u) \in X \times U$ , so ist  $g$  in  $p$  stetig.
- (b) Sei  $1 \leq j \leq d$ . Haben alle Funktionen  $f_x$  eine stetige partielle Ableitung  $D_j f_x = \frac{\partial f_x}{\partial u_j}$  und gibt es eine Funktion  $h \in \mathcal{L}^1(\mu, X)$  mit

$$|D_j f_x(u)| \leq h(x) \quad \text{für alle } (x, u) \in X \times U,$$

so existiert auch  $D_j g$ , diese Funktion ist stetig, und für alle  $p \in U$  ist

$$(D_j g)(p) = \int_X D_j f(x, p) \, d\mu(x).$$

*Beweis.* (a) Sei  $(p_n)$  eine Folge in  $U$ , die gegen  $p$  konvergiert. Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in X$  nach Voraussetzung die punktweise Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_{p_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_x(p_n) = f_x(p) = \hat{f}_p(x),$$

und wegen  $|\hat{f}_{p_n}(x)| = |f(x, p_n)| \leq h(x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in X$  mit  $h \in \mathcal{L}^1(\mu, X)$  haben wir auch die benötigte Lebesgue-Majorante. Der Satz von Lebesgue liefert also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \hat{f}_{p_n} d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_{p_n} d\mu = g(p).$$

(b) Sei  $t \in \mathbb{R}$  mit  $p + \mu t e_j \in U$  für alle  $\mu \in [0, 1]$ . Mit dem Mittelwertsatz finden wir ein  $\theta \in [0, 1]$  so, dass

$$\frac{1}{t} |f(x, p + t e_j) - f(x, p)| = |(D_j f)(x, p + \theta t e_j)| \leq h(x).$$

Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz erhalten wir weiter für jede Folge  $(t_n)$  mit  $t_n \rightarrow 0$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(p + t_n e_j) - g(p)}{t_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{f(x, p + t_n e_j) - f(x, p)}{t_n} d\mu \\ &= \int_X D_j f(x, p) d\mu. \end{aligned} \quad \square$$

### 3 Konstruktion des Lebesgue-Maßes

Im ersten Teil dieses Abschnittes werden wir Techniken zur Konstruktion von Maßen entwickeln. Die wichtigste Anwendung finden diese Techniken im zweiten Teil, wo wir ein Maß auf den Borelmengen des  $\mathbb{R}^d$  konstruieren, das sogenannte Lebesgue-Maß.

#### 3.1 Äußere Maße

In den folgenden Abschnitten 3.1 bis 3.3 sei  $X$  eine nichtleere Menge und  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$  ein Mengensystem mit  $\emptyset \in \mathcal{E}$ .

**Definition 3.1.** Eine Funktion  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  heißt ein relativ äußeres Maß über  $X$ , wenn  $\varphi(\emptyset) = 0$  und wenn für alle  $A, A_n \in \mathcal{E}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$  gilt

$$\varphi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Ist darüberhinaus  $\mathcal{E} = \mathcal{P}(X)$ , so heißt  $\varphi$  ein äußeres Maß.

**Bemerkung 3.2.** (a) Jedes Maß auf einer  $\sigma$ -Algebra über  $X$  ist auch ein relativ äußeres Maß.

(b) Relativ äußere Maße sind monoton und  $\sigma$ -subadditiv, d.h.  $A, B \in \mathcal{E}$  und  $A \subseteq B$  impliziert  $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ , und aus  $A, A_n \in \mathcal{E}$  und  $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$  folgt

$$\varphi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

**Satz 3.3.** Sei  $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  eine Funktion mit  $\alpha(\emptyset) = 0$ . Für  $A \subseteq X$  setzen wir  $\varphi_\alpha(A) := \infty$ , falls es keine Mengen  $A_n \in \mathcal{E}$  mit  $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$  gibt. Anderenfalls sei

$$\varphi_\alpha(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(B_k) : B_k \in \mathcal{E} \text{ und } A \subseteq \bigcup_{k \geq 1} B_k \right\}.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(a)  $\varphi_\alpha$  ist ein äußeres Maß auf  $X$ .

(b) Ist  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$  ein Mengensystem und  $\varphi$  ein relativ äußeres Maß auf  $\mathcal{F}$  mit  $\varphi(A) \leq \alpha(A)$  für alle  $A \in \mathcal{E}$ , dann gilt  $\varphi(A) \leq \varphi_\alpha(A)$  für alle  $A \in \mathcal{F}$ .

(c) Es ist  $\varphi_\alpha|_{\mathcal{E}} = \alpha$  genau dann, wenn  $\alpha$  ein relativ äußeres Maß ist.

*Beweis.* (a) Es ist klar, dass  $\varphi_\alpha(\emptyset) = 0$ . Sei  $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$  für gewisse Teilmengen  $A, A_n \subseteq X$ . Falls  $\varphi_\alpha(A_n) = \infty$  für ein  $n$ , so ist die zu beweisende Ungleichung offenbar wahr. Wie können daher annehmen, dass  $\varphi_\alpha(A_n) < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gibt es Mengen  $B_n^k \in \mathcal{E}$  mit

$$A_n \subseteq \bigcup_{k \geq 1} B_n^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(B_n^k) \leq \varphi_\alpha(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Dann ist  $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq 1} B_n^k$ , und da  $\varphi_\alpha$  offenbar monoton ist, folgt hieraus

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(A) &\leq \varphi_\alpha\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(B_n^k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_\alpha(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_\alpha(A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da dies für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt die Behauptung.

(b) Sei  $A \in \mathcal{F}$ . Falls  $\varphi_\alpha(A) = \infty$ , dann ist die Behauptung  $\varphi(A) \leq \varphi_\alpha(A)$  offensichtlich. Sei also  $A \subseteq \bigcup_{k \geq 1} B_k$  mit  $B_k \in \mathcal{E}$ . Dann ist

$$\varphi(A) \leq \sum_{k \geq 1} \varphi(B_k) \leq \sum_{k \geq 1} \alpha(B_k).$$

Bilden wir rechts das Infimum über alle Überdeckungen  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$  von  $A$ , erhalten wir die Behauptung.

(c) Ist  $\alpha$  ein relativ äußeres Maß, so gilt  $\alpha \leq \varphi_\alpha$  auf  $\mathcal{E}$  wegen (b). Da auf  $\mathcal{E}$  stets  $\varphi_\alpha \leq \alpha$  gilt, ist  $\varphi_\alpha = \alpha$  auf  $\mathcal{E}$ .  $\square$

## 3.2 Der Satz von Carathéodory

**Definition 3.4.** Sei  $\varphi$  ein äußeres Maß auf  $X$ . Eine Menge  $A \subseteq X$  heißt  $\varphi$ -messbar oder messbar nach Carathéodory, falls

$$\varphi(H) = \varphi(H \cap A) + \varphi(H \cap A^c) \quad \text{für alle } H \subseteq X.$$

Die Menge der  $\varphi$ -messbaren Teilmengen von  $X$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}_\varphi$ .

**Bemerkung 3.5.** Wegen  $H = (H \cap A) \cup (H \cap A^c)$  ist stets  $\varphi(H) \leq \varphi(H \cap A) + \varphi(H \cap A^c)$ . Eine Menge  $A \subseteq X$  ist also genau dann  $\varphi$ -messbar, wenn  $\varphi(H) \geq \varphi(H \cap A) + \varphi(H \cap A^c)$  für alle  $H \subseteq X$ .

**Satz 3.6** (Carathéodory). Ist  $\varphi$  ein äußeres Maß auf  $X$ , dann ist  $\mathcal{M}_\varphi$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $(X, \mathcal{M}_\varphi, \varphi|_{\mathcal{M}_\varphi})$  ein vollständiger Maßraum. Außerdem wird für jede Teilmenge  $H \subseteq X$  durch  $\mu_H(A) := \varphi(A \cap H)$  ein Maß auf  $\mathcal{M}_\varphi$  definiert.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass  $\mathcal{M}_\varphi$  eine  $\sigma$ -Algebra ist.

Da für alle  $H \subseteq X$  gilt

$$\varphi(H \cap \emptyset) + \varphi(H \cap \emptyset^c) = \varphi(\emptyset) + \varphi(H) = \varphi(H),$$

ist  $\emptyset \in \mathcal{M}_\varphi$ . Sei nun  $A \in \mathcal{M}_\varphi$ . Dann gilt für alle  $H \subseteq X$

$$\varphi(H) = \varphi(H \cap A) + \varphi(H \cap A^c) = \varphi(H \cap A^c) + \varphi(H \cap (A^c)^c)$$

und wir haben auch  $A^c \in \mathcal{M}_\varphi$ . Es bleibt noch die Abgeschlossenheit von  $c\mathcal{M}_\varphi$  unter abzählbaren Vereinigungen zu zeigen.

Wir zeigen in einem ersten Schritt, dass  $\mathcal{M}_\varphi$  abgeschlossen ist bzgl. endlicher Vereinigungen. Für  $A, B \in \mathcal{M}_\varphi$  und  $H \subseteq X$  ist

$$\begin{aligned} \varphi(H) &= \varphi(H \cap A) + \varphi(H \cap A^c) \\ &= \varphi(H \cap A \cap B) + \varphi(H \cap A \cap B^c) + \varphi(H \cap A^c \cap B) + \varphi(H \cap A^c \cap B^c) \\ &\geq \varphi(H \cap (A \cup B)) + \varphi(H \cap (A \cup B)^c), \end{aligned}$$

da ja  $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$  und  $\varphi$  subadditiv ist. Nach Bemerkung 3.5 ist  $A \cup B \in \mathcal{M}_\varphi$ . Also ist  $\mathcal{M}_\varphi$  tatsächlich abgeschlossen bzgl. endlicher Vereinigungen und wegen  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$  und  $A \setminus B = A \cap B^c$  auch bzgl. endlicher Durchschnitte sowie bzgl. Differenzen.

Wir zeigen noch, dass  $\mathcal{M}_\varphi$  auch abgeschlossen ist bzgl. abzählbarer Vereinigungen. Mit der bereits mehrfach benutzten „Disjunktionstechnik“ genügt es zu zeigen, dass  $\mathcal{M}_\varphi$  abgeschlossen ist bzgl. abzählbarer *und paarweise disjunkter Vereinigungen*, d.h. wir haben zu zeigen, dass für jede Folge paarweise disjunkter Mengen  $A_j \in \mathcal{M}_\varphi$  gilt  $\bigcup_{j \geq 1} A_j \in \mathcal{M}_\varphi$ .

Wir bemerken vorab, dass für je zwei disjunkte Mengen  $A, B \in \mathcal{M}_\varphi$  gilt

$$\begin{aligned} \varphi(H \cap (A \cup B)) &= \varphi(H \cap (A \cup B) \cap A) + \varphi(H \cap (A \cup B) \cap A^c) \\ &= \varphi(H \cap A) + \varphi(H \cap B). \end{aligned}$$

Dies impliziert durch Induktion, dass  $\mu_H$  (endlich) additiv ist. Damit folgt nun für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi\left(H \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq \varphi\left(H \cap \bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \varphi(H \cap A_j),$$

woraus schließlich folgt, dass

$$\varphi\left(H \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(H \cap A_j).$$

Da die Ungleichung  $\leq$  wegen der Subadditivität stets gilt, folgt die  $\sigma$ -Additivität von  $\mu_H$ . Wegen  $\mu_X = \varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}$  ist auch  $\varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}$   $\sigma$ -additiv. Da  $\mathcal{M}_\varphi$  abgeschlossen bzgl. endlicher Vereinigungen ist, gilt weiter

$$\varphi(H) = \varphi\left(H \cap \bigcup_{j=1}^n A_j\right) + \varphi\left(H \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \sum_{j=1}^n \varphi(H \cap A_j) + \varphi\left(H \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  liefert

$$\varphi(H) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(H \cap A_j) + \varphi\left(H \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \varphi\left(H \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \varphi\left(H \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

Also ist  $\bigcup_{j \geq 1} A_j \in \mathcal{M}_\varphi$ , und  $\mathcal{M}_\varphi$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

Zur Vollständigkeit: Sei  $N \subseteq X$  und  $N \subseteq C$  für ein  $C \in \mathcal{M}_\varphi$  mit  $\varphi(C) = 0$ . Für jedes  $H \subseteq X$  ist dann

$$\varphi(H) \leq \varphi(H \cap N) + \varphi(H \cap N^c) \leq \varphi(N) + \varphi(H) \leq \varphi(C) + \varphi(H) = \varphi(H).$$

Wir haben daher überall Gleichheit in dieser Ungleichungskette. Insbesondere ist  $\varphi(H) = \varphi(H \cap N) + \varphi(H \cap N^c)$  und somit  $N \in \mathcal{M}_\varphi$ .  $\square$

### 3.3 Fortsetzung von relativ äußeren Maßen

**Satz 3.7** (Fortsetzungssatz). *Das Mengensystem  $\mathcal{E}$  sei bzgl. der Mengendifferenz abgeschlossen, und  $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  sei ein relativ äußeres Maß und auf  $\mathcal{E}$  additiv. Dann ist  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$  und  $\varphi_\alpha|_{\mathcal{E}} = \alpha$ , d.h.  $\varphi_\alpha$  ist die Fortsetzung von  $\alpha$ .*

*Beweis.* Aus Satz 3.3 (c) folgt sofort, dass  $\varphi_\alpha|_{\mathcal{E}} = \alpha$  ist. Wir zeigen noch die Inklusion  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$  und bemerken vorab, dass wegen  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$  das Mengensystem  $\mathcal{E}$  auch abgeschlossen bzgl. Durchschnitt ist.

Sei  $A \in \mathcal{E}$  und  $H \subseteq X$  beliebig. Falls  $\varphi_\alpha(H) = \infty$ , dann ist sicher

$$\varphi_\alpha(H) \geq \varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \cap A^c). \quad (3.1)$$

Sei also  $\varphi_\alpha(H) < \infty$ , und seien  $A_n \in \mathcal{E}$  mit  $H \subseteq \bigcup_n A_n$ . Wegen

$$H \cap A \subseteq \bigcup_n (A_n \cap A) \quad \text{und} \quad H \cap A^c \subseteq \bigcup_n (A_n \cap A^c)$$

und mit der Additivität von  $\alpha$  auf  $\mathcal{E}$  erhalten wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \cap A^c) &\leq \sum_n \varphi_\alpha(A_n \cap A) + \sum_n \varphi_\alpha(A_n \cap A^c) \\ &= \sum_n \alpha(A_n \cap A) + \sum_n \alpha(A_n \cap A^c) = \sum_n \alpha(A_n). \end{aligned}$$

Wir bilden auf der rechten Seite das Infimum über alle Überdeckungen von  $H$  und erhalten (3.1) auch in diesem Fall. Es ist also  $A \in \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$ .  $\square$



**Satz 3.8** (Eindeutigkeitssatz I). *Das Mengensystem  $\mathcal{E}$  sei bzgl. der Differenz abgeschlossen, und  $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  sei ein relativ äußeres Maß und auf  $\mathcal{E}$  additiv. Weiter sei  $\mathcal{S}$  eine  $\sigma$ -Algebra mit  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$  und  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{S}$ , welches  $\alpha$  fortsetzt. Ist  $\varphi_\alpha(X) < \infty$ , dann ist  $\varphi_\alpha|_{\mathcal{S}} = \mu$ . Insbesondere ist  $\varphi_\alpha$  die eindeutige Fortsetzung von  $\alpha$  zu einem Maß auf  $\mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$ .*

*Beweis.* Offenbar ist  $\mu|_{\mathcal{E}}$  ein relativ äußeres Maß, das mit  $\alpha$  übereinstimmt. Aus Satz 3.3 (b) folgt daher  $\mu \leq \varphi_\alpha$  auf  $\mathcal{S}$ . Da nach Voraussetzung  $\varphi_\alpha(X) < \infty$  ist, definiert  $\nu := \varphi_\alpha - \mu$  ein Maß auf  $\mathcal{S}$ . Für dieses ist  $\nu(A) = 0$  für alle  $A \in \mathcal{E}$ . Dann ist aber auch  $\nu(X) = 0$ , denn es ist ja  $X \subseteq \bigcup_n A_n$  mit geeigneten Mengen  $A_n \in \mathcal{E}$  (sonst hätten wir  $\varphi_\alpha(X) = \infty$  gesetzt, vgl. die Definition von  $\varphi_\alpha$  in Satz 3.3). Dann ist aber  $\nu(A) = 0$  für alle  $A \in \mathcal{S}$ , also stimmen  $\varphi_\alpha$  und  $\mu$  auf  $\mathcal{S}$  überein.  $\square$

Der obige Eindeutigkeitssatz gilt bereits, wenn  $X$  nur  $\sigma$ -endlich bzgl.  $\mathcal{E}$  ist, d.h. wenn  $X$  durch höchstens abzählbar viele  $A_n \in \mathcal{E}$  mit  $\alpha(A_n) < \infty$  überdeckt wird, vgl. Definition 1.41. Das wollen wir im Folgende noch beweisen. Die Beweisidee wird es sein, die  $A_n$  paarweise disjunkt zu wählen und den Eindeutigkeitssatz 3.8 für jedes  $A_n$  separat zu benutzen.

Im Beweis dieses zweiten Eindeutigkeitssatzes benötigen wir noch das folgende Lemma.

**Lemma 3.9.** *Das Mengensystem  $\mathcal{E}$  sei bzgl. der Differenz abgeschlossen, und  $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  sei monoton (z.B. ein relativ äußeres Maß). Für  $C \in \mathcal{E}$  mit  $\alpha(C) < \infty$  setzen wir  $\mathcal{E}|_C := \{A \cap C : A \in \mathcal{E}\}$  und  $\gamma := \alpha|_{\mathcal{E}|_C}$ , und wir betrachten das äußere Maß  $\varphi_\gamma$  auf  $\mathcal{P}(C)$ . Dann gilt*

$$\mathcal{M}_{\varphi_\alpha}|_C \subseteq \mathcal{M}_{\varphi_\gamma} \quad \text{und} \quad \varphi_\alpha|_{\mathcal{P}(C)} = \varphi_\gamma. \quad (3.2)$$

Ist  $C \in \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$ , dann gilt sogar die Gleichheit  $\mathcal{M}_{\varphi_\alpha}|_C = \mathcal{M}_{\varphi_\gamma}$ .

*Beweis.* Wir bemerken zuerst, dass mit  $\mathcal{E}$  auch  $\mathcal{E}|_C$  abgeschlossen bzgl.  $\setminus$  ist und dass  $\mathcal{E}|_C \subseteq \mathcal{E}$ , da  $\mathcal{E}$  abgeschlossen bzgl.  $\cap$  ist. Für  $H \subseteq C$  ist  $\varphi_\alpha(H) \leq \varphi_\gamma(H)$ , da links das Infimum über eine größere Menge gebildet wird. Überdecken wir andererseits  $H$  durch  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  mit  $A_n \in \mathcal{E}$ , so wird  $H$  auch durch  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap C)$  mit  $A_n \cap C \in \mathcal{E}|_C$  überdeckt, und es ist

$$\varphi_\gamma(H) \leq \sum_{n \geq 1} \gamma(A_n \cap C) = \sum_{n \geq 1} \alpha(A_n \cap C) \leq \sum_{n \geq 1} \alpha(A_n).$$

Bilden wir rechts das Infimum über alle Überdeckungen, folgt  $\varphi_\gamma(H) \leq \varphi_\alpha(H)$  und somit  $\varphi_\gamma(H) = \varphi_\alpha(H)$  für alle  $H \subseteq C$ .

Seien nun  $A \in \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$  und  $H \subseteq C$ . Dann ist, wie wir soeben gesehen haben,

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma(H) &= \varphi_\alpha(H) = \varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \setminus A) \\ &= \varphi_\alpha(H \cap (A \cap C)) + \varphi_\alpha(H \setminus (A \cap C)) \\ &= \varphi_\gamma(H \cap (A \cap C)) + \varphi_\gamma(H \setminus (A \cap C)) \end{aligned}$$

und daher  $A \cap C \in \mathcal{M}_{\varphi_\gamma}$ . Das zeigt (3.2).

Seien nun schließlich  $C \in \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$  und  $A \in \mathcal{M}_{\varphi_\gamma}$  (also insbesondere  $A \subseteq C$ ). Für jedes  $H \subseteq X$  ist dann

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(H) &= \varphi_\alpha(H \setminus C) + \varphi_\alpha(H \cap C) \\ &= \varphi_\alpha(H \setminus C) + \varphi_\gamma(H \cap C) \\ &= \varphi_\alpha(H \setminus C) + \varphi_\gamma((H \cap C) \cap A) + \varphi_\gamma((H \cap C) \setminus A) \\ &= \varphi_\alpha(H \setminus C) + \varphi_\alpha((H \cap C) \cap A) + \varphi_\alpha((H \cap C) \setminus A) \\ &\geq \varphi_\alpha(H \setminus A) + \varphi_\alpha(H \cap A),\end{aligned}$$

also  $A \in \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$ . □

**Satz 3.10** (Eindeutigkeitsatz II). *Das Mengensystem  $\mathcal{E}$  sei bzgl. der Differenz abgeschlossen, und  $\alpha : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  sei ein relativ äußeres Maß und auf  $\mathcal{E}$  additiv. Weiter sei  $\mathcal{S}$  eine  $\sigma$ -Algebra mit  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$  und  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{S}$ , welches  $\alpha$  fortsetzt. Gilt außerdem  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  mit  $A_n \in \mathcal{E}$  und  $\alpha(A_n) < \infty$ , so ist  $\varphi_\alpha|_{\mathcal{S}} = \mu$ . Insbesondere ist  $\varphi_\alpha$  die eindeutige Fortsetzung von  $\alpha$  zu einem Maß auf  $\mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$ .*

*Beweis.* O.B.d.A. können wir annehmen, dass die  $A_n$  paarweise disjunkt sind (andernfalls ersetzen wir  $A_1, A_2, A_3, \dots$  durch  $A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots$ ). Für  $\gamma_n := \alpha|_{(\mathcal{E}|_{A_n})}$  gilt nach dem obigen Lemma

$$\mathcal{M}_{\varphi_{\gamma_n}} = \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}|_{A_n} \quad \text{und} \quad \varphi_{\gamma_n}(A) = \varphi_\alpha(A) \quad \text{für } A \subseteq A_n.$$

Wegen  $\mathcal{E}|_{A_n} \subseteq \mathcal{S}|_{A_n} \subseteq \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}|_{A_n} = \mathcal{M}_{\varphi_{\gamma_n}}$  können wir den Eindeutigkeitsatz I auf  $\mu|_{(\mathcal{S}|_{A_n})}$  anwenden und erhalten

$$\mu(A \cap A_n) = \varphi_{\gamma_n}(A \cap A_n) = \varphi_\alpha(A \cap A_n)$$

und somit

$$\mu(A) = \sum_{n \geq 1} \mu(A \cap A_n) = \sum_{n \geq 1} \varphi_\alpha(A \cap A_n) = \varphi_\alpha(A)$$

für alle  $A \in \mathcal{S}$ . □

### 3.4 Metrische äußere Maße<sup>◇</sup>

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $\varphi$  ein äußeres Maß auf  $X$ . Der folgende Satz klärt, wann Borelmengen messbar nach Carathéodory sind. Dazu führen wir folgende Begriffe ein.

**Definition 3.11.** (a) *Es seien  $A, B \subseteq X$ .*

i)  $\text{dist}(A, B) := \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$  heißt Abstand der Mengen  $A$  und  $B$ .

ii)  $\text{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} d(x,y)$  heißt Diameter oder Durchmesser der Menge  $A$ .

(b) Ein äußeres Maß  $\varphi$  auf  $X$  heißt metrisch, falls

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

für alle  $A, B \subseteq X$  mit  $\text{dist}(A, B) > 0$ .

**Satz 3.12.** Sei  $\varphi$  ein äußeres Maß auf  $X$ . Dann ist  $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}_\varphi$  genau dann, wenn  $\varphi$  metrisch ist.

*Beweis.* Sei zunächst  $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}_\varphi$ , und seien  $A, B \subseteq X$  mit  $\text{dist}(A, B) > 0$ . Dann ist  $\overline{A} \cap B = \emptyset$ . Da nach Voraussetzung  $\overline{A} \in \mathcal{M}_\varphi$  ist, folgt

$$\varphi(A \cup B) = \varphi((A \cup B) \cap \overline{A}) + \varphi((A \cup B) \setminus \overline{A}) = \varphi(A) + \varphi(B),$$

d.h.  $\varphi$  ist metrisch. Sei nun umgekehrt  $\varphi$  metrisch. Wir zeigen, dass jede offene Menge  $G$  zu  $\mathcal{M}_\varphi$  gehört. Dazu definieren wir

$$G_k := \{x \in G : \text{dist}(x, X \setminus G) \geq 1/k\} \quad \text{und} \quad U_k := G_k \setminus G_{k-1}.$$

Für alle  $H \subseteq X$  und  $m \in \mathbb{N}$  ist dann

$$H \cap G = (H \cap G_m) \cup \bigcup_{k=m+1}^{\infty} (H \cap U_k).$$

Wir schreiben der Kürze halber  $a_k := \varphi(H \cap U_k)$  und erhalten

$$\varphi(H \cap G) \leq \varphi(H \cap G_m) + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k.$$

Falls  $\sum_k a_k < \infty$ , so folgt sofort

$$\varphi(H \cap G) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(H \cap G_m) \tag{3.3}$$

(man beachte, dass die Mengen  $G_m$  monoton wachsen und daher der Grenzwert in  $\overline{R}$  existiert).

Ist dagegen  $\sum_k a_k = \infty$ , dann gilt  $\sum_k a_{2k} = \infty$  oder  $\sum_k a_{2k+1} = \infty$ . Wir sehen uns nur den ersten Fall an; der zweite lässt sich analog behandeln. Sei also  $\sum_k a_{2k} = \infty$ . Wegen  $\text{dist}(U_{2k}, U_{2j}) > 0$  für  $j \neq k$ , und da  $\varphi$  nach Voraussetzung metrisch ist, folgt

$$\sum_{k=1}^N a_{2k} = \sum_{k=1}^N \varphi(H \cap U_{2k}) = \varphi\left(\bigcup_{k=1}^N (H \cap U_{2k})\right) \leq \varphi(H \cap G_{2N}).$$

Hieraus folgt  $\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi(H \cap G_{2N}) = \infty$ , und damit gilt natürlich ebenfalls wieder (3.3). Nun ist für jedes  $m$

$$\varphi(H) \geq \varphi((H \cap G_m) \cup (H \setminus G)) = \varphi(H \cap G_m) + \varphi(H \setminus G).$$

Da (3.3) in jedem der betrachteten Fälle gilt, folgt schließlich

$$\varphi(H) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(H \cap G_m) + \varphi(H \setminus G) \geq \varphi(H \cap G) + \varphi(H \setminus G)$$

und damit die Behauptung. □

### 3.5 Konstruktion des Lebesgue-Maßes

Für Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^d$  mit  $a_j \leq b_j$  für  $j = 1, \dots, d$  setzen wir wie vorher

$$[a, b] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d].$$

Die Menge aller halboffenen Intervalle bezeichnen wir mit  $\mathcal{R}$ . Für jedes Intervall  $I = [a, b)$  definieren wir sein  $d$ -dimensionales *Volumen* durch

$$\text{vol}_d(I) := \prod_{j=1}^d (b_j - a_j).$$

Weiter sei  $\mathcal{E}$  die Menge aller endlichen Vereinigungen von Intervallen aus  $\mathcal{R}$ , wobei die leere Menge ebenfalls als eine solche Vereinigung (von null Intervallen) zähle.

**Lemma 3.13.** (a)  $\mathcal{E}$  ist abgeschlossen bzgl.  $\cup, \cap$  und  $\setminus$ .

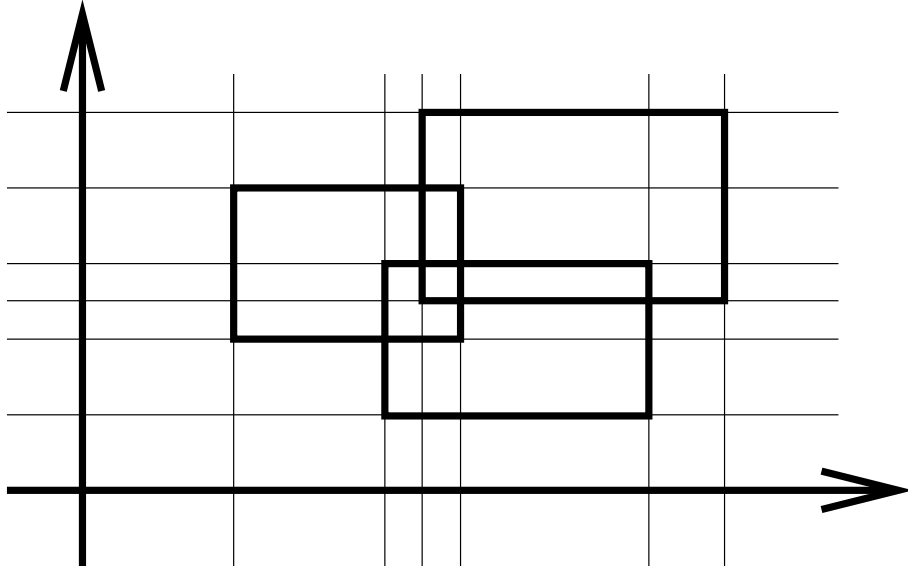
(b) Jedes  $A \in \mathcal{E}$  kann als Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle aus  $\mathcal{R}$  geschrieben werden. Ist  $A = \bigcup_{j=1}^N I_j$  eine solche disjunkte Vereinigung, so ist die Funktion

$$\alpha(A) := \sum_{j=1}^N \text{vol}_d(I_j)$$

wohldefiniert und additiv auf  $\mathcal{E}$ . Für alle  $I \in \mathcal{R}$  gilt  $\alpha(I) = \text{vol}_d(I)$ .

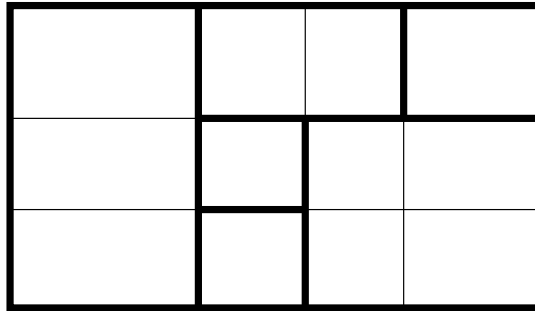
(c)  $\alpha$  ist ein relativ äußeres Maß auf  $\mathcal{E}$ .

*Beweis.* Man sieht leicht (Bildchen malen!), dass Durchschnitt, Vereinigung und Differenz zweier Intervalle aus  $\mathcal{R}$  in  $\mathcal{E}$  liegen. Hieraus folgt die Behauptung (a), und auch die erste Aussage von (b) macht man sich leicht an einer Skizze klar:



Als nächstes überlegt man sich: Ist  $I \in \mathcal{R}$  eine endliche Vereinigung  $\bigcup_j I_j$  paarweise disjunkter Intervalle aus  $\mathcal{R}$ , so ist

$$\text{vol}_d(I) = \sum_j \text{vol}_d(I_j). \quad (3.4)$$



(Falls Sie diese anschauliche Argumentation nicht mögen, finden Sie ausführliche Beweise in Bauer, S. 26–28.) Die Wohldefiniertheit erhalten wir dann wie folgt: Seien  $A = \bigcup_{j=1}^N I_j = \bigcup_{k=1}^M J_k$  zwei Darstellungen von  $A \in \mathcal{E}$  als endliche Vereinigungen paarweise disjunkter Intervalle aus  $\mathcal{R}$ , so ist

$$I_j = I_j \cap A = I_j \cap \left( \bigcup_{k=1}^M J_k \right) = \bigcup_{k=1}^M (I_j \cap J_k).$$

Wegen (3.4) ist dann

$$\sum_{j=1}^N \text{vol}_d(I_j) = \sum_{j=1}^N \text{vol}_d \left( \bigcup_{k=1}^M (I_j \cap J_k) \right) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \text{vol}_d(I_j \cap J_k).$$

Eine analoge Rechnung für die zweite Darstellung von  $A$  liefert den gleichen Ausdruck. Auch die Additivität von  $\alpha$  ist nun leicht zu sehen.

Es bleibt noch (c) zu zeigen. Dazu beweisen wir zuerst, dass  $\alpha$  subadditiv ist. Sei  $A \subseteq \bigcup_{k=1}^N A_k$  mit  $A, A_k \in \mathcal{E}$ . Dann sind  $B_1 := A_1, B_2 := A_2 \setminus B_1, B_3 := A_3 \setminus (B_1 \cup B_2)$  usw. paarweise disjunkte Mengen aus  $\mathcal{E}$  mit  $\bigcup_{k=1}^N A_k = \bigcup_{k=1}^N B_k$ . Wegen der Additivität von  $\alpha$  ist dann

$$\alpha(A) \leq \alpha\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \alpha\left(\bigcup_{k=1}^N B_k\right) = \sum_{k=1}^N \alpha(B_k) \leq \sum_{k=1}^N \alpha(A_k).$$

Wir wenden uns der  $\sigma$ -Subadditivität von  $\alpha$  zu. Im Folgenden bezeichnen wir für ein Intervall  $I \in \mathcal{R}$  und  $\delta > 0$  mit  $I^\delta$  das Intervall, das aus  $I$  durch zentrische Streckung mit dem Faktor  $\delta$  hervorgeht, wobei der Mittelpunkt von  $I$  als Streckungszentrum dient.

Sei  $A \in \mathcal{E}$ , d.h.  $A = \bigcup_{k=1}^N I_k$  mit paarweise disjunkten Intervallen  $I_k \in \mathcal{R}$  für  $k = 1, 2, \dots, N$ . Zu gegebenem  $\delta \in (0, 1)$  betrachten wir  $A^\delta := \bigcup_{k=1}^N I_k^\delta$ . Dann ist  $\overline{A^\delta}$  kompakt und es gilt

$$\overline{A^\delta} = \overline{\bigcup_{k=1}^N I_k^\delta} = \bigcup_{k=1}^N \overline{I_k^\delta} \subseteq \bigcup_{k=1}^N I_k = A,$$

sowie

$$\alpha(A^\delta) = \sum_{k=1}^N \text{vol}_d(I_k^\delta) = \sum_{k=1}^N \delta^d \text{vol}_d(I_k) = \delta^d \alpha(A).$$

Nehmen wir uns nun eine abzählbare Überdeckung von  $A \in \mathcal{E}$  durch Mengen  $A_k \in \mathcal{E}$ , also  $A \subseteq \bigcup_{k \geq 1} A_k$ . Jedes  $A_k$  ist wiederum eine endliche Vereinigung von Intervallen und wir können annehmen, dass alle dabei auftretenden Intervalle paarweise disjunkt sind (wir definieren wie oben im Nachweis der Subadditivität die  $I_k$  und zerlegen diese Mengen in paarweise disjunkte Intervalle). Diese nummerieren wir durch und erhalten eine Folge paarweise disjunkter Intervalle  $J_i \in \mathcal{R}$  mit  $A \subseteq \bigcup_{i \geq 1} J_i$ . Dann gilt für jedes  $\gamma > 1$  mit den zentrisch gestreckten Würfeln  $J_i^\gamma$

$$\overline{A^\delta} \subseteq A \subseteq \bigcup_{i \geq 1} J_i \subseteq \bigcup_{i \geq 1} (J_i^\gamma)^\circ.$$

Letzteres ist nun eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $\overline{A^\delta}$ , also wird diese bereits durch endlich viele dieser Intervalle, etwa durch  $J_1^\gamma, J_2^\gamma, \dots, J_K^\gamma$  überdeckt. Nach dem oben Bewiesenen und Dank der Additivität von  $\alpha$  auf  $\mathcal{E}$ , die im Teil (b) bewiesen wurde, ist dann für jedes  $\delta \in (0, 1)$  und jedes  $\gamma > 1$

$$\alpha(A) = \delta^{-d} \alpha(A^\delta) \leq \delta^{-d} \sum_{i=1}^K \alpha(J_i^\gamma) = \frac{\gamma^d}{\delta^d} \sum_{i=1}^K \alpha(J_i) \leq \frac{\gamma^d}{\delta^d} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(J_i) \leq \frac{\gamma^d}{\delta^d} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k).$$

Lässt man in dieser Ungleichung nun  $\delta$  von unten und  $\gamma$  von oben gegen Eins gehen, so folgt

$$\alpha(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k),$$

und  $\alpha$  ist ein relativ äußeres Maß. □

**Definition 3.14.** Seien  $\mathcal{E}$  und  $\alpha$  wie oben und  $\varphi_\alpha$  das zugehörige äußere Maß auf  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  nach Satz 3.7 Wir nennen:

- (a)  $\lambda_d^* := \varphi_\alpha$  das  $d$ -dimensionale äußere Lebesgue-Maß,
- (b) die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$  der  $\lambda_d^*$ -messbaren Mengen Lebesguesche  $\sigma$ -Algebra und notieren diese als  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ,
- (c) die Elemente von  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  Lebesgue-Mengen oder Lebesgue-messbare Mengen,
- (d) das Maß  $\lambda_d := \lambda_d^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}$  das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß und
- (e)  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$  den Lebesgueschen Maßraum.

Wir sammeln einige direkte Schlussfolgerungen aus unseren Vorarbeiten. Insbesondere weisen wir nach, dass  $\lambda_d$  das eindeutige Maß auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  ist, das allen Intervallen ihr (gewöhnliches)  $d$ -dimensionales Volumen zuordnet.

**Satz 3.15.** (a)  $\lambda_d^*$  ist ein metrisches äußeres Maß.

- (b) Borelmengen sind Lebesgue-messbar, d. h. es ist  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ .
- (c) Der Lebesguesche Maßraum  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$  ist vollständig.
- (d) Für alle  $A \in \mathcal{E}$  ist  $\lambda_d(A) = \alpha(A)$ . Insbesondere ist  $\lambda_d(I) = \text{vol}_d(I)$  für alle Intervalle  $I \in \mathcal{R}$ .
- (e) Ist  $K \subset \mathbb{R}^d$  kompakt, so ist  $\lambda_d(K) < \infty$ .
- (f) Der Lebesguesche Maßraum  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$  ist  $\sigma$ -endlich. Es ist sogar  $\mathbb{R}^d$  eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.
- (g) Für  $a \leq b$  (komponentenweise) ist  $\lambda_d([a, b]) = \lambda_d([a, b]) = \lambda_d((a, b))$ .
- (h) Ist  $\mathcal{S}$  eine  $\sigma$ -Algebra mit  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  und ist  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{S}$  mit  $\mu|_{\mathcal{E}} = \alpha$ , so ist  $\lambda_d|_{\mathcal{S}} = \mu$ .

*Beweis.* (a) Diese Aussage zeigen wir separat am Ende dieses Abschnittes.

- (b) Dies folgt aus Aussage (a) und Satz 3.12, kann aber auch leicht ohne Benutzung von (a) eingesehen werden: Wegen des Fortsetzungssatzes 3.7 gilt  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ . Da aber  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{E}$  und da  $\mathcal{R}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  erzeugt, folgt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d).$$

- (c) Dies ergibt sich unmittelbar aus unserer Konstruktion: der Satz von Carathéodory (Satz 3.6) liefert vollständige Maßräume.
- (d)  $\lambda_d^*$  setzt  $\alpha$  (wegen Satz 3.7) und  $\text{vol}_d$  (wegen Lemma 3.13) fort.
- (e) Kompakte Mengen sind beschränkt. Für jedes kompakte  $K$  gibt es daher ein Intervall  $I \in \mathcal{R}$  mit  $K \subseteq I$ . Dann ist aber

$$\lambda_d(K) \leq \lambda_d(I) = \text{vol}_d(I) < \infty.$$

- (f) Offenbar ist  $\mathbb{R}^d$  die Vereinigung über  $k \in \mathbb{N}$  der abgeschlossenen (also kompakten) Kugeln um 0 vom Radius  $k$ .
- (g) Wir bezeichnen mit  $\mathbf{1}$  den Vektor  $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$ . Für  $a \leq b$  ist dann

$$(a, b) = \bigcup_{k \geq 1} [a + k^{-1}\mathbf{1}, b) \quad \text{and} \quad [a, b] = \bigcap_{k \geq 1} [a, b + k^{-1}\mathbf{1}),$$

und die Behauptung folgt aus Lemma 1.34 (c) und (d), angewandt auf das Lebesgue-Maß  $\lambda_d$ .

- (h) Das ist die Aussage des Eindeutigkeitsatzes 3.10. Beachte, dass der Lebesguesche Maßraum nach (f)  $\sigma$ -endlich ist.  $\square$

**Bemerkung 3.16.** Führt man diese Konstruktion mit

$$\mathcal{E}_{\mathbb{Q}} := \left\{ \bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k) : a_k, b_k \in \mathbb{Q}^d, N \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{und} \quad \alpha_{\mathbb{Q}} := \alpha|_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}}$$

statt mit  $\mathcal{E}$  und  $\alpha$  durch, gelangt man zum gleichen Maßraum  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ .

**Satz 3.17.** *Das äußere Lebesgue-Maß ist translationsinvariant, d. h. für jedes  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  und jedes  $a \in \mathbb{R}^d$  ist*

$$\lambda_d^*(a + A) = \lambda_d^*(A).$$

Da ferner gilt

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow a + A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \quad \text{sowie} \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow a + A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (3.5)$$

sind auch das Lebesgue-Maß  $\lambda_d$  auf  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  sowie seine Einschränkung auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  translationsinvariant.



*Beweis.* Offenbar ist  $\text{vol}_d$  translationsinvariant. Somit hat auch  $\lambda_d^*$  diese Eigenschaft, und es folgt die erste Aussage in (3.5).

Für  $a \in \mathbb{R}^d$  sei  $f_a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  die Abbildung  $x \mapsto x - a$ . Da  $f_a$  stetig ist, ist für jede offene Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  ihr Urbild  $f_a^{-1}(G) = a + G$  offen. Die Menge

$$\mathcal{S} := \{A \subseteq \mathbb{R}^d : f_a^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$$

ist eine  $\sigma$ -Algebra, und sie enthält alle offenen Mengen. Somit ist  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}$ , woraus die zweite Aussage in (3.5) folgt.  $\square$

**Satz 3.18.** *Das Lebesgue-Maß  $\lambda_d$  ist das einzige translationsinvariante Maß auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  mit  $\lambda([0, 1]^d) = 1$ . Eine analoge Aussage gilt für  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ .*

*Beweis.* Dass  $\lambda_d$  die angegebenen Eigenschaften hat, folgt aus Lemma 3.13 und Satz 3.17. Sei nun umgekehrt  $\mu$  ein translationsinvariantes Maß, das mindestens auf  $\mathcal{R}$  definiert und durch  $\mu([0, 1]^d) = 1$  normiert ist. Seien  $a, b \in \mathbb{Q}^d$  mit  $a \leq b$ . Aus der Translationsinvarianz folgt

$$\mu([a, b]) = \mu([0, b - a] + a) = \mu([0, b - a]).$$

Da  $b - a \in \mathbb{Q}^d$ , können wir  $b - a$  schreiben als  $(\frac{m_1}{m}, \dots, \frac{m_d}{m})$  mit  $m, m_j \in \mathbb{Z}$  und  $m > 0$ . Somit ist  $[0, b - a]$  eine disjunkte Vereinigung von  $m_1 \cdot \dots \cdot m_d$  Intervallen, die durch Translation aus  $[0, \frac{1}{m}]^d$  hervorgehen. Aus der Translationsinvarianz und der Additivität folgt

$$\mu([0, b - a]) = m_1 \cdot \dots \cdot m_d \mu([0, 1/m]^d).$$

Wir bestimmen  $\mu([0, \frac{1}{m}]^d)$ . Da  $[0, 1]^d$  darstellbar ist als disjunkte Vereinigung von  $m^d$  Intervallen, die durch Translation aus  $[0, \frac{1}{m}]^d$  hervorgehen, ist

$$1 = \mu([0, 1]^d) = m^d \mu([0, 1/m]^d), \quad \text{also} \quad \mu([0, 1/m]^d) = m^{-d}.$$

Damit wird

$$\mu([a, b]) = \mu([0, b - a]) = \frac{m_1 \cdot \dots \cdot m_d}{m^d} = \lambda_d([0, b - a]) = \lambda_d([a, b]).$$

Es ist also  $\mu = \text{vol}_d = \lambda_d$  auf der Menge der Intervalle mit rationalen Endpunkten. Dann stimmen diese Funktionen auch auf der Menge  $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$  überein (vgl. Bemerkung 3.16). Satz 3.15 (h) liefert schließlich  $\lambda_d = \mu$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und auf  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ .  $\square$

**Folgerung 3.19.** *Ist  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $t > 0$ , so ist auch  $tE \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , und es gilt*

$$\lambda_d(tE) = t^d \lambda_n(E).$$

*Beweis.* Man überprüft leicht, dass  $t\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \{tB : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\mathbb{R}^d$  ist, die alle offenen Mengen enthält. Folglich ist  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  in  $t\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  enthalten. Eine Wiederholung dieser Überlegung liefert

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq t\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \frac{1}{t}t\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Insbesondere ist also  $tE \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  für  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Wir definieren

$$\mu(E) := \frac{1}{t^d} \lambda_d(tE).$$

Man bestätigt leicht, dass  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  ist und dass

$$\mu(J) = \frac{1}{t^d} \lambda_d(tJ) = \frac{1}{t^d} \prod_{j=1}^d (tb_j - ta_j) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) = \lambda_d(J)$$

für jedes Intervall  $J = [a, b)$  ist. Mit Satz 3.15 folgt  $\mu = \lambda$  auf ganz  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .  $\square$

*Beweis von Satz 3.15 (a)<sup>o</sup>.* Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$  mit  $\text{dist}(A, B) =: \delta > 0$ . Wir möchten zeigen, dass  $\lambda_d^*(A \cup B) \geq \lambda_d^*(A) + \lambda_d^*(B)$ . Für  $\lambda_d^*(A \cup B) = \infty$  gilt dies offenbar. Sei also  $\lambda_d^*(A \cup B) < \infty$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann (vgl. Satz 3.3) gibt es Intervalle  $J_k \in \mathcal{R}$  mit  $A \cup B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k$  und

$$\lambda_d^*(A \cup B) \geq \sum_{k \geq 1} \text{vol}_d(J_k) - \varepsilon. \quad (3.6)$$

Da jedes Intervall  $J_k$  geschrieben werden kann als endliche Vereinigung von Intervallen vom Durchmesser  $\leq \delta/3$  und da wir Intervalle  $J_k$  mit  $J_k \cap (A \cup B) = \emptyset$  in (3.6) einfach weglassen können, nehmen wir in Weiteren an, dass für die Intervalle  $J_k$  in (3.6) gilt:

$$\text{diam}(J_k) \leq \delta/3 \quad \text{und} \quad J_k \cap (A \cup B) \neq \emptyset.$$

Hieraus folgt, dass jedes dieser Intervalle  $J_k$  entweder mit  $A$  oder mit  $B$  einen Punkt gemeinsam hat: Sind  $I, J$  Intervalle mit  $\text{diam}(I) \leq \delta/3$ ,  $\text{diam}(J) \leq \delta/3$  sowie mit  $a \in I \cap A$  und  $b \in J \cap B$ , so ist für alle  $x \in I$  und alle  $y \in J$

$$0 < \delta \leq |a - b| \leq |a - x| + |x - y| + |y - b|,$$

also

$$|x - y| \geq |a - b| - |a - x| - |y - b| \geq \delta - \delta/3 - \delta/3 = \delta/3.$$

Somit ist  $\text{dist}(I, J) \geq \delta/3$  und insbesondere  $I \cap J = \emptyset$ .

Wir erhalten daher aus (3.6)

$$\lambda_d^*(A \cup B) \geq \sum_{J_k: J_k \cap A \neq \emptyset} \text{vol}_d(J_k) + \sum_{J_k: J_k \cap B \neq \emptyset} \text{vol}_d(J_k) - \varepsilon.$$

Da die Intervalle  $J_k$  mit  $J_k \cap A \neq \emptyset$  die Menge  $A$  überdecken und die mit  $J_k \cap B \neq \emptyset$  die Menge  $B$  überdecken, folgt mit der Definition von  $\lambda_d^*$  (vgl. wieder Satz 3.3), dass

$$\lambda_d^*(A \cup B) \geq \lambda_d^*(A) + \lambda_d^*(B) - \varepsilon.$$

Da dies für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt die Behauptung.  $\square$

### 3.6 Regularität

Der folgende Satz zeigt insbesondere, dass das Lebesgue-Maß  $\lambda_d$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  ein reguläres Borelmaß ist.

**Satz 3.20.** *Sei  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es eine abgeschlossene Menge  $F \subseteq \mathbb{R}^d$  und eine offene Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  mit*

$$F \subseteq A \subseteq G \quad \text{and} \quad \lambda_d(G \setminus F) < \varepsilon.$$

*Dabei kann  $F$  als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen gewählt werden.*

*Beweis.* Sei zunächst  $A$  beschränkt und somit  $\lambda_d(A) < \infty$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine abzählbare Überdeckung  $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k$  durch Intervalle  $J_k \in \mathcal{R}$  mit

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \text{vol}_d(J_k) < \lambda_d(A) + \varepsilon/4.$$

Für  $\delta > 1$  sei  $J_k^\delta$  das Intervall, das aus  $J_k$  durch Streckung mit dem Faktor  $\delta$  und mit dem Mittelpunkt des Intervalls als Streckungszentrum hervorgeht. Dann ist

$$\sum_{k \geq 1} \lambda_d(J_k^\delta) = \delta^d \sum_{k \geq 1} \lambda_d(J_k) < \delta^d (\lambda_d(A) + \varepsilon/4) < \lambda_d(A) + \varepsilon/2,$$

falls  $\delta$  nur nahe genug an Eins ist. Für ein solches  $\delta$  sei  $G := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (J_k^\delta)^\circ$ . Dann ist  $G$  offen,  $A \subseteq G$ , und wegen der Subadditivität ist

$$\lambda_d(G) \leq \sum_{k \geq 1} \lambda_d(J_k^\delta) < \lambda_d(A) + \varepsilon/2.$$

Weiter: da  $A$  beschränkt ist, gibt es eine abgeschlossene Kugel  $B$  mit  $A \subseteq B$ . Wie wir oben gesehen haben, gibt es dann eine offene Menge  $G'$  so, dass

$$B \setminus A \subseteq G' \quad \text{und} \quad \lambda_d(G') \leq \lambda_d(B \setminus A) + \varepsilon/2.$$

Dann ist die Menge  $F := B \setminus G'$  kompakt,  $F \subseteq A$ , und

$$\begin{aligned}\lambda_d(F) &= \lambda_d(B \setminus G') \geq \lambda_d(B) - \lambda_d(G') \\ &\geq \lambda_d(B) - \lambda_d(B) + \lambda_d(A) - \varepsilon/2 = \lambda_d(A) - \varepsilon/2.\end{aligned}$$

Wegen

$$\lambda_d(G \setminus F) = \lambda_d(G \setminus A) + \lambda_d(A \setminus F) \leq \varepsilon$$

haben wir die gewünschten Mengen gefunden.

Sei nun  $A$  unbeschränkt. Wir bezeichnen mit  $B_j$  die abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius  $j$  und definieren

$$A_1 := A \cap B_1 \quad \text{und} \quad A_j := A \cap (B_j \setminus B_{j-1}) \quad \text{für } j \geq 2.$$

Die Mengen  $A_j$  sind beschränkt und paarweise disjunkt, und es ist  $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach dem oben Bewiesenen gibt es für jedes  $j \in \mathbb{N}$  kompakte Mengen  $F_j$  und offene Mengen  $G_j$  mit  $F_j \subseteq A_j \subseteq G_j$  und  $\lambda_d(G_j \setminus F_j) \leq \varepsilon/2^j$ . Wir setzen

$$G := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_j \quad \text{und} \quad F := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j.$$

Dann ist  $G$  offen (klar) und  $F$  abgeschlossen (jede kompakte Menge schneidet nur endlich viele der  $F_j$ ), und es ist

$$\lambda_d(G \setminus F) \leq \sum_{j \geq 1} \lambda_d(G_j \setminus F_j) \leq \sum_{j \geq 1} \varepsilon/2^j = \varepsilon$$

da ja  $G \setminus F \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (G_j \setminus F_j)$ . □

**Satz 3.21.** (a) *Der Lebesguesche Maßraum  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$  ist die Vervollständigung von  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ .*

(b) *Für jedes  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  gibt es eine  $F_\sigma$ -Menge  $F$  und eine  $G_\delta$ -Menge  $G$  mit*

$$F \subseteq A \subseteq G \quad \text{und} \quad \lambda_d(F) = \lambda_d(A) = \lambda_d(G).$$

(c) *Für jedes  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  ist*

$$\begin{aligned}\lambda_d(A) &= \inf\{\lambda_d(G) : G \text{ offen, } A \subseteq G\} \\ &= \sup\{\lambda_d(K) : K \text{ kompakt, } K \subseteq A\}.\end{aligned}$$

*Beweis.* Wir beginnen mit Aussage (b). Nach Satz 3.20 gibt es für jedes  $k \in \mathbb{N}$  offene Mengen  $G_k$  und abgeschlossene Mengen  $F_k$  mit

$$F_k \subseteq F_{k+1} \subseteq A \subseteq G_{k+1} \subseteq G_k \quad \text{und} \quad \lambda_d(G_k \setminus F_k) \leq 1/k.$$

Die Mengen  $G := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_k$  und  $F := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$  haben die gewünschten Eigenschaften. Aussage (a) folgt hieraus leicht: Es ist ja  $F$  eine Borelmenge und  $A \setminus F$  eine Menge vom Maß 0. Also liegt jede Menge  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  in der Vervollständigung von  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ . Schließlich folgt (c) unmittelbar aus Satz 3.20. □

**Satz 3.22.** Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn sie als  $A = F \cup N$  mit einer Lebesgueschen Nullmenge  $N$  und einer abzählbaren Vereinigung kompakter Mengen  $F$  geschrieben werden kann.

*Beweis.* Haben  $F$  und  $N$  die angegebenen Eigenschaften, dann ist  $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ , also  $A = F \cup N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ .

Sei umgekehrt  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ . Wir schreiben  $A$  als abzählbare Vereinigung  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  beschränkter Mengen  $A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  (z.B. kann  $A_k$  als Schnitt von  $A$  mit einer Kugel um 0 vom Radius  $k$  gewählt werden). Dann ist  $\lambda_d(A_k) < \infty$ , und nach Satz 3.21 (b) gibt es  $F_\sigma$ -Mengen  $F_k$  mit  $F_k \subseteq A_k$  und  $\lambda_d(F_k) = \lambda_d(A_k)$ . Die  $F_k$  sind also abzählbare Vereinigungen abgeschlossener Mengen, die wegen der Beschränktheit sogar kompakt sind. Dann ist aber auch  $F := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$  eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.

Die Mengen  $N_k := A_k \setminus F_k$  haben wegen  $\lambda_d(F_k) = \lambda_d(A_k)$  das Lebesgue-Maß 0. Dann ist aber auch  $N := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$  eine Lebesguesche Nullmenge. Aus

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (F_k \cup N_k) = \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \right) \cup \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \right) = F \cup N$$

folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz stellt eine enge Beziehung her zwischen Borel-Messbarkeit und Stetigkeit.

**Satz 3.23** (Luzin). Die Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbar, und  $H \subseteq \mathbb{R}^d$  habe ein endliches Lebesgue-Maß. Dann gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine abgeschlossene Menge  $F \subseteq H$  mit

$$\lambda_d(H \setminus F) < \varepsilon \quad \text{und} \quad f : F \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig.}$$

*Beweis.*  $\diamond$  Wir behandeln zunächst den Fall, dass  $f$  eine Stufenfunktion ist; sei also

$$f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j}$$

mit paarweise disjunkten Mengen  $A_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  so, dass  $\bigcup_{j=1}^k A_j = \mathbb{R}^d$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  finden wir mit Satz 3.21 (c) abgeschlossene Mengen  $F_j$  mit  $F_j \subseteq A_j \cap H$  und  $\lambda_d((A_j \cap H) \setminus F_j) < \varepsilon/k$ . Dann ist  $F := \bigcup_{j=1}^k F_j$  abgeschlossen,

$$\begin{aligned} \lambda_d(H \setminus F) &= \lambda_d\left(\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A_j \cap H)\right) \setminus F\right) = \lambda_d\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} ((A_j \cap H) \setminus F)\right) \\ &= \sum_{j \geq 1} \lambda_n((A_j \cap H) \setminus F_j) < \varepsilon, \end{aligned}$$

und  $f$  ist stetig auf  $F$ , da  $f$  auf jeder der paarweise disjunkten Mengen  $F_j$  konstant ist.

Sei nun  $f$  eine beschränkte  $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Funktion. Nach Satz 2.4 kann  $f$  gleichmäßig durch eine Folge von Stufenfunktionen  $f_k$  approximiert werden (in Satz 2.4 ist  $f \geq 0$ ; durch Addition einer geeigneten Konstanten können wir den allgemeinen Fall darauf zurückführen).

Wir wenden das bereits Bewiesene auf jede der Funktionen  $f_k$  an. Genauer: zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  sei  $F_1 \subseteq H$  eine abgeschlossene Menge so, dass  $f_1 : F_1 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\lambda_d(H \setminus F_1) < \varepsilon/2$  ist. Ist  $F_k$  bereits definiert, so sei  $F_{k+1} \subseteq F_k$  eine abgeschlossene Menge so, dass  $f_{k+1} : F_{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\lambda_d(F_k \setminus F_{k+1}) < \varepsilon/2^{k+1}$  ist. Die Menge  $F := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k$  ist dann ebenfalls abgeschlossen, und es ist  $\lambda_d(H \setminus F) < \varepsilon$ . Außerdem ist jede der Funktionen  $f_k$  auf  $F$  stetig. Da die  $f_k$  auf  $F$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren, ist auch  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Schließlich sei noch  $f$  eine beliebige  $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Funktion. Die Mengen  $H_k := \{x \in X : |f(x)| \leq k\}$  bilden eine wachsende Folge mit  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k = H$ . Nach Lemma 1.34 (c) gilt dann  $\lambda_d(H_k) \rightarrow \lambda_d(H)$  für  $k \rightarrow \infty$ , und da  $\lambda_d(H)$  endlich ist, folgt  $\lambda_d(H \setminus H_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es somit ein  $H_k$  mit  $\lambda_d(H \setminus H_k) < \varepsilon/2$ . Auf  $H_k$  ist  $f$  beschränkt. Nach oben Bewiesenem gibt es daher eine abgeschlossene Menge  $F \subseteq H_k$  mit  $\lambda_d(H_k \setminus F) < \varepsilon/2$  und so, dass  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist. Wegen  $\lambda_d(H \setminus F) < \varepsilon$  ist dies die gesuchte Menge.  $\square$

### 3.7 Nicht Lebesgue-messbare Mengen $^\diamond$

Die Vitali-Menge aus Abschnitt 1.1 ist nicht Lebesgue-messbar; es *gibt* also nicht Lebesgue-messbare Mengen. In diesem Zusammenhang ist der folgende Satz bemerkenswert.

**Satz 3.24.** *Sei  $H \subseteq \mathbb{R}^d$ . Dann ist  $\mathcal{P}(H) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  genau dann, wenn  $\lambda_d(H) = 0$ .*

*Beweis.* Sei  $\lambda_d(H) = 0$ . Dann sind alle Teilmengen von  $H$  auch  $\lambda_d$ -Nullmengen. Da der Lebesguesche Maßraum vollständig ist, ist jede  $\lambda_d$ -Nullmenge auch Lebesgue-messbar.

Wir zeigen die umgekehrte Implikation. Dazu definieren wir auf  $\mathbb{R}^d$  eine Äquivalenzrelation durch  $x \sim y$  genau dann, wenn  $x - y \in \mathbb{Q}^d$ . Sei  $A$  eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält (Auswahlaxiom!). Dann ist

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}^d} (A + p) \quad \text{und} \quad H = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}^d} (H \cap (A + p)).$$

Für ein festes  $p \in \mathbb{Q}^d$  sei  $K \subseteq H \cap (A + p)$  eine kompakte Menge. Diese ist beschränkt, also in einer Kugel  $B_R$  um 0 vom Radius  $R > 0$  enthalten, und wegen  $K \subseteq A + p$  sind die Mengen  $K + q$  mit  $q \in \mathbb{Q}^d$  paarweise disjunkt. Daher ist

$$\lambda_d(B_{R+1}) \geq \lambda_d\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d, |q| < 1} (K + q)\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d, |q| < 1} \lambda_d(K + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d, |q| < 1} \lambda_d(K).$$

Da  $\lambda_d(B_{R+1})$  endlich ist (später rechnen wir dieses Volumen auch aus), folgt  $\lambda_d(K) = 0$ . Nach Satz 3.21 (c) ist dann  $\lambda_d(H \cap (A + p)) = 0$  und somit  $\lambda_d(H) = 0$ .  $\square$

Man kann explizite Beispiele dafür angeben, dass nicht alle Lebesgue-messbaren Mengen Borelsch sind.

### 3.8 Lebesgue- und Regelintegral

Wir vergleichen in diesem Abschnitt das Regelintegral über Intervallen in  $\mathbb{R}$  mit dem Lebesgue-Integral.<sup>1</sup> Dabei legen wir den *vervollständigten* Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda_1)$  zu Grunde, betrachten also messbare Funktionen

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda_1) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})).$$

Die Resultate hängen davon ab, ob die Intervalle beschränkt oder unbeschränkt sind. Statt  $\lambda_1$  schreiben wir im weiteren kurz  $\lambda$ .

**Satz 3.25.** *Sei  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  ein beschränktes Intervall. Dann ist jede sprungstetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auch Lebesgue-integrierbar, und es ist*

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

*Beweis.* Da  $f$  sprungstetig ist, gibt es eine Folge von Treppenfunktionen  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $f$  konvergiert. Da Treppenfunktionen aus der Analysis I insbesondere Stufenfunktionen in unserem Sinne sind, sind alle  $\psi_n$  messbar und damit auch  $f$  als Grenzwert messbarer Funktionen messbar. Weiter ist  $f$  beschränkt und  $\lambda([a, b]) < \infty$ , also gilt  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$  nach Lemma 2.10 (a).

Dank der gleichmäßigen Konvergenz von  $(\psi_n)$  gibt es weiter ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|\psi_n(x) - f(x)| < 1$  für alle  $x \in [a, b]$ . Das liefert

$$|\psi_n(x)| \leq |f(x)| + 1 \quad \text{für alle } x \in [a, b] \text{ und alle } n \geq n_0. \quad (3.7)$$

Nach Satz 2.14 ist  $|f|$  Lebesgue-integrierbar über  $[a, b]$  und mit Hilfe von Satz 2.17 gilt das selbe auch für  $|f| + 1$ . Damit gibt uns (3.7) genau die Majorante, die wir jetzt für die Anwendung des Satzes von Lebesgue brauchen:

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b]} \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \psi_n d\lambda.$$

---

<sup>1</sup>Wenn Sie in Analysis I das Riemann-Integral kennengelernt haben, lesen Sie beruhigt weiter. Der gesamte Abschnitt gilt genauso auch für das Riemann-Integral und man kann sogar die Beweise fast komplett identisch führen.

Auf den Stufenfunktionen sind Regel- und Lebesgue-Integral identisch definiert. Also ergibt sich nach der Definition des Regelintegrals

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

und wir sind fertig.  $\square$

Die Klasse der Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist aber wesentlich größer als die der sprungstetigen, d.h. regelintegrierbaren Funktionen. Ein einfaches Beispiel ist die charakteristische Funktion  $\chi_{\mathbb{Q}}$  der Menge der rationalen Zahlen, die nicht sprungstetig aber Lebesgue-integrierbar ist (beachte: Mengen, die nur aus einem Punkt bestehen, sind Borelmengen vom Maß 0, und  $\mathbb{Q}$  ist eine abzählbare Vereinigung solcher Mengen). Es folgt ein Beispiel einer Lebesgue-integrierbaren Funktion, die sich im Gegensatz zu  $\chi_{\mathbb{Q}}$  nicht einmal durch Abändern auf einer Nullmenge zu einer sprungstetigen Funktion machen lässt.

**Beispiel 3.26.** Die Menge  $Q := \mathbb{Q} \cap (0, 1)$  ist abzählbar; wir schreiben sie als  $Q = \{q_n : n \geq 1\}$ . Für vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  und jedes  $n$  sei  $U_n \subseteq (0, 1)$  ein offenes Intervall einer Länge  $\leq \varepsilon/2^n$ , das  $q_n$  enthält. Dann ist

$$Q \subseteq U := \bigcup_{n \geq 1} U_n \subseteq (0, 1) \quad \text{und} \quad \lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon.$$

Seien  $f := \chi_U$  und  $f_n := \chi_{U_1 \cup \dots \cup U_n}$ . Die Funktionen  $f_n$  sind sprungstetig, es gilt

$$\int_{[0,1]} f_n d\lambda = \int_0^1 f_n(x) dx \leq \varepsilon,$$

und die Folge  $(f_n)$  ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen  $f$ . Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist  $f$  Lebesgue-integrierbar, und es ist

$$\int_{[0,1]} f d\lambda \leq \varepsilon.$$

Zeigen Sie als Übung, dass  $f$  die behauptete Eigenschaft hat.

Bei uneigentlichen Integralen, die nicht absolut konvergieren, ist die Situation subtiler. Da die Lebesgue-Integrierbarkeit die absolute Konvergenz des Integrals voraussetzt, können uneigentliche Regelintegrale existieren, die man nicht als Lebesgue-Integrale interpretieren kann. Bevor wir ein Beispiel geben, fassen wir diesen Zusammenhang präziser. Dazu benötigen wir folgenden Satz.

**Satz 3.27** (Ausschöpfungssatz). *Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum, und sei  $(M_n)$  eine wachsende Folge messbarer Teilmengen von  $X$ ,  $M := \bigcup_{n \geq 1} M_n$  und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  genau dann in  $\mathcal{L}^1(\mu, M)$ , wenn  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, M_n)$  für jedes  $n$  und wenn*



die Folge der Integrale  $\int_{M_n} |f| d\mu$  (gegen eine endliche Zahl) konvergiert. Ist dies der Fall, so ist

$$\int_M f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{M_n} f d\mu.$$

*Beweis.* Aus  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, M)$  folgt  $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu, M)$  (Satz 2.14) und damit  $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu, M_n)$ , und es gilt  $\int_{M_n} |f| d\mu \leq \int_M |f| d\mu$ .

Der interessante Teil des Beweises betrifft die Umkehrung dieser Aussage. Zunächst konvergiert die monoton wachsende Folge  $(\chi_{M_n}|f|)$  punktweise gegen  $\chi_M|f|$ , so dass  $\chi_M|f| \in \mathcal{L}^1(\mu, M)$  nach dem Satz über die monotone Konvergenz. Weiter ist  $|\chi_{M_n}f| \leq \chi_M|f|$ , und die Funktionen  $\chi_{M_n}f$  konvergieren punktweise gegen  $\chi_Mf$ , so dass wir mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, M)$  sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{M_n} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \chi_{M_n}f d\mu = \int_X \chi_Mf d\mu = \int_M f d\mu$$

erhalten. □

**Folgerung 3.28.** Seien  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  mit  $a < b$ . Ist  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sprungetetig auf jedem kompakten Teilintervall von  $(a, b)$ , so ist  $f$  genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das uneigentliche Regelintegral  $\int_a^b |f(x)| dx$  konvergiert. Ist dies der Fall, so gilt

$$\int_{(a,b)} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

*Beweis.* Wir wählen eine monoton fallende Folge  $(x_n)$  mit  $a < x_n < b$  und  $x_n \rightarrow a$  und eine monoton wachsende Folge  $(y_n)$  mit  $x_n < y_n < b$  und  $y_n \rightarrow b$ , und wir setzen  $M_n := [x_n, y_n]$ . Dann ist  $M := \bigcup_{n \geq 1} M_n = (a, b)$ . Nach dem Ausschöpfungssatz ist  $f$  genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{M_n} |f| d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_n}^{y_n} |f(x)| dx$$

endlich ist und in diesem Fall liefert dieser auch die Gleichheit mit dem Regelintegral. □

**Beispiel 3.29.** Auf  $[1, \infty)$  sei  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Wir wissen aus Ana I, Beispiel 33.8 dass das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  konvergiert. Dieses Integral konvergiert aber nicht absolut, denn für  $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$  ist  $|f(x)| \geq \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}$  und folglich

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)| dx &\geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} |\sin x| dx \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{(k+1)\pi}. \end{aligned}$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe konvergiert  $\int_1^\infty |f(x)| dx$  nicht, und nach Folgerung 3.28 ist  $f$  nicht Lebesgue-integrierbar auf  $[1, \infty)$ .

**Beispiel 3.30.** Wir betrachten eine Funktionenfolge, auf die sich der Satz von der majorisierten Konvergenz *nicht* anwenden lässt: der „gleitende Buckel“. Dazu sei  $(X, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$  und  $f_n := \chi_{[n, n+1]}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Die Funktionen  $f_n$  konvergieren punktweise gegen  $f \equiv 0$ , aber

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1.$$

## 4 Satz von Fubini und Transformationsformel

Nachdem wir uns in den ersten Kapiteln mit recht abstrakten Konstruktionen beschäftigt haben, wenden wir uns nun der Berechnung konkreter Lebesgue-Integrale zu. Mit dem Satz von Fubini lernen wir ein Werkzeug kennen, das es erlaubt, Integrale über  $\mathbb{R}^d$  auf Integrale über  $\mathbb{R}$  zurückzuführen. Dann sehen wir uns das mehrdimensionale Analogon der Substitutionsregel – die Transformationsformel – an. In der Praxis ist die Transformationsformel oft nicht unmittelbar benutzbar, da die Transformationen Singularitäten aufweisen können (z.B. bei Polarkoordinaten). Andererseits liegen diese Singularitäten oft in Nullmengen und beeinflussen daher das Ergebnis einer Integration nicht. Wir diskutieren daher im dritten Abschnitt Methoden zum Nachweis, dass eine Menge eine Nullmenge ist. Schließlich ist der vierte Abschnitt einigen konkreten Beispielen gewidmet.

### 4.1 Das Prinzip von Cavalieri und der Satz von Fubini

Der Satz von Fubini, dessen einfachste Versionen wir schon in der Analysis II kennen gelernt haben, lässt sich allgemein für sogenannte *Produktmaße* formulieren und beweisen. Wir beschränken uns auf den einfacheren Kontext von Borelmengen. Messbarkeit einer Funktion  $f : \mathbb{R}^{d+m} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  bedeutet daher in diesem Abschnitt stets Messbarkeit bezüglich der  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+m})$  bzw.  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ .

Wir zeigen den Satz von Fubini als eine Folgerung des Prinzips von Cavalieri. Dieses besagt, dass man das Volumen einer messbaren Teilmenge  $M$  des  $\mathbb{R}^d$  berechnen kann, indem man (anschaulich gesprochen)  $M$  in unendlich dünne Schichten niedrigerer Dimension zerschneidet und die Volumina der Schichten aufintegriert („Salami-Taktik“).

**Satz 4.1** (Prinzip von Cavalieri). *Für jede Borelmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$  gilt:*

(a) *Für jedes  $y \in \mathbb{R}^m$  ist*

$$M_y := \{x \in \mathbb{R}^d : (x, y) \in M\} \quad (4.1)$$

*eine Borelmenge von  $\mathbb{R}^d$ .*

(b) *Die Funktion  $h_M : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ ,  $h_M(y) := \lambda_d(M_y)$  ist messbar.*

(c) *Das Lebesgue-Maß von  $M$  kann wie folgt berechnet werden:*

$$\lambda_{d+m}(M) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_d(M_y) d\lambda_m(y). \quad (4.2)$$

*Beweis.* (a) Da die Inklusionsabbildung  $j_y : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ ,  $j_y(x) := (x, y)$  stetig und somit messbar ist, ist  $M_y = (j_y)^{-1}(M)$  messbar als Urbild einer messbaren Menge.

(b) Mit  $M_k := M \cap [-k, k]^{d+m} \subseteq \mathbb{R}^{d+m}$  gilt  $M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$ . Damit folgt

$$h_M(y) = \lambda_d(M_y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_d(M_{k,y}) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{M_k}(y).$$

Können wir zeigen, dass jede der Funktionen  $h_{M_k}$  messbar ist, so ist nach Satz 1.31 auch  $h_M$  messbar. Wir dürfen daher o.B.d.A. annehmen, dass

$$M \subseteq [-k, k]^{d+m} =: Q \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Wenn wir zeigen können, dass das Mengensystem

$$\mathcal{D} := \{N \in \mathcal{B}(Q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+m})|_Q : h_N \text{ ist messbar}\}.$$

gleich  $\mathcal{B}(Q)$  ist, so ist  $M \in \mathcal{D}$  und somit gilt die Behauptung.

Da  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+m})$  nach Lemma 1.11 von der Menge  $\mathcal{R}$  aller halboffenen Intervalle in  $\mathbb{R}^{d+m}$  erzeugt wird, wird  $\mathcal{B}(Q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)|_Q$  nach Folgerung 1.14 von  $\mathcal{F} := \{Q \cap A : A \in \mathcal{R}\}$  erzeugt, was die Menge aller in  $Q$  enthaltenen halboffenen Intervalle ist. Um  $\mathcal{D} = \mathcal{B}(Q)$  nachzuweisen, ist also nur zu zeigen, dass  $\mathcal{D}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Q$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$  ist. Ferner ist  $\mathcal{F}$  offensichtlich durchschnittsstabil. Also genügt es nach Satz 1.20 sogar lediglich nachzuweisen, dass  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System auf  $Q$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$  ist. Diese Argumentation unterteilen wir in ein paar Schritte.

**1. Schritt:  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ .** Jedes halboffene Intervall  $I \subseteq Q$  ist von der Gestalt  $I = A \times B$  für gewisse halboffene Intervalle  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $B \subseteq \mathbb{R}^m$ . Dann ist  $I_y = A$  falls  $y \in B$ ,  $I_y = \emptyset$  falls  $y \in \mathbb{R}^m \setminus B$  und somit

$$h_I(y) = \lambda_n(A) \cdot \chi_B(y) \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^m. \quad (4.3)$$

Folglich ist  $h_I : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und somit  $I \in \mathcal{D}$ .

**2. Schritt: Eigenschaft (a) eines Dynkin-Systems.** Es ist  $h_\emptyset = 0$  als konstante Funktion messbar und somit  $\emptyset \in \mathcal{D}$ .

**3. Schritt: Eigenschaft (b) eines Dynkin-Systems.** Ist  $A \in \mathcal{D}$ , so ist  $h_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  messbar. Für  $y \in \mathbb{R}^m$  gilt  $(Q \setminus A)_y = Q_y \setminus A_y$ , wobei  $Q_y = [-k, k]^n$  falls  $y \in [-k, k]^m$  und  $Q_y = \emptyset$  sonst. Folglich ist

$$h_{Q \setminus A}(y) = \lambda_d(Q_y \setminus A_y) = \lambda_d(Q_y) - \lambda_d(A_y) = (2k)^d \chi_{[-k, k]^m}(y) - h_A(y).$$

Also ist  $h_{Q \setminus A} = (2k)^d \chi_{[-k, k]^m} - h_A$  messbar und damit  $Q \setminus A \in \mathcal{D}$ .

**4. Schritt: Eigenschaft (c) eines Dynkin-Systems.** Ist  $(A_j)_{j \geq 1}$  eine Folge paarweise disjunkter Mengen  $A_j \in \mathcal{D}$  und  $A := \bigcup_{j \geq 1} A_j$ , so sind

für jedes  $y \in \mathbb{R}^m$  die Mengen  $(A_j)_y$  paarweise disjunkt, und es ist  $A_y = \bigcup_{j \geq 1} (A_j)_y$ . Daher ist

$$h_A(y) = \lambda_d(A_y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d((A_j)_y) = \sum_{j=1}^{\infty} h_{A_j}(y). \quad (4.4)$$

Nach Satz 1.31 ist  $h_A$  messbar und somit  $A \in \mathcal{D}$ .

(c) Als Konsequenz von (b) definiert die rechte Seite von (4.2) eine Funktion

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+m}) \rightarrow [0, \infty], \quad \mu(M) := \int_{\mathbb{R}^m} h_M d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_d(M_y) d\lambda_m(y).$$

Diese Funktion ist ein Maß. Wegen  $h_\emptyset = 0$  ist nämlich  $\mu(\emptyset) = 0$ . Weiter: ist  $(A_j)_{j \geq 1}$  eine Folge paarweise disjunkter Mengen  $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+m})$  und  $A := \bigcup_{j \geq 1} A_j$ , so erhält man wie in (4.4), dass  $h_A = \sum_{j=1}^{\infty} h_{A_j}$  und somit

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^{\infty} h_{A_j} d\lambda_m = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} h_{A_j} d\lambda_m = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Wir zeigen noch, dass  $\mu$  mit dem Lebesgue-Maß zusammenfällt. Für jedes halboffene Intervall  $I = A \times B$  mit  $A = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $B = [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}^m$  erhalten wir mit (4.3):

$$\begin{aligned} \mu(I) &= \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_d(A) \chi_B(y) d\lambda_m(y) = \lambda_d(A) \lambda_m(B) \\ &= \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \cdot \prod_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) = \lambda_{d+m}(I). \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 3.15 liefert  $\mu = \lambda_{d+m}$ .  $\square$

Mit dem Prinzip von Cavalieri können wir überprüfen, ob unsere naive Vorstellung aus der Analysis I gerechtfertigt ist, dass das Integral einer nichtnegativen Funktion die Fläche unter dem Funktionsgraphen beschreibt.

**Folgerung 4.2.** Für jede messbare Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$  ist die Menge

$$M^f := \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{d+1} : 0 \leq t < f(x)\}$$

messbar und hat das Maß

$$\lambda_{d+1}(M^f) = \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d.$$

*Beweis.* Die Projektionen  $\pi_1 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $(x, t) \mapsto x$  und  $\pi_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto t$  sind stetig und somit messbar. Folglich ist  $g := f \circ \pi_1 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x)$  messbar. Nach Satz 1.27 ist  $H := g - \pi_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto f(x) - t$  messbar; es ist also

$$\begin{aligned} M^f &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : t \geq 0 \text{ und } f(x) - t > 0\} \\ &= \pi_2^{-1}([0, \infty)) \cap H^{-1}((0, \infty)) \end{aligned}$$

eine messbare Menge. Für  $x \in \mathbb{R}^d$  ist

$$M_x^f := \{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in M^f\} = [0, f(x))$$

und daher  $\lambda_1(M_x^f) = f(x)$ . Mit Satz 4.1 (wobei nun die Rollen von  $x$  und  $y$  vertauscht sind) folgt

$$\lambda_{d+1}(M^f) = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_1(M_x^f) d\lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_d(x). \quad \square$$

**Beispiel 4.3** (Volumen der Einheitskugel). Als eine Anwendung wollen wir das Volumen  $c_d := \lambda_d(K_d)$  der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel  $K_d := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq 1\}$  berechnen. Offenbar ist  $c_1 = \lambda_1([-1, 1]) = 2$ , und vom Schulwissen ausgehend erwarten wir, dass  $c_2 = \pi$ . Wir gehen nach dem Cavalierischen Prinzip vor und zerschneiden für  $d > 1$  die Kugel  $K_d$  in die Scheiben

$$\begin{aligned} K_{d,s} &= \{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : (x', s) \in K_d\} \\ &= \{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : \|x'\|_2 \leq \sqrt{1 - s^2}\} = \sqrt{1 - s^2} K_{d-1} \end{aligned}$$

für  $s \in [-1, 1]$  und  $B_{d,s} = \emptyset$  sonst. Mit Folgerung 3.19 und Satz 4.1 erhalten wir

$$c_d = \int_{-1}^1 \lambda_{d-1}(K_{d,s}) ds = \int_{-1}^1 (1 - s^2)^{\frac{d-1}{2}} c_{d-1} ds = c_{d-1} \int_{-1}^1 (1 - s^2)^{\frac{d-1}{2}} ds.$$

Definieren wir für  $d \geq 1$

$$I_d := \int_{-1}^1 (1 - s^2)^{\frac{d-1}{2}} ds,$$

so gilt also

$$c_d = c_{d-1} I_d \quad \text{für } d \geq 2,$$

und wir können die  $c_d$  mit Hilfe der Integrale  $I_d$  rekursiv berechnen. Man beachte, dass  $c_1 = I_1 = 2$ . Mit der Substitution  $s(t) = \sin t$ ,  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ , folgt

$$I_d = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^{\frac{d-1}{2}} \cos t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^d dt.$$

Diese Integrale berechnen wir rekursiv mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
 I_d &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^{d-1} \cdot \cos t \, dt \\
 &= (\sin t)(\cos t)^{d-1} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin t)(d-1)(\cos t)^{d-2}(-\sin t) \, dt \\
 &= (d-1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos^2 t)(\cos t)^{d-2} \, dt = (d-1)I_{d-2} - (d-1)I_d.
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für  $d > 1$  die Rekursionsformel  $I_d = \frac{d-1}{d} I_{d-2}$ , und mit den bereits ermittelten Werten  $I_0 = \pi$  und  $I_1 = 2$  finden wir

$$I_{2d} = \frac{(2d-1)(2d-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{(2d)(2d-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \pi$$

und

$$I_{2d+1} = \frac{(2d)(2d-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2d+1)(2d-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3} \cdot 2.$$

Hieraus ergibt sich

$$I_{2d+1}I_{2d} = \frac{2\pi}{2d+1} \quad \text{und} \quad I_{2d}I_{2d-1} = \frac{\pi}{d},$$

woraus wir mit der Rekursionsbeziehung  $c_d = c_{d-1} I_d$

$$\begin{aligned}
 c_{2d} &= I_{2d}c_{2d-1} = I_{2d}I_{2d-1}c_{2d-2} = \frac{\pi}{d} c_{2d-2} = \frac{\pi^{d-1}}{d(d-1) \cdot \dots \cdot 2} c_2 \\
 &= \frac{\pi^{d-1}}{d!} I_2 c_1 = \frac{\pi^{d-1}}{d!} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \frac{\pi^d}{d!}
 \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
 c_{2d+1} &= I_{2d+1}I_{2d}c_{2d-1} = \frac{2\pi}{2d+1} c_{2d-1} \\
 &= \frac{(2\pi)^d}{(2d+1)(2d-1) \cdot \dots \cdot 3} c_1 = \frac{2^{d+1}\pi^d}{(2d+1)(2d-1) \cdot \dots \cdot 3}
 \end{aligned}$$

erhalten. Insbesondere ist (wie erwartet) tatsächlich  $c_2 = \pi$  und  $c_3 = \frac{4}{3}\pi$ . Mit Hilfe der *Gammfunktion*

$$\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

kann man die Formel für die Volumina  $c_d$  einheitlich als

$$c_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \tag{4.5}$$

schreiben. Dazu benutzt man die Rekursionsformel  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  für  $x > 0$  (vgl. Analysis I, Satz 43.3) und die Identität  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , die wir in Beispiel 4.19 beweisen werden. Mit diesen Hinweisen sollten Sie (4.5) leicht bestätigen können.

Bevor wir den Satz von Fubini formulieren und beweisen, klären wir noch, wann ein „Kästchen“ in  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$  Borelsch ist.

**Lemma 4.4.** *Für nichtleere Teilmengen  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$  sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- (a)  $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  und  $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ ,
- (b)  $X \times Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$ .

*Beweis.* (a)  $\Rightarrow$  (b): Seien  $X, Y$  Borelsch. Da die Projektion  $\pi_1 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $(x, y) \mapsto x$  stetig und somit messbar ist, folgt

$$X \times \mathbb{R}^m = \pi_1^{-1}(X) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m).$$

Analog folgt  $\mathbb{R}^d \times Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m)$ . Also ist

$$X \times Y = (X \times \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^d \times Y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m).$$

(b)  $\Rightarrow$  (a): Sei nun  $X \times Y$  Borelsch. Wir wählen ein  $x \in X$ . Da die Inklusion  $i_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ ,  $y \mapsto (x, y)$  stetig und somit messbar ist, folgt

$$Y = i_x^{-1}(X \times Y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m).$$

Analog sehen wir, dass  $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . □

**Satz 4.5** (Satz von Fubini für nicht-negative Funktionen, Satz von Tonelli). *Seien  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$  Borelmengen und  $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Dann gilt:*

- (a) *Für jedes  $y \in Y$  ist die Funktion*

$$f_y := f(\cdot, y) : X \rightarrow [0, \infty], \quad x \mapsto f(x, y)$$

*messbar, und für jedes  $x \in X$  ist  $x_f := f(x, \cdot) : Y \rightarrow [0, \infty]$  messbar.*

- (b) *Die Funktionen*

$$F : Y \rightarrow [0, \infty], \quad F(y) := \int_X f_y d\lambda_d,$$

$$G : X \rightarrow [0, \infty], \quad G(x) := \int_Y x_f d\lambda_m$$

*sind messbar, und es gilt*

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d\lambda_{d+m} &= \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\lambda_d(x) \right) d\lambda_m(y) \\ &= \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\lambda_m(y) \right) d\lambda_d(x). \end{aligned} \tag{4.6}$$



*Beweis.* Nach Lemma 4.4 ist  $X \times Y$  eine Borelmenge. Wenn wir  $f$  außerhalb von  $X \times Y$  durch 0 fortsetzen, erhalten wir eine messbare Funktion. Da deren Integrale und die von  $f$  sich nicht unterscheiden, dürfen wir o.B.d.A.  $X = \mathbb{R}^d$  und  $Y = \mathbb{R}^m$  annehmen. Dem Beweisprinzip der Integrationstheorie folgend beweisen wir die Behauptungen für Funktionen zunehmender Allgemeinheit.

**1. Schritt: Charakteristische Funktionen.** Sei  $M \in \mathcal{B}(X \times Y)$  und  $f = \chi_M$ . Dann gilt  $f_y(x) = (\chi_M)_y(x) = \chi_{M_y}(x)$  mit  $M_y$  wie in (4.1). Nach Satz 4.1 (a) ist  $f_y$  messbar. Wegen  $\int_{\mathbb{R}^d} f_y d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{M_y} d\lambda_d = \lambda_d(M_y)$  folgt mit Satz 4.1 (b) die Messbarkeit von  $F : y \mapsto \int_X f_y d\lambda_d$  und mit Satz 4.1 (c)

$$\int_{\mathbb{R}^{d+m}} f d\lambda_{d+m} = \lambda_{d+m}(M) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_d(M_y) d\lambda_m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^d} f_y d\lambda_d(x) d\lambda_m(y).$$

**2. Schritt: Nicht-negative Stufenfunktionen.** Ist  $f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$  eine nicht-negative Stufenfunktion, so ist  $f_y = \sum_{j=1}^k \alpha_j (\chi_{A_j})_y$  messbar. Somit ist

$$F : Y \rightarrow [0, \infty], \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f_y d\lambda_d = \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{\mathbb{R}^d} (\chi_{A_j})_y d\lambda_d$$

messbar und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d+m}} f d\lambda_{d+m} &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{\mathbb{R}^{d+m}} \chi_{A_j} d\lambda_{d+m} \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{A_j}(x, y) d\lambda_d(x) d\lambda_m(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}(x, y) d\lambda_d(x) d\lambda_m(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) d\lambda_d(x) d\lambda_m(y). \end{aligned}$$

**3. Schritt: Nicht-negative messbare Funktionen.** Ist  $f$  beliebig messbar und nicht-negativ, so finden wir mit Satz 2.4 eine monoton wachsende Folge  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nicht-negativer Stufenfunktionen  $s_k : \mathbb{R}^{d+m} \rightarrow [0, \infty)$  mit  $s_k \rightarrow f$  punktweise. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist dann

$$\int_{\mathbb{R}^{d+m}} f d\lambda_{d+m} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{d+m}} s_k d\lambda_{d+m}. \quad (4.7)$$

Für jedes  $y \in Y$  ist andererseits  $((s_k)_y)_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen mit punktwisem Grenzwert  $f_y = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k)_y$ . Also ist  $f_y$

messbar und nach dem Satz über monotone Konvergenz ist

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_y d\lambda_d = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} (s_k)_y d\lambda_d.$$

Da jede der Funktionen  $F_k : Y \rightarrow [0, \infty]$ ,  $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} (s_k)_y d\lambda_d$  messbar ist, ist auch der punktweise Grenzwert  $F : Y \rightarrow [0, \infty]$ ,  $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f_y d\lambda_d$  messbar. Da die Funktionenfolge  $F_k$  monoton wachsend in  $k$  ist, liefert der Satz über monotone Konvergenz:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^d} f_y d\lambda_d d\lambda_m(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^d} (s_k)_y d\lambda_d d\lambda_m(y). \quad (4.8)$$

Wegen

$$\int_{\mathbb{R}^{d+m}} s_k d\lambda_{d+m} = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^d} (s_k)_y d\lambda_d d\lambda_m(y),$$

folgt die erste Hälfte von (4.6) durch Vergleich der rechten Seiten von (4.7) und (4.8). Die zweite Hälfte zeigt man analog.  $\square$

**Satz 4.6** (Satz von Fubini für integrierbare Funktionen). *Seien  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  sowie  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$  Borelmengen und  $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  bzgl.  $\lambda_{d+m}$  über  $X \times Y$  integrierbar. Dann gilt:*

(a) *Die Mengen*

$$\begin{aligned} X_0 &:= \{x \in X : {}_x f \text{ ist bzgl. } \lambda_m \text{ über } Y \text{ integrierbar}\}, \\ Y_0 &:= \{y \in Y : f_y \text{ ist bzgl. } \lambda_d \text{ über } X \text{ integrierbar}\} \end{aligned}$$

*sind Borelsch mit  $\lambda_d(X \setminus X_0) = \lambda_m(Y \setminus Y_0) = 0$ ; es ist also  ${}_x f$  für fast alle  $x \in X$  bzgl.  $\lambda_m$  über  $Y$  und  $f_y$  für fast alle  $y \in Y$  bzgl.  $\lambda_d$  über  $X$  integrierbar.*

(b) *Die Funktionen*

$$F : Y_0 \rightarrow \mathbb{R}, F(y) := \int_X f_y d\lambda_d \quad \text{und} \quad G : X_0 \rightarrow \mathbb{R}, G(x) := \int_Y {}_x f d\lambda_m$$

*sind integrierbar, und es gilt*

$$\int_{X \times Y} f d\lambda_{d+m} = \int_{Y_0} F d\lambda_m = \int_{X_0} G d\lambda_d. \quad (4.9)$$

*Beweis.* Mit dem bereits bewiesenen Satz von Fubini für nicht-negative Funktionen erhalten wir nach Aufspaltung in Positiv- und Negativteil:

$$\int_{X \times Y} f d\lambda_{d+m} = \int_{X \times Y} f_+ d\lambda_{d+m} - \int_{X \times Y} f_- d\lambda_{d+m}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_Y \underbrace{\left( \int_X (f_+)_y d\lambda_d \right)}_{=:g(y)} d\lambda_m(y) - \int_Y \underbrace{\left( \int_X (f_-)_y d\lambda_d \right)}_{=:h(y)} d\lambda_m(y) \\
&= \int_Y g d\lambda_m - \int_Y h d\lambda_m.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Man beachte, dass wir die beiden Integrale in (4.10) nicht ohne weiteres zu einem Integral zusammenfassen dürfen (es könnte ja  $g(y) = h(y) = \infty$  sein, so dass undefinierte Ausdrücke der Form „ $\infty - \infty$ “ auftreten würden). Dies ist jedoch ausgeschlossen, sobald  $y \in Y_0$ . Um von Integralen über  $Y$  zu Integralen über  $Y_0$  übergehen zu können, zeigen wir, dass  $Y \setminus Y_0$  eine Borelmenge vom Maß 0 ist.

Aus der Integrierbarkeit von  $f$  folgt, dass  $\int_Y g d\lambda_m < \infty$  und  $\int_Y h d\lambda_m < \infty$ ; daher sind die Funktionen  $g$  und  $h$  fast überall endlich. Dann ist aber  $g^{-1}(\{\infty\}) \cup h^{-1}(\{\infty\})$  eine Borelmenge vom Maß 0, und diese Menge stimmt offenbar mit  $Y \setminus Y_0$  überein.

Da man Mengen vom Maß 0 beim Integrieren weglassen darf, können wir (4.10) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
\int_{X \times Y} f d\lambda_{d+m} &= \int_{Y_0} g d\lambda_m - \int_{Y_0} h d\lambda_m = \int_{Y_0} (g - h) d\lambda_m \\
&= \int_{Y_0} \left( \int_X f_y d\lambda_d \right) d\lambda_m(y) = \int_{Y_0} F d\lambda_m.
\end{aligned}$$

Die übrigen Aussagen erhält man durch Vertauschen der Rollen von  $x$  und  $y$ .  $\square$

**Bemerkung 4.7.** Setzt man die Funktion  $F$  durch  $F(y) := 0$  für  $y \in Y \setminus Y_0$  zu einer Funktion  $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$  fort,<sup>2</sup> so ist  $F$  messbar, und wir erhalten einfach

$$\int_{X \times Y} f d\lambda_{n+m} = \int_Y F d\lambda_m.$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass  $Y_0$  eine echte Teilmenge von  $Y$  sein kann.

**Beispiel 4.8.** Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y = 0 \text{ und } x \geq 0; \\ -1 & \text{falls } y = 0 \text{ und } x < 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da  $f_y = \chi_{[0, \infty)} - \chi_{(-\infty, 0)}$  für  $y = 0$  mit  $\int_{\mathbb{R}} (f_0)_\pm d\lambda_1 = \infty$ , ist  $\int_{\mathbb{R}} f_0 d\lambda_1$  nicht definiert. Es ist  $Y_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda_2 = \int_{Y_0} \int_{\mathbb{R}} f_y d\lambda_1 d\lambda_1(y) = 0$$

da  $f_y = 0$  für  $y \neq 0$ .

---

<sup>2</sup>Statt durch 0 darf man  $F$  hier beliebig fortsetzen, solange die Fortsetzung nur messbar bleibt.

Die folgende Formulierung des Satzes von Fubini, die meist als Fubini-Tonelli bezeichnet wird, ist im Fall von Funktionen mit wechselnden Vorzeichen das handhabbarste und damit auch am häufigsten angewandte Kriterium, um die Integrationsreihenfolge zu tauschen.

**Folgerung 4.9** (Satz von Fubini-Tonelli). *Seien  $X \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$  Borelmengen und  $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine messbare Funktion. Ist eines der Integrale*

$$\int_{X \times Y} |f| d\lambda_{d+m}, \quad \int_X \int_Y |f(x, y)| d\lambda_m(y) d\lambda_d(x), \quad \int_Y \int_X |f(x, y)| d\lambda_d(x) d\lambda_m(y) \quad (4.11)$$

endlich, dann ist  $f$  bezüglich  $\lambda_{d+m}$  integrierbar und es gilt

$$\int_{X \times Y} f d\lambda_{d+m} = \int_{X_0} \int_Y f(x, y) d\lambda_m(y) d\lambda_d(x) = \int_{Y_0} \int_X f(x, y) d\lambda_d(x) d\lambda_m(y),$$

wobei  $X_0$  und  $Y_0$  wie in Satz 4.6 definiert sind.

*Beweis.* Ist eines der drei Integrale in (4.11) endlich, so sind sie nach dem Satz von Tonelli 4.5 alle drei gleich, denn der Integrand ist ja hier nicht-negativ. Insbesondere ist damit das Integral von  $|f|$  bezüglich  $\lambda_{d+m}$  endlich und das bedeutet, dass  $f$  selbst  $\lambda_{d+m}$ -integrierbar ist. Das ist aber genau die Voraussetzung des Satzes von Fubini, der damit schließlich die Behauptung liefert.  $\square$

## 4.2 Der Transformationsatz

In diesem Abschnitt lernen wir das Analogon der eindimensionalen Substitutionsregel kennen, die wir uns zunächst noch einmal anschauen. Ist  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare und streng wachsende Funktion und ist  $f: \varphi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Ist dagegen  $\varphi$  streng fallend, also orientierungsumkehrend, so ist

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = - \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x) dx.$$

Als Lebesgue-Integral geschrieben lassen sich diese beiden Identitäten zu

$$\int_{[a, b]} (f \circ \varphi)(t) |\varphi'(t)| dt = \int_{\varphi([a, b])} f(x) dx \quad (4.12)$$

zusammenfassen. Das ist die Transformationsformel, die wir auf höherdimensionale Situationen verallgemeinern wollen. Wir werden dabei die Schreibweise  $\int_B f(x) dx$  statt  $\int_B f d\lambda$  verwenden. Außerdem erinnern wir daran, dass eine bi-jektive Abbildung  $\varphi: U \rightarrow V$  zwischen offenen Mengen  $U$  und  $V$  ein *Diffeomorphismus* heißt, wenn  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  stetig differenzierbar sind.

**Satz 4.10** (Transformationssatz). *Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus. Dann ist eine Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann über  $V$  integrierbar, wenn die Funktion  $(f \circ \varphi) |\det(D\varphi)| : U \rightarrow \mathbb{R}$  über  $U$  integrierbar ist. In diesem Fall ist*

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |\det(D\varphi(x))| dx. \quad (4.13)$$

*Insbesondere gilt für jede messbare Teilmenge  $A \subseteq U$*

$$\lambda_d(\varphi(A)) = \int_A |\det(D\varphi(x))| dx. \quad (4.14)$$

Hier steht  $D\varphi(x) \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  für die Ableitung von  $\varphi : U \rightarrow V$  in  $x \in U$ . Vor dem Beweis von Satz 4.10 machen wir uns klar, was Formel (4.14) bedeutet. Diese Beziehung beschreibt, wie sich das Volumen des Bildes einer messbaren Menge  $A$  unter  $\varphi$  berechnet. Ist  $|\det(D\varphi(x))|$  eine von  $x$  unabhängige Konstante  $c$ , so reduziert sich (4.14) auf  $\lambda_d(\varphi(A)) = c\lambda_d(A)$ . Die Konstante  $c$  ist also ein Verzerrungsfaktor, der angibt, wie sich das Volumen einer Menge bei Anwendung von  $\varphi$  ändert. Ist beispielsweise  $\varphi = T|_U$  mit einer linearen Abbildung  $T$ , so ist  $D\varphi(x) = T$  und somit  $\lambda_d(T(A)) = |\det(T)| \cdot \lambda_d(A)$ . Für  $U = \mathbb{R}^d$  und  $A = [0, 1]^d$  (Einheitswürfel im  $\mathbb{R}^d$ ) ergibt sich mit

$$\lambda_d(T([0, 1]^d)) = |\det(T)|$$

eine anschauliche Bedeutung der Determinante als Volumen des Bildes des Einheitswürfels. Eine Menge der Gestalt  $T([0, 1]^d)$  heißt auch *Spat* oder *Parallelotop*. Man kann sie schreiben als

$$\left\{ \sum_{j=1}^d x_j a_j : x_j \in [0, 1] \text{ für alle } j \right\},$$

wobei die  $a_j$  die Bilder der kanonischen Basisvektoren unter  $T$  sind.

*Beweis von Satz 4.10.* Wir führen diesen Beweis in mehreren Schritten.

### 1. Schritt: Es genügt, (4.14) zu beweisen.

Aus (4.14) folgt (4.13) für die Funktion  $f := \chi_{\varphi(A)}$ , denn es ist ja  $\chi_{\varphi(A)} \circ \varphi = \chi_A$ . Aus der Linearität des Integrals folgt damit (4.13) für alle nichtnegativen Stufenfunktionen  $f$ . Sei nun  $f \geq 0$  messbar. Nach Satz 2.4 gibt es eine monoton wachsende Folge nichtnegativer Stufenfunktionen  $s_k$ , die punktweise gegen  $f$  konvergiert. Aus dem Satz über monotone Konvergenz (Satz 2.16) folgt

$$\begin{aligned} \int_V f(y) dy &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_V s_k(y) dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U s_k(\varphi(x)) |\det(D\varphi(x))| dx \\ &= \int_U f(\varphi(x)) |\det(D\varphi(x))| dx, \end{aligned}$$

da auch die Folge  $(s_k \circ \varphi) |\det(D\varphi)|$  monoton wachsend ist und punktweise gegen  $(f \circ \varphi) |\det(D\varphi)|$  konvergiert. Insbesondere sehen wir, dass  $(f \circ \varphi) |\det(D\varphi)|$  genau dann auf  $U$  integrierbar ist, wenn  $f$  auf  $V$  integrierbar ist. Hieraus folgt sofort die Aussage für beliebige integrierbare Funktionen  $f$ .

**2. Schritt: Es genügt zu zeigen, dass jeder Punkt  $p \in U$  eine offene Umgebung  $W_p \subseteq U$  hat, so dass (4.14) für  $W_p$  und  $\varphi|_{W_p}$  anstelle von  $U$  und  $\varphi$  gilt.**

Für jeden Punkt  $p \in U$  gibt es einen Punkt  $q \in \mathbb{Q}^d$  und eine Kugel  $U_r(q)$  mit rationalem Radius so, dass  $p \in U_r(q) \subseteq W_p$ . Die Behauptung (4.14) gilt für jede der Mengen  $U_r(q)$ , und diese Mengen überdecken  $U$ . Wir haben damit abzählbar viele Mengen  $(M_k)_{k \geq 1}$  gefunden, für die (4.14) gilt und die  $U$  überdecken. Ist nun  $A$  messbar, so schreiben wir  $A$  als disjunkte Vereinigung der Mengen

$$A_1 := A \cap M_1 \quad \text{und} \quad A_k := (A \cap M_k) \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_{k-1}) \quad \text{für } k \geq 2.$$

Aus der  $\sigma$ -Additivität von  $\lambda_d$  und aus Satz 2.11 folgt nun

$$\lambda_d(\varphi(A)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_d(\varphi(A_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |\det(D\varphi(x))| dx = \int_A |\det(D\varphi(x))| dx.$$

**3. Schritt: (4.14) gilt, wenn  $\varphi$  eine Permutation der Koordinaten ist, d.h. wenn  $\varphi(x) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)})$  mit einer Bijektion  $\sigma : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ .**

In diesem Fall ist  $|\det(D\varphi(x))| = 1$ , und (4.14) gilt offenbar für alle Quader in  $\mathbb{R}^d$ . Nach dem Eindeutigkeitssatz für das Lebesgue-Maß (Satz 3.15 (h)) folgt (4.14) für beliebiges messbares  $A$ .

**4. Schritt: Gilt (4.14) für die Diffeomorphismen  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow U_2$  und  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow U_3$ , so auch für den Diffeomorphismus  $\varphi_2 \circ \varphi_1 : U_1 \rightarrow U_3$ .**

Aus Schritt 1 wissen wir, dass (4.14) die Formel (4.13) nach sich zieht. Nach der Kettenregel ist nun

$$\det(D(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x)) = \det(D\varphi_2(\varphi_1(x))) \cdot \det(D\varphi_1(x)). \quad (4.15)$$

Wenden wir (4.14) auf  $\varphi_2$  und (4.13) auf  $\varphi_1$  an, erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_d((\varphi_2 \circ \varphi_1)(A)) &= \int_{\varphi_1(A)} |\det(D\varphi_2(y))| dy && \text{(nach (4.14))} \\ &= \int_A |\det(D\varphi_2(\varphi_1(x)))| \cdot |\det(D\varphi_1(x))| dx && \text{(nach (4.13))} \\ &= \int_A |\det(D(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x))| dx && \text{(nach (4.15)).} \end{aligned}$$

**5. Schritt:** (4.14) gilt, falls  $d = 1$  und  $U$  ein Intervall ist.

Wir benutzen wieder den Eindeutigkeitssatz (Satz 3.15 (h)). Ist  $B \subseteq V$  ein Intervall, so ist auch  $\varphi^{-1}(B) \subseteq U$  ein Intervall (da  $\varphi^{-1}$  stetig ist), und eine Anwendung der Substitutionsregel (4.12) auf die Funktion  $f \equiv 1$  liefert

$$\lambda_1(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} |\varphi'(x)| dx.$$

Da nach Satz 2.11 die Abbildungen

$$B \mapsto \lambda_1(B \cap V) \quad \text{und} \quad B \mapsto \int_{\varphi^{-1}(B \cap V)} |\varphi'(x)| dx$$

Maße auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  definieren und diese auf allen beschränkten Intervallen übereinstimmen, stimmen sie nach Satz 3.15 überein.

**6. Schritt:** Wir zeigen die lokale Aussage aus Schritt 2 durch vollständige Induktion nach  $d$ .

Der Induktionsanfang  $d = 1$  ist in Schritt 5 abgehandelt. Für den Induktionsschritt betrachten wir  $\varphi$  in einer Umgebung von  $p \in U$ . Wegen  $\det D\varphi(p) \neq 0$  gibt es ein  $j$  mit  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(p) \neq 0$ . Indem wir  $\varphi$  mit einer Koordinatenpermutation verknüpfen, dürfen wir nach Schritt 3 und 4 o.B.d.A. annehmen, dass  $j = 1$ , d. h. dass  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$  ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto (\varphi_1(x), x_2, \dots, x_d).$$

Die Jacobimatrix von  $\psi$  im Punkt  $x$  hat die Blockstruktur

$$J_\psi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & * \\ 0 & I_{d-1} \end{pmatrix},$$

ist also insbesondere in  $x = p$  invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion (Analysis II, Theorem 14.5) dürfen wir nach einer gegebenenfalls erforderlichen Verkleinerung von  $U$  annehmen, dass  $\psi : U \rightarrow \psi(U)$  ein Diffeomorphismus ist. Wir haben damit eine Zerlegung

$$\varphi = \rho \circ \psi : U \rightarrow V \quad \text{mit} \quad \rho = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \rightarrow V.$$

Die erste Komponente von  $\rho$  ist dabei gegeben durch

$$\rho_1(y) = (\varphi_1 \circ \psi^{-1})(y) = (\psi_1 \circ \psi^{-1})(y) = y_1.$$

Nach Schritt 4 genügt es, die Behauptung jeweils für die Abbildungen  $\psi$  auf  $U$  und  $\rho$  auf  $\psi(U)$  zu zeigen. Das erledigen wir in einem Aufwasch und schreiben  $\vartheta : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  für entweder  $\psi : U \rightarrow \psi(U)$  oder  $\rho : \psi(U) \rightarrow V$ . Die beiden

haben nämlich das gemeinsame feature, dass es jeweils ein  $j \in \{1, \dots, d\}$  gibt mit  $\vartheta_j(x) = x_j$ . Mit Hilfe von Schritt 3 können wir wieder o.B.d.A. annehmen, dass dieses  $j$  jeweils 1 ist.

Um das auszunutzen schreiben wir im folgenden Punkte  $x \in \mathbb{R}^d$  als  $x = (x_1, x')$  mit  $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$  und führen für eine Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}^d$  die Notation

$$A_{x_1} := \{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : (x_1, x') \in A\}$$

ein.

Damit können wir  $\vartheta$  schreiben als

$$\vartheta(x) = \vartheta(x_1, x') = (x_1, \vartheta_{x_1}(x')),$$

wobei

$$\vartheta_{x_1} : U_{x_1} \rightarrow V_{x_1}$$

ein Diffeomorphismus ist. Die Jacobimatrix  $J_\vartheta(x)$  von  $\vartheta$  in  $x = (x_1, x')$  hat die Struktur

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & J_{\vartheta_{x_1}}(x') \end{pmatrix},$$

so dass gilt

$$\det(D\vartheta(x)) = \det(D\vartheta_{x_1}(x')). \quad (4.16)$$

Sei nun  $A$  eine messbare Teilmenge von  $\tilde{U}$ . Wir erhalten schrittweise

$$\begin{aligned} \lambda_d(\vartheta(A)) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{d-1}(\vartheta(A)_{x_1}) dx_1 && \text{(Cavalieri)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{d-1}(\vartheta_{x_1}(A_{x_1})) dx_1 && \text{(Definition von } \vartheta_{x_1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{A_{x_1}} |\det(D\vartheta_{x_1}(x'))| dx' dx_1 && \text{(Induktionsannahme)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \chi_{A_{x_1}}(x') |\det(D\vartheta_{x_1}(x'))| dx' dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x) |\det(D\varphi(x))| dx && \text{(Fubini und (4.16))} \\ &= \int_A |\det(D\varphi(x))| dx. && \square \end{aligned}$$

Wir halten noch eine wichtige Folgerung fest.

**Folgerung 4.11** (Drehungsinvarianz von  $\lambda_d$ ). *Sei  $T \in L(\mathbb{R}^d)$  eine Isometrie, d. h.  $T$  wird durch eine orthogonale Matrix dargestellt. Dann gilt für jede Borelmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^d$ , dass  $\lambda_d(T(A)) = \lambda_d(A)$  ist.*

*Beweis.* Wegen  $|\det(T)| = 1$  folgt die Behauptung sofort aus (4.14). □



Diese Drehungsinvarianz ist nicht von vornherein klar, da wir ja das Lebesgue-Maß basisabhängig konstruiert haben, nämlich zunächst auf achsenparallelen Quadern. Weiter sei daran erinnert, dass wir die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes bereits in Satz 3.17 gezeigt haben. Zusammenfassend können wir feststellen, dass das Lebesgue-Maß unter Abbildungen der Gestalt  $x \mapsto Tx + v$  mit einer linearen Isometrie  $T \in L(\mathbb{R}^d)$  und einem Vektor  $v \in \mathbb{R}^d$  invariant ist. Das bedeutet insbesondere, dass das Lebesgue-Maß unsere gesamte Wunschliste (1), (2)', (3), (4) aus Abschnitt 1.1 erfüllt.

### 4.3 Nullmengen<sup>◇</sup>

Wir haben Nullmengen als Teilmengen von Borelmengen vom Lebesguemaß 0 definiert. Die Nullmengen des Maßraumes  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$  kann man mit Satz 3.3 und der Definition von  $\lambda_d$  leicht charakterisieren: eine Menge  $N \subseteq \mathbb{R}^d$  ist genau dann eine  $\lambda_d$ -Nullmenge, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Folge halboffener Intervalle  $J_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , so gibt, dass

$$N \subseteq \bigcup_{m \geq 1} J_m \quad \text{und} \quad \sum_{m \geq 1} \lambda_d(J_m) < \varepsilon. \quad (4.17)$$

Man beachte, dass das dies exakt mit dem Begriff einer Nullmenge übereinstimmt, den wir in Analysis II eingeführt haben.

Wir wollen nun einige Kriterien kennenlernen (bzw. aus Analysis II wiederholen), die es uns erlauben, gewisse Nullmengen schnell als solche zu erkennen. Dies ist z.B. bei Anwendungen der Transformationsformel nützlich, bei denen man aus dem Definitionsgebiet gewisse Nullmengen ausschneiden muss, um die Transformation zu einem Diffeomorphismus zu machen.

Wir beginnen mit einer Verfeinerung der oben gegebenen Beschreibung von Nullmengen. Dazu nennen wir einen abgeschlossenen Quader  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^d$  einen *Würfel*, wenn  $b_1 - a_1 = \dots = b_d - a_d$  ist.

**Lemma 4.12.**  *$N \subseteq \mathbb{R}^d$  ist genau dann eine  $\lambda_d$ -Nullmenge, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Folge  $(W_m)_{m \geq 1}$  von Würfeln gibt mit*

$$N \subseteq \bigcup_{m \geq 1} W_m \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_d(W_m) < \varepsilon.$$

*Beweis.* Die Menge  $N$  ist genau dann eine  $\lambda_d$ -Nullmenge, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  halboffene Quader  $J_m = [a^{(m)}, b^{(m)})$  gibt, so dass (4.17) gilt. Für jedes  $m$  sei  $c^{(m)} = (c_1^{(m)}, \dots, c_d^{(m)})$  so, dass  $c_j^{(m)} > b_j^{(m)}$  für alle  $j$ , dass  $c^{(m)} - a^{(m)} \in \mathbb{Q}^d$ , und dass

$$\lambda_d([a^{(m)}, c^{(m)})) < \lambda_d([a^{(m)}, b^{(m)})) + \varepsilon 2^{-m}.$$

gilt. Da alle Seitenlängen von  $[a^{(m)}, c^{(m)})$  rational sind, gibt es endlich viele Würfel  $W_1^{(m)}, \dots, W_{k_m}^{(m)}$  mit

$$\bigcup_{j=1}^{k_m} W_j^{(m)} = [a^{(m)}, c^{(m)}] \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{k_m} \lambda_d(W_j^{(m)}) = \lambda_d([a^{(m)}, c^{(m)}]).$$

Dann ist  $N \subseteq \bigcup_{j,m} W_j^{(m)}$ , und wir erhalten

$$\sum_{m,j} \lambda_d(W_j^{(m)}) = \sum_{m \geq 1} \lambda_d([a^{(m)}, c^{(m)}]) \leq \sum_{m \geq 1} (\lambda_d(Q_m) + \varepsilon 2^{-m}) < 2\varepsilon.$$

Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 4.13.** *Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  eine Nullmenge und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^d$  Lipschitzstetig, so ist auch  $f(A)$  eine Nullmenge.*

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  und  $(W_k)_{k \geq 1}$  eine Folge von Würfeln mit  $A \subseteq \bigcup_{k \geq 1} W_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_d(W_k) < \varepsilon$ . Wir dürfen annehmen, dass jeder Würfel  $W_k$  einen Punkt  $a_k \in A$  enthält. Ist  $s_k$  die Kantenlänge von  $W_k$ , so ist  $\lambda_n(W_k) = s_k^d$  und  $\|x - a_k\| \leq \sqrt{d} s_k$  für alle  $x \in W_k$  (warum?).

Da  $f$  Lipschitzstetig ist, gibt es ein  $L > 0$  so, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in A.$$

Insbesondere ist für alle  $x \in A \cap W_k$

$$\|f(x) - f(a_k)\| \leq L\|x - a_k\| \leq L\sqrt{d} s_k.$$

Also liegt  $f(A \cap W_k)$  in einer Kugel vom Radius  $L\sqrt{d} s_k$  und damit auch in einem Würfel  $\widetilde{W}_k$  mit der Kantenlänge  $2L\sqrt{d} s_k$ . Es ist also

$$f(A) = \bigcup_{k \geq 1} f(A \cap W_k) \subseteq \bigcup_{k \geq 1} \widetilde{W}_k$$

mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_d(\widetilde{W}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (2L\sqrt{d} s_k)^d = (2L\sqrt{d})^d \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_d(W_k) \leq (2L\sqrt{d})^d \cdot \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt werden kann, ist  $f(A)$  eine Nullmenge.  $\square$

**Folgerung 4.14.** *Ist  $A$  Nullmenge in  $\mathbb{R}^d$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $A \subseteq U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig differenzierbar, so ist  $f(A)$  eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^d$ .*

*Beweis.* Da  $U$  offen ist, ist  $U$  eine abzählbare Vereinigung von Quadern der Gestalt  $Q_k = [a_k, b_k]$  mit  $a_k, b_k \in \mathbb{Q}^d$  (vgl. den Beweis von Lemma 1.11). Als stetige Funktion ist  $f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^d)$  auf jedem der kompakten Quader  $Q_k$  beschränkt, d. h. es gibt ein  $L_k > 0$  mit  $\|Df(x)\| \leq L_k$  für alle  $x \in Q_k$ . Nach dem Schrankenatz aus Analysis II folgt

$$\|f(y) - f(z)\| \leq L_k \|y - z\| \quad \text{für alle } y, z \in Q_k.$$

Also ist  $f|_{Q_k}$  Lipschitzstetig, und nach Satz 4.13 ist  $f(A \cap Q_k)$  eine Nullmenge. Dann ist auch  $f(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(A \cap Q_k)$  eine Nullmenge.  $\square$

Satz 4.13 und Folgerung 4.14 lassen sich *nicht* auf beliebige stetige Funktionen  $f$  verallgemeinern. Es gibt beispielsweise Kurven (sogenannte *Peano-Kurven*), die ein ganzes Quadrat im  $\mathbb{R}^2$  ausfüllen.

**Lemma 4.15.** *Jeder echte affine Unterraum  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  ist eine Nullmenge.*

*Beweis.* Wir verschieben  $A$  so, dass  $0 \in A$ , und drehen dann  $A$  so, dass  $A \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ . Nach Folgerung 4.11 und der Anmerkung danach dürfen wir also o.B.d.A.  $A = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$  annehmen. Wir können  $A$  dann schreiben als

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} ([-k, k]^{d-1} \times \{0\}).$$

Aus  $\lambda_d([-k, k]^{d-1} \times \{0\}) = 0$  und der  $\sigma$ -Additivität folgt mit Lemma 1.34 (e), dass  $\lambda_d(A) = 0$  ist.  $\square$

**Folgerung 4.16.** *Ist  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  messbar und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  messbar, so ist der Graph*

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : x \in A\} \tag{4.18}$$

*eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^{d+1}$ .*

*Beweis.* Wir setzen  $f$  durch 0 auf  $\mathbb{R}^d$  fort. Diese Fortsetzung ist messbar, und ihr Graph enthält den Graphen aus (4.18) als Teilmenge. Wir können daher  $A = \mathbb{R}^d$  annehmen. Dann ist der Graph  $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : y - f(x) = 0\}$  als Nullstellenmenge einer messbaren Funktion messbar, und mit dem Prinzip von Cavalieri erhalten wir

$$\lambda_{d+1}(\Gamma(f)) = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_1(\{f(x)\}) d\lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} 0 d\lambda_d = 0. \quad \square$$

## 4.4 Koordinatentransformationen

Oft lassen sich vorhandene Symmetrien dadurch ausnutzen, dass man Integrationsbereiche durch Koordinatentransformationen (d.h. durch geeignete Parametrisierung) in achsenparallele Quader überführt, auf denen Integrale iterativ berechnet werden können. Aus der Fülle der möglichen Koordinatensysteme sehen wir uns hier nur Polarkoordinaten an. Zylinderkoordinaten haben wir bereits in Ana II kennengelernt.

**Erinnerung 4.17** (Polarkoordinaten in der Ebene). Der Übergang von Polar- zu kartesischen Koordinaten in der Ebene wird beschrieben durch

$$P_2 : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \quad (4.19)$$

Die Jacobimatrix von  $P_2$  in  $(r, \varphi)$  ist gegeben durch

$$J_{P_2}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

und ihre Determinante ist gleich  $r$ . Man beachte, dass nur die Einschränkung von  $P_2$  auf die offene Menge  $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$  einen Diffeomorphismus auf die Menge  $\mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\})$  liefert. Um einen Diffeomorphismus zu erhalten, müssen wir also sowohl aus  $[0, \infty) \times [0, 2\pi]$  als auch aus  $\mathbb{R}^2$  eine Nullmenge herausnehmen. Daher ist eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  nach dem Transformationssatz 4.10 genau dann integrierbar, wenn die Funktion

$$(r, \varphi) \mapsto f(P_2(r, \varphi)) |\det(J_{P_2}(r, \varphi))| = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r$$

auf  $[0, \infty) \times [0, 2\pi]$  integrierbar ist (Nullmengen dürfen wir unberücksichtigt lassen), und es gilt in diesem Fall

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, d\lambda_2(x, y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi dr. \quad (4.20)$$

**Beispiel 4.18.** Als Anwendung von (4.20) berechnen wir das Integral  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx$ . Dazu betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto e^{-x^2 - y^2}.$$

Diese ist rotationssymmetrisch, und mit Polarkoordinaten, (4.20) und der Substitution  $s := r^2$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx dy &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \, d\varphi dr = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r \, dr = \pi \int_0^\infty e^{-s} \, ds \\ &= \pi \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-s} \Big|_0^t) = \pi \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-t}) = \pi. \end{aligned}$$

Insbesondere ist also  $f$  integrierbar. Mit Fubini erhalten wir andererseits

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2,\end{aligned}$$

so dass schließlich folgt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (4.21)$$

Dieses Integral spielt eine zentrale Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

**Beispiel 4.19** (Die Beta-Funktion). Die Identität (4.21) eröffnet uns einen weiteren Weg, um  $\Gamma(1/2)$  zu berechnen. Mit der Substitution  $x = \sqrt{t}$  erhalten wir

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x} 2x dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Wir schauen uns an, was dieser Trick für allgemeinere Werte der  $\Gamma$ -Funktion liefert. Mit der Substitution  $t = x^2/2$  bekommen wir

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t} dt = 2^{1-u} \int_0^\infty x^{2(u-1)} e^{-x^2/2} x dx = 2^{1-u} \int_0^\infty x^{2u-1} e^{-x^2/2} dx,$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\Gamma(u)\Gamma(v) &= 2^{2-u-v} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2u-1} e^{-x^2/2} y^{2v-1} e^{-y^2/2} dx dy \\ &= 2^{2-u-v} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2u-1} y^{2v-1} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= 2^{2-u-v} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} r^{2u+2v-2} (\cos \varphi)^{2u-1} (\sin \varphi)^{2v-1} e^{-r^2/2} r d\varphi dr \\ &= 2^{2-u-v} \int_0^\infty r^{2u+2v-1} e^{-r^2/2} dr \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{2u-1} (\sin \varphi)^{2v-1} d\varphi \\ &= \Gamma(u+v) \cdot 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{2u-1} (\sin \varphi)^{2v-1} d\varphi.\end{aligned}$$

Die Funktion

$$B : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{2u-1} (\sin \varphi)^{2v-1} d\varphi$$

heißt die *Eulersche Betafunktion*; wir haben also soeben gesehen, dass

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \quad (4.22)$$

Für  $u = v = \frac{1}{2}$  erhalten wir insbesondere  $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi$ .

Für die Berechnung des Volumens  $c_d$  der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel hatten wir in Beispiel 4.3 mit dem Cavalierischen Prinzip die Rekursionsformel  $c_d = c_{d-1}I_d$  mit

$$I_d = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^d dt = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos t)^d dt = B\left(\frac{d+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

gefunden. Mit (4.22) ergibt sich nun direkt

$$I_d = B\left(\frac{d+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d+2}{2})} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d+2}{2})}$$

und damit

$$\begin{aligned} c_d &= c_{d-1}I_d = c_{d-2}I_dI_{d-1} = \dots = c_1I_dI_{d-1}\dots I_2 \\ &= 2\sqrt{\pi}^{d-1} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d+2}{2})} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \dots \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} = 2\sqrt{\pi}^{d-1} \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{d+2}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}^d}{\Gamma(\frac{d+2}{2})}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.20** (Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^d$ ,  $d > 2$ ). Die Polarkoordinaten für höhere Dimensionen als zwei definieren wir rekursiv durch

$$P_d : (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]^{d-2} \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

wobei

$$P_d(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{d-2}) = (\sin \theta_{d-2} P_{d-1}(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{d-3}), r \cos \theta_{d-2})$$

für  $d \geq 3$  und  $P_2$  wie in (4.19) festgelegt ist. Insbesondere erhalten wir für die *Kugelkoordinaten*  $P_3 : (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$P_3(r, \varphi, \theta) = (\sin \theta P_2(r, \varphi), r \cos \theta) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta).$$

Dabei misst  $r$  den Abstand zum Ursprung,  $\varphi$  den Längengrad und  $\theta$  den Breitengrad. Aber Achtung: Im Gegensatz zur Konvention in der Geographie zählt der Breitengrad von 0 am Nordpol bis  $\pi$  am Südpol!

Wir kehren zum allgemeinen Fall  $d > 2$  zurück. Mit  $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_{d-2})$  und  $\theta' := (\theta_1, \dots, \theta_{d-3})$  können wir die Jacobimatrix von  $P_d$  schreiben als

$$J_{P_d}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin(\theta_{d-2}) \cdot J_{P_{d-1}}(r, \varphi, \theta') & \cos(\theta_{d-2}) P_{d-1}(r, \varphi, \theta') \\ \cos(\theta_{d-2}) & 0 \dots 0 & -r \sin(\theta_{d-2}) \end{pmatrix}.$$

Um davon die Determinante berechnen zu können, beachten wir, dass

$$P_{d-1}(r, \varphi, \theta') = r P_{d-1}(1, \varphi, \theta')$$

(was man leicht per vollständiger Induktion bestätigt). Damit ist

$$\frac{\partial P_{d-1}}{\partial r}(r, \varphi, \theta') = P_{d-1}(1, \varphi, \theta') = r^{-1}P_{d-1}(r, \varphi, \theta'),$$

und folglich stimmt die erste Spalte der Jacobimatrix von  $P_{d-1}$  mit  $r^{-1}P_{d-1}$  überein. Also ist die Determinante der  $(d-1) \times (d-1)$ -Untermatrix, die man aus  $J_{P_d}(r, \varphi, \theta)$  durch Streichen der ersten Spalte und letzten Zeile erhält, gleich

$$r \cos(\theta_{d-2}) (\sin(\theta_{d-2}))^{d-2} (-1)^{d-2} \det(J_{P_{d-1}}(r, \varphi, \theta')).$$

Durch Entwicklung von  $\det(J_{P_d}(r, \varphi, \theta))$  nach der letzten Zeile erhalten wir

$$\begin{aligned} & \det(J_{P_d}(r, \varphi, \theta)) \\ &= -r (\sin(\theta_{d-2}))^d \det(J_{P_{d-1}}(r, \varphi, \theta')) \\ & \quad + (-1)^{d-1} r (\cos(\theta_{d-2}))^2 (\sin(\theta_{d-2}))^{d-2} (-1)^{d-2} \det(J_{P_{d-1}}(r, \varphi, \theta')) \\ &= -r (\sin(\theta_{d-2}))^{d-2} \det(J_{P_{d-1}}(r, \varphi, \theta')). \end{aligned}$$

Induktiv folgt nun wegen  $\det(J_{P_3}(r, \varphi, \theta)) = -r^2 \sin(\theta)$ , dass

$$\det(J_{P_d}(r, \varphi, \theta)) = (-1)^d r^{d-1} (\sin(\theta_{d-2}))^{d-2} (\sin(\theta_{d-3}))^{d-3} \cdots (\sin(\theta_1)).$$

Diskutieren Sie als Übung zunächst für  $d = 3$  und dann im allgemeinen Fall, welche Nullmengen man aus  $[0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]^{d-2}$  bzw. aus dem  $\mathbb{R}^d$  herauschneiden muss, damit die Einschränkung von  $P_d$  ein Diffeomorphismus wird.

Als eine Anwendung berechnen wir Integrale über rotationssymmetrische Funktionen auf Kugelschalen.

**Satz 4.21.** *Sei  $I \subseteq [0, \infty)$  ein Intervall,  $K(I) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \in I\}$  die zugehörige Kugelschale und  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion. Dann ist die Funktion  $H : K(I) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto h(\|x\|_2)$  genau dann integrierbar, wenn die Funktion  $I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r \mapsto r^{d-1}h(r)$  integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{K(I)} H \, d\lambda_d = dc_d \int_I h(r) r^{d-1} \, dr,$$

wobei  $c_d$  für das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel steht, vgl. Beispiel 4.3 und 4.19.

*Beweis.* Wir benutzen sphärische Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^d$  und beachten, dass  $K(I) = P_d(I \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]^{d-2})$  ist. Da die Transformation  $P_d$  außerhalb ge-

wisser Nullmengen ein Diffeomorphismus ist, erhalten wir mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned}
& \int_{K(I)} H d\lambda_n \\
&= \int_I \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi H(P_d(r, \varphi, \theta)) |\det(J_{P_d}(r, \varphi, \theta))| d\theta_1 \dots d\theta_{d-2} d\varphi dr \\
&= \int_I \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi h(r) r^{d-1} (\sin(\theta_{d-2}))^{d-2} (\sin(\theta_{d-3}))^{d-3} \dots \\
&\quad \dots \sin(\theta_1) d\theta_1 \dots d\theta_{d-2} d\varphi dr \tag{4.23} \\
&= 2\pi \int_I h(r) r^{d-1} dr \int_0^\pi (\sin(\theta_{d-2}))^{d-2} d\theta_{d-2} \dots \int_0^\pi \sin(\theta_1) d\theta_1.
\end{aligned}$$

Um die Integrale über die  $\theta_j$  nicht explizit berechnen zu müssen, erinnern wir daran, dass das Integral  $\int_{K(I)} H d\lambda_d$  für  $I = [0, 1]$  und  $H \equiv 1$  gerade das Volumen der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel liefert. Es ist also

$$\begin{aligned}
c_d &= 2\pi \int_0^1 r^{d-1} dr \int_0^\pi (\sin(\theta_{d-2}))^{d-2} d\theta_{d-2} \dots \int_0^\pi \sin(\theta_1) d\theta_1 \\
&= \frac{2\pi}{d} \int_0^\pi (\sin(\theta_{d-2}))^{d-2} d\theta_{d-2} \dots \int_0^\pi \sin(\theta_1) d\theta_1. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Ein Vergleich von (4.23) und (4.24) zeigt nun, dass

$$\int_{K(I)} H d\lambda_d = \int_{K(I)} h(\|x\|) d\lambda_d(x) = dc_d \int_I h(r) r^{d-1} dr,$$

wobei die Aussage über die Existenz der Integrale ebenfalls aus Satz 4.10 folgt.  $\square$

## 5 $L^p$ -Räume

In diesem Abschnitt sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum, und  $\mathbb{K}$  steht für  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Die Menge der messbaren Funktionen von  $X$  nach  $\mathbb{K}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}^0(X; \mathbb{K})$  oder kurz mit  $\mathcal{L}^0$ . Integrale über komplexwertige Funktionen haben wir in Abschnitt 2.2 erklärt.

### 5.1 Die Räume $\mathcal{L}^p$ , $p < \infty$

**Definition 5.1.** Für  $f \in \mathcal{L}^0(X; \mathbb{K})$  und  $p \in (0, \infty)$  sei

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$



und

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(X; \mathbb{K}) := \{f \in \mathcal{L}^0(X; \mathbb{K}) : \|f\|_p < \infty\}.$$

Funktionen in  $\mathcal{L}^p$  heißen  $p$ -integrierbar.

**Bemerkung 5.2.** Man beachte, dass wir zwar die Normschreibweise benutzen,  $\|\cdot\|_p$  aber *keine* Norm auf  $\mathcal{L}^p$  ist! Für  $f \in \mathcal{L}^0$  und  $p \in (0, \infty)$  ist nämlich  $\|f\|_p = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$   $\mu$ -fast überall, wie die folgenden Äquivalenzen zeigen:

$$\|f\|_p = 0 \iff \int_X |f|^p d\mu = 0 \iff |f|^p = 0 \text{ f.ü.} \iff f = 0 \text{ f.ü.}$$

Offenbar gilt aber für alle  $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p.$$

Um nachzuweisen, dass  $\|\cdot\|_p$  zumindest für  $p \geq 1$  auch die Dreiecksungleichung erfüllt, brauchen wir ein paar Vorüberlegungen. Wir beginnen mit einigen elementaren Ungleichungen, die Sie als Übungsaufgabe beweisen können.

**Lemma 5.3.** Seien  $a, b \geq 0$ .

(a) (**Youngsche Ungleichung**) Für alle  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ist

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(b) Für  $p \geq 1$  gilt  $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ .

(c) Für  $p \in (0, 1)$  gilt  $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ .

Gleichheit gilt in (a) genau dann, wenn  $a^p = b^q$ , in (b) genau dann, wenn  $p = 1$  oder  $a = b$ , und in (c) genau dann, wenn  $a = 0$  oder  $b = 0$ .

**Satz 5.4.** Für alle  $p \in [0, \infty)$  ist  $\mathcal{L}^p(X; \mathbb{K})$  ein Vektorraum.

*Beweis.* Für  $p = 0$  ist dies Satz 1.27. Für  $p \geq 1$  und  $f, g \in \mathcal{L}^p$  erhalten wir mit Lemma 5.3 (b)

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \int_X (|f| + |g|)^p d\mu \leq \int_X 2^{p-1}|f|^p d\mu + \int_X 2^{p-1}|g|^p d\mu < \infty,$$

also  $f + g \in \mathcal{L}^p$ . Schließlich ist für  $0 < p < 1$  und  $f, g \in \mathcal{L}^p$  wegen Lemma 5.3 (c)

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \int_X (|f| + |g|)^p d\mu \leq \int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu < \infty,$$

also ebenfalls  $f + g \in \mathcal{L}^p$ . □

**Satz 5.5** (Hölder-Ungleichung). (a) Seien  $p, q, r \in (0, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ . Dann gilt für alle  $f, g \in \mathcal{L}^0$  die Ungleichung

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(b) Seien  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Für  $f \in \mathcal{L}^p$  und  $g \in \mathcal{L}^q$  ist dann

$$fg \in \mathcal{L}^1 \quad \text{und} \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

*Beweis.* Aussage (b) ist ein Spezialfall von (a). Wir zeigen daher nur (a).

Nach Satz 1.27 ist  $fg$  messbar, d.h.  $fg \in \mathcal{L}^0$ . Gilt  $\|f\|_p = 0$  oder  $\|g\|_q = 0$ , so ist  $fg = 0$  fast überall, und die Aussage (a) ist richtig. Sind  $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$  und ist einer dieser Werte gleich  $\infty$ , so ist ebenfalls nichts zu zeigen (da rechts  $\infty$  steht). Seien also  $\|f\|_p, \|g\|_q \in (0, \infty)$ . Wir setzen  $F := f/\|f\|_p$  und  $G := g/\|g\|_q$ . Anwenden der Youngschen Ungleichung in jedem Punkt  $x \in X$  und anschließende Integration ergeben

$$\begin{aligned} \int_X \frac{|f(x)g(x)|^r}{\|f\|_p^r \|g\|_q^r} d\mu &= \int_X |F(x)G(x)|^r d\mu \\ &\leq \int_X \frac{r}{p} |F(x)|^{rp/r} d\mu + \int_X \frac{r}{q} |G(x)|^{rq/r} d\mu = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung leicht folgt.  $\square$

**Satz 5.6** (Minkowski-Ungleichung). Für  $p \in [1, \infty)$  und  $f, g \in \mathcal{L}^p$  ist

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

*Beweis.* Es sei  $q$  der Hölder-konjugierte Index zu  $p$ , d. h.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Mit Dreiecks- und Hölder-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\leq \int_X |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \|f\|_p \cdot \|(f + g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \|(f + g)^{p-1}\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f + g\|_p^{p/q}. \end{aligned}$$

Wegen  $p - p/q = 1$  folgt die Behauptung durch Division durch  $\|f + g\|_p^{p/q}$  (für  $\|f + g\|_p = 0$  ist die Behauptung offensichtlich richtig).  $\square$

**Satz 5.7.** Für  $p \in (0, 1)$  und  $f, g \in \mathcal{L}^p$  ist

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p.$$

*Beweis.* Dies folgt wie im Beweis von Theorem 5.4 sofort aus Lemma 5.3 (c).  $\square$

**Satz 5.8** (Tschebyscheff-Ungleichung). Sei  $p \in [1, \infty)$ ,  $f \in \mathcal{L}^p$  und  $\alpha > 0$ . Dann gilt

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha^p} \|f\|_p^p.$$

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_X |f|^p d\mu \geq \int_{\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}} |f|^p d\mu \geq \int_{\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}} \alpha^p d\mu \\ &= \alpha^p \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Definition 5.9.** Eine Folge  $(f_n)$  in  $\mathcal{L}^p$  nennen wir eine Cauchy-Folge, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert so, dass  $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$  für alle  $m, n \geq N$ .

Man beachte, dass das insofern *nicht* die übliche Definition ist, als  $\|\cdot\|_p$  keine Norm ist.

**Satz 5.10.** Für jede Cauchy-Folge  $(f_n)$  in  $\mathcal{L}^p$  gibt es eine Teilfolge  $(f_{n_k})$  und eine Funktion  $f \in \mathcal{L}^p$  so, dass

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in X$$

und

$$\|f_{n_k} - f\|_p \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage nur für  $p \geq 1$ . Der Beweis für  $p \in (0, 1)$  verläuft ähnlich. Sei  $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^p$  eine Cauchyfolge. Zu  $\varepsilon_k := 2^{-k}$  wählen wir  $n_k \in \mathbb{N}$  so, dass  $\|f_n - f_m\|_p \leq 2^{-k}$  für  $n, m \geq n_k$  und  $n_{k+1} > n_k$ . Die Teilfolge  $(f_{n_k})$  hat dann die Eigenschaft

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wir setzen  $g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ ,  $G_N := \sum_{j=1}^N |g_j|$  und  $G := \sum_{j=1}^{\infty} |g_j|$ . Dann ist

$$\|G_N\|_p \leq \sum_{j=1}^N \|g_j\|_p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_p \leq 1.$$

Da die  $G_N^p$  monoton wachsen und von unten punktweise gegen  $G^p$  konvergieren, folgt mit Satz 2.16 (Monotone Konvergenz) dass

$$\int_X G^p d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X G_N^p d\mu \leq 1.$$

Es ist also  $G \in \mathcal{L}^p$  und somit

$$G(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |g_j(x)| < \infty \quad \mu\text{-fast überall.}$$

Insbesondere konvergiert die Reihe

$$F(x) := \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in X.$$

Aus  $|F(x)| \leq G(x)$  folgt weiter  $F \in \mathcal{L}^p$ . Ferner ist

$$|F - f_{n_k} + f_{n_1}|^p = \left| F - \sum_{j=1}^{k-1} g_j \right|^p \leq (2G)^p \in \mathcal{L}^1.$$

Mit Satz 2.21 (Majorisierte Konvergenz) erhalten wir hieraus

$$\|F - f_{n_k} + f_{n_1}\|_p^p = \left\| F - \sum_{j=1}^{k-1} g_j \right\|_p^p = \int_X \left| F - \sum_{j=1}^{k-1} g_j \right|^p d\mu \rightarrow 0$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Mit  $f(x) := F(x) + f_{n_1}(x)$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 5.11** (Riesz-Fischer). *Sei  $p \in (0, \infty)$  und  $(f_n)$  eine Folge in  $\mathcal{L}^p$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a)  $(f_n)$  ist eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{L}^p$ .

(b) Es gibt ein  $f \in \mathcal{L}^p$  mit  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* (Wieder nur für  $p \geq 1$ .) Die Implikation (b)  $\Rightarrow$  (a) ist der einfache Teil. Es ist ja

$$\|f_n - f_m\|_p \leq \|f_n - f\|_p + \|f - f_m\|_p.$$

Wir beweisen (a)  $\Rightarrow$  (b). Sei  $(f_n)$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{L}^p$ . Nach Satz 5.10 gibt es eine Teilfolge  $(f_{n_k})$  und ein  $f \in \mathcal{L}^p$  mit  $\|f_{n_k} - f\|_p \rightarrow 0$ . Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $n_0$  so, dass  $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon/2$  für  $m, n \geq n_0$  und dann  $n_k \geq n_0$  so, dass  $\|f_{n_k} - f\|_p < \varepsilon/2$ . Dann ist

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p < \varepsilon$$

für alle  $n \geq n_0$ .  $\square$

## 5.2 Der Raum $\mathcal{L}^\infty$

**Definition 5.12.** *Eine messbare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  heißt wesentlich beschränkt, falls ein  $c \geq 0$  mit  $\mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0$  existiert, d. h., falls  $|f| \leq c$  fast überall gilt. Für jede solche Funktion definieren wir*

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0\}.$$

*Ist  $f$  nicht wesentlich beschränkt, so setzen wir  $\|f\|_\infty := \infty$ . Die Menge aller wesentlich beschränkten Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}^\infty(X; \mathbb{K})$  oder kurz  $\mathcal{L}^\infty$ .*

Der folgende Satz fasst wichtige Eigenschaften von  $\mathcal{L}^\infty$  zusammen.

**Satz 5.13.** Sei  $f \in \mathcal{L}^0$ .

- (a) Es ist  $|f| \leq \|f\|_\infty$   $\mu$ -fast überall.
- (b) Es ist  $|f| \leq c$  fast überall genau dann, wenn  $\|f\|_\infty \leq c$ . Insbesondere ist  $\|f\|_\infty = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$  fast überall.
- (c)  $\mathcal{L}^\infty$  ist ein Vektorraum, und  $\|\cdot\|_\infty$  ist eine Halbnorm auf  $\mathcal{L}^\infty$ .
- (d) Für Folgen  $(f_n), (g_m)$  in  $\mathcal{L}^\infty$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:
  - i)  $\|f_n - g_m\|_\infty \rightarrow 0$  für  $m, n \rightarrow \infty$ .
  - ii) Es gibt eine  $\mu$ -Nullmenge  $N \in \mathcal{S}$ , so dass

$$|f_n(x) - g_m(x)| \rightarrow 0 \text{ für } m, n \rightarrow \infty \text{ gleichmäßig für } x \in X \setminus N.$$

- (e) Für Folgen  $(f_n)$  in  $\mathcal{L}^\infty$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:
  - i)  $\|f_n - f_m\|_\infty \rightarrow 0$  für  $m, n \rightarrow \infty$ .
  - ii) Es gibt ein  $f \in \mathcal{L}^\infty$ , so dass  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* (a) Ist  $\|f\|_\infty = \infty$ , so ist nichts zu zeigen. Für  $\|f\|_\infty < \infty$  betrachte

$$A := \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\} \text{ und } A_n := \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty + 1/n\}.$$

Dann ist  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ,  $A_n \subseteq A_{n+1}$  und  $\mu(A_n) = 0$  für alle  $n$ . Somit ist  $\mu(A) = 0$  nach Lemma 1.34 (c), d. h. es ist  $|f| \leq \|f\|_\infty$  fast überall.

- (b) Ist  $|f| \leq c$  fast überall, so ist  $\|f\|_\infty \leq c$  nach Definition. Die umgekehrte Implikation folgt aus Aussage (a), und die zweite Aussage von (b) folgt sofort aus der ersten.

- (c) Für beliebige  $f, g \in \mathcal{L}^\infty$  gilt wegen (a)

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty$$

fast überall. Hieraus folgt  $f + g \in \mathcal{L}^\infty$  und  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ . Weiter sei  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Wieder wegen (a) ist dann

$$|\alpha f| = |\alpha| \cdot |f| \leq |\alpha| \cdot \|f\|_\infty \text{ f.ü. und daher } \|\alpha f\|_\infty \leq |\alpha| \|f\|_\infty,$$

was

$$\|f\|_\infty = \|\alpha^{-1} \alpha f\|_\infty \leq |\alpha^{-1}| \cdot \|\alpha f\|_\infty, \text{ also } |\alpha| \|f\|_\infty \leq \|\alpha f\|_\infty$$

nach sich zieht. Somit ist  $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$  für alle  $\alpha \neq 0$ . Für  $\alpha = 0$  ist dies ebenfalls richtig.

- (d) Hier ist nur für die Implikation (d)ii)  $\Rightarrow$  (d)i) etwas Substantielles zu zeigen. Für jedes Paar  $m, n \in \mathbb{N}$  gibt es eine  $\mu$ -Nullmenge  $N_{m,n}$  so, dass

$$|f_n(x) - g_m(x)| \leq \|f_n - g_m\|_\infty \quad \text{für alle } x \in X \setminus N_{m,n}.$$

Dann ist  $N := \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} N_{n,m}$  ebenfalls eine  $\mu$ -Nullmenge, und es ist

$$|f_n(x) - g_m(x)| \leq \|f_n - g_m\|_\infty \quad \text{für alle } x \in X \setminus N \text{ und alle } m, n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Nach Voraussetzung gibt es ein  $n_0$  so, dass  $\|f_n - g_m\|_\infty \leq \varepsilon$  für alle  $m, n \geq n_0$ . Dann ist aber auch

$$|f_n(x) - g_m(x)| \leq \|f_n - g_m\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \setminus N$$

und für alle  $m, n \geq n_0$ , d. h. (d)ii) ist erfüllt.

- (e) Die Implikation (e)ii)  $\Rightarrow$  (e)i) folgt wie in Satz 5.11. Für (e)i)  $\Rightarrow$  (e)ii) setzen wir  $g_m := f_m$  und verwenden Aussage (d). Diese liefert eine Nullmenge  $N$  mit

$$|f_n(x) - f_m(x)| \rightarrow 0 \quad \text{gleichmäßig auf } X \setminus N \text{ für } m, n \rightarrow \infty.$$

Für jedes  $x \in X \setminus N$  ist also  $(f_n(x))$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{K}$ , deren Grenzwert wir  $f(x)$  nennen. Für  $x \in N$  setzen wir  $f(x) := 0$ . Dann ist  $f$  als Grenzwert messbarer Funktionen ebenfalls messbar. Es verbleibt zu zeigen, dass  $f$  wesentlich beschränkt ist. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0$  so, dass für  $x \in X \setminus N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

falls  $m, n \geq n_0$ . Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  liefert

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in X \setminus N$$

und für  $n \geq n_0$ , d. h. es gilt  $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$ . Aus

$$|f| \leq |f - f_{n_0}| + |f_{n_0}| \leq \varepsilon + \|f_{n_0}\|_\infty < \infty$$

folgt schließlich  $f \in \mathcal{L}^\infty$ . □

Die folgende Abschätzung ist eine Randpunktergänzung zur Hölder-Ungleichung aus Satz 5.5 und ergibt sich unmittelbar aus Satz 5.13 (a).

**Satz 5.14.** Für  $f \in \mathcal{L}^1$  und  $g \in \mathcal{L}^\infty$  gilt

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

### 5.3 Die $L^p$ -Räume

Wir haben bereits vermerkt, dass  $\|\cdot\|_p$  keine Norm auf  $\mathcal{L}^p$  ist: Für  $f \in \mathcal{L}^p$  ist  $\|f\|_p = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$   $\mu$ -fast überall (und nicht genau dann, wenn  $f = 0$ ) ist. Um dieses Problem zu beheben, möchten wir Funktionen identifizieren, die fast überall gleich sind. Dazu betrachten wir den Untervektorraum

$$\mathcal{N}(\mu) := \{f \in \mathcal{L}^0 : f = 0 \text{ } \mu\text{-fast überall}\}$$

von  $\mathcal{L}^0$ . Dieser ist auch für jedes  $p \in (0, \infty]$  ein Untervektorraum von  $\mathcal{L}^p$ , so dass wir den entsprechenden Faktorraum betrachten können.

**Definition 5.15.** *Es sei  $p \in [0, \infty]$ .*

(a) *Wir definieren den Raum*

$$L^p := L^p(X) := L^p(X; \mathbb{K}) := \mathcal{L}^p(X; \mathbb{K}) / \mathcal{N}(\mu)$$

*als Quotientenraum und bezeichnen die Restklasse von  $f \in \mathcal{L}^p$  mit  $[f] = f + \mathcal{N}(\mu) \in L^p$ . Diese Räume werden auch Lebesgue-Räume genannt.*

(b) *Für  $[f] \in L^p$  und  $p > 0$  setzen wir*

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p.$$

Da je zwei Repräsentanten von  $[f]$  fast überall gleich sind, ist  $\|[f]\|_p$  tatsächlich repräsentatenunabhängig und diese Definition der Norm wohldefiniert.

Die Bedeutung dieser Begriffe liegt darin, dass die erhaltenen Räume vollständig sind; insbesondere sind die  $L^p$ -Räume mit  $p \geq 1$  Banachräume. Der folgende Satz präzisiert dies.

**Satz 5.16.** (a) *Für  $p \in [1, \infty]$  ist  $\|\cdot\|_p$  eine Norm auf  $L^p$ , die  $L^p$  zu einem vollständigen normierten Raum macht.*

(b) *Für  $p \in (0, 1)$  ist  $d(f, g) := \|f - g\|_p^p$  eine Metrik auf  $L^p$ , die  $L^p$  zu einem vollständigen metrischen Raum macht.*

*Beweis.* Wir zeigen nur die Aussage für  $p \geq 1$ . Für die kleineren  $p$  lässt sich der Beweis in gleicher Weise aus den entsprechenden Resultaten der letzten beiden Abschnitte zusammenbauen.

Dass  $\|\cdot\|_p$  homogen ist und die Dreiecksungleichung erfüllt, haben wir schon in Bemerkung 5.2 und in Satz 5.6 (Minkowski-Ungleichung) gesehen. Auch die bisher fehlende Definitheit gilt nun, denn es ist gerade

$$\|[f]\|_p = 0 \iff \|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ } \mu\text{-f. ü.} \iff f \in \mathcal{N}(\mu) \iff [f] = 0.$$

Für den Nachweis der Vollständigkeit sei  $([f_n])$  eine Cauchyfolge in  $L^p(X; \mathbb{K})$ . Dann ist für eine jeweils beliebige Repräsentantenwahl  $(f_n)$  eine Cauchyfolge in

$\mathcal{L}^p(X; \mathbb{K})$  nach unserer Definition 5.9. Der Satz von Riesz-Fischer 5.11 bzw. sein Pendant aus dem Kapitel über  $\mathcal{L}^\infty$ , Satz 5.13 (e), liefern uns also ein  $f \in \mathcal{L}^p$  mit  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für dieses  $f$  gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|[f_n] - [f]\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|[f_n - f]\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0,$$

die Folge  $([f_n])$  ist also in  $L^p$  konvergent gegen  $[f] \in L^p$  und wir haben Vollständigkeit gezeigt.  $\square$

**Bemerkung 5.17.** Ab sofort schreiben wir  $f$  statt  $[f]$ , behalten aber im Kopf, dass  $f \in L^p$  für eine Äquivalenzklasse von Funktionen steht. Die Notation  $f \in \mathcal{L}^p$  bedeutet dagegen, dass  $f$  wirklich eine Funktion ist, die auch  $p$ -integrierbar (oder wesentlich beschränkt) ist.

Wir werden auch (nicht ganz exakt) Ausdrücke wie „ $f \in L^p(\mathbb{R})$  ist stetig“ verwenden. Darunter verstehen wir Folgendes: „ $f \in L^p$  ist eine Äquivalenzklasse von Funktionen (die alle in  $\mathcal{L}^p$  liegen), und diese Äquivalenzklasse enthält eine stetige Funktion“.

**Beispiel 5.18.** Wir betrachten den Maßraum  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$  mit dem Zählmaß  $\zeta$ . Sie haben in den Übungen schon gesehen, dass Integration auf  $\mathbb{N}$  bezüglich des Zählmaßes genau der unendlichen Summation einer Reihe entspricht. Dementsprechend ist  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  genau dann in  $L^p(\mathbb{N})$ , wenn

$$\|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{N}} |f|^p d\zeta \right)^{1/p} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p \right)^{1/p}$$

endlich ist. Wir finden also, dass  $L^p(\mathbb{N}) = \ell^p$  mit den aus der Analysis II bekannten Räumen der  $p$ -summierbaren Folgen  $\ell^p$  ist.

Man beachte, dass in diesem Fall wegen des Zählmaßes Gleichheit fast überall und Gleichheit das selbe ist, so dass wir nicht zwischen  $\mathcal{L}^p(\mathbb{N})$  und  $L^p(\mathbb{N})$  unterscheiden müssen.

## 5.4 Vergleich von $L^p$ -Räumen

Man kann nachrechnen, dass  $\ell^p \subseteq \ell^r$  für  $1 \leq p < r \leq \infty$  und  $\|x\|_r \leq \|x\|_p$  für  $x \in \ell^p$  gilt. Im Allgemeinen gibt es aber für  $p < r$  keinen Zusammenhang zwischen  $L^p$  und  $L^r$ , d. h. es ist weder  $L^p \subseteq L^r$  noch  $L^p \supseteq L^r$  (Übung: belegen Sie das durch Beispiele). Für *endliche* Maßräume lassen sich solche Aussagen aber treffen.

**Satz 5.19.** Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein endlicher Maßraum und  $0 \leq p < r \leq \infty$ . Dann ist

$$L^r(X; \mathbb{K}) \subseteq L^p(X; \mathbb{K}).$$



*Beweis.* Für  $p = 0$  ist nichts zu zeigen. Es sei also  $p > 0$  und  $f \in L^r$ . Für  $r = \infty$  folgt die Behauptung sofort aus

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^p d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(X).$$

Ist  $r < \infty$ , so wählen wir  $q$  so, dass  $1/p = 1/r + 1/q$  gilt und wenden die Hölder-Ungleichung (Satz 5.5) auf  $f$  und  $g = \chi_X$  an. Das ergibt

$$\|f\|_p = \|f\chi_X\|_p \leq \|f\|_r \|\chi_X\|_q = \|f\|_r \left( \int_X d\mu \right)^{1/q} = \|f\|_r \mu(X)^{1/q}. \quad \square$$

**Satz 5.20.** Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein endlicher Maßraum. Für  $f \in L^\infty$  ist

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

*Beweis.* Falls  $f = 0$  fast überall ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also  $\|f\|_\infty > 0$ . Wegen  $f \in L^\infty$  ist

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(X), \quad \text{also} \quad \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \mu(X)^{1/p}.$$

Hieraus folgt

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \lim_{p \rightarrow \infty} \mu(X)^{1/p} = \|f\|_\infty.$$

Andererseits gilt für alle  $0 < \alpha < \|f\|_\infty$  nach der Tschebyscheff-Ungleichung aus Satz 5.8

$$\|f\|_p^p \geq \alpha^p \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}),$$

und somit wie oben  $\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \alpha$ . Da dies für alle  $\alpha < \|f\|_\infty$  gilt, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 5.21** (Interpolationsungleichung). Seien  $p_0, p_1 \in (0, \infty]$ ,  $s \in (0, 1)$  und

$$\frac{1}{p_s} := \frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{p_1}.$$

Ist  $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ , so ist  $f \in L^{p_s}$ , und es gilt die Interpolationsungleichung

$$\|f\|_{p_s} \leq \|f\|_{p_0}^{1-s} \|f\|_{p_1}^s.$$

*Beweis.* Für  $g := |f|^{(1-s)p_s}$  und  $h := |f|^{sp_s}$  ist  $g \in L^{\frac{p_0}{(1-s)p_s}}$  und  $h \in L^{\frac{p_1}{sp_s}}$  sowie

$$gh = |f|^{(1-s)p_s + sp_s} = |f|^{p_s}.$$

Hieraus folgt wegen  $\frac{(1-s)p_s}{p_0} + \frac{sp_s}{p_1} = p_s \left( \frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{p_1} \right) = 1$

$$\|f\|_{p_s}^{p_s} = \|gh\|_1 \leq \|g\|_{\frac{p_0}{(1-s)p_s}} \cdot \|h\|_{\frac{p_1}{sp_s}} = \|f\|_{p_0}^{(1-s)p_s} \cdot \|f\|_{p_1}^{sp_s}$$

unter Verwendung der Hölder-Ungleichung.  $\square$

**Satz 5.22.** Sei  $p \in [1, \infty]$ . Dann lässt sich jedes  $f \in L^p$  zerlegen in  $f = g + h$  mit  $h \in L^1$  und  $g \in L^\infty$ .

*Beweis.* Die Aussage ist klar für  $p = \infty$ . Sei also  $p < \infty$  und  $f \in L^p$ . Sei  $A := \{x \in X : |f| \geq 1\}$ . Dann ist offenbar  $g := \chi_{X \setminus A} f \in L^\infty$ , und für  $h := \chi_A f$  folgt aus

$$\int_X |h| d\mu = \int_A |f| d\mu \leq \int_A |f|^p d\mu \leq \int_X |f|^p d\mu < \infty,$$

dass  $h \in L^1$ . Offenbar ist  $f = g + h$ . □

## 5.5 Berechnung der $L^p$ -Norm

Hier stellen wir einige Aussagen zur  $L^p$ -Norm zusammen.

**Satz 5.23.** Seien  $(X, \mathcal{S}, \mu)$   $\sigma$ -endlich,  $p \in [1, \infty]$  und  $p, q$  Hölder-konjugierte Exponenten, d.h.  $1/p + 1/q = 1$ .<sup>3</sup> Für jedes  $f \in L^p$  ist dann

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \sup \left\{ \left| \int_X fg d\mu \right| : g \in L^q, \|g\|_q \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int_X f\bar{g} d\mu \right| : g \in L^q, \|g\|_q \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_X |fg| d\mu : g \in L^q, \|g\|_q \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Für  $\|f\|_p = 0$  sind alle Gleichheiten erfüllt. Sei also  $\|f\|_p > 0$ . Wir bezeichnen die drei Suprema der Reihe nach mit  $S_1, S_2$  und  $S_3$ . Offenbar ist  $S_1 = S_2$  und  $S_1 \leq S_3$  wegen der Dreiecksungleichung. Ist  $g \in L^q$  und  $\|g\|_q \leq 1$ , so liefert die Hölder-Ungleichung

$$\int_X |fg| d\mu = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \leq \|f\|_p.$$

Es ist also stets  $S_3 \leq \|f\|_p$ . Zum Beweis der noch ausstehenden Ungleichung  $\|f\|_p \leq S_1$  unterscheiden wir drei Fälle.

**1. Fall  $p = 1$ :** Wir betrachten die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & \text{falls } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für diese ist  $\|g\|_\infty \leq 1$  und

$$\int_X fg d\mu = \int_X |f| d\mu = \|f\|_1.$$

Hieraus folgt  $\|f\|_1 \leq S_1$ .

---

<sup>3</sup>Hier und im Weiteren ist für  $p = \infty$  als Hölder-konjugierter Index  $q = 1$  zu wählen und umgekehrt, vgl. Satz 5.14.

**2. Fall**  $1 < p < \infty$ : Für  $f \in L^p$  setzen wir

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} \left( \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^{p/q} & \text{falls } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\int_X |g|^q d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_X |f|^p = 1,$$

also  $\|g\|_q = 1$ , und dank  $1 + \frac{p}{q} = 1 + p(1 - \frac{1}{p}) = p$  und  $p - \frac{p}{q} = 1$  finden wir

$$\int_X fg d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}} \int_X |f|^{1+p/q} d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}} \|f\|_p^p = \|f\|_p.$$

Somit ist  $\|f\|_p \leq S_1$  wie gewünscht.

**3. Fall**  $p = \infty$ : Sei  $0 < \alpha < \|f\|_\infty$ . Wegen der  $\sigma$ -Endlichkeit gibt es ein  $A \in \mathcal{S}$  mit  $0 < \mu(A) < \infty$  und  $|f(x)| \geq \alpha$  für  $x \in A$ . Die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} \frac{1}{\mu(A)} & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es ist  $\|g\|_1 = 1$ . Ferner gilt

$$\int_X fg d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f| d\mu \geq \alpha.$$

Dies zeigt  $S_1 \geq \alpha$  für alle  $0 < \alpha < \|f\|_\infty$  und folglich ist  $\|f\|_\infty \leq S_1$ .  $\square$

**Satz 5.24.**  $\diamond$  Die Gleichheit

$$\left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} = \sup \left\{ \int_X |fg| d\mu : g \in L^q, \|g\|_q \leq 1 \right\} =: S$$

gilt auch, wenn die linke Seite  $+\infty$  ist.

*Beweis.* Sei  $r > 0$ . Wegen der  $\sigma$ -Endlichkeit existiert ein  $A \in \mathcal{S}$  mit  $\mu(A) < \infty$  und

$$\int_A |f|^p d\mu > r + 1.$$

Für  $m \in \mathbb{N}$  sei  $B_m := \{x \in A : |f(x)| \leq m\}$ . Die Folge  $(B_m)$  wächst monoton, und es ist  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m = A$ . Für das Maß

$$\varphi(C) := \int_C |f|^p d\mu, \quad C \in \mathcal{S},$$

gilt daher  $\varphi(B_m) \nearrow \varphi(A)$ . Insbesondere gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$\infty > \int_{B_m} |f|^p d\mu > r.$$

Wegen  $f \in L^p(B_m; \mathbb{K})$  gibt es (wie oben gezeigt) ein  $g \in L^q(B_m; \mathbb{K})$  mit

$$\int_{B_m} fg d\mu = \int_{B_m} |f|^p d\mu \geq r.$$

Die Funktion

$$G(x) := \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \in B_m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gehört dann zu  $L^q$ , und

$$\int_X fg d\mu = \int_{B_m} fg d\mu \geq r.$$

Dies zeigt  $S \geq r$  und da  $r > 0$  beliebig war, folgt  $S = \infty$ . □

**Satz 5.25.** Sei  $f \in L^0$  und  $p \in [1, \infty)$ . Dann ist  $f \in L^p$  genau dann, wenn

$$p \int_{[0, \infty]} t^{p-1} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) dt < \infty.$$

In diesem Fall ist der Term auf der linken Seite der Ungleichung gleich  $\|f\|_p^p$ .

*Beweisidee.*  $\diamond$  Beide Aussagen implizieren, dass  $f$  außerhalb einer  $\sigma$ -endlichen Menge verschwindet. Wir beschränken uns daher von vornherein auf den Fall, dass  $X$   $\sigma$ -endlich ist.

Sei zunächst  $p = 1$  und  $f \in L^p$ . Wir betrachten das Produktmaß  $\mu \otimes \lambda_1$  und die Menge

$$M := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq |f(x)|\}.$$

Nach dem Satz von Fubini ist

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_X |f| d\mu = (\mu \otimes \lambda)(M) = \int_{X \times \mathbb{R}} \chi_M d(\mu \otimes \lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_X \chi_M(x, t) d\mu(x) d\lambda(t) \\ &= \int_{[0, \infty]} \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq t\}) dt. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die Ungleichung

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| = t\}) > 0 \tag{5.1}$$

nur für höchstens abzählbar viele  $t \in [0, \infty]$  gelten kann. Da jede abzählbare Teilmenge von  $\mathbb{R}$  eine Lebesgue-Nullmenge ist, erhalten wir hieraus

$$\int_{[0, \infty]} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) dt = \int_{[0, \infty]} \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq t\}) dt = \|f\|_1,$$

also die Behauptung. Angenommen, (5.1) gelte für überabzählbar viele  $t$ . Dann findet man  $n, k \in \mathbb{N}$  derart, dass

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| = t\}) > 1/n$$

für unendlich viele  $t \geq 1/k$ . Dies steht aber im Widerspruch zu  $\|f\|_1 < \infty$ .

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass  $\int_{[0, \infty]} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) dt < \infty$ . Dann ist  $\mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) < \infty$  für alle  $t > 0$ . Wir setzen

$$A_n := \{x \in X : 1/n < |f(x)| \leq n\}.$$

Dann ist  $\mu(A_n) < \infty$  und  $f_n := f \chi_{A_n}$  beschränkt, also  $f_n \in L^1$ . Nach dem schon bewiesenen Teil gilt somit

$$\begin{aligned} \int_X |f_n| d\mu &= \int_{[0, \infty]} \mu(\{x \in X : |f_n(x)| > t\}) dt \\ &\leq \int_{[0, \infty]} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) dt < \infty. \end{aligned}$$

Wegen  $|f_n| \nearrow |f|$  liefert der Satz von der monotoner Konvergenz, dass

$$\int_X |f| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| d\mu \leq \int_{[0, \infty]} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) dt < \infty.$$

Dies zeigt, dass  $f \in L^1$ .

Schließlich betrachten wir den Fall  $p > 1$ . Aus dem bereits Gezeigten folgt nach Substitution  $t := s^p$

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_X |f|^p d\mu = \int_{[0, \infty]} \mu(\{x \in X : |f(x)|^p > t\}) dt \\ &= \int_{[0, \infty]} \underbrace{ps^{p-1}}_{\text{Jacobi-Det.}} \mu(\{x \in X : |f(x)|^p > s^p\}) ds \\ &= \int_{[0, \infty]} ps^{p-1} \mu(\{x \in X : |f(x)| > s\}) ds. \quad \square \end{aligned}$$

## 5.6 Dichte Teilräume in $L^p$

Oft möchte man  $L^p$ -Funktionen durch einfachere Funktionen approximieren. Die folgenden Sätze liefern dafür die Grundlage.

**Satz 5.26.** Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum. Dann liegen für jedes  $p \in [1, \infty]$  die  $L^p$ -Stufenfunktionen dicht in  $L^p$ , d.h. für jedes  $f \in L^p$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Stufenfunktion  $g \in L^p$  mit  $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$ .

*Beweis.* Die Behauptung ist trivial für die Nullfunktion, und für  $p = \infty$  folgt sie aus dem Approximationssatz 2.4: Jede beschränkte messbare Funktion kann gleichmäßig durch Stufenfunktionen approximiert werden. Wir können daher annehmen, dass  $p \in [1, \infty)$  und  $\|f\|_p > 0$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$A_n := \{x \in X : 1/n \leq |f(x)|^p \leq n\} = |f|^{-1}\left(\left[\frac{1}{n^{1/p}}, n^{1/p}\right]\right) \in \mathcal{S}.$$

Die  $A_n$  bilden eine monoton wachsende Folge, und es ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in X : 0 < |f(x)|^p < \infty\} =: A.$$

Mit dem Satz von der monotoner Konvergenz bekommen wir

$$\int_{A_n} |f|^p d\mu = \int_X |\chi_{A_n} f|^p d\mu \nearrow \int_X |\chi_A f|^p d\mu = \int_A |f|^p d\mu = \int_X |f|^p d\mu,$$

also  $\int_{X \setminus A_n} |f|^p d\mu \rightarrow 0$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Für ein hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$  ist dann  $\mu(A_n) > 0$  und  $\|f - f\chi_{A_n}\|_p \leq \varepsilon/2$ . Wegen  $f \in L^p$  ist auch  $\mu(A_n) < \infty$ . Weiter: da die Funktion  $f\chi_{A_n}$  beschränkt ist, finden wir eine Stufenfunktion  $g : X \rightarrow \mathbb{K}$  mit

$$\|f\chi_{A_n} - g\chi_{A_n}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(A_n)^{1/p}}.$$

Wählen wir außerdem  $g = 0$  außerhalb von  $A_n$ , so liegt wegen  $\mu(A_n) < \infty$  die Funktion  $g$  in  $L^p$ . Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f - g\|_p &\leq \|f - f\chi_{A_n}\|_p + \|f\chi_{A_n} - g\chi_{A_n}\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_{A_n} |f - g|^p d\mu\right)^{1/p} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(A_n)^{1/p} \|f\chi_{A_n} - g\chi_{A_n}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

folgt dann die Behauptung. □

**Definition 5.27.** (a) Für jede stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$  definieren wir ihren Träger durch

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}.$$

(b) Wir schreiben  $C_c(\mathbb{R}^d; \mathbb{K})$  für die Menge aller stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$  mit kompaktem Träger.

(c) Der Raum der lokal-integrierbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}^d$  ist gegeben durch

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{K}) := \{f \in L^0(\mathbb{R}^d) : f|_K \in L^1(K) \text{ für jedes } K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt}\}.$$

(d) Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{K})$  und

$$\mathcal{G}_f := \{G \subseteq \mathbb{R}^d : G \text{ offen und } f = 0 \text{ fast überall auf } G\}.$$

Dann ist der Träger von  $f$  gegeben durch

$$\text{supp } f := \mathbb{R}^d \setminus \left( \bigcup_{G \in \mathcal{G}_f} G \right).$$

Offenbar ist nach beiden Definitionen der Träger von  $f$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$ . Machen Sie sich außerdem klar, dass die beiden Definition im Falle einer stetigen Funktion  $f$  zusammenfallen und warum man den Träger für  $f \in L^1_{\text{loc}}$  so kompliziert definiert.

**Satz 5.28.** Wir betrachten den Lebesgueschen Maßraum  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ . Für jedes  $p \in [1, \infty)$  liegt  $C_c(\mathbb{R}^d)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ , d. h. für jedes  $f \in L^p$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|f - h\|_p \leq \varepsilon$ .

Man beachte unbedingt, dass dieser Satz für  $p = \infty$  nicht gilt!

*Beweis.* Für die Nullfunktion ist die Sache offensichtlich. Sei also  $\|f\|_p > 0$  und  $\varepsilon > 0$ . Wie nunmehr bereits gewohnt schneiden wir  $f$  ab und betrachten die Mengen  $A_k := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 < k \text{ und } |f(x)| \leq k\}$ . Für ein hinreichend großes  $k \in \mathbb{N}$  ist dann

$$\lambda_d(A_k) > 0 \quad \text{und} \quad \|f - f\chi_{A_k}\|_p < \varepsilon/2.$$

Der Vorteil ist, dass  $f\chi_{A_k}$  beschränkt ist und einen kompakten Träger besitzt. Satz 3.23 (Luzin) liefert daher eine abgeschlossene Menge  $F \subseteq A_k$  derart, dass  $f|_F : F \rightarrow \mathbb{K}$  stetig ist und  $\lambda_n(A_k \setminus F) \leq \varepsilon^p(8k)^{-p}$  ist.

Weiter: auf Grund der Regularität des Lebesgue-Maßes auf  $\mathbb{R}^d$ , vgl. Satz 3.20, finden wir eine offene Menge  $G$  mit  $A_k \subseteq G \subseteq B(0, k)$  und  $\lambda_n(G \setminus F) < \varepsilon^p(4k)^{-p}$ . Nun benötigen wir einen Import aus der Topologie: Der Ausdehnungssatz von Tietze besagt, dass es eine stetige Funktion  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$h(x) = f(x) \text{ für } x \in F, \quad h(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^d \setminus G,$$

und

$$\|h\|_\infty \leq \sup_{x \in F} |f(x)| \leq k.$$

Wegen  $\text{supp } h \subseteq \overline{B(0, k)}$  ist  $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$ , und wegen

$$\begin{aligned} \|f - h\|_p &\leq \|f - f\chi_{A_k}\|_p + \|f\chi_{A_k} - h\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f\chi_{A_k} - h|^p d\lambda_d \right)^{1/p} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left( \int_{G \setminus F} |f\chi_{A_k} - h|^p d\lambda_d + \int_F |f\chi_{A_k} - h|^p d\lambda_d \right)^{1/p} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left( \int_{G \setminus F} |f\chi_{A_k} - h|^p d\lambda_d \right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \lambda_d(G \setminus F)^{1/p} 2k \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ist  $h$  die gesuchte Funktion. □

## 5.7 Der Lebesguesche Differentiationssatz

In diesem Abschnitt arbeiten wir im Lebesgueschen Maßraum  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ . Für stetige Funktionen  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$  gilt für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_d(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f d\lambda_d = f(x), \quad (5.2)$$

d. h. die Mittelwerte der Funktion konvergieren bei schrumpfender Kugel, über die gemittelt wird, gegen den Funktionswert im Kugelmittelpunkt. Dieser Effekt ist uns besonders im Eindimensionalen bekannt. Dort kennen Sie ihn zumindest für stetige Funktionen gut:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y) dy \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{h} \left( \int_0^x f(y) dy - \int_0^{x-h} f(y) dy \right) + \frac{1}{h} \left( \int_0^{x+h} f(y) dy - \int_0^x f(y) dy \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{F(x) - F(x-h)}{h} + \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right) = F'(x), \end{aligned} \quad (5.3)$$

für eine Stammfunktion  $F$  einer stetigen Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Das Ziel dieses Abschnitts ist, den folgenden Satz zu beweisen, der besagt, dass für integrable Funktionen die Gleichheit in (5.2) zumindest fast überall richtig ist. Der Name des Satzes erklärt sich über den Zusammenhang in (5.3).

**Satz 5.29** (Lebesguescher Differentiationssatz). *Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Dann gilt für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_d(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f d\lambda_d = f(x). \quad (5.4)$$



Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einige Vorbereitungen.

**Definition 5.30.** Für  $x \in \mathbb{R}^d$  sei  $\mathcal{B}_x$  die Menge aller offenen Kugeln in  $\mathbb{R}^d$ , die  $x$  enthalten. Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  heißt

$$Mf(x) := \sup_{B \in \mathcal{B}_x} \frac{1}{\lambda_d(B)} \int_B |f| d\lambda_d$$

die Hardy-Littlewood-Maximalfunktion oder kurz die Maximalfunktion von  $f$ . Sie wird in der Literatur auch manchmal als Maximaloperator bezeichnet.

Wir sammeln ein paar Eigenschaften dieser Maximalfunktion.

**Satz 5.31.** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist  $Mf : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar, es gilt  $Mf < \infty$  fast überall, und für jedes  $\alpha > 0$  ist

$$\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > \alpha\}) \leq \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (5.5)$$

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf das folgende geometrische Lemma, welches wir hier ohne Beweis verwenden wollen, bzw. dessen Beweis als Übungsaufgabe verbleibt.

**Lemma 5.32.** Es seien  $N \in \mathbb{N}$  und  $B_1, B_2, \dots, B_N$  Kugeln in  $\mathbb{R}^d$ . Dann existiert ein  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$  und eine Auswahl  $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$  obiger Kugeln, so dass diese paarweise disjunkt sind und

$$\lambda_d\left(\bigcup_{\ell=1}^N B_\ell\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^k \lambda_d(B_{i_j})$$

gilt.

*Beweis von Satz 5.31.* Für den Nachweis, dass  $Mf$  messbar ist, genügt es zu zeigen, dass für jedes  $\alpha > 0$  die Menge

$$E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > \alpha\} = (Mf)^{-1}((\alpha, \infty])$$

offen ist (warum?). Dazu sei  $\alpha > 0$  und  $x_0 \in E_\alpha$ . Dann gilt  $Mf(x_0) > \alpha$ , d. h. es gibt eine offene Kugel  $B_{x_0} \in \mathcal{B}_{x_0}$  mit

$$\frac{1}{\lambda_d(B_{x_0})} \int_{B_{x_0}} |f| d\lambda_d > \alpha.$$

Für alle  $x \in B_{x_0}$  gilt dann ebenfalls

$$Mf(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}_x} \frac{1}{\lambda_d(B)} \int_B |f| d\lambda_d \geq \frac{1}{\lambda_d(B_{x_0})} \int_{B_{x_0}} |f| d\lambda_d > \alpha.$$

Also ist  $B_{x_0} \subseteq E_\alpha$ , und  $E_\alpha$  ist offen.

Wir zeigen nun die Abschätzung (5.5). Aus dieser folgt mit Hilfe eines Grenzübergangs  $\alpha \rightarrow \infty$  auch, dass  $Mf$  fast überall endlich ist.

Sei  $\alpha > 0$ . Wie oben betrachten wir die Mengen  $E_\alpha$  und wählen wie dort für jedes  $x \in E_\alpha$  eine offene Kugel  $B_x \in \mathcal{B}_x$  mit

$$\frac{1}{\lambda_d(B_x)} \int_{B_x} |f| d\lambda_d > \alpha. \quad (5.6)$$

Sei  $K \subseteq E_\alpha$  eine kompakte Menge. Dann bildet  $\{B_x : x \in K\}$  eine offene Überdeckung von  $K$ , aus der man eine endliche Teilüberdeckung  $\{B_{x_1}, B_{x_2}, \dots, B_{x_N}\}$  von  $K$  auswählen kann. Von dieser wiederum können wir nach Lemma 5.32 eine paarweise disjunkte Teilauswahl  $B_{x_{i_1}}, B_{x_{i_2}}, \dots, B_{x_{i_k}}$  so treffen, dass

$$\lambda_d(K) \leq \lambda_d\left(\bigcup_{\ell=1}^N B_{x_\ell}\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^k \lambda_d(B_{x_{i_j}})$$

gilt. Wir verwenden nun (5.6) und die paarweise Disjunktheit der zuletzt ausgewählten Kugeln. Das liefert

$$\begin{aligned} \lambda_d(K) &\leq 3^d \sum_{j=1}^k \frac{1}{\alpha} \int_{B_{x_{i_j}}} |f| d\lambda_d = \frac{3^d}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^k B_{x_{i_j}}} |f| d\lambda_d \\ &\leq \frac{3^d}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f| d\lambda_d = \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Da  $K$  eine beliebige kompakte Teilmenge von  $E_\alpha$  war, folgt die Behauptung aus der Regularität des Lebesgue-Maßes in Satz 3.20.  $\square$

Wir können nun den Lebesgueschen Differentiationssatz beweisen.

*Beweis von Satz 5.29.* Es sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Zunächst beobachten wir, dass (5.4) genau dann gilt, wenn

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\lambda_d(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f d\lambda_d - f(x) \right| = 0. \quad (5.7)$$

Wir zeigen jetzt: Für alle  $\alpha > 0$  hat die Menge

$$F_\alpha := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\lambda_d(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f d\lambda_d - f(x) \right| > 2\alpha \right\}$$

das Maß Null. Dann hat auch die Menge  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$  das Maß Null. Diese Menge enthält gerade diejenigen Punkte in  $\mathbb{R}^d$ , für die (5.7) und damit auch (5.4) nicht gilt.

Seien  $\alpha > 0$  und  $\varepsilon > 0$ . Mit Hilfe von Satz 5.28 bekommen wir eine Funktion  $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$ . Nun gilt mit ein paar nahrhaften Nullen und der Definition der Hardy-Littlewood-Maximalfunktion

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\lambda_d(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f d\lambda_d - f(x) \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{\lambda_d(U_r(x))} \int_{U_r(x)} (f - g) d\lambda_d \right| + \left| \frac{1}{\lambda_d(U_r(x))} \int_{U_r(x)} g d\lambda_d - g(x) \right| \\ & \quad + |g(x) - f(x)| \\ & \leq |[M(f - g)](x)| + \left| \frac{1}{\lambda_d(U_r(x))} \int_{U_r(x)} g d\lambda_d - g(x) \right| + |g(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Werfen wir über diese Ungleichung den Limes superior für  $r$  gegen Null, so geht der zweite Summand gegen Null ( $g$  ist ja eine stetige Funktion), und wir erhalten

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\lambda_d(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f d\lambda_d - f(x) \right| \leq |[M(f - g)](x)| + |g(x) - f(x)|.$$

Also haben wir

$$F_\alpha \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : |[M(f - g)](x)| + |f(x) - g(x)| > 2\alpha\}.$$

Damit eine Summe von zwei Summanden größer als  $2\alpha$  ist, muss zumindest einer der Summanden größer als  $\alpha$  sein. Das bedeutet:

$$F_\alpha \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : |[M(f - g)](x)| > \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x) - g(x)| > \alpha\}.$$

Es gilt nach Satz 5.31

$$\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d : |[M(f - g)](x)| > \alpha\}) \leq \frac{3^d}{\alpha} \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{3^d \varepsilon}{\alpha}$$

und nach der Tschebyscheff-Ungleichung (Satz 5.8)

$$\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x) - g(x)| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Zusammen liefert das

$$\lambda_d(F_\alpha) \leq \frac{3^d + 1}{\alpha} \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig war, folgt  $\lambda_d(F_\alpha) = 0$ . □

**Definition 5.33.** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Ein  $x \in \mathbb{R}^d$ , für das (5.4) gilt, heißt Lebesgue-Punkt von  $f$ .

Als Folgerung aus dem Differentiationssatz können wir eine Lebesgue-Version der ersten Hälfte des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung beweisen.

**Folgerung 5.34.** Seien  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  mit  $a < b$  und  $f \in L^1((a, b))$ . Weiter sei  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$  gegeben durch  $F(x) := \int_{(a, x)} f d\lambda_1$ . Dann ist  $F$  fast überall differenzierbar und  $F' = f$  in  $L^1((a, b))$ .

*Beweis.* Um die Differenzierbarkeit von  $F$  nachzuweisen, macht man die Rechnung in (5.3) von rechts nach links. Bis vor das letzte Gleichheitszeichen, also dem ersten in (5.3) sind das rein algebraische Umformungen. Diese letzte Gleichheit folgt dann genau nach dem Lebesgueschen Differentiationssatz für fast alle  $x \in (a, b)$ . Man beachte, dass man  $f$  durch Null zu einer Funktion aus  $L^1(\mathbb{R})$  fortsetzen kann.  $\square$

Eine natürliche Frage ist nun: Wie sieht es mit der anderen Hälfte des Hauptsatzes aus: Für differenzierbares  $f$  gilt  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ? Der gilt für  $f \in C^1([a, b])$  natürlich auch für das Lebesgue-Integral, denn für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen stimmen Lebesgue- und Regelintegral ja überein.

Es gibt aber auch hier eine in den Voraussetzungen abgeschwächte “Lebesgue-Version” des Satzes, die wir hier nur angeben wollen. Dazu benötigen wir zunächst eine Definition.

**Definition 5.35.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Dann ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  absolut stetig, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $m \in \mathbb{N}$  und alle  $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_m < b_m \leq b$  mit  $\sum_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta$  gilt

$$\sum_{k=1}^m |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Eine wichtige Eigenschaft absolut stetiger Funktionen ist, dass diese fast überall differenzierbar sind. Außerdem ist jede absolut stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ , die  $f'(x) = 0$  fast überall erfüllt, eine konstante Funktion. (Achtung: Es gibt durchaus stetige Funktionen, die fast überall differenzierbar sind und Ableitung Null haben, aber nicht konstant sind!)

Wir können nun eine vollständige Version des Hauptsatzes für das Lebesgue-Integral formulieren.

**Satz 5.36.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f \in L^1((a, b))$ .

- (a) Ist  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  gegeben durch  $F(x) := \int_{(a, x)} f d\lambda_1$ , so ist  $F$  absolut stetig und es gilt  $\lambda_1$ -fast überall  $F' = f$ .
- (b) Ist  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  absolut stetig und setzt man  $F'(x) = 0$  in allen Punkten, in denen  $F$  nicht differenzierbar ist, so ist  $F' \in L^1((a, b))$  und es gilt

$$F(x) - F(a) = \int_{(a, x)} F' d\lambda_1.$$

Im weiteren Verlauf werden wir den Hauptsatz nur in der folgenden Version brauchen, in der der Begriff der absoluten Stetigkeit versteckt ist.

**Folgerung 5.37.** *Ist  $f \in \mathcal{L}^1((a, b))$ , existiert  $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$  in jedem Punkt  $x \in (a, b)$  und gilt  $f' \in \mathcal{L}^1((a, b))$ , so ist  $f$  absolut stetig und es gilt für alle  $x \in (a, b)$ :*

$$f(x) - f(a) = \int_{(a, x)} f' d\lambda_1, \quad x \in (a, b).$$

Achtung, die Bedingung, dass die Ableitung von  $f$  in jedem Punkt existiert, ist entscheidend. „Fast überall differenzierbar“ genügt hier nicht als Voraussetzung!

Weitere Informationen zur absoluten Stetigkeit und zum Beweis des Hauptsatzes finden Sie in Kapitel 7, Abschnitt 4 des Buches von Elstrodt.

## 6 Faltung und Fouriertransformation auf $\mathbb{R}^d$

### 6.1 Die Translation auf $L^p$

Viele Aussagen dieses Kapitels sind verknüpft mit der Translationsinvarianz des Lebesgueschen Maßes und des Integrals

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

für  $f \in L^0(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$  und  $y \in \mathbb{R}^d$ . Um diese genauer zu studieren, vereinbaren wir zwei Schreibweisen.

**Definition 6.1.** Für  $a \in \mathbb{R}^d$  bezeichnen wir mit

$$(\tau_a f)(x) := f(x+a) \text{ bzw. } \tilde{f}(x) := f(-x)$$

die Translation von  $f$  um  $a$  bzw. die Inversion von  $f$ .

Wir beobachten, dass für eine messbare Funktion  $f$  auch  $\tau_a f$  und  $\tilde{f}$  in  $L^0$  liegen und dass die Abbildungen  $f \mapsto \tau_a f$  und  $f \mapsto \tilde{f}$  linear sind.

**Satz 6.2.** (a) Sei  $p \in [1, \infty]$  und  $f \in L^p$ . Dann ist  $\|f\|_p = \|\tilde{f}\|_p = \|\tau_a f\|_p$  für alle  $a \in \mathbb{R}^d$ .

(b) Ist  $p \in [1, \infty)$ , so ist die Abbildung  $\mathbb{R}^d \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $a \mapsto \tau_a f$  stetig.

*Beweis.* Die erste Behauptung folgt sofort aus der Translations- und Inversionsinvarianz von  $\lambda_d$ . Den Beweis der Stetigkeitsaussage zerlegen wir in drei Schritte.

**1. Schritt:** Für  $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$  und  $a_0 \in \mathbb{R}^d$  gibt es ein  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt mit  $\lambda_d(K) > 0$  und  $\text{supp}(\tau_a f) \subseteq K$  für alle  $a \in U_1(a_0)$ .

Seien  $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$  und  $a_0 \in \mathbb{R}^d$ . Für jedes  $a \in \mathbb{R}^d$  ist

$$\text{supp}(\tau_a f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x+a) \neq 0\}} = \overline{\{y-a \in \mathbb{R}^d : f(y) \neq 0\}} = \text{supp}(f) - a.$$

Es gilt weiter

$$\tau_a f(x) = f(x+a) = f(x+a_0+a-a_0) = \tau_{a-a_0} \tau_{a_0} f(x)$$

und das liefert uns für alle  $a \in U_1(a_0)$

$$\text{supp}(\tau_a f) = \text{supp}(\tau_{a-a_0} \tau_{a_0} f) = \text{supp}(\tau_{a_0} f) + a_0 - a \subseteq \text{supp}(\tau_{a_0} f) + K_1(0) =: K.$$

Sollte durch einen dummen Zufall dieses  $K$  eine Nullmenge sein, wählen wir schließlich ein größeres kompaktes  $K$  mit strikt positivem Maß.

**2. Schritt: Die Behauptung gilt für  $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ .**

Seien wieder  $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$  und  $a_0 \in \mathbb{R}^d$  und sei  $K$  die zugehörige Menge aus Schritt 1. Da  $f$  gleichmäßig stetig ist, existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta \in (0, 1)$  derart, dass

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x+a) - f(x+a_0)| < \frac{\varepsilon}{\lambda_d(K)^{1/p}}$$

für alle  $a$  mit  $|a - a_0| < \delta$ . Damit erhalten wir

$$\|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+a) - f(x+a_0)|^p dx \leq \frac{\varepsilon^p}{\lambda_d(K)} \lambda_d(K) = \varepsilon^p$$

für alle  $|a - a_0| < \delta$ . Dies zeigt die Stetigkeit.

**3. Schritt: Die Behauptung gilt für alle  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ .**

Seien  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und  $a_0 \in \mathbb{R}^d$ , sowie  $\varepsilon > 0$ . Wegen Satz 5.28 finden wir  $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$ . Auf  $g$  können wir das oben Bewiesene anwenden, d. h. wir finden ein passendes  $\delta > 0$  so, dass

$$\begin{aligned} \|\tau_a f - \tau_{a_0} f\|_p &\leq \|\tau_a f - \tau_a g\|_p + \|\tau_a g - \tau_{a_0} g\|_p + \|\tau_{a_0} g - \tau_{a_0} f\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + \|\tau_a g - \tau_{a_0} g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle  $a$  mit  $|a - a_0| < \delta$ . □

## 6.2 Die Faltung

**Definition 6.3.** Seien  $f, g \in L^0(\mathbb{R}^d)$ . Falls für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$  das Integral

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy \tag{6.1}$$

existiert, so heißt  $f * g$  die Faltung von  $f$  und  $g$ .

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Kriterien dafür, dass  $f * g$  existiert und sogar in einem  $L^p$ -Raum liegt.

**Satz 6.4.** Sind  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , so existiert für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$  das Integral aus (6.1). Ferner ist  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ .

*Beweis.* Der Satz von Tonelli und Satz 6.2 (a) liefern

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \cdot \|\tau_{-y} f\|_1 dy = \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \|f\|_1 dy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgen alle Behauptungen. □

**Satz 6.5.** Der Raum  $L^1(\mathbb{R}^d)$  versehen mit der Faltung  $f * g$  als Multiplikation ist eine kommutative Banachalgebra, d. h.  $L^1(\mathbb{R}^d)$  ist ein Banachraum und es gilt  $f * g = g * f$ ,  $f * (g * h) = (f * g) * h$ ,  $(f + \alpha g) * h = f * h + \alpha(g * h)$  und  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$  für alle  $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ .

*Beweis.* Seien  $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Mit Fubini, dem Transformationssatz und der Linearität des Integrals rechnet man leicht nach, dass  $(f + \alpha g) * h = f * h + \alpha(g * h)$ ,  $f * (g * h) = (f * g) * h$  und  $f * g = g * f$ . Die Submultiplikativität der Norm wurde in Satz 6.4 bewiesen, und aus Satz 5.11 (Riesz-Fischer) wissen wir, dass  $L^1(\mathbb{R}^d)$  vollständig ist.  $\square$

**Satz 6.6.** Für  $f, g \in C_c(\mathbb{R}^d)$  gilt  $\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ . Insbesondere ist  $\text{supp}(f * g)$  kompakt.

*Beweis.* Wir werden in Satz 6.7 unter allgemeineren Voraussetzungen sehen, dass  $f * g$  stetig ist. Sei also  $x \in \mathbb{R}^d$  so, dass  $(f * g)(x) \neq 0$ . Dann ist

$$0 \neq (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy = \int_{\text{supp}(g) \cap (x - \text{supp}(f))} f(x - y)g(y) dy,$$

und folglich ist die Menge  $\text{supp}(g) \cap (x - \text{supp}(f))$  nicht leer. Es gibt also ein  $z \in \text{supp}(g) \cap (x - \text{supp}(f))$ , d. h. es ist  $z \in \text{supp}(g)$  und  $z = x - y$  mit einem  $y \in \text{supp}(f)$ . Somit ist  $x = y + z \in \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$  und daher

$$\begin{aligned} \text{supp}(f * g) &= \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : (f * g)(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)} \\ &= \text{supp}(f) + \text{supp}(g). \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichheit haben wir benutzt, dass  $\text{supp}(f) + \text{supp}(g)$  bereits abgeschlossen ist (ÜA).  $\square$

**Satz 6.7.** Seien  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $1/p + 1/q = 1$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ . Dann existiert  $(f * g)(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , und es ist  $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sowie  $f * g = g * f$ . Ferner ist die Funktion  $f * g$  gleichmäßig stetig auf  $\mathbb{R}^d$ , und für  $p, q > 1$  gilt  $(f * g)(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)| \cdot |g(y)| dy \leq \|\tau_{-x} \tilde{f}\|_p \cdot \|g\|_q = \|f\|_p \cdot \|g\|_q < \infty.$$

Dies impliziert, dass  $(f * g)(x)$  existiert und  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$  ist. Die Kommutativität  $f * g = g * f$  folgt durch Variablensubstitution.



Wir zeigen die gleichmäßige Stetigkeit. Eine der Zahlen  $p, q$  ist endlich; sei dies z. B. die Zahl  $p$ . Dann schätzen wir für  $x, z \in \mathbb{R}^d$  ab

$$|(f * g)(z) - (f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(z-y)| |g(y)| dy \leq \|\tau_{x-z}f - f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Da die Translation in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  nach Satz 6.2 stetig ist, gibt es ein  $\delta > 0$  so, dass

$$\|\tau_{x-z}f - f\|_p \leq \varepsilon, \text{ falls } |z - x| < \delta.$$

Mit der zuvor gezeigten Abschätzung folgt die gleichmäßige Stetigkeit von  $f * g$ .

Wir zeigen noch, dass  $f * g$  im Unendlichen verschwindet, falls  $p$  und  $q$  endlich sind. Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Falls  $\|f\|_p = 0$  oder  $\|g\|_q = 0$ , so ist  $f * g = 0$ , und die Behauptung ist trivial. Wir können also  $\|f\|_p > 0$ ,  $\|g\|_q > 0$  annehmen. Wegen Satz 5.28 gibt es Funktionen  $f_1, g_1 \in C_c(\mathbb{R}^d)$  mit

$$\|f - f_1\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2\|g\|_q}, \quad \|g - g_1\|_q \leq \frac{\varepsilon}{2\|f_1\|_p}.$$

Damit erhalten wir für alle  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq |((f - f_1) * g)(x)| + |(f_1 * (g - g_1))(x)| + |(f_1 * g_1)(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\|g\|_q} \|g\|_q + \|f_1\|_p \frac{\varepsilon}{2\|f_1\|_p} + |(f_1 * g_1)(x)|. \end{aligned}$$

Da  $\text{supp}(f_1 * g_1)$  nach Satz 6.6 kompakt ist, gibt es ein  $R > 0$  mit  $(f_1 * g_1)(x) = 0$  für  $|x| > R$ . Für alle  $|x| > R$  ist daher  $|(f * g)(x)| \leq \varepsilon$ .  $\square$

**Satz 6.8** (Youngsche Ungleichung). (a) Sei  $p \in [1, \infty]$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  mit

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

(b) Seien  $p, q, r \in [1, \infty]$  mit  $1/p + 1/q = 1/r + 1$  (dies impliziert  $r \geq p, q$ ). Ist  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ , so existiert  $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$  mit

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

*Beweis.* Wir zeigen nur Aussage (a). Der Beweis von (b) erfolgt mit ähnlichen Methoden (Siehe z.B. Grafakos: Classical Fourier Analysis, Theorem 1.2.12).

Seien  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $h \in L^q(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|h\|_q = 1$  und  $1/p + 1/q = 1$ . Unter Benutzung von Fubini und Satz 6.7 schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)h(x)| dy dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)h(x)| dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \| |f| * |h| \|_{\infty} dy = \|g\|_1 \|\tilde{f}\|_p \|h\|_q \\ &\leq \|g\|_1 \|f\|_p. \end{aligned}$$

Mit Satz 5.23 erhalten wir  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und  $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$ .  $\square$

**Bemerkung 6.9.**  $\diamond$  Die Youngsche Ungleichung  $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$  kann verbessert werden zu

$$\|f * g\|_r \leq C_{p,q,r}^d \|f\|_p \|g\|_q$$

mit der Konstanten

$$C_{p,q,r} = (A_p A_q A_{r'})^{1/2} \quad \text{mit} \quad A_s := \frac{s^{1/s}}{s^{1/s'}},$$

wobei  $s'$  den zu  $s$  konjugierten Exponenten bezeichnet. Die Konstante  $C_{p,q,r}^d$  ist die bestmögliche. Dies ist ein tiefliegendes Resultat von Beckner. Man bemerke aber, dass für  $r = 1$  und  $r = \infty$  die optimale Konstante gleich 1 ist, also genau diejenige, welche wir in Satz 6.4 und Satz 6.7 gefunden haben.

### 6.3 Approximative Einsen und Mollifier

**Satz 6.10.** Sei  $p \in [1, \infty)$  und  $(\varphi_n)$  eine Folge in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  mit folgenden Eigenschaften:

- (a)  $\varphi_n \geq 0$ ,<sup>4</sup>
- (b)  $\|\varphi_n\|_1 = 1$ ,
- (c) für alle  $r > 0$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U_r(0)} \varphi_n dx = 1$ .

Dann gilt  $\|f * \varphi_n - f\|_p \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) für alle  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ .

*Beweis.* Die Aussage ist trivial für  $\|f\|_p = 0$ . Sei also  $\|f\|_p > 0$ . Nach Satz 6.2 gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so dass  $\|f - \tau_y f\|_p \leq \varepsilon/2$  falls  $|y| \leq \delta$ . Wir wählen  $n_0 \in \mathbb{N}$  so groß, dass für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$\int_{U_\delta(0)} \varphi_n(x) dx \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4\|f\|_p}$$

(beachte Eigenschaft (c)). Für  $n \geq n_0$  und  $h \in L^q$  mit  $\|h\|_q \leq 1$  und  $1/p + 1/q = 1$  gilt dann

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| \varphi_n(y) |h(x)| dy dx \\ &= \int_{|y| \leq \delta} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |h(x)| dx \varphi_n(y) dy \\ & \quad + \int_{|y| > \delta} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |h(x)| dx \varphi_n(y) dy \\ &\leq \int_{|y| \leq \delta} \|\tau_{-y} f - f\|_p \|h\|_q \varphi_n(y) dy + 2\|f\|_p \|h\|_q \int_{|y| > \delta} \varphi_n(y) dy \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit Satz 5.23 erhalten wir  $\|f * \varphi_n - f\|_p \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . □

<sup>4</sup>Damit ist implizit auch gemeint, dass  $\varphi$  reellwertig sein muss

**Bemerkung 6.11.** (a) Der obige Satz zeigt, dass jede Folge  $(\varphi_n)$  mit den genannten Eigenschaften eine *approximative Eins* in der Banachalgebra  $L^1(\mathbb{R}^d)$  ist.

(b) Folgen mit den Eigenschaften (a) bis (c) aus obigem Satz können wie folgt konstruiert werden: Für  $\varphi \geq 0$  mit  $\|\varphi\|_1 = 1$  setze

$$\varphi_n(x) := n^d \varphi(nx).$$

Trivialerweise ist  $\varphi_n \geq 0$ , und mit einer Variablensubstitution  $y = nx$  sieht man auch, dass  $\|\varphi_n\|_1 = 1$ . Schließlich ist für jedes  $r > 0$

$$\int_{U_r(0)} \varphi_n(x) dx = \int_{U_r(0)} n^d \varphi(nx) dx = \int_{U_{rn}(0)} \varphi(x) dx,$$

und dieser Ausdruck geht für  $n \rightarrow \infty$  gegen 1. Damit hat die Folge  $(\varphi_n)$  die gewünschten Eigenschaften.

Beispielsweise erhalten wir aus

$$\varphi := \frac{\chi_{U_1(0)}}{\lambda_d(U_1(0))} \quad \text{die Funktionen} \quad \varphi_n = \frac{\chi_{U_{1/n}(0)}}{\lambda_d(U_{1/n}(0))}.$$

Ein weiteres wichtiges Beispiel wird durch die *Gauß-Funktion*

$$g(x) := \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-|x|^2}$$

gegeben. Ein Vorteil dieser Funktion ist, dass sie glatt ist (andere Vorteile werden wir später sehen). Mit einer einfachen Modifikation obiger Konstruktion ( $\sqrt{n}$  statt  $n$ ) sieht man, dass die Folge

$$g_n(x) = \frac{n^{d/2}}{\pi^{d/2}} e^{-n|x|^2}$$

die gewünschten Eigenschaften (a) bis (c) aus Satz 6.10 hat.

**Definition 6.12.** Für  $k \in \mathbb{N}$  bezeichne  $C^k(\mathbb{R}^d)$  die Menge aller Funktionen auf  $\mathbb{R}^d$ , für die die partiellen Ableitungen  $\partial^\alpha f$  für jeden Multi-Index  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$  mit  $|\alpha| \leq k$  existieren und stetig sind. Weiter setzen wir

$$C^\infty(\mathbb{R}^d) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\mathbb{R}^d).$$

Schließlich bezeichnen wir die Menge der Funktionen in  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit kompaktem Träger mit  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Eine Folge glatter Funktionen mit kompaktem Träger, die die Eigenschaften (a) bis (c) aus Satz 6.10 hat, verdient einen eigenen Namen.

**Definition 6.13.** Eine Folge  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit den Eigenschaften

- (a)  $\rho_n \geq 0$ ,
- (b)  $\|\rho_n\|_1 = 1$ ,
- (c)  $\text{supp}(\rho_n) \subseteq \overline{U_{1/n}(0)}$ ,

für alle  $n \in \mathbb{N}$  heißt ein Mollifier (oder eine Mollifier-Folge).

**Beispiel 6.14.** Sei  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  eine Funktion mit

$$\text{supp } \rho \subseteq \overline{U_1(0)}, \quad \rho \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1.$$

Dann definiert

$$\rho_n(x) := n^d \rho(nx)$$

eine Mollifier-Folge. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist

$$\rho(x) := \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1, \end{cases}$$

wobei  $c$  so bestimmt wird, dass  $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1$  gilt.

## 6.4 Faltung und Ableitung

**Satz 6.15.** Sei  $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$  und  $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist  $f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ , und

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g \text{ für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k.$$

Insbesondere folgt für  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  und  $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ , dass  $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

*Beweis.* Wie oben folgt, dass  $(f * g)(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  existiert. Sei  $e_j \in \mathbb{R}^d$  ein Standardbasisvektor und  $h \in \mathbb{R}$  mit  $|h| \leq 1$ . Setze  $K := \text{supp}(f) + \overline{U_1(0)}$ . Diese Menge ist offenbar kompakt, und es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} ((f * g)(x + he_j) - (f * g)(x)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h} (f(x + he_j - y) - f(x - y)) g(y) dy \\ &= \int_{x-K} \frac{1}{h} (f(x + he_j - y) - f(x - y)) g(y) dy, \end{aligned}$$

wobei der Integrand für  $h \rightarrow 0$  gegen  $\partial_j f(x - y)g(y)$  konvergiert. Außerdem ist

$$\left| \frac{1}{h} (f(x + he_j - y)g(y) - f(x - y)g(y)) \right| \leq \|\partial_j f\|_\infty |g(y)|.$$

Mit dem Satz von Lebesgue erhalten wir  $\partial_j (f * g)(x) = ((\partial_j f) * g)(x)$ . Der allgemeine Fall folgt nun leicht mit vollständiger Induktion.  $\square$

**Folgerung 6.16.** Für  $1 \leq p < \infty$  ist  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

*Beweis.* Sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  beliebig und  $\varepsilon > 0$ . Nach Satz 5.28 gibt es ein  $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$ . Wir wählen eine Mollifier-Folge  $(\rho_n)$  und glätten  $g$  durch  $g_n := g * \rho_n$ . Wegen Satz 6.6 und 6.15 ist  $g_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ , und Satz 6.10 liefert  $g_n \rightarrow g$  in  $L^p$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für hinreichend große  $n$  ist also  $\|g_n - g\|_p < \varepsilon/2$ . Dies ergibt

$$\|f - g_n\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p \leq \varepsilon. \quad \square$$

**Folgerung 6.17** (Urysohn-Lemma,  $C^\infty$ -Version). Sei  $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $K \subseteq \Omega$  kompakt. Dann gibt es ein  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $\text{supp}(f) \subseteq \Omega$ ,  $0 \leq f \leq 1$  und  $f(x) = 1$  für alle  $x \in K$ .

*Beweis.* Sei  $(\rho_n)$  eine Mollifier-Folge. Wir wählen  $n$  und  $\varepsilon$  so, dass  $0 < 1/n < \varepsilon < \varepsilon + 1/n < \text{dist}(K, \Omega^c)$  und setzen

$$U_\varepsilon := \{y \in \Omega : \text{dist}(y, K) < \varepsilon\} \quad \text{und} \quad f := \rho_n * \chi_{U_\varepsilon}.$$

Dann ist  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  und  $\text{supp}(\rho_n * \chi_{U_\varepsilon}) \subseteq \overline{U_{1/n}(0)} + \overline{U_\varepsilon} \subseteq \Omega$ . Also ist  $\text{supp} f \subseteq \Omega$  kompakt. Weiter: für  $x \in K$  ist

$$f(x) = \int_{|y| \leq 1/n} \chi_{U_\varepsilon}(x - y) \rho_n(y) dy = \int_{|y| \leq 1/n} \rho_n(y) dy = 1.$$

Ferner gilt  $\|f\|_\infty \leq \|\rho_n\|_1 \|\chi_{U_\varepsilon}\|_\infty = 1$ . Da  $f \geq 0$  gilt, folgt  $0 \leq f \leq 1$ .  $\square$

## 6.5 Das Fourier-Integral: $L^1$ -Theorie

Wir wollen jetzt die Fouriertransformation einführen, die ein unverzichtbares Konzept für Analysis, Physik, Mechanik und viele weitere Bereiche ist. Am Ende wird sich mit einiger Arbeit herausstellen, dass diese eine isometrische Isometrie von  $L^2(\mathbb{R}^d)$  in sich selbst ist. Zunächst definieren wir sie aber auf  $L^1(\mathbb{R}^d)$ , da das einfacher ist.

**Definition 6.18.** Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  heißt

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

die Fouriertransformierte von  $f$ . Hier ist  $\langle x, \xi \rangle := \sum_{j=1}^d x_j \xi_j$ . Außerdem schreiben wir

$$\check{f}(\xi) := \hat{f}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$$

für die umgekehrte Fouriertransformierte.

Die Voraussetzung  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  garantiert dabei, dass die obigen Integrale existierten.

**Satz 6.19.** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist  $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $\widehat{f}$  ist stetig, und

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

*Beweis.* Aus den Definitionen folgt für  $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| |e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle}| dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = \|f\|_1,$$

d. h. es ist  $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit der gewünschten Normabschätzung. Wie zeigen noch die Stetigkeit. Sei  $\xi \in \mathbb{R}^d$  und  $(\xi_n) \subset \mathbb{R}^d$  mit  $\xi_n \rightarrow \xi$ . Dann ist

$$|\widehat{f}(\xi_n) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| |e^{-2\pi i \langle x, \xi_n \rangle} - e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}| dx \rightarrow 0$$

nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Also ist  $\widehat{f}$  stetig.  $\square$

**Definition 6.20.** Wir nennen die Abbildung

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad f \mapsto \widehat{f} = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot e^{2\pi i \langle x, \cdot \rangle} dx$$

die Fouriertransformation auf  $L^1$ .

Der folgende Satz fasst einige Eigenschaften von  $\mathcal{F}$  zusammen.

**Satz 6.21.** (a)  $\mathcal{F}$  ist linear.

(b) Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

(c) Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  gilt  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ .

(d) Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $a \in \mathbb{R}^d$  gilt  $(\tau_a f)(\xi) = e^{2\pi i \langle a, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi)$ .

*Beweis.* (a) Das folgt sofort aus der Linearität des Integrals.

(b) Mit Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx g(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{g}(x) dx. \end{aligned}$$

(c) Für  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gilt wieder mit Fubini:

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) e^{-2\pi i \langle x-y, \xi \rangle} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi) dy = \widehat{g}(\xi) \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

(d) Schließlich ist

$$\begin{aligned} \widehat{(\tau_a f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+a) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i \langle y-a, \xi \rangle} dy = e^{2\pi i \langle a, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 6.22** (Riemann-Lebesgue). Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  gilt  $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ , d. h.  $\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$  mit  $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$  für  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Aus Satz 6.21 (d) wissen wir, dass

$$\widehat{(\tau_a f)}(\xi) = e^{2\pi i \langle a, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi).$$

Für  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  sei  $a = a(\xi) := \frac{\xi}{2|\xi|^2}$ . Dann ist

$$\widehat{(\tau_a f)}(\xi) = e^{2\pi i \langle a, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi) = -\widehat{f}(\xi),$$

woraus  $2\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - \widehat{(\tau_a f)}(\xi)$  und somit

$$\begin{aligned} |2\widehat{f}(\xi)| &= |\widehat{f}(\xi) - \widehat{(\tau_{a(\xi)} f)}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - f(x+a(\xi))) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - (\tau_{a(\xi)} f)(x)| dx = \|f - \tau_{a(\xi)} f\|_1 \end{aligned}$$

folgt. Für  $|\xi| \rightarrow \infty$  ist offenbar  $a(\xi) \rightarrow 0$ . Aus der Stetigkeit der Translation auf  $L^1(\mathbb{R}^d)$  (Satz 6.2) ergibt sich daher, dass  $|\widehat{f}(\xi)| \rightarrow 0$  für  $|\xi| \rightarrow \infty$ .  $\square$

Wir sehen also, dass die Fouriertransformierte einer  $L^1$ -Funktion gegen 0 konvergiert. Wenn man mehr „Glattheit“ von  $f$  fordert, kann man dieses Abklingverhalten auch quantitativ charakterisieren und Konvergenzgeschwindigkeiten ableiten. Das ist das Thema des nächsten Abschnitts.

## 6.6 Fouriertransformation und Ableitung

**Satz 6.23.** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$  für ein  $1 \leq j \leq d$ . Dann existiert die partielle Ableitung  $\partial_j \widehat{f}$ , diese ist stetig und genügt

$$\partial_j \widehat{f} = -2\pi i (\widehat{x_j f}).$$

*Beweis.* Es ist

$$\partial_j \widehat{f}(\xi) = \partial_j \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx.$$

Zur Ableitung dieses Parameterintegrals verwenden wir Satz 2.22. Dazu brauchen wir eine integrable Majorante für die partielle Ableitung des Integranden. Tatsächlich gilt

$$\left| \partial_{\xi_j} (f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}) \right| = |f(x) (-2\pi i x_j) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}| = 2\pi |x_j f(x)|,$$

und diese Funktion ist nach Voraussetzung integrierbar. Also gilt

$$\begin{aligned} \partial_j \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \partial_{\xi_j} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}^d} x_j f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx = -2\pi i (\widehat{x_j f})(\xi). \quad \square \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Satzes beweist man das folgende Korollar induktiv. Zur Erinnerung: für jeden Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$  und für  $x \in \mathbb{C}^d$  ist

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}.$$

**Folgerung 6.24.** Sei  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  derart, dass  $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$  mit  $|\alpha| \leq k$ . Dann gilt  $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^d)$  und

$$\partial^\alpha \widehat{f} = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha| \leq k.$$

Um wie angekündigt aus der „Glattheit“ von  $f$  eine „Abfallrate“ für  $\widehat{f}$  zu folgern, benötigen wir einige Vorbereitungen.

**Lemma 6.25.** Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$  eine Funktion mit kompaktem Träger. Falls  $\partial_j f$  existiert und  $\partial_j f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$  ist, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j f(x) dx = 0.$$

*Beweis.* Wir führen den Beweis für  $j = d$ . Die anderen Fälle gehen mit mehr notationellem Aufwand analog.

Für jedes  $x' := (x_1, x_2, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$  betrachten wir die Funktion  $h_{x'} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h_{x'}(t) = f(x', t)$ . Diese ist nach Voraussetzung auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar mit  $h'_{x'}(t) = \partial_d f(x', t)$ .



Weiter ist diese Ableitung nach dem Satz von Fubini für  $\lambda_{d-1}$ -fast alle  $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$  in  $L^1(\mathbb{R})$ . Folgerung 5.37 sagt uns dann, dass für fast alle  $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$  die Funktion  $h_{x'}$  auf jedem Intervall  $[a, b]$  absolut stetig ist mit

$$h_{x'}(b) - h_{x'}(a) = \int_{(a,b)} h'_{x'} d\lambda_1.$$

Der Träger von  $f$  ist kompakt, wir können also im Folgenden  $a, b$  so wählen, dass  $\text{supp}(h_{x'}) \subseteq [a, b]$  für alle  $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$  gilt. Dann sind außerhalb von  $(a, b)$  sowohl  $h_{x'}$  als auch  $h'_{x'}$  konstant Null. Insbesondere ist also  $h_{x'}(b) = h_{x'}(a) = 0$  und es gilt  $\int_{\mathbb{R}} h'_{x'} d\lambda_1 = \int_{(a,b)} h'_{x'} d\lambda_1$ . Alles zusammengenommen finden wir mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_d f d\lambda_d &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_d f(x', t) d\lambda_1(t) d\lambda_{d-1}(x') = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} h'_{x'} d\lambda_1 d\lambda_{d-1}(x') \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{(a,b)} h'_{x'} d\lambda_1 d\lambda_{d-1}(x') \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (h_{x'}(b) - h_{x'}(a)) d\lambda_{d-1}(x') = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} 0 d\lambda_{d-1} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 6.26.** *Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$  so, dass  $\partial_j f$  existiert und  $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  gilt. Dann existieren Funktionen  $f_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $\partial_j f_n \rightarrow \partial_j f$  und  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1$ .*

*Beweis.* Der Beweis benutzt eine Abschneidetechnik. Sei  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  derart, dass  $\rho(x) = 1$  auf  $U_1(0)$  und  $\rho(x) = 0$  für  $|x| > 2$ . Ansonsten sei  $0 \leq \rho \leq 1$ . Wir setzen  $\rho_n(x) := \rho(x/n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $\rho_n(x) = 1$  für  $x \in U_n(0)$  und  $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Wir zeigen, dass  $f_n := \rho_n f$  die gewünschten Eigenschaften hat. Zunächst ist

$$\|f - f_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_n(0)} |f(x) - \rho_n(x)f(x)| dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_n(0)} |f(x)| dx.$$

und dieser letzte Ausdruck konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null (Übung).

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} \|\partial_j f - \partial_j f_n\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_j f(x) - \partial_j(\rho_n(x)f(x))| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_j f(x) - \rho_n(x)\partial_j f(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)\partial_j \rho_n(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_n(0)} |\partial_j f(x) - \rho_n(x)\partial_j f(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_n(0)} |f(x)\partial_j \rho_n(x)| dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_n(0)} |\partial_j f(x)| dx + \frac{1}{n} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |\partial_j \rho(y)| \int_{\mathbb{R}^d \setminus U_n(0)} |f(x)| dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . □

**Satz 6.27.** Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$  so, dass  $\partial_j f$  existiert und  $\partial_j f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$  gilt. Dann ist

$$\widehat{(\partial_j f)}(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi).$$

*Beweis.* Sei zunächst  $f$  eine Funktion mit kompaktem Träger. Dann erfüllt für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^d$  auch die Funktion  $x \mapsto f(x)e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}$  die Voraussetzungen von Lemma 6.25. Also liefert dieses

$$\begin{aligned} \widehat{(\partial_j f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_j f)(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}) - f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \right] dx \\ &= 0 - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (-2\pi i \xi_j) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (2\pi i \xi_j) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , d. h. die Behauptung gilt. Für allgemeines  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  nutzen wir Lemma 6.26 und approximieren  $f$  durch Funktionen  $f_n$  mit kompaktem Träger so, dass  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1$  und  $\partial_j f_n \rightarrow \partial_j f$  in  $L^1$ . Nach Satz 6.19 gilt dann

$$\widehat{\partial_j f_n} \rightarrow \widehat{\partial_j f} \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{sowie} \quad 2\pi i \xi_j \widehat{f_n}(\xi) \rightarrow 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi) \text{ für fast alle } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Da nach dem ersten Teil  $\widehat{\partial_j f_n}(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f_n}(\xi)$  gilt, folgt die Behauptung auch im allgemeinen Fall.  $\square$

Den folgenden Satz kann man nun wieder leicht mittels Induktion beweisen.

**Folgerung 6.28.** Sei  $k \in \mathbb{N}_0$  und sei  $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$  derart, dass  $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  gilt für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$  mit  $|\alpha| \leq k$ . Dann gilt

$$\widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

**Beispiel 6.29.** Wir berechnen die Fouriertransformierten von Gauß-Funktionen. Sei  $a > 0$  und  $f(x) = e^{-a|x|^2}$ . Dann gilt:

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{a}|\xi|^2}.$$

Wir zeigen dies zunächst für  $d = 1$ . In diesem Fall ist nach Satz 6.23 und Satz 6.27

$$\begin{aligned} (\widehat{f})'(\xi) &= \mathcal{F}((-2\pi i x) e^{-ax^2})(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{2\pi i}{2a} (e^{-ax^2})'\right)(\xi) \\ &= \frac{\pi i}{a} \mathcal{F}((e^{-ax^2})') = \frac{\pi i}{a} (2\pi i \xi) \widehat{f}(\xi) = -\frac{2\pi^2}{a} \xi \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Damit gilt für alle  $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{d}{d\xi} \left( e^{\frac{\pi^2}{a}\xi^2} \hat{f}(\xi) \right) = \frac{2\pi^2}{a} \xi e^{\frac{\pi^2}{a}\xi^2} \hat{f}(\xi) + e^{\frac{\pi^2}{a}\xi^2} (\hat{f})'(\xi) = 0.$$

Das bedeutet, dass  $\xi \mapsto e^{\pi^2\xi^2/a} \hat{f}(\xi)$  konstant ist. Die Konstante ergibt sich aus

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-2\pi i x \cdot 0} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

und wir finden tatsächlich

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$$

und dies ist die Behauptung für  $d = 1$ . Der allgemeine Fall folgt mit Fubini:

$$\hat{f}(\xi) = \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-ax_j^2} e^{-ix_j \xi_j} dx_j = \prod_{j=1}^d \left( \frac{\pi}{a} \right)^{1/2} e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi_j^2} = \left( \frac{\pi}{a} \right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{a}|\xi|^2}.$$

## 6.7 Fourier-Inversion

Unser Ziel ist nun, zu gegebenem  $\hat{f}$  die Funktion  $f$  zu bestimmen. Dazu erinnern wir an die Notation

$$\check{f}(\xi) := \hat{f}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$$

für  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ .

**Satz 6.30** (Inversionsformel der Fouriertransformation). *Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  derart, dass auch  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  gilt. Dann ist  $\check{\check{f}} = \hat{\hat{f}} = f$  fast überall.*

*Beweis.* Für  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$g_n(x) := e^{-\frac{\pi^2}{n^2}|x|^2}.$$

Wie wir in Beispiel 6.29 (mit  $a = \frac{\pi^2}{n^2}$ ) gesehen haben, gilt dann

$$\check{g}_n(\xi) = \hat{g}_n(-\xi) = \left( \frac{n^2}{\pi} \right)^{d/2} e^{-n^2|\xi|^2} = \pi^{-d/2} n^d e^{-|n\xi|^2} = n^d g(n\xi)$$

mit  $g(\eta) := \pi^{-d/2} e^{-|\eta|^2}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^d$ .

Dabei ist  $g \geq 0$  und mit Hilfe von Beispiel 4.18 und Fubini gilt  $\|g\|_1 = 1$ . Nach der Konstruktion aus Bemerkung 6.11 (b) erfüllt die Folge  $(\check{g}_n)$  deshalb die Voraussetzungen von Satz 6.10, ist also eine approximative Eins.

Damit konvergiert  $\check{g}_n * f$  nach Satz 6.10 in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  gegen  $f$ , ist also insbesondere eine Cauchyfolge in  $L^1(\mathbb{R}^d)$ . Nach Theorem 5.10 gibt es dann eine Teilfolge  $\check{g}_{n_m} * f$ ,

die außerdem punktweise fast überall gegen  $f$  konvergiert. Damit gilt für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} (\check{g}_{n_m} * f)(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \check{g}_{n_m}(x - y) dy \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) (\tau_x \check{g}_{n_m})(-y) dy. \end{aligned}$$

Ähnlich zu Satz 6.21 (d) gilt für  $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$  die Formel (nachrechnen!)

$$(\tau_x \check{h}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{2\pi i \langle \cdot, x \rangle} h).$$

Damit und schließlich mit Satz 6.21 (b) erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \mathcal{F}^{-1}(e^{2\pi i \langle \cdot, x \rangle} g_{n_m})(-y) dy \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \mathcal{F}(e^{2\pi i \langle \cdot, x \rangle} g_{n_m})(y) dy \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(y) e^{2\pi i \langle y, x \rangle} g_{n_m}(y) dy. \end{aligned}$$

Da  $(g_n)$  punktweise gegen 1 konvergiert, folgt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz (mit  $\hat{f} \in L^1$  als integrierbarer Majorante)

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(y) e^{2\pi i \langle y, x \rangle} \lim_{m \rightarrow \infty} g_{n_m} dy = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(y) e^{2\pi i \langle y, x \rangle} dy = \check{\hat{f}}(x).$$

Analog folgt auch  $f = \widehat{\hat{f}}$ . □

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satz ist

**Folgerung 6.31.** (a) Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $\hat{f} = 0$ . Dann ist  $f = 0$  fast überall.

(b) Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  mit  $\hat{f} = \hat{g}$  gilt  $f = g$  fast überall.

## 6.8 Der Schwartz-Raum

Wir haben in Abschnitt 6.6 gesehen, dass ein polynomiales Abklingverhalten von  $f$  im Unendlichen ( $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ) Differenzierbarkeit von  $\hat{f}$  impliziert und umgekehrt Differenzierbarkeit von  $f$  auf der Seite der Fouriertransformierten polynomiales Abklingen zur Folge hat. Mit dem Ziel, schöneres Abbildungsverhalten der Fouriertransformation zu bekommen, wollen wir jetzt einen Teilraum von  $L^1(\mathbb{R}^d)$  betrachten, der diese beiden Features der Fouriertransformation gleichermaßen berücksichtigt und damit gut zu dieser Operation passt. Dies ist der Schwartz-Raum, der alle beliebig oft differenzierbaren Funktionen, deren alle Ableitungen im Unendlichen beliebig schnell polynomiell fallen, enthält.

**Definition 6.32.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$  heißt schnellfallend, falls

$$p_k(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^k |f(x)| < \infty \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}_0.$$

Weiter heißt  $f$  eine Schwartz-Funktion, falls  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  ist und alle partiellen Ableitungen von  $f$  schnellfallend sind.

Die Menge aller Schwartz-Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

**Bemerkung 6.33.** (a) Eine Funktion  $f$  ist genau dann schnellfallend, wenn

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha| |f(x)| < \infty \quad \text{für jedes } \alpha \in \mathbb{N}_0^d$$

ist. Außerdem gilt für jede schnellfallende Funktion  $f$  und jedes  $k \in \mathbb{N}$ , dass

$$|x|^k |f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty$$

gilt. Dies erklärt die Bezeichnung „schnellfallend“.

(b) Eine Funktion  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  ist genau dann eine Schwartz-Funktion, wenn für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$  gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha| |\partial^\beta f(x)| < \infty,$$

was äquivalent ist zu

$$p_{k,m}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d, |\beta| \leq m} |x|^k |\partial^\beta f(x)| < \infty.$$

**Beispiel 6.34.** (a) Jede Funktion  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  ist eine Schwartz-Funktion.

(b) Die Gauß-Funktion  $f(x) = e^{-|x|^2}$  ist eine Schwartz-Funktion.

Der folgende Satz fasst einige Eigenschaften von Schwartz-Funktionen zusammen.

**Satz 6.35.** (a)  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  ist ein Vektorraum, genauer ein Unterraum von  $C_0(\mathbb{R}^d)$ .

(b)  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  ist für  $p \in [1, \infty]$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  enthalten und liegt für  $p \in [1, \infty)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

(c) Ist  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , so liegt für jedes  $\beta \in \mathbb{N}_0^d$  auch die Funktion  $\partial^\beta f$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

(d) Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  und  $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$  liegt die Funktion  $x^\gamma f(x)$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

(e) Für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  ist auch das punktweise Produkt  $fg$  eine Schwartz-Funktion. Insbesondere ist  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  mit punktweisem Produkt eine Algebra.

(f) Ist  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , so ist auch  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . Insbesondere ist

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \mathcal{F}(f) = \hat{f}$$

eine lineare Abbildung. Diese ist invertierbar, und

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \mathcal{F}^{-1}(f) = \check{f}.$$

(g) Für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  ist die Faltung  $f * g$  wieder eine Schwartz-Funktion.

*Beweis.* (a) Diese Aussage folgt sofort aus den Definitionen.

(b) Der Fall  $p = \infty$  ist klar: Schwartz-Funktionen konvergieren im Unendlichen gegen 0 und sind stetig, sind also insbesondere beschränkt. Sei nun  $p < \infty$ . Wir bemerken zunächst, dass  $(1 + |x|)^{-m}$  für geeignet großes  $m \in \mathbb{N}$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  liegt. Für solche  $m$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p (1 + |x|)^{pm} \cdot \frac{1}{(1 + |x|)^{pm}} dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + |x|)^{pm}} dx < \infty, \end{aligned}$$

mit einer Konstanten  $|f(x)|^p (1 + |x|)^{pm} \leq C$ , denn  $f$  ist ja schnellfallend.

Da  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  und  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  für  $p \in [1, \infty)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  ist (Folgerung 6.16), liegt dann auch  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

(c) Dies folgt wieder unmittelbar aus den Definitionen.

(d) Für den Beweis benötigen wir die *Leibniz-Regel*, also die allgemeine Form der Produktregel für partielle Ableitungen: Sind  $g$  und  $f$  genügend glatt und ist  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$  ein Multiindex, so gilt

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha-\beta} g$$

mit den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d}.$$

(Für uns ist nur wichtig, dass es solche Konstanten gibt; ihre Werte sind für uns uninteressant.) Eine Anwendung dieser Formel auf das Produkt  $x^\gamma f(x)$  zeigt, dass  $\partial^\beta (x^\gamma f(x))$  eine Linearkombination von Schwartz-Funktionen ist. Die Behauptung folgt nun aus Teil (a).

(e) Dies folgt aus der allgemeinen Binomialformel im Beweis von (d).

- (f) Die Linearität ist klar, sofern wir  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  zeigen. Dies folgt aber aus den Resultaten im Abschnitt 6.6 und aus den obigen Aussagen (a)–(d). Die Invertierbarkeit folgt aus der Inversions-Formel, Satz 6.30.
- (g) Dies folgt aus (e) und (f) sowie aus Satz 6.21 (c).  $\square$

## 6.9 Das Fourier-Integral: $L^2$ -Theorie

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die Fouriertransformation auf den Raum  $L^2(\mathbb{R}^d)$  zu erweitern. Sie wird sich dort als bijektive Isometrie herausstellen. Die folgende Bemerkung zeigt, warum  $L^2$  der schönste aller  $L^p$ -Räume ist.

**Bemerkung 6.36.** Sei  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  ein Maßraum. Dann ist die Abbildung

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_X f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(X),$$

ein Skalarprodukt auf  $L^2(X)$  (die Existenz des Integrals folgt aus der Hölderschen Ungleichung). Da

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

und  $L^2(X)$  vollständig ist, ist  $L^2(X)$  ein *Hilbertraum*.

**Satz 6.37** (Plancherel). Für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  gilt

$$\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle \check{f}, \check{g} \rangle \quad \text{und insbesondere} \quad \|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 = \|\check{f}\|_2.$$

*Beweis.* Seien  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . Dann sind  $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , und man überlegt sich leicht, dass  $\widehat{\widehat{g}} = \check{g}$ . Satz 6.21 (b) und Satz 6.30 liefern dann wegen  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f \overline{g} d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\widehat{f \overline{g}}} d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} \check{\widehat{f \overline{g}}} d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} \check{f} \overline{\check{g}} d\lambda_d = \langle \check{f}, \check{g} \rangle.$$

Hieraus folgen auch alle übrigen Behauptungen.  $\square$

**Lemma 6.38.** Für  $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$  existiert eine Folge  $(f_n)$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  derart, dass  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  und auch  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  gilt.

*Beweis.* In Folgerung 6.16 haben wir die Dichtheit von  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  gezeigt. Die dort konstruierte Folge  $(f_n)$  hat die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

**Satz 6.39.** Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  und  $(f_n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  eine Folge mit  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Es gibt ein  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  mit  $\widehat{f_n} \rightarrow g$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .
- (b) Ist  $(g_n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  eine weitere Folge mit  $g_n \rightarrow f$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , so gilt auch  $\widehat{g_n} \rightarrow g$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

(c) Ist zusätzlich  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , so gilt  $g = \widehat{f}$  fast überall.

*Beweis.* Zum Nachweis von (a) und (b) seien  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  und  $(f_n), (g_n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  mit  $f_n \rightarrow f$  und  $g_n \rightarrow f$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Wir zeigen, dass  $(\widehat{f}_n)$  eine Cauchyfolge ist. Nach dem Satz von Plancherel 6.37 ist

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 + \|f - f_m\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty.$$

Also ist  $(\widehat{f}_n)$  eine Cauchyfolge in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Sei  $g$  ihr Grenzwert. Dann ist  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Aus

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{g}_n\|_2 = \|f_n - g_n\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 + \|f - g_n\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

folgt, dass auch  $\widehat{g}_n \rightarrow g$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  gilt.

Wir beweisen noch Teil (c). Sei dazu  $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$  und  $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  mit  $f_n \rightarrow f$  bzgl. der  $L^1$ - und der  $L^2$ -Norm (siehe Lemma 6.38). Dann gibt es nach Teil (a) ein  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  mit  $\widehat{f}_n \rightarrow g$  bzgl. der  $L^2$ -Norm. Mit Satz 5.10 gibt es eine Teilfolge  $(n_m) \subseteq \mathbb{N}$  mit  $\widehat{f_{n_m}}(x) \rightarrow g(x)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Da aber

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$$

wegen Satz 6.19, folgt  $g(x) = \widehat{f}(x)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . □

Wegen Aussage (b) ist der Grenzwert in (a) von der Wahl der Folge  $(f_n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  unabhängig. Dies erlaubt die folgende Definition. der *Fouriertransformation in  $L^2$* .

**Definition 6.40.** Sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  und  $(f_n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  eine Folge mit  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Die nach Satz 6.39 existierende und eindeutig bestimmte Funktion  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  heißt die *Fouriertransformierte der  $L^2$ -Funktion  $f$* .

Wir schreiben für die so definierte Fouriertransformation wie zuvor  $\mathcal{F}(f) := \widehat{f} := g$  und setzen

$$\check{f}(\xi) := \widehat{f}(-\xi) \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

**Bemerkung 6.41.** Man beachte, dass diese Definition wegen Satz 6.39 (c) konsistent mit unserer Fouriertransformation auf  $L^1(\mathbb{R}^d)$  ist.

Man beachte aber auch, dass wir die Fouriertransformierte einer  $L^2$ -Funktion über einen Grenzprozess gewonnen haben, der uns über den Anwendungsbereich der  $L^1$ -Fouriertransformation herausgehoben hat. Dabei haben wir die einfache Formel für die Fouriertransformation aus Definition 6.18 im Allgemeinen verloren. Das Integral  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i(x;\xi)} dx$  existiert für eine  $L^2$ -Funktion im allgemeinen nicht!



**Satz 6.42.** *Die Abbildung*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d), \quad f \mapsto \mathcal{F}(f) = \widehat{f}$$

*ist eine lineare und bijektive Isometrie. Weiterhin ist die Inverse gegeben durch  $\mathcal{F}^{-1}(f) = \check{f}$  und es gilt*

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle = \langle \check{f}, \check{g} \rangle$$

*für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ .*

*Beweis.* Aus der Definition ist klar, dass  $\mathcal{F}$  den Raum  $L^2(\mathbb{R}^d)$  in sich abbildet. Auch die Linearität folgt sofort, da  $\mathcal{F}$  auf dem Schwartz-Raum linear ist. Sei nun  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  und  $(f_n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  eine Folge mit  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist

$$\|f\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f_n}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

Damit ist  $\mathcal{F}$  eine Isometrie und insbesondere injektiv. Wir zeigen nun die Surjektivität von  $\mathcal{F}$ . Sei dazu  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , und sei  $(f_n)$  eine Folge in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  mit  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2$ . Wie im Beweis von Satz 6.39 (a) sieht man, dass die Funktionen  $\check{f}_n$  gegen ein  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  konvergieren. Wegen Satz 6.30 gilt  $\widehat{\check{f}_n} = f_n$ . Da  $\check{f}_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  ist, gilt nach Definition von  $\widehat{g}$  auch

$$f_n = \widehat{\check{f}_n} \rightarrow \widehat{g},$$

d. h. es ist  $\widehat{g} = f$ . Schließlich folgt aus  $\check{f}_n(\xi) = \widehat{f_n}(-\xi)$ , dass  $g = \check{f}$ , also gilt  $\mathcal{F}^{-1}(f) = \check{f}$ . Die letzte Aussage folgt aus der Definition und der Stetigkeit des  $L^2$ -Skalarproduktes.  $\square$

**Bemerkung 6.43.** Ist  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , so ist  $f\chi_{U_R(0)} \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$  für jedes  $R > 0$ . Satz 6.39 (c) liefert dann

$$\mathcal{F}(f\chi_{U_R(0)})(\xi) = \int_{U_R(0)} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx.$$

Da  $f\chi_{U_R(0)} \rightarrow f$  in  $L^2$  für  $R \rightarrow \infty$  konvergiert, erhält man mit Satz 6.39

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{U_R(0)} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \cdot \rangle} dx,$$

wobei die Konvergenz in der  $L^2$ -Norm zu verstehen ist. Es ist ein tiefliegendes Resultat, dass hier für  $d = 1$  Konvergenz *punktweise fast überall* vorliegt. Ob dies auch für  $d > 1$  gilt, ist eine offene Frage der Fourier-Analyse.

## 6.10 Anwendungen

**Die Poisson-Gleichung.** Der Laplace-Operator  $\Delta$  ist für  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$  definiert durch

$$\Delta f := \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \cdots + \partial_d^2 f.$$

Wir suchen eine Lösung der *Poisson-Gleichung*

$$f - \Delta f = g,$$

wobei  $g$  geeignet gegeben ist, z. B.  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . Betrachten wir die Fouriertransformierte dieser Gleichung  $\widehat{f} - \widehat{\Delta f} = \widehat{g}$  und schreiben deren linke Seite mit Hilfe von Abschnitt 6.6 als

$$\widehat{f}(\xi) - ((2\pi i \xi_1)^2 + (2\pi i \xi_2)^2 + \cdots + (2\pi i \xi_n)^2) \widehat{f}(\xi) = (1 + 4\pi^2 |\xi|^2) \widehat{f}(\xi),$$

so haben wir die Differentialgleichung  $f - \Delta f = g$  auf die algebraische Gleichung

$$(1 + 4\pi^2 |\xi|^2) \widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$$

zurückgeführt. Diese können wir leicht lösen. Wir dividieren einfach durch  $1 + |\xi|^2$ :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{1 + 4\pi^2 |\xi|^2},$$

und erhalten hieraus  $f$  mit der inversen Fouriertransformation:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{g}}{1 + 4\pi^2 |\cdot|^2}\right).$$

Aus dem Produkt wird dabei eine Faltung (Satz 6.21 (c)), und wir bekommen

$$= g * \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1 + 4\pi^2 |\cdot|^2}\right).$$

Mit einer etwas trickreichen Rechnerei erhalten wir schließlich die explizite Form

$$f = g * B_d$$

der Lösung der Poisson-Gleichung, wobei

$$B_d(x) := \frac{1}{2^{d/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-t - \frac{|x|^2}{4t}}}{t^{d/2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

eine sogenannte *Bessel-Funktion* ist. Man beachte, dass man mit Hilfe dieser einen Funktion nun die Lösung für *jedes*  $g$  im Griff hat.

**Die Wärmeleitungsgleichung.** Mit ähnlichen Methoden kann man auch die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x) \quad \text{für } t > 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

mit der *Anfangsbedingung*  $u(0, x) = f(x)$  für  $x \in \mathbb{R}^d$  lösen. Dabei ist die Funktion  $f$  gegeben und heißt *Anfangswert*. Wir wollen z. B.  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  annehmen und suchen eine Funktion

$$u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C},$$

welche diese Differentialgleichung löst und der Anfangsbedingung genügt. Dazu betrachten wir die Fouriertransformierte der Gleichung bzgl. der Raumvariable  $x \in \mathbb{R}^d$  und erhalten die folgende äquivalente Form:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u}(t, \xi) &= -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) && \text{für } t > 0, \xi \in \mathbb{R}^d, \\ \hat{u}(0, \xi) &= \hat{f}(\xi) && \text{für } x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

(Hierzu muss man sich noch überlegen, dass man  $\partial_t$  und  $\mathcal{F}$  vertauschen kann.) Was wir erhalten haben, ist eine *gewöhnliche Differentialgleichung* für  $\hat{u}$ . Diese können wir für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^d$  explizit lösen:

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \hat{f}(\xi).$$

Jetzt müssen wir zurücktransformieren, und beachten, dass eine Gaußfunktion auftaucht. Da bei der inversen Fouriertransformation Produkte in Faltungen übergehen (Satz 6.21 (c)), erhalten wir mit Beispiel 6.29

$$u(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u(t, \cdot)}) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi^2 t |\cdot|^2}) = f * g_t,$$

wobei

$$g_t(x) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

der sogenannte *Gauß-* oder *Wärmeleitungskern* ist.

## 6.11 $L^p$ -Theorie<sup>◇</sup>

Wir haben oben gesehen, dass die Fouriertransformation  $L^1(\mathbb{R}^d)$  in  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  abbildet, wobei

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \tag{6.2}$$

gilt, und dass sie auch  $L^2(\mathbb{R}^d)$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  abbildet, wobei

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \tag{6.3}$$

ist. Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$  gelten beide Abschätzungen, und die Interpolationsungleichung (Satz 5.21 mit  $s = 2/q$ ) liefert für  $q \in [2, \infty]$

$$\|\hat{f}\|_q \leq \|\hat{f}\|_2^{2/q} \|\hat{f}\|_\infty^{1-2/q} \leq \|f\|_2^{2/q} \|f\|_1^{1-2/q}.$$

Wir möchten auf der rechten Seite an Stelle des Produktes  $\|f\|_1 \|f\|_2$  nur eine Norm haben, also zeigen, dass für geeignetes  $p$  (für das mit  $1/p + 1/q = 1$ )

$$\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p$$

gilt. Wenn die „umgekehrte Interpolationsgleichung“  $\|f\|_2^{2/q} \|f\|_1^{1-2/q} \leq \|f\|_p$  korrekt wäre, wären wir damit fertig. Diese Ungleichung stimmt aber leider nicht!

Durch geeignetes „Mischen“ beider Abschätzungen (6.2) und (6.3) können wir aber auch auf der rechten Seite zwischen  $p = 1$  und  $p = 2$  interpolieren und so das folgende Resultat erzielen.

**Satz 6.44.** *Für alle  $1 \leq p \leq 2$  und das  $q \in [2, \infty]$  mit  $1/p + 1/q = 1$  gibt es eine Konstante  $C_p$ , so dass*

$$\|\widehat{f}\|_q \leq C_p \|f\|_p \quad \text{für alle } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Der folgende Beweis folgt Ideen von Marcinkiewicz und dient auch als Grundlage des Beweises des Interpolationssatzes von Marcinkiewicz.

*Beweis.* Die Fälle  $p = 2$  und  $p = 1$  haben wir bereits diskutiert. Sei also  $p \in (1, 2)$ , und sei  $q$  der zu  $p$  konjugierte Exponent. Weiter können wir  $\|f\|_p = 1$  annehmen, denn für  $\|f\|_p = 0$  ist die Ungleichung mit beliebiger Konstante  $C_p$  wahr. Aus Satz 5.25 wissen wir, dass

$$\|\widehat{f}\|_q^q = q \int_0^\infty s^{q-1} \lambda_d(A(s)) ds$$

gilt, mit  $A(s) = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\widehat{f}(\xi)| > s\}$ . Die Substitution  $s = 2t$  macht hieraus

$$\|\widehat{f}\|_q^q = q2^q \int_0^\infty t^{q-1} \lambda_d(A(2t)) ds.$$

Um die  $L^q$ -Norm von  $\widehat{f}$  möglichst scharf abschätzen zu können, benötigen wir gute Abschätzungen für das Lebesgue-Maß von  $A(2t)$ . Die Idee ist, die Funktion  $f$  (und damit auch  $\widehat{f}$ ) so in  $f = f_1 + f_2$  zu zerlegen, dass wir auf  $f_1$  die  $L^1$ - $L^\infty$  Abschätzung (6.2) anwenden können. Dies liefert eine Abschätzung *nach oben* für  $|\widehat{f}_1(\xi)|$  und somit für  $\xi \in A(2t)$  eine Abschätzung *nach unten* für  $|\widehat{f}_2(\xi)|$ . So erhalten wir eine geeignete Abschätzung für  $\lambda_d(A(2t))$  durch die  $L^2$ -Norm von  $\widehat{f}_2$ . Mit der  $L^2$ - $L^2$  Abschätzung (6.3) können wir dann  $\lambda_d(A(2t))$  durch die Norm von  $f_2$  kontrollieren. Hier sind die Details:

Sei  $M > 0$  eine Konstante, die wir später genau wählen. Wir setzen

$$B := \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > M\}, \quad f_1 := f \chi_B, \quad f_2 := f \chi_{B^c}.$$

Dann ist offenbar  $f = f_1 + f_2$  und, da  $\mathcal{F}$  linear ist,  $\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$ . Da  $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$  ist, können wir für jedes  $M$  abschätzen

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_1(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x)| dx = \int_B |f_1(x)|^p |f_1(x)|^{1-p} dx \leq \frac{1}{M^{p-1}} \int_B |f_1(x)|^p dx \\ &\leq \frac{1}{M^{p-1}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx = \frac{1}{M^{p-1}}. \end{aligned}$$

Für  $t > 0$  wählen wir nun  $M$  so, dass  $\frac{1}{M^{p-1}} = t$  gilt, d. h.  $M = t^{-\frac{1}{p-1}}$ .

Für  $t > 0$  möchten wir  $\lambda_d(A(2t))$  abschätzen. Um deutlich zu machen, dass unsere Zerlegung und insbesondere die Menge  $B$  von  $M$  und damit von  $t$  abhängen, schreiben wir  $B_t$  an Stelle von  $B$ . Wie wir oben gesehen haben, ist  $|\widehat{f}_1(\xi)| \leq t$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Für  $\xi \in A(2t)$  muss daher  $|\widehat{f}_2(\xi)| > t$  gelten. Unter Beachtung von  $\|f_2\|_2 = \|\widehat{f}_2\|_2$  nach (6.3) erlaubt dies die Abschätzung

$$\begin{aligned} t^2 \lambda_d(A(2t)) &\leq \int_{A(2t)} |\widehat{f}_2(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}_2(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f_2(x)|^2 dx \\ &= \int_{B_t^c} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Nach diesen Überlegungen können wir  $\|\widehat{f}\|_q$  wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_q^q &= q2^q \int_0^\infty t^{q-1} \lambda_d(A(2t)) dt \leq q2^q \int_0^\infty t^{q-3} \int_{B_t^c} |f(x)|^2 dx dt \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} q2^q \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \int_0^{|f(x)|^{1-p}} t^{q-3} dt dx \\ &= \frac{q2^q}{q-2} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 t^{q-2} \Big|_{t=0}^{t=|f(x)|^{1-p}} dx \\ &= \frac{q2^q}{q-2} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 |f(x)|^{(1-p)(q-2)} dx. \end{aligned}$$

Wegen  $2 + (1-p)(q-2) = 2 + q - pq - 2 + 2p = q(1-p) + 2p = -p + 2p = p$ , ist dies gleich

$$= \frac{q2^q}{q-2} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx = \frac{q2^q}{q-2}.$$

Wir haben somit gezeigt, dass

$$\|\widehat{f}\|_q \leq 2 \left( \frac{q}{q-2} \right)^{1/q} \|f\|_p. \quad \square$$

**Bemerkung 6.45.** (a) Mit etwas mehr Mühe und anderen Techniken lässt sich die Abschätzung

$$\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p$$

zeigen. Diese ist die bekannte *Hausdorff-Young-Ungleichung*. Die präzise Konstante  $C_p$  hat Beckner ausgerechnet:  $\|f\|_q \leq A_p \|f\|_p$  mit  $A_p = \sqrt{p^{1/p} q^{-1/q}}$ . Wir sehen, dass für  $p = 1$  und  $p = 2$  die optimale Konstante 1 genau diejenige ist, die wir aus (6.2) und (6.3) kennen.

- (b) Für  $p > 2$  gibt es keine Konstante  $C_p$  mit der Eigenschaft, dass  $\|\hat{f}\|_q \leq C_p \|f\|_p$  für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  ist. Ebenso gibt es für  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $1/p + 1/q \neq 1$  keine Konstante  $C_p$  mit  $\|\hat{f}\|_q \leq C_p \|f\|_p$  für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

## 6.12 Komplexe Theorie<sup>◇</sup>

Wir haben oben gesehen, dass „Abklingen“ von  $f$  „Glattheit“ von  $\hat{f}$  impliziert. Im Extremfall, wenn  $f$  einen kompakten Träger hat (also „sehr schnell“ gegen 0 konvergiert), ist seine Fouriertransformierte sogar holomorph (unendlich oft  $\mathbb{C}$ -differenzierbar). Dies und eine Umkehrung möchten wir jetzt zeigen. Dazu benötigen wir einige Vorbemerkungen.

Für  $\xi, x \in \mathbb{C}^d$  sei

$$\langle \xi, x \rangle := \sum_{j=1}^d \xi_j x_j.$$

Man beachte, dass dies NICHT das komplexe Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^d$  ist, denn hier steht keine Konjugation der Komponenten  $x_j$ .

Eine Funktion  $f : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$  nennen wir *holomorph*, falls alle komplexen partiellen Ableitungen  $\partial_{z_j} f$  mit  $j = 1, \dots, d$  existieren, d. h. falls  $f$  bezüglich jeder Variablen holomorph ist. Man kann zeigen, dass in diesem Fall die (totale) komplexe Ableitung von  $f$  existiert und dass  $f$  unendlich oft komplex differenzierbar ist. Dies ist wieder ein enormer Unterschied zum Reellen.

**Satz 6.46** (Paley-Wiener). (a) Sei  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $\text{supp}(f) \subseteq \overline{U_a(0)}$  für ein  $a > 0$ . Dann hat  $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Fortsetzung  $g$  auf  $\mathbb{C}^d$ , und für jedes  $m \in \mathbb{N}$  existiert ein  $c_m \geq 0$ , so dass

$$|g(z)| \leq c_m (1 + |z|)^{-m} e^{2\pi a |\text{Im } z|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^d. \quad (6.4)$$

- (b) Sei  $g : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion derart, dass ein  $a \geq 0$  existiert, so dass es für jedes  $m \in \mathbb{N}$  ein  $c_m \geq 0$  gibt mit (6.4). Dann gibt es ein  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $\text{supp}(f) \subseteq \overline{U_a(0)}$  so, dass  $\hat{f}(\xi) = g(\xi)$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

*Beweis.* (a) Hat  $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$  einen kompakten Träger innerhalb  $\overline{U_a(0)}$ , so existiert das Fourier-Integral nicht nur für reelles  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , sondern auch für  $\xi \in \mathbb{C}^d$ . Wir können daher setzen

$$g(z) := \int_{U_a(0)} f(x) e^{-2\pi i \langle x, z \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, z \rangle} dx.$$

Offenbar ist  $g(\xi) = \widehat{f}(\xi)$  für  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Die Holomorphie von  $g$  folgt leicht durch Nachrechnen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen bezüglich jeder komplexen Variablen. Weiter: für  $z \in \mathbb{C}^d$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\begin{aligned} |z_j^k g(z)| &= \left| \int_{U_a(0)} f(x) (-2\pi i)^{-k} \partial_{x_j}^k e^{-2\pi i \langle x, z \rangle} dx \right| \\ &\stackrel{\text{Part. Int.}}{=} (2\pi)^{-k} \left| \int_{U_a(0)} \partial_j^k f(x) e^{-2\pi i \langle x, z \rangle} dx \right| \\ &\leq (2\pi)^{-k} \int_{U_a(0)} |\partial_j^k f(x)| e^{2\pi \operatorname{Im} \langle x, z \rangle} dx \\ &\leq (2\pi)^{-k} e^{2\pi a |\operatorname{Im} z|} \int_{U_a(0)} |\partial_j^k f(x)| dx =: C(k) e^{2\pi a |\operatorname{Im} z|}. \end{aligned}$$

Sei nun  $m \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist

$$(1 + |z|)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} |z|^k,$$

und mit

$$c_m := \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} C(k)$$

folgt sofort

$$(1 + |z|)^m |g(z)| \leq c_m e^{2\pi a |\operatorname{Im} z|}.$$

Das ist aber die Behauptung.

- (b) Wir beweisen die Aussage nur für  $d = 1$ . Für den Beweis des allgemeinen Falles kann man dies koordinatenweise verwenden.

Sei  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften. Ihre Einschränkung  $g|_{\mathbb{R}}$  bezeichnen wir ebenfalls mit  $g$ . Zunächst bemerken wir, dass  $x^\alpha g(x) \in L^1(\mathbb{R})$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0$ . Für  $\xi \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt nämlich nach Voraussetzung

$$|\xi^\alpha g(\xi)| \leq \frac{c_m |\xi|^k}{(1 + |\xi|)^m}$$

mit geeigneten Konstanten  $c_m$ . Die Funktion auf der rechten Seite liegt in  $L^1$ , falls  $m$  geeignet groß ist. Insbesondere können wir also  $f := \check{g}$  definieren. Wegen Satz 6.24 gilt dann  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , und wir müssen nur noch  $\operatorname{supp}(f) \subseteq \overline{U_a(0)}$  zeigen.

Wir nutzen die komplexe Veränderliche aus, indem wir über geeignete Wege in der komplexen Ebene integrieren. Sei  $\gamma_1$  die Kurve  $(-\infty, \infty)$  und  $\gamma_2$  die Kurve  $(-\infty + i\delta, \infty + i\delta)$  mit einem Parameter  $\delta \in \mathbb{R}$ . Offenbar ist

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{\gamma_1} g(z) e^{2\pi i x z} dz,$$

und wir werden gleich zeigen, dass

$$\int_{\gamma_1} g(z)e^{2\pi i x z} dz = \int_{\gamma_2} g(z)e^{2\pi i x z} dz. \quad (6.5)$$

ist. Nachdem dies gezeigt ist, können wir wie folgt argumentieren: Für  $x \in \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} g(\xi + i\delta)e^{2\pi i x(\xi + i\delta)} d\xi \right| \leq e^{-2\pi x\delta} \int_{\mathbb{R}} |g(\xi + i\delta)| d\xi \\ &\leq c_2 e^{-2\pi x\delta} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{-2} e^{2\pi a|\delta|} d\xi = C e^{-2\pi x\delta + 2\pi a|\delta|}, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die exponentielle Abschätzung (6.4) ausgenutzt haben. Wählen wir speziell  $\delta := t \operatorname{sgn}(x)$  mit  $t > 0$ , so erhalten wir

$$|f(x)| \leq C e^{2\pi t(a - |x|)}.$$

Lassen wir nun  $t$  gegen  $\infty$  streben, bekommen wir  $|f(x)| = 0$  für  $|x| > a$ , d. h. es ist  $\operatorname{supp}(f) \subseteq \overline{U_a(0)}$ .

Wir haben noch (6.5) zu zeigen. Seien  $\gamma_1^R$  und  $\gamma_2^R$  die Kurven  $[-R, R]$  und  $[-R + i\delta, R + i\delta]$ . Für  $R \rightarrow \infty$  gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1^R} g(z)e^{2\pi i x z} dz &\rightarrow \int_{\gamma_1} g(z)e^{2\pi i x z} dz \quad \text{und} \\ \int_{\gamma_2^R} g(z)e^{2\pi i x z} dz &\rightarrow \int_{\gamma_2} g(z)e^{2\pi i x z} dz. \end{aligned}$$

Weiter bezeichnen wir mit  $\gamma_3^R$  und  $\gamma_4^R$  die Kurven, welche zwischen  $R$  und  $R + i\delta$  bzw. zwischen  $-R + i\delta$  und  $-R$  vertikal verlaufen. Dann ist  $\Gamma := \gamma_1^R + \gamma_3^R - \gamma_2^R + \gamma_4^R$  ein geschlossener (und stückweise stetig differenzierbarer) Weg, und der Cauchysche Integralsatz liefert

$$\int_{\Gamma} g(z)e^{2\pi i x z} dz = 0.$$

Die Integrale entlang  $\gamma_3^R$  und  $\gamma_4^R$  lassen sich leicht abschätzen: für  $k = 3, 4$  gilt wegen (6.4) mit  $m = 1$

$$\left| \int_{\gamma_k^R} g(z)e^{2\pi i x z} dz \right| \leq C|\delta|(1 + R)^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty,$$

wobei  $\delta$  die Länge des Integrationsweges ist. Somit gilt (6.5), und der Beweis ist beendet.  $\square$



## 7 Integration über Untermannigfaltigkeiten

Im vorigen Kapitel haben wir uns mit der Berechnung von Integralen über meßbaren Mengen im  $\mathbb{R}^d$  befasst, wobei das zugrundeliegende Maß stets das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß war. Betrachtet man nun Flächenstücke im  $\mathbb{R}^3$  oder Kurven in der Ebene, so verschwinden die Integrale über solchen Mengen, da die Integrationsbereiche Nullmengen sind. Andererseits ist es für viele Zwecke erforderlich, Integralen über niedriger-dimensionalen Gebilden einen Sinn zu geben. Beispielsweise haben wir bereits einer Kurve im  $\mathbb{R}^d$  eine Länge zugeordnet (also ein “eindimensionales” Volumen), und wir haben Funktionen über Kurven integriert. Im gleichen Sinn würden wir gern die Größe von Oberflächen von Körpern im  $\mathbb{R}^3$  (wie der Oberfläche der Einheitskugel) berechnen oder Integrale über Funktionen auf solchen Flächen betrachten.

### 7.1 Untermannigfaltigkeiten

Wir haben Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^d$  bereits in der Analysis II kennengelernt, wobei der Schwerpunkt auf der Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten als Nullstellenmengen von Funktionen lag. In diesem Abschnitt wird der Schwerpunkt auf der Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten liegen. Beide Sichtweisen sind uns aus der linearen Algebra vertraut, wo man Untervektorräume zum einen als Lösungsmengen linearer homogener Gleichungssysteme und zum anderen durch eine Parameterdarstellung mittels einer Basis beschreibt.

Rufen wir uns zunächst in Erinnerung, was wir aus der Analysis II wissen. Wir betrachten einen stückweise differenzierbaren Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Ist  $\gamma$  in  $t$  differenzierbar (was in allen bis auf endlich vielen Punkten der Fall ist), so deuten wir die Ableitung  $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^d$  von  $\gamma$  in  $t$  als den Geschwindigkeitsvektor und seine Länge

$$\|\gamma'(t)\|_2 = \left( \sum_{j=1}^d |\gamma'_j(t)|^2 \right)^{1/2}$$

als die Geschwindigkeit, mit der ein Punkt den Weg  $\gamma$  zum Zeitpunkt  $t$  durchläuft. Für die Länge des Weges  $\gamma$  haben wir die Beziehung

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt \tag{7.1}$$

gefunden. Schließlich haben wir für stetige Funktionen  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  das Kurvenintegral (1. Art) über  $\gamma$  definiert durch

$$\int_{\gamma} f := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 dt. \tag{7.2}$$

Wir haben uns auch überlegt (Analysis II, Bemerkung 8.9), dass das Integral in (7.1) nur von der durch  $\gamma$  definierten Kurve  $\Gamma = \gamma([a, b])$  abhängt, dass es sich

also nicht ändert, wenn man die Kurve  $\Gamma$  umparametrisiert, indem man  $\gamma$  durch  $\gamma \circ \varphi$  ersetzt, wobei  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  eine stetig differenzierbare Bijektion mit  $\varphi'(t) > 0$  für alle  $t \in (\alpha, \beta)$  ist. Gleiches gilt für das Integral (7.2).

Wir wollen diese Konzepte verallgemeinern auf höherdimensionale Flächenstücke. Diese denken wir uns als gegeben durch differenzierbare Abbildungen  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , wobei  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  offen ist. Für  $k = 1$  erhalten wir gerade Kurven.

**Definition 7.1.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt eine Immersion, wenn die lineare Abbildung  $D\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^d)$  für jedes  $x \in U$  injektiv ist, d. h. wenn  $\text{rang } D\varphi(x) = k$  für alle  $x \in U$  ist.

**Bemerkung 7.2.** (a) Ist  $\varphi : \mathbb{R}^k \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Immersion, muss insbesondere  $k \leq d$  sein.

(b) Im Fall  $k = 1$  ist  $\varphi(U)$  eine Kurve, und  $\varphi$  ist genau dann eine Immersion, wenn  $\varphi'(x)$  für kein  $x$  die Nullabbildung ist.

Wir bezeichnen wieder  $\varphi$  als eine Parametrisierung der Menge  $\varphi(U)$ . Mit solchen Parametrisierungen werden wir später Integrale über  $\varphi(U)$  definieren, indem wir sie auf "gewöhnliche" Lebesgue-Integrale über  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  zurückführen.

**Beispiel 7.3.** (a) **(Neil-Parabel)** Die Neilsche Parabel  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto (x^2, x^3)$  ist wegen  $\varphi'(0) = (0, 0)$  keine Immersion. Die Singularität im Nullpunkt verhindert die Injektivität.

(b) **(Graph einer Funktion)** Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, so ist

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}, \quad x \mapsto (x, f(x))$$

eine Immersion. Tatsächlich erhalten wir für die Jacobimatrix  $J_\varphi(x)$  der Ableitung  $D\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k+1})$

$$J_\varphi(x) = \begin{pmatrix} I_{k \times k} \\ J_f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \partial_1 f(x) & \partial_2 f(x) & \dots & \partial_k f(x) \end{pmatrix},$$

und diese Matrix hat offenbar für jedes  $x \in U$  den Rang  $k$ .

(c) **(Rotierte Neil-Parabel)** Für die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r^2 \cos \varphi \\ r^2 \sin \varphi \\ r^3 \end{pmatrix}$$

ist die Matrixdarstellung der linearen Abbildung  $D\varphi(r, \varphi)$  gleich

$$J_{\Phi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 2r \cos \varphi & -r^2 \sin \varphi \\ 2r \sin \varphi & r^2 \cos \varphi \\ 3r^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man macht sich leicht klar, dass der Rang dieser Matrix genau dann gleich 2 ist, wenn  $r \neq 0$ . Die Einschränkung von  $\Phi$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$  ist also eine Immersion. (Die Abbildung  $\Phi$  selbst ist aber offenbar nicht injektiv.) Die Menge  $\Phi(\mathbb{R}^2)$  entsteht durch Rotation der Kurve  $\{(r^2, 0, r^3) : r \in \mathbb{R}\}$  (die man sich als Neilsche Parabel in der  $xz$ -Ebene vorstellen kann) um die  $z$ -Achse (vgl. auch das folgende Beispiel). Die ‘‘obere Schale’’ dieser Fläche berührt die untere (ihr Spiegelbild an der  $xy$ -Ebene) im Nullpunkt. Derartige Singularitäten werden durch die Forderung der Injektivität von  $D\varphi(x)$  in jedem Punkt vermieden.

(d) **(Allgemeine Rotationsfläche)** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$$

eine stetig differenzierbare Funktion (deren Bild in der  $xz$ -Ebene liegt). Wir nehmen weiter an, dass  $r(t) > 0$  für alle  $t \in I$  ist (so dass das Bild von  $\gamma$  in der rechten Halbebene der  $xz$ -Ebene liegt). Nun betrachten wir die stetig differenzierbare Abbildung

$$\Phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi \\ r(t) \sin \varphi \\ z(t) \end{pmatrix}$$

mit dem Bild

$$\Phi(I \times \mathbb{R}) = \{(x, y, z(t)) : x^2 + y^2 = r(t)^2, t \in I\}.$$

Das Bild von  $\Phi$  entsteht also durch Rotation des Bildes von  $\gamma$  um die  $z$ -Achse. Die Jacobi-Matrix von  $\Phi$  in  $(t, \varphi)$  ist

$$J_{\Phi}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r'(t) \cos \varphi & -r(t) \sin \varphi \\ r'(t) \sin \varphi & r(t) \cos \varphi \\ z'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir  $r(t) > 0$  für alle  $t \in I$  angenommen haben, hat diese Matrix genau dann den Rang 2, wenn  $r'(t) \neq 0$  oder  $z'(t) \neq 0$ , d. h. wenn  $\gamma'(t) \neq 0$ . Ist also  $\gamma$  eine Immersion, so ist auch  $\Phi$  eine Immersion.

(e) (**Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^3$** ) Schließlich sehen wir uns noch eine Parametrisierung der zweidimensionalen Sphäre an. Wir betrachten die Abbildung

$$P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

mit der Jacobimatrix

$$J_P(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat genau dann den Rang 2, wenn  $\cos \theta \neq 0$ . Die Einschränkung von  $P$  auf die offene Menge  $\mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$  ist also eine Immersion, und ihr Bild

$$P(\mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, |z| \neq 1\}$$

ist die Einheitssphäre ohne Nord- und Südpol.

Wir diskutieren nun, wie der Begriff der Immersion zum Begriff der  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^d$  steht. Hier ist noch einmal die Definition.

**Definition 7.4.** *Eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  heißt  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn für jeden Punkt  $p \in M$  eine offene Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  von  $p$ , eine offene Menge  $W \subseteq \mathbb{R}^d$  und ein Diffeomorphismus  $\Phi : V \rightarrow W$  so existieren, dass*

$$\Phi(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

ist, (wobei wir  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$  schreiben).

Die Menge  $M$  sieht also lokal aus wie  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$  in  $\mathbb{R}^d$ . Weiter benötigen wir den folgenden Begriff.

**Definition 7.5.** *Seien  $X, Y$  metrische Räume. Eine stetige Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  heißt Einbettung, wenn sie injektiv ist und wenn die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1} : \varphi(X) \rightarrow X$  (bzgl. der von  $Y$  auf  $\varphi(X)$  induzierten Metrik) ebenfalls stetig ist.*

**Beispiel 7.6.** Die Abbildung  $\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$  ist stetig und injektiv, und ihr Bild ist die Einheitskreislinie  $\mathbb{S}^1$ . Die Umkehrabbildung  $\eta : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 2\pi), \gamma(t) \mapsto t$  ist jedoch nicht stetig, denn es ist zwar  $\gamma(2\pi - \frac{1}{n}) \rightarrow \gamma(0)$ , aber  $2\pi - \frac{1}{n} = \eta(\gamma(2\pi - \frac{1}{n}))$  konvergiert nicht gegen  $0 = \eta(\gamma(0))$ . Die Abbildung  $\gamma$  ist also keine Einbettung.

**Satz 7.7** (Parametrisierungssatz). *Eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  ist genau dann eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es für jeden Punkt  $p \in M$  eine offene Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^d$ , eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  und eine Immersion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $\varphi(U) = V \cap M$  gibt, die eine Einbettung ist.*

*Beweis.* Sei zunächst  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Dann gibt es offene Mengen  $V, W \subseteq \mathbb{R}^d$  mit  $p \in V$  und einen Diffeomorphismus  $\Phi : V \rightarrow W$  so, dass

$$\Phi(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Sei  $U := \{x \in \mathbb{R}^k : (x, 0) \in W\}$  und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d, x \mapsto \Phi^{-1}(\eta(x))$ , wobei  $\eta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  die lineare Abbildung  $x \mapsto (x, 0)$  ist. Dann ist  $U$  offen,  $\varphi(U) = V \cap M$ , und

$$D\varphi(x) = D\Phi^{-1}(\eta(x)) \cdot D\eta(x) = D\Phi^{-1}(\eta(x)) \cdot \eta.$$

Als Produkt zweier injektiver linearer Abbildungen ist  $D\varphi(x)$  für jedes  $x \in U$  injektiv, d. h.  $\varphi$  ist eine Immersion. Schließlich ist die inverse Abbildung zu  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  durch  $\varphi^{-1} = \pi \circ \Phi|_{\varphi(U)}$  gegeben, wobei  $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$  die Projektion  $(x, y) \mapsto x$  ist. Aus der Stetigkeit von  $\Phi$  und  $\pi$  folgt, dass  $\varphi$  eine Einbettung ist.

Wir zeigen die umgekehrte Richtung. Sei  $p \in M$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  von  $p$ , eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  und eine Immersion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $\varphi(U) = V \cap M$ , die eine Einbettung ist. Sei  $w := \varphi^{-1}(p)$ . Wir schreiben  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ . Wegen  $\text{rang } D\varphi(w) = k$  können wir nach Ummummerierung der Koordinaten annehmen, dass die Matrix

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(w) \right)_{i,j=1}^k$$

invertierbar ist (das ist gerade der obere  $k \times k$ -Block der Jacobimatrix von  $\varphi$  in  $w$ ). Sei  $\tilde{\varphi} := (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Dann ist also  $D\tilde{\varphi}(w)$  invertierbar, und mit dem Satz über die Umkehrfunktion finden wir eine offene Umgebung  $W \subseteq U$  von  $w$  so, dass  $\tilde{\varphi}|_W$  ein Diffeomorphismus ist. Wir definieren

$$\begin{aligned} \Phi : W \times \mathbb{R}^{d-k} &\rightarrow \mathbb{R}^d, & (u, x) &= (u_1, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_d) \\ &\mapsto \varphi(u) + (0, x) &= &(\varphi_1(u), \dots, \varphi_k(u), \varphi_{k+1}(u) + x_{k+1}, \dots, \varphi_d(u) + x_d). \end{aligned}$$

Dann ist  $\Phi$  ein Diffeomorphismus von  $W \times \mathbb{R}^{d-k}$  auf  $\tilde{\varphi}(W) \times \mathbb{R}^{d-k}$ , denn  $\Phi$  und

$$\Phi^{-1}(v, y) = (\tilde{\varphi}^{-1}(v), y_{k+1} - \varphi_{k+1}(\tilde{\varphi}^{-1}(v)), \dots, y_d - \varphi_d(\tilde{\varphi}^{-1}(v)))$$

sind stetig differenzierbar. Weiter ist  $\Phi^{-1}(\varphi(u)) = (u, 0)$  für  $u \in W$  und somit

$$\Phi^{-1}(\varphi(W)) = W \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k} = \mathbb{R}^d.$$

Da  $\varphi$  eine Einbettung ist, ist  $\varphi(W)$  offen in  $M \cap V$ . Es gibt also eine offene Teilmenge  $V_p \subseteq \mathbb{R}^d$  so, dass  $\varphi(W) = M \cap V_p$ , und wegen  $\varphi(W) \subseteq \tilde{\varphi}(W) \times \mathbb{R}^{d-k}$  kann  $V_p$  in  $\tilde{\varphi}(W) \times \mathbb{R}^{d-k}$  gefunden werden (gegebenenfalls ersetzen wir  $V_p$  durch  $V_p \cap (\tilde{\varphi}(W) \times \mathbb{R}^{d-k})$ ). Wir haben somit für jeden Punkt  $p \in M$  eine offene Umgebung  $V_p \subseteq \mathbb{R}^d$  und einen Diffeomorphismus  $\Phi^{-1}$  von  $V_p$  in  $\mathbb{R}^d$  gefunden, so dass

$$\Phi^{-1}(M \cap V_p) = \Phi^{-1}(\varphi(W)) = W \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}.$$

Also ist  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.  $\square$

**Bemerkung 7.8.** (a) Die Immersionen  $\varphi : U \rightarrow M$ , deren Existenz wir soeben gezeigt haben, nennen wir *Parametrisierungen* oder *Karten* der Menge  $\varphi(U) \subseteq M$ . Oft schreibt man auch  $(\varphi, U)$  für eine Karte  $\varphi : U \rightarrow M$ .

(b) Die Funktionen  $(\varphi^{-1})_j : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , stellt man sich als *Koordinaten* eines Punktes  $p \in \varphi(U)$  vor. Für  $p = \varphi(x_1, \dots, x_k)$  sind also  $x_1, \dots, x_k$  die Koordinaten bezüglich der Karte  $(\varphi, U)$ .

(c) Ein Problem könnte dadurch entstehen, dass ein Punkt für verschiedene Karten natürlich verschiedene Koordinaten besitzt. Man hat sich daher zu überlegen, was beim Wechsel von Koordinatensystemen passiert.

**Satz 7.9** (Parameter-Transformation). *Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, und*

$$\varphi_j : U_j \rightarrow V_j = \varphi_j(U_j) \subseteq M, \quad j = 1, 2,$$

*seien Karten mit  $V_1 \cap V_2 =: V \neq \emptyset$ . Dann sind  $W_j := \varphi_j^{-1}(V)$  offene Teilmengen von  $U_j$ , und*

$$\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{W_1} : W_1 \rightarrow W_2$$

*ist ein Diffeomorphismus.*

*Beweis.* Da  $V$  eine offene Teilmenge von  $V_j$  und  $\varphi_j$  stetig ist, ist  $W_j$  als Urbild einer offenen Teilmenge von  $V_j$  offen. Aus den Definitionen ist auch klar, dass  $\psi$  bijektiv und stetig ist und eine stetige Umkehrfunktion besitzt. Wir zeigen, dass  $\psi$  stetig differenzierbar ist.

Sei  $x_0 \in W_1$ . Nach Definition einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit gibt es eine Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  von  $\varphi_1(x_0)$  mit  $M \cap U \subseteq V$  (das dürfen wir zusätzlich annehmen) und einen Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^d$  mit

$$\Phi(M \cap U) = \Phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Dann ist

$$\Phi \circ \varphi_1 = (g_1, \dots, g_k, 0, \dots, 0) \quad \text{und} \quad \Phi \circ \varphi_2 = (h_1, \dots, h_k, 0, \dots, 0)$$

mit gewissen stetig differenzierbaren Funktionen  $g_i : \varphi_1^{-1}(M \cap U) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h_j : \varphi_2^{-1}(M \cap U) \rightarrow \mathbb{R}$ . Folglich sind auch die Funktionen

$$G := (g_1, \dots, g_k) : \varphi_1^{-1}(M \cap U) \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad H := (h_1, \dots, h_k) : \varphi_2^{-1}(M \cap U) \rightarrow \mathbb{R}^k$$

stetig differenzierbar. Bezeichnet  $\pi$  wieder die im Beweis von Satz 7.7 eingeführte Projektion, so erhalten wir mit der Kettenregel für alle  $x \in \varphi_1^{-1}(M \cap U)$

$$\begin{aligned} DG(x) &= D(\pi \circ \Phi \circ \varphi_1)(x) = D\pi(\Phi(\varphi_1(x))) \circ D\Phi(\varphi_1(x)) \circ D\varphi_1(x) \\ &= \pi \circ D\Phi(\varphi_1(x)) \circ D\varphi_1(x). \end{aligned}$$

Der Rang der linearen Abbildung  $D\varphi_1(x)$  ist nach Voraussetzung  $k$ , die Abbildung  $D\Phi(\varphi_1(x))$  ist als Ableitung eines Diffeomorphismus invertierbar und die Projektion  $\pi$  geht surjektiv nach  $\mathbb{R}^k$ . Also ist  $DG(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine surjektive lineare Abbildung und folglich invertierbar

Nach Korollar 14.10 aus Analysis II ist  $G : \varphi_1^{-1}(M \cap U) \rightarrow \pi(\Phi(M \cap U))$  ein Diffeomorphismus. Die Umkehrfunktion von  $G$  ist dabei gegeben durch

$$G^{-1} = (\pi \circ \Phi \circ \varphi_1)^{-1} = \varphi_1^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ \eta,$$

wobei  $\eta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  gegeben ist durch  $\eta(x) = (x, 0)$ , denn für alle  $x \in \mathbb{R}^k$  gilt  $(\pi \circ \eta)(x) = \pi(x, 0) = x$ .

Ebenso ist  $H : \varphi_2^{-1}(M \cap U) \rightarrow \pi(\Phi(M \cap U))$  ein Diffeomorphismus. Auf der Umgebung  $\varphi_1^{-1}(M \cap U)$  von  $x_0$  haben wir nun

$$\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ \eta \circ \pi \circ \Phi \circ \varphi_1 = (\pi \circ \Phi \circ \varphi_2)^{-1} \circ (\pi \circ \Phi \circ \varphi_1) = H^{-1} \circ G,$$

d. h.  $\psi$  ist auf dieser Umgebung stetig differenzierbar. Da  $x_0 \in W_1$  beliebig war, ist  $\psi$  auf  $W_1$  stetig differenzierbar. Entsprechend erhält man die stetige Differenzierbarkeit von  $\psi^{-1} : W_2 \rightarrow W_1$ .  $\square$

## 7.2 Integration über Untermannigfaltigkeiten, Teil 1

Wir wollen nun das Integral von Funktionen über  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten  $M$  von  $\mathbb{R}^d$  definieren und beginnen mit dem einfachsten Fall, wenn  $M$  durch eine einzige injektive Immersion beschrieben werden kann. Zur Motivation betrachten wir zunächst wieder eine lineare Version.

Sei  $k < d$ ,  $A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  linear und  $W := [0, 1]^k$  der  $k$ -dimensionale Einheitswürfel. Dann ist das  $d$ -dimensionale Volumen von  $AW$  gleich Null nach Folgerung 4.16 (und wenig interessant). Wir wollen ein " $k$ -dimensionales Volumen" von  $AW$  definieren. Dieses soll sich nicht ändern, wenn eine orthogonale Abbildung (= Drehung)  $B$  auf  $AW$  angewendet wird. Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, kann  $B$  so gewählt werden, dass  $\text{im}(BA) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^d$ . Ist  $P : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k} = \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $(x, y) \mapsto x$ , so ist es weiter vernünftig anzunehmen, dass  $BAW$  und  $PBAW$  gleiche  $k$ -dimensionale Volumina besitzen. Nun ist aber  $PBA$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^k$  nach  $\mathbb{R}^k$  und daher

$$\lambda_k(PBAW) = |\det(PBA)|$$

(vgl. Abschnitt 4.2). Diese Formel ist noch nicht sehr hilfreich, da sie die Matrix  $B$  enthält (die wir irgendwie wählen mussten). Nun ist aber

$$\begin{aligned} |\det(PBA)|^2 &= \det(A^T B^T P^T) \det(PBA) = \det(A^T B^T P^T PBA) \\ &= \det(A^T B^T BA) = \det(A^T A) \end{aligned}$$

Beachte:  $P^T P$  ist der Orthogonalprojektor von  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$  auf  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ , und wegen  $\text{im}(BA) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\}$  ist  $P^T PBA = BA$ . Damit haben wir eine brauchbare Formel für das  $k$ -dimensionale Volumen von  $AW$  gefunden:

$$\text{vol}_k(AW) = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

(Die Matrix  $A^T A$  ist positiv semidefinit und hat daher eine nichtnegative Determinante.) Damit ist der Weg zur Definition des  $k$ -dimensionalen Volumens von parametrisierten Untermannigfaltigkeiten vorgezeichnet.

**Definition 7.10.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Immersion und  $J_\varphi(x)$  ihre Jacobimatrix im Punkt  $x \in U$ . Die  $k \times k$ -Matrix

$$G(x) := J_\varphi(x)^T J_\varphi(x)$$

heißt der Maßtensor von  $\varphi$ , und die durch  $g(x) := \det G(x)$  definierte Funktion heißt die Gramsche Determinante von  $\varphi$ .

**Bemerkung 7.11.** (a) Diese Bezeichnung rührt daher, dass

$$G(x) = (g_{ij}(x))_{i,j=1}^k \quad \text{mit} \quad g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle$$

ist, wobei  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i})$ . Es ist  $G(x)$  also die Gramsche Matrix der Vektoren  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)$ , d. h. der Spalten von  $J_\varphi(x)$ .

(b) Wegen  $\text{rang } J_\varphi(x) = k$  sind die Spalten von  $J_\varphi(x)$  linear unabhängig, d. h.  $G(x)$  ist positiv definit. Insbesondere ist  $g(x) > 0$  für alle  $x \in U$ .

**Definition 7.12.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  Untermannigfaltigkeit,  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $(\varphi, U)$  eine Karte von  $M$  mit  $\varphi(U) = M$ .

(a) Eine Teilmenge  $E \subseteq M$  heißt messbar (bzgl.  $\varphi$ ), wenn ihr Urbild  $\varphi^{-1}(E)$  messbar ist.

(b) Ist  $E \subseteq M$  messbar, so heißt

$$S_M(E) := \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{g(x)} d\lambda_k(x) \quad (7.3)$$

das  $k$ -dimensionale Volumen von  $E$  (bzgl.  $\varphi$ ).

(c) Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar (bzgl.  $\varphi$ ), wenn die Funktion

$$U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(\varphi(x))\sqrt{g(x)}$$

Lebesgue-integrierbar auf  $U$  ist. In diesem Fall heißt

$$\int_M f dS_M := \int_U f(\varphi(x))\sqrt{g(x)} d\lambda_k(x) \quad (7.4)$$

das Integral von  $f$  über  $M$ .



**Bemerkung 7.13.** (a) Wir erklären hier das Integral  $\int_M f dS_M$  einfach durch (7.4). Man kann auch auf anderem Weg zu diesem Integral gelangen. Nach Satz 2.11 ist nämlich

$$\mu : A \mapsto \int_A \sqrt{g(x)} d\lambda_k(x)$$

ein Maß auf der Lebesgue- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k)$ . Hiermit kann man zeigen, dass die Menge der messbaren Teilmengen von  $M$  ebenfalls eine  $\sigma$ -Algebra bildet und dass  $S_M$  ein vollständiges Maß auf dieser  $\sigma$ -Algebra ist, das sogenannte *Oberflächenmaß* von  $M$ . Das bezüglich dieses Maßes erklärte Integral stimmt mit (7.4) überein (was wir uns vielleicht in der Übung ansehen werden).

- (b) Man beachte, dass aus Folgerung 1.24 und der Stetigkeit von  $\varphi$  folgt, dass jede Borelmenge des metrischen Raumes  $M$  messbar ist.
- (c) Weiter nennen wir eine messbare Menge  $E \subseteq M$  eine *Nullmenge*, wenn  $S_M(E) = 0$  ist. Wie in Abschnitt 2.2 zeigt man: wird eine integrierbare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Nullmenge abgeändert, so bleibt sie integrierbar mit dem gleichen Integral.

Wir zeigen nun, dass die in Definition 7.12 erklärten Volumina bzw. Integrale nicht von der Parametrisierung  $\varphi$  abhängen. Bemerkungen wie “bzgl.  $\varphi$ ” in Definition 7.12 dürfen also weggelassen werden.

**Lemma 7.14.** *Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$  offen,  $\tau : V \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine stetig differenzierbare Funktion und  $f : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ . Weiter seien*

$$g_\varphi(x) := \det(J_\varphi(x)^T J_\varphi(x)) \quad \text{bzw.} \quad g_{\varphi \circ \tau}(x) := \det(J_{\varphi \circ \tau}(x)^T J_{\varphi \circ \tau}(x))$$

die Gramschen Determinanten von  $\varphi$  bzw.  $\varphi \circ \tau$ . Ist eine der Funktionen

$$x \mapsto f(\varphi(x))\sqrt{g_\varphi(x)} \quad \text{bzw.} \quad y \mapsto f((\varphi \circ \tau)(y))\sqrt{g_{\varphi \circ \tau}(y)}$$

auf  $U$  bzw.  $V$  Lebesgue-integrierbar, so ist es auch die andere, und es gilt

$$\int_U f(\varphi(x))\sqrt{g_\varphi(x)} d\lambda_k(x) = \int_V f((\varphi \circ \tau)(y))\sqrt{g_{\varphi \circ \tau}(y)} d\lambda_k(y).$$

*Beweis.* Mit der Kettenregel  $D(\varphi \circ \tau)(y) = D\varphi(\tau(y)) \circ D\tau(y)$  folgt

$$J_{\varphi \circ \tau}(y)^T J_{\varphi \circ \tau}(y) = J_\tau(y)^T J_\varphi(\tau(y))^T J_\varphi(\tau(y)) J_\tau(y)$$

und damit  $g_{\varphi \circ \tau}(y) = (\det J_\tau(y))^2 g_\varphi(\tau(y))$ . Mit der Transformationsformel erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \int_V f((\varphi \circ \tau)(y))\sqrt{g_{\varphi \circ \tau}(y)} d\lambda_k(y) &= \int_V f(\varphi(\tau(y)))\sqrt{g_\varphi(\tau(y))} |\det J_\tau(y)| d\lambda_k(y) \\ &= \int_U f(\varphi(x))\sqrt{g_\varphi(x)} d\lambda_k(x). \end{aligned}$$

Der Transformationssatz liefert auch die Aussage über die Integrierbarkeit.  $\square$

**Beispiel 7.15.** Wir betrachten den Fall  $k = 1$ . Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^1$  ein offenes Intervall und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine injektive Immersion. Dann ist  $M := \varphi(U)$  eine Kurve in  $\mathbb{R}^d$ . Aus

$$G(x) = J_\varphi(x)^T J_\varphi(x) = \langle \varphi'(x), \varphi'(x) \rangle = \|\varphi'(x)\|_2^2$$

erhalten wir  $g(x) = \|\varphi'(x)\|_2^2$  und damit

$$S_M(M) = \int_U \|\varphi'(t)\|_2 d\lambda_1(t).$$

Das ist exakt die Formel aus Definition 8.6 (Ana II) für die Länge der Kurve  $M$ . Das Integral von  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$\int_M f dS_M = \int_U f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\|_2 d\lambda_1(t),$$

und das ist genau die Definition des Kurvenintegrals (1. Art) aus Definition 19.5 (Ana II).

### 7.3 Integration über Untermannigfaltigkeiten, Teil 2

Wir schauen uns nun Untermannigfaltigkeiten an, die nicht mehr durch eine einzige Karte beschrieben werden können. Zuerst überlegen wir uns, dass man für jede Untermannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  eine abzählbare Familie  $(\varphi_j, U_j)_{j \geq 1}$  von Karten so findet, dass

$$M = \bigcup_{j \geq 1} \varphi_j(U_j). \quad (7.5)$$

Nach dem Parametrisierungssatz gibt es nämlich zu jedem  $p \in M$  eine offene Umgebung  $V_p \subseteq \mathbb{R}^d$  so, dass  $V_p \cap M = \varphi_p(U_p)$  für eine Karte  $(\varphi_p, U_p)$  von  $M$ . Durch Verkleinern von  $V_p$  kann man erreichen, dass

$$V_p = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - q\|_2 < r_q\}$$

mit  $q \in \mathbb{Q}^d$  und  $r_q \in \mathbb{Q}$ . Da es nur abzählbar viele solcher Mengen gibt und da jeder Punkt  $p \in M$  in einer solchen Menge liegt, erhalten wir (7.5). In praktischen Anwendungen genügen oft bereits endlich viele Karten, um  $M$  zu überdecken.

**Lemma 7.16.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  eine Untermannigfaltigkeit, und seien  $(\varphi_j, U_j)_{j \geq 1}$  und  $(\tilde{\varphi}_i, \tilde{U}_i)_{i \geq 1}$  abzählbare Familien von Karten von  $M$  mit

$$M = \bigcup_{j \geq 1} \varphi_j(U_j) = \bigcup_{i \geq 1} \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i).$$

Wir setzen  $M_j := \varphi_j(U_j)$ ,  $\tilde{M}_i := \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i)$  sowie  $N_1 := M_1$ ,  $\tilde{N}_1 := \tilde{M}_1$  und

$$N_j := M_j \setminus (M_1 \cup \dots \cup M_{j-1}), \quad \tilde{N}_i := \tilde{M}_i \setminus (\tilde{M}_1 \cup \dots \cup \tilde{M}_{i-1})$$

für  $i, j > 1$  und erhalten so zwei jeweils paarweise disjunkte und abzählbare Familien  $(N_j)_{j \geq 1}$ ,  $(\tilde{N}_i)_{i \geq 1}$  von Borelmengen, die  $M$  überdecken. Ist  $E \subseteq M$  eine Menge, für die jeder Durchschnitt  $E \cap N_j$  (bzgl.  $\varphi_j$ ) messbar ist, so ist auch jeder Durchschnitt  $E \cap \tilde{N}_i$  (bzgl.  $\tilde{\varphi}_i$ ) messbar, und es gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j) = \sum_{i=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap \tilde{N}_i).$$

*Beweis.* Wir schreiben

$$E \cap N_j = \bigcup_{i \geq 1} (E \cap N_j \cap \tilde{N}_i).$$

Die Menge  $E \cap N_j$  ist bzgl.  $S_{M_j}$  messbar, und da  $\tilde{N}_i$  Borelmenge ist, ist auch  $E \cap N_j \cap \tilde{N}_i$  bzgl.  $S_{M_j}$  messbar. Nach Satz 7.9 (Parameter-Transformation), den wir auf die offene Menge  $M_j \cap \tilde{M}_i$  anwenden, erhalten wir mit Lemma 7.14

$$S_{M_j}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) = S_{\tilde{M}_i}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i).$$

Schließlich folgt mit dem Doppelreihensatz, den wir hier nur in einer einfachen Version benötigen, da alle Summanden nichtnegativ sind,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap \tilde{N}_i). \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 7.17.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  eine Untermannigfaltigkeit und  $(\varphi_j, U_j)_{j \geq 1}$  eine Familie von Karten von  $M$  mit  $M = \bigcup_{j \geq 1} \varphi_j(U_j)$ . Weiter seien  $M_j$  und  $N_j$  wie in Lemma 7.16 erklärt.

- (a) Eine Teilmenge  $E$  von  $M$  heißt messbar, wenn jeder Durchschnitt  $E \cap N_j$  (bzgl.  $\varphi_j$ ) messbar ist.
- (b) Für jede messbare Menge  $E \subseteq M$  definieren wir

$$S_M(E) := \sum_{j=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j). \quad (7.6)$$

Lemma 7.16 garantiert, dass diese Definitionen nicht von den gewählten Karten abhängen.

(c) Man kann zeigen, dass durch (7.6) ein Maß  $S_M$  auf der  $\sigma$ -Algebra der messbaren Teilmengen von  $M$  definiert wird und dass das zugehörige Integral einer integrierbaren Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist durch

$$\int_M f dS_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\varphi_j^{-1}(N_j)} f(\varphi_j(x)) \sqrt{g_{\varphi_j}(x)} d\lambda_k(x). \quad (7.7)$$

Das Maß  $S_M$  heißt das Oberflächenmaß auf  $M$ .

Einige der in dieser Definition formulierten Aussagen werden Sie sich in der Übung ansehen. Mit der Definition des Oberflächenmaßes haben wir Integralen über Untermannigfaltigkeiten einen präzisen Sinn gegeben. Wir betrachten einige Beispiele.

**Beispiel 7.18.** Hier betrachten wir die Rotationsflächen aus Beispiel 7.3 (d). Die Parametrisierung  $\Phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  (mit einem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ ) und ihre Jacobimatrix in  $(t, \varphi)$  sind also gegeben durch

$$\Phi(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi \\ r(t) \sin \varphi \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_{\Phi}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r'(t) \cos \varphi & -r(t) \sin \varphi \\ r'(t) \sin \varphi & r(t) \cos \varphi \\ z'(t) & 0 \end{pmatrix},$$

und für den Maßtensor und die Gramsche Determinante findet man

$$G(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r'(t)^2 + z'(t)^2 & 0 \\ 0 & r^2(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(t, \varphi) = r(t)^2 \|\gamma'(t)\|_2^2$$

mit  $\gamma(t) = (r(t), 0, z(t))$  (wir hatten  $r(t) > 0$  in Beispiel 7.3 vorausgesetzt). Für<sup>5</sup>  $M := \Phi(I \times (0, 2\pi))$  erhält daher das Oberflächenintegral die Form

$$\int_M f dS_M = \int_I \int_0^{2\pi} f(\Phi(t, \varphi)) r(t) \|\gamma'(t)\|_2 d\varphi dt.$$

Für  $f \equiv 1$  ergibt sich insbesondere für das 2-dimensionale Volumen von  $M$

$$S_M(M) = \int_I \int_0^{2\pi} r(t) \|\gamma'(t)\|_2 d\varphi dt = 2\pi \int_I r(t) \|\gamma'(t)\|_2 dt.$$

Für die zweidimensionale Sphäre  $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  ist  $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $r(t) = \cos t$ ,  $z(t) = \sin t$  und damit  $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$  sowie

$$S_{\mathbb{S}^2}(\mathbb{S}^2) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt = 4\pi.$$

---

<sup>5</sup>Hier muss noch eine Nullmenge für  $\varphi = 0$  wegdiskutiert werden!

**Beispiel 7.19.** Hier sehen wir uns Funktionsgraphen an (vgl. Beispiel 7.3 (b)). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann ist  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ ,  $x \mapsto (x, f(x))$  eine injektive Immersion, und die Umkehrfunktion  $\varphi(U) \rightarrow U$ ,  $(x, f(x)) \mapsto x$  ist offenbar stetig (Projektion auf die erste Komponente). Also ist  $M := \varphi(U)$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{k+1}$ . Weiter haben wir

$$J_\varphi(x) = \begin{pmatrix} I \\ \nabla f(x) \end{pmatrix}$$

und

$$G(x) = \left( I \nabla f(x)^T \right) \begin{pmatrix} I \\ \nabla f(x) \end{pmatrix} = I + \nabla f(x)^T \nabla f(x),$$

wobei  $I$  die  $k \times k$ -Einheitsmatrix ist. Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der symmetrischen Matrix  $G(x)$ . Ist  $v \in \ker(\nabla f(x))$ , so ist  $\nabla f(x) \cdot v = 0$  und somit  $G(x)v = v$ . Alle Vektoren  $\neq 0$  aus dem (mindestens  $(k-1)$ -dimensionalen) Kern von  $\nabla f(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$  sind also Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Außerdem ist

$$\begin{aligned} G(x)\nabla f(x)^T &= \nabla f(x)^T + \nabla f(x)^T \nabla f(x) \nabla f(x)^T \\ &= (1 + \|\nabla f(x)\|_2^2) \nabla f(x)^T, \end{aligned}$$

sodass (für  $\nabla f(x) \neq 0$ )  $\nabla f(x)^T$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $1 + \|\nabla f(x)\|_2^2$  ist. Da  $\nabla f(x)^T$  senkrecht auf  $\ker(\nabla f(x))$  steht, haben wir (egal, ob  $\nabla f(x) \neq 0$  oder nicht) damit  $k$  paarweise orthogonale Eigenvektoren gefunden. Da die Determinante von  $G(x)$  das Produkt der Eigenwerte dieser Matrix ist, folgt:

$$g(x) = 1 + \|\nabla f(x)\|_2^2. \quad (7.8)$$

Für  $M = \varphi(U)$  ist also das  $k$ -dimensionale Volumen gleich

$$S_M(M) = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|_2^2} d\lambda_k(x).$$

Insbesondere ist für  $d > 1$  die obere Halbsphäre vom Radius  $r > 0$ , d. h.

$$M := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = r, x_d > 0\},$$

der Graph der Funktion  $F : \{x \in \mathbb{R}^{d-1} : \|x\|_2 < r\} \rightarrow \mathbb{R}$ , die gegeben ist durch

$$x \mapsto \sqrt{r^2 - \|x\|_2^2} = \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{d-1}^2}.$$

Aus  $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = -\frac{x_j}{F(x)}$  folgt mit (7.8)

$$g(x) = 1 + \|\nabla F(x)\|_2^2 = 1 + \frac{\|x\|_2^2}{F(x)^2} = \frac{F(x)^2 + \|x\|_2^2}{F(x)^2} = \frac{r^2}{r^2 - \|x\|_2^2}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_M f dS_M &= \int_{\|x\|_2 < r} f \left( x, \sqrt{r^2 - \|x\|_2^2} \right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|x\|_2^2}} d\lambda_{d-1}(x) \\ &= \int_{\|y\|_2 < 1} f \left( ry, r\sqrt{1 - \|y\|_2^2} \right) \frac{r^{d-1}}{\sqrt{1 - \|y\|_2^2}} d\lambda_{d-1}(y), \end{aligned} \quad (7.9)$$

wobei wir  $x = ry$  substituiert haben.

**Beispiel 7.20.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $r > 0$ . Ist  $\varphi : U \rightarrow M$  eine Karte von  $M$ , so ist  $r\varphi : U \rightarrow rM$  eine Karte von  $rM$ . Hieraus folgt, dass  $rM$  ebenfalls eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^d$  ist. Weiter folgt aus  $D(r\varphi)(x) = rD\varphi(x)$  für die Gramschen Determinanten von  $\varphi$  bzw.  $r\varphi$ , dass  $g_{r\varphi}(x) = r^{2k}g_\varphi(x)$ , d.h.  $\sqrt{g_{r\varphi}(x)} = r^k\sqrt{g_\varphi(x)}$ . Folglich gilt

$$S_{rM}(rE) = r^k S_M(E)$$

für jede messbare Teilmenge  $E \subseteq M$  und

$$\int_{rM} f(x) dS_{rM}(x) = r^k \int_M f(rx) dS_M(x) \quad (7.10)$$

für jede integrierbare Funktion  $f : rM \rightarrow \mathbb{R}$

**Satz 7.21.** Sei  $d > 1$  und  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar. Dann ist für fast jedes  $r > 0$  die Funktion  $f$  über der Sphäre  $S_r := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = r\}$  integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \int_0^\infty \int_{S_r} f(x) dS_{S_r}(x) dr = \int_0^\infty \int_{S_1} f(ry) dS_{S_1}(y) r^{d-1} dr. \quad (7.11)$$

*Beweis.* Sei  $H_\pm := \{x \in \mathbb{R}^d : \pm x_d > 0\}$ . Dann ist  $f = f\chi_{H_+} + f\chi_{H_-}$  fast überall, denn  $\{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$  ist eine Nullmenge. Da  $S_r \cap \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$  eine  $(d-1)$ -dimensionale Nullmenge ist, genügt es, die Behauptung für jede der Funktionen  $f\chi_\pm$  zu zeigen. Wir tun dies für  $f\chi_+$  und nehmen gleich an, dass  $f$  außerhalb von  $H_+$  verschwindet.

Sei  $U := \{x \in \mathbb{R}^{d-1} : \|x\| < 1\}$ . Die Abbildung

$$\Phi : U \times (0, \infty) \rightarrow H_+ \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}, \quad (x, r) \mapsto \left( rx, r\sqrt{1 - \|x\|_2^2} \right)$$

ist bijektiv und hat die stetige Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1}(y) = \left( \frac{y_1}{\|y\|_2}, \dots, \frac{y_{d-1}}{\|y\|_2}, \|y\|_2 \right)$$

(Nachrechnen!). Also ist  $\Phi$  ein Diffeomorphismus.

Sei  $F(x) := \sqrt{1 - \|x\|_2^2}$ . Dann ist  $\nabla F(x) = -\frac{x}{F(x)}$  (als Zeilenvektor) sowie  $\Phi(x, r) = (rx, rF(x)) = r(x, F(x))$ . Folglich ist

$$J_\Phi(x, r) = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & r & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r & x_{d-1} \\ r\nabla F(x) & & & & F(x) \end{pmatrix}.$$

Ausklammern von  $r$  und Subtraktion des  $x_j$ -fachen der  $j$ -ten Spalte von der letzten Spalte liefern

$$\begin{aligned} \det J_\Phi(x, r) &= r^{d-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{d-1} \\ \nabla F(x) & & & & F(x) \end{pmatrix} \\ &= r^{d-1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \nabla F(x) & & & & F(x) - \nabla F(x) \cdot x \end{pmatrix} \\ &= r^{d-1} (F(x) - \nabla F(x) \cdot x) = r^{d-1} \left( F(x) + \frac{\|x\|_2^2}{F(x)} \right) \\ &= \frac{r^{d-1}}{F(x)} (F(x)^2 + \|x\|_2^2) = \frac{r^{d-1}}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}}. \end{aligned}$$

Mit dem Transformationssatz und dem Satz von Fubini ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \int_{H_+} f \, d\lambda_d &= \int_{U \times (0, \infty)} f \left( rx, r\sqrt{1 - \|x\|_2^2} \right) \frac{r^{d-1}}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}} \, d\lambda_{d-1}(x) \, dr \\ &= \int_0^\infty \int_U \frac{f(rx, r\sqrt{1 - \|x\|_2^2})}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}} r^{d-1} \, d\lambda_{d-1}(x) \, dr. \end{aligned}$$

Nach (7.9) ist das innere Integral gleich  $\int_{S_r} f \, dS_r$ . Hieraus folgt die erste Gleichheit in (7.11), und die zweite bekommt man mit (7.10).  $\square$

**Beispiel 7.22** (Volumen der Einheitssphäre). Sei  $B_d := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq 1\}$  und  $\mathbb{S}^{d-1} = \partial B_d$ . Wir wollen das  $(d-1)$ -dimensionale Volumen  $w_d := \text{vol}_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})$  der  $(d-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre  $\mathbb{S}^{d-1}$  berechnen. Es sei daran erinnert, dass das (“gewöhnliche”)  $d$ -dimensionale Volumen von  $B_d$  durch  $c_d = \text{vol}_d(B_d) =$

$\pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2} + 1)$  gegeben ist. Wir wenden nun Satz 7.21 auf die charakteristische Funktion von  $B_d$  an und finden

$$c_d = \int_{\|x\|_2 \leq 1} d\lambda_d(x) = \int_0^1 \int_{\|x\|=1} dS_{\mathbb{S}^{d-1}}(y) r^{d-1} dr = w_d \int_0^1 r^{d-1} dr = \frac{w_d}{d}.$$

Somit ist

$$w_d = dc_d = d \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} = 2 \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

Insbesondere erhalten wir

- $w_2 = 2\pi$  (Länge des Einheitskreisbogens),
- $w_3 = 4\pi$  (Oberfläche der zweidimensionalen Einheitssphäre),
- $w_4 = 2\pi^2$  (dreidimensionales Volumen von  $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ ).



## 8 Integralsätze

Das zentrale Resultat der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Variablen ist der Hauptsatz, wonach

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt$$

für jede stetig differenzierbare Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt. Wir können diesen Satz betrachten als eine Beziehung zwischen den Werten von  $F$  auf dem Rand  $\partial[a, b] = \{a, b\}$  von  $[a, b]$  und den Werten von  $F'$  im Inneren von  $[a, b]$ . Thema dieses Kapitels sind Verallgemeinerungen dieser Beziehung. Die allgemeine Stokessche Formel

$$\int_{\partial M} w = \int_M dw$$

(die wir hier nicht behandeln) liefert eine weitreichende und elegante Verallgemeinerung des Hauptsatzes. Wir betrachten lediglich Spezialfälle dieser Formel: den Gaußschen Integralsatz, den Stokesschen Integralsatz im Raum und die Greensche Formel in der Ebene.

### 8.1 Kompakta mit glattem Rand

Der Gaußsche Integralsatz ist wohl das wichtigste Resultat der Integralrechnung im  $\mathbb{R}^n$ . Er beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über einen Bereich im  $\mathbb{R}^n$  und einem Oberflächenintegral über dem Rand des Bereiches. Wir beweisen ihn nur für spezielle Bereiche: *Kompakta mit glattem Rand*.

**Definition 8.1.** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  eine kompakte Teilmenge (ein Kompaktum). Das Kompaktum  $A$  hat einen glatten Rand, wenn es zu jedem Randpunkt  $p \in \partial A$  eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$  so gibt, dass

(a)  $A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$  und

(b)  $\nabla\psi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$ .

**Lemma 8.2.** Im Kontext von Definition 8.1 gilt

$$\partial A \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

*Beweis.* Sei zunächst  $x \in \partial A \cap U$ . Da  $A$  kompakt ist, ist  $A$  abgeschlossen. Damit ist  $x \in A$  und  $\psi(x) \leq 0$ . Wäre  $\psi(x) < 0$ , so wäre  $\{y \in U : \psi(y) < 0\}$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$ , die in  $A$  liegt und  $x$  enthält. Das steht im Widerspruch zu  $x \in \partial A$ . Also ist  $\psi(x) = 0$ .

Sei nun  $x \in U$  und  $\psi(x) = 0$ . Dann ist  $x \in A$ , und wir zeigen, dass  $x$  ein Randpunkt von  $A$  ist. Wegen  $\nabla\psi(x) \neq 0$  ist die lineare Abbildung  $D\psi(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  surjektiv. Es gibt also ein  $v \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|v\|_2 = 1$  und  $\nabla\psi(x)v > 0$ . Nun ist

$$0 < \nabla\psi(x)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(x + tv) - \psi(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(x + tv)}{t}.$$

Es gibt also ein  $\varepsilon > 0$  so, dass  $\psi(x + tv) > 0$  für alle  $t \in (0, \varepsilon)$ . Folglich liegen für hinreichend große  $n$  die Punkte  $x + \frac{1}{n}v$  nicht in  $A$ . Es gilt aber  $x + \frac{1}{n}v \rightarrow x$  und daher  $x \in \partial A$ .  $\square$

**Folgerung 8.3.** *Der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand ist eine  $(d-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^d$ .*

*Beweis.* Nach Lemma 8.2 ist  $\partial A$  lokal die Nullstellenmenge der Funktion  $\psi$ , und 0 ist ein regulärer Wert von  $\psi$ . Die Behauptung folgt also aus dem Satz vom regulären Wert (Satz 16.6 in Ana II).  $\square$

Für den Gaußschen Integralsatz benötigen wir das *Normalenfeld* von  $\partial A$ . Dazu erinnern wir an die Definition von Tangential- und Normalenraum aus Analysis II.

**Erinnerung 8.4.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $p \in M$ .

- (a) Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^d$  heißt *Tangentialvektor an  $M$  in  $p$* , wenn ein  $\varepsilon > 0$  und ein stetig differenzierbarer Weg  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma'(0) = v$  existieren. Die Menge aller Tangentialvektoren an  $M$  in  $p$  bezeichnen wir als den *Tangentialraum*  $T_p(M)$ .
- (b) Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^d$  heißt *Normalenvektor an  $M$  in  $p$* , wenn er auf  $T_p(M)$  senkrecht steht (d. h. wenn  $\langle v, w \rangle = 0$  für alle  $w \in T_p(M)$ ). Die Menge aller Normalenvektoren an  $M$  in  $p$  bezeichnen wir als den *Normalenraum*  $N_p(M)$ .

Für den Tangentialraum hat man die folgende Beschreibung.

**Lemma 8.5.** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $\varphi : U \rightarrow M$  eine Karte von  $M$ . Dann ist*

$$T_{\varphi(x)}(M) = \text{im}(D\varphi(x)) \quad \text{für alle } x \in U.$$

*Beweis.* Sei  $x \in U$  und  $v \in \mathbb{R}^k$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  so, dass  $x + tv \in U$  für alle  $t$  aus  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Wir betrachten den Weg

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \quad t \mapsto \varphi(x + tv).$$

Für diesen ist  $\gamma(0) = \varphi(x)$  und  $\gamma'(0) = D\varphi(x)v$ . Also ist  $\text{im}(D\varphi(x)) \subseteq T_{\varphi(x)}(M)$ . Für die umgekehrte Inklusion wählen wir wie im Beweis von Satz 7.7 eine offene

Umgebung  $W \subseteq U$  von  $x$  und einen Diffeomorphismus  $\Phi$  auf  $W \times \mathbb{R}^{d-k}$  so, dass  $\Phi^{-1}(\varphi(w)) = (w, 0)$  für alle  $w \in W$ . Mit der Projektion

$$\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad (x, y) \mapsto x,$$

haben wir dann  $\pi(\Phi^{-1}(\varphi(w))) = w$  und  $\varphi[\pi(\Phi^{-1}(\varphi(w)))] = \varphi(w)$  für alle  $w \in W$ . Sei nun  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  ein stetig differenzierbarer Weg mit  $\gamma(0) = \varphi(x)$ . Ist  $\varepsilon$  hinreichend klein, so ist  $\gamma(t) \in \varphi(W)$  für alle  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  und folglich

$$\varphi[\pi(\Phi^{-1}(\gamma(t)))] = \gamma(t) \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Differentiation nach  $t$  an der Stelle  $t = 0$  liefert  $D\varphi(x)v = \gamma'(0)$  mit einem Vektor  $v \in \mathbb{R}^k$ . Also ist  $\gamma'(0) \in \text{im}(D\varphi(x))$  und damit  $T_{\varphi(x)}(M) \subseteq \text{im}(D\varphi(x))$ .  $\square$

Insbesondere stellen wir fest, dass  $T_p(M)$  ein  $k$ -dimensionaler und  $N_p(M)$  ein  $(d - k)$ -dimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^d$  ist und dass

$$T_p(M) \oplus N_p(M) = \mathbb{R}^d.$$

gilt.

Ist  $M = \partial A$  der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand, so ist  $N_p(\partial A)$  für jeden Punkt  $p \in M$  ein eindimensionaler Vektorraum. Es gibt also genau zwei Normalenvektoren der Länge 1. Wir wollen denjenigen auszeichnen, der „nach außen“ zeigt.

**Satz 8.6.** *Sei  $A$  ein Kompaktum mit glattem Rand  $\partial A$ . Dann gilt*

- (a) *Für jedes  $p \in \partial A$  gibt es genau einen Vektor  $\nu(p) \in N_p(\partial A)$  der Länge 1 mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein  $\varepsilon > 0$  so, dass  $p + t\nu(p) \notin A$  für alle  $t \in (0, \varepsilon)$ .*
- (b) *Die Abbildung  $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist stetig.*

**Definition 8.7.** *Der Vektor  $\nu(p)$  aus Satz 8.6 heißt äußerer Normalenvektor an  $\partial A$  in  $p$ , und  $\nu$  heißt das äußere Normalenfeld von  $A$ .*

*Beweis von Satz 8.6.* Zuerst beweisen wir die Existenz eines äußeren Normalenvektors. Seien dazu nach Definition 8.1  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  eine offene Umgebung von  $p$  und  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $\nabla\psi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$  und  $U \cap A = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$ . Wir zeigen, dass für jedes  $q \in U$  (insbesondere für  $q = p$ )

$$\nu(q) := \frac{1}{\|\nabla\psi(q)\|_2} \nabla\psi(q)^T \tag{8.1}$$

ein äußerer Normalenvektor an  $\partial A$  in  $q$  ist. Ist  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \partial A$  ein Weg mit  $\gamma(0) = q$  und ist  $\varepsilon$  so klein, dass  $\gamma(t) \in U$  für alle  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  gilt, so ist nach Lemma 8.2

$$\psi(\gamma(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Differentiation nach  $t$  an der Stelle  $t = 0$  liefert  $\nabla\psi(q)\gamma'(0) = 0$ . Folglich steht der Vektor  $\nabla\psi(q)$  und damit auch  $\nu(q)$  senkrecht auf  $T_q(\partial A)$ . Klar ist auch, dass  $\|\nu(q)\|_2 = 1$ . Die außerdem geforderte Eigenschaft, dass  $q + t\nu(q) \notin A$  für kleine positive  $t$  gilt, folgt wegen

$$\partial_{\nu(q)}\psi(q) = \nabla\psi(q) \cdot \nu(q) = \frac{\nabla\psi(q) \cdot \nabla\psi(q)^T}{\|\nabla\psi(q)\|_2} = \|\nabla\psi(q)\|_2 > 0$$

wie im Beweis von Lemma 8.2.

Wir wenden uns der Eindeutigkeit des äußeren Normalenvektors zu. Nach der Vorbemerkung zu diesem Satz gibt es genau zwei Normalenvektoren der Länge 1 und einer davon ist der Vektor  $\nu(p)$  aus (8.1). Wie im Beweis von Lemma 8.2 sieht man nun, dass  $\psi(p - t\nu(p)) < 0$  für  $t > 0$  hinreichend klein. Für solche  $t$  ist also  $p - t\nu(p) \in A$ , d. h. der Vektor  $-\nu(p)$  erfüllt nicht die zusätzliche Bedingung, nach außen zu zeigen.

Schließlich ergibt sich die Stetigkeit von  $\nu$  sofort aus der Darstellung in (8.1).  $\square$

**Beispiel 8.8** (Kugel). Sei  $r > 0$ . Die Kugel  $A := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq r\}$  ist ein Kompaktum mit glattem Rand, denn die Funktion  $\psi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|_2^2 - r^2$ , hat die geforderten Eigenschaften. Für  $p \in \partial A$  ist  $\nabla\psi(p) = 2p$ , und wegen (8.1) ist  $\nu(p) = \frac{2}{\|2p\|}p = \frac{1}{r}p$  der zugehörige Normalenvektor.

**Beispiel 8.9** (Parametrisierte Fläche und Funktionsgraph). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine injektive Immersion. Wir interessieren uns für die Normalenvektoren an die Fläche  $\varphi(U)$ . Für  $x \in U$  haben wir  $T_{\varphi(x)}(\varphi(U)) = \text{im}(D\varphi(x)) = \text{span}(\partial_1\varphi(x), \partial_2\varphi(x))$ , und da  $\varphi$  eine Immersion ist, ist dies ein zweidimensionaler Unterraum von  $\mathbb{R}^3$ . Es gibt im Punkt  $\varphi(x)$  also genau 2 Normalenvektoren der Länge 1. Wir legen einen Normalenvektor  $\nu(\varphi(x))$  fest, indem wir

$$\det(\partial_1\varphi(x), \partial_2\varphi(x), \nu(\varphi(x))) > 0$$

verlangen, d. h. die Vektoren

$$\partial_1\varphi(x), \quad \partial_2\varphi(x) \quad \text{und} \quad \nu(\varphi(x))$$

sollen in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Mit dieser Information können wir  $\nu(\varphi(x))$  direkt berechnen:

$$\nu(\varphi(x)) = \frac{\partial_1\varphi(x) \times \partial_2\varphi(x)}{\|\partial_1\varphi(x) \times \partial_2\varphi(x)\|},$$

Ist speziell  $\varphi(x) = (x, f(x))$  mit einer Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist

$$\partial_1\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 f(x) \end{pmatrix}, \quad \partial_2\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 f(x) \end{pmatrix},$$

also

$$\partial_1\varphi(x) \times \partial_2\varphi(x) = \begin{pmatrix} -\partial_1 f(x) \\ -\partial_2 f(x) \\ 1 \end{pmatrix},$$

und daher

$$\nu(\varphi(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \partial_1 f(x)^2 + \partial_2 f(x)^2}} \begin{pmatrix} -\partial_1 f(x) \\ -\partial_2 f(x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist  $\nu(\varphi(x))$  der obere Normalenvektor an den Graphen von  $f$ .

**Beispiel 8.10.** In diesem Beispiel geht es darum, den Rand eines Kompaktums mit glattem Rand lokal als Graphen einer Funktion  $g$  darzustellen und den äußeren Normalenvektor mit Hilfe von  $g$  zu beschreiben. Die Details schauen wir uns bei ausreichend Zeit in der Übung an.

Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  ein Kompaktum mit glattem Rand und  $p \in \partial A$ . Wir wählen eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  von  $p$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$  und  $\nabla\psi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$ . Nach Lemma 8.2 ist dann

$$\partial A \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

Wegen  $\nabla\psi(p) \neq 0$  dürfen wir o.E.d.A. annehmen, dass  $\partial_d\psi(p) \neq 0$  ist. Mit dem Satz über implizite Funktionen finden wir dann eine offene Menge  $U_1 \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ , eine stetig differenzierbare Funktion  $g : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und ein Intervall  $(b, c)$  mit  $V := U_1 \times (b, c) \subseteq U$  so, dass

$$\partial A \cap V = \partial A \cap (U_1 \times (b, c)) = \{(x', g(x')) \in \mathbb{R}^d : x' \in U_1\},$$

d. h.  $\partial A \cap V$  ist der Graph von  $g$ . Ist  $\partial_d\psi(p) > 0$ , so ist

$$A \cap (U_1 \times (b, c)) = \{x \in V : x_d \leq g(x')\},$$

wobei wir  $x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$  geschrieben haben. Weiter ist

$$\nu(p) = \frac{(-\nabla g(p'), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla g(p')\|_2^2}} \quad (8.2)$$

mit  $p = (p', p_d)$ .

Schließlich vermerken wir eine weitere Eigenschaft kompakter Mengen. Zur Erinnerung, vgl. Definition 3.11: Der *Durchmesser* einer Teilmenge  $M$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  ist erklärt durch

$$\text{diam}(M) := \sup\{d(x, y) : x, y \in M\}.$$

**Satz 8.11** (Lebesguesches Überdeckungslemma). *Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes  $(X, d)$  und  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Dann gibt es ein  $\lambda > 0$  (eine sogenannte Lebesgue-Zahl der Überdeckung) derart, dass jede Teilmenge  $M$  von  $X$  mit  $\text{diam}(M) \leq \lambda$  und  $M \cap K \neq \emptyset$  in einer der Mengen  $U_i$  enthalten ist.*

*Beweis.* Zu jedem Punkt  $k \in K$  gibt es ein  $i \in I$  mit  $k \in U_i$ . Da  $U_i$  offen ist, findet man ein  $\varepsilon(k) > 0$  mit  $U_{2\varepsilon(k)}(k) \subseteq U_i$ . Nun bildet die Familie  $(U_{\varepsilon(k)}(k))_{k \in K}$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Da  $K$  kompakt ist, lässt sich hieraus eine endliche Teilüberdeckung auswählen, d.h. es gibt Punkte  $k_1, \dots, k_m \in K$  mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_{\varepsilon(k_j)}(k_j).$$

Wir setzen  $\lambda := \min\{\varepsilon(k_1), \dots, \varepsilon(k_m)\}$ . Offenbar ist  $\lambda > 0$ .

Sei nun  $M \subseteq X$  eine Teilmenge mit  $M \cap K \neq \emptyset$  und  $\text{diam}(M) \leq \lambda$ . Dann gibt es ein  $x \in K$  mit  $x \in M \cap K$  und ein  $j$  mit  $d(x, k_j) < \varepsilon(k_j)$ . Für jedes  $y \in M$  ist

$$d(y, k_j) \leq d(y, x) + d(x, k_j) < \lambda + \varepsilon(k_j) \leq 2\varepsilon(k_j),$$

d. h.  $M \subseteq U_{2\varepsilon(k_j)}(k_j)$ . Nach Konstruktion ist aber jede der Kugeln  $U_{2\varepsilon(k)}(k)$  (und damit auch die Menge  $M$ ) in einer der Mengen  $U_i$  enthalten.  $\square$

## 8.2 Der Gaußsche Integralsatz

Zur Erinnerung: Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, so heißt

$$\text{div}(F) : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=1}^d \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)$$

die *Divergenz* des Vektorfeldes  $F$ .

**Satz 8.12** (Gaußscher Integralsatz). *Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  ein Kompaktum mit glattem Rand,  $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^d$  das äußere Normalenfeld und  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  eine offene Menge, die  $A$  umfasst. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$*

$$\int_A \text{div}(F) d\lambda_d = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS_{\partial A}(x). \quad (8.3)$$

Der Gaußsche Integralsatz gilt auch noch für Kompakta, deren Rand niedrigdimensionale Singularitäten wie Ecken und Kanten aufweist. Auch die Voraussetzung, dass  $F$  auf einer ganzen Umgebung von  $A$  definiert ist, lässt sich abschwächen.

Da  $\nu(x)$  ein Einheitsvektor ist, haben wir  $\langle F(x), \nu(x) \rangle = \|F(x)\| \cdot \cos(\alpha(x))$ , wobei  $\alpha(x) \in [0, \pi]$  den Winkel zwischen  $F(x)$  und  $\nu(x)$  bezeichnet. Es ist also

$\langle F(x), \nu(x) \rangle$  die Länge der orthogonalen Projektion von  $F(x)$  auf  $\nu(x)$ . In der Physik stellt man sich  $\langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x)$  als den durch das Oberflächenelement  $dS(x)$  austretenden Fluss des Vektorfeldes  $F$  vor. Demzufolge wird das Integral

$$\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x)$$

als Gesamtfluss durch die Oberfläche von  $A$  interpretiert. Ist das Vektorfeld  $F$  *divergenzfrei* (auch *quellenfrei* genannt), d. h. ist  $\operatorname{div}(F) = 0$ , so ergibt sich

$$\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x) = 0,$$

d. h. der Gesamtfluss durch den Rand des Kompaktums verschwindet. Diese Situation tritt z. B. auf, wenn  $F$  den Fluss einer inkompressiblen Flüssigkeit beschreibt. Die Inkompressibilität entspricht der Bedingung  $\operatorname{div}(F) = 0$ . Das Verschwinden des Gesamtflusses durch  $\partial A$  kann man sich in diesem Fall so veranschaulichen, dass die Flüssigkeitsmenge, die sich innerhalb von  $A$  befindet, wegen der Inkompressibilität dem Volumen von  $A$  entspricht, also konstant ist. Daher ist die Flüssigkeitsbilanz in  $A$  ausgewogen: zu jedem Zeitpunkt fließt gleichviel rein wie raus.

Wir bereiten den Beweis des Gaußschen Integralsatzes vor, indem wir zwei Lemmata beweisen, die weitere Werkzeuge einführen sowie Spezialfälle behandeln und so Teile des eigentlichen Beweises vorwegnehmen.

**Lemma 8.13.** *Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert eine Familie von Funktionen  $\psi_{\ell, \varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}^d$ , mit  $\operatorname{supp}(\psi_{\ell, \varepsilon}) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - \varepsilon \ell\|_\infty < \varepsilon\}$  für alle  $\ell \in \mathbb{Z}^d$  und*

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \psi_{\ell, \varepsilon}(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Eine solche Familie  $(\psi_{\ell, \varepsilon})_{\ell \in \mathbb{Z}^d}$  nennt man eine *glatte Zerlegung der Eins*.

*Beweis.* Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right), & \text{für } |t| < 1, \\ 0, & \text{für } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Diese ist beliebig oft differenzierbar (Warum?), und ihr Träger ist  $[-1, 1]$  (so dass  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ). Da  $g$  einen kompakten Träger hat, ist die Funktion

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t - k)$$

wohldefiniert (für jedes  $t$  hat die Reihe nur endlich viele Summanden ungleich Null). Nun ist  $G$  strikt positiv, 1-periodisch und beliebig oft differenzierbar. Also

wird auch durch  $h(t) := g(t)/G(t)$  eine Funktion aus  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  definiert. Für diese ist  $\text{supp } h = [-1, 1]$  und

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(t - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{g(t - k)}{G(t - k)} = \frac{1}{G(t)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t - k) = \frac{G(t)}{G(t)} = 1.$$

Für  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{Z}^d$  und  $\varepsilon > 0$  definieren wir nun  $\psi_{\ell, \varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  durch

$$\psi_{\ell, \varepsilon}(x) := \prod_{j=1}^d h\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - \ell_j\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann gilt zum Einen

$$\begin{aligned} x \in \text{supp}(\psi_{\ell, \varepsilon}) &\iff \frac{x_j}{\varepsilon} - \ell_j \in \text{supp}(h) \text{ für alle } j \\ &\iff \left| \frac{x_j}{\varepsilon} - \ell_j \right| \leq 1 \text{ für alle } j \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} |x_j - \varepsilon \ell_j| \leq 1 \text{ für alle } j \\ &\iff \|x - \varepsilon \ell\|_\infty \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

und zum Anderen für alle  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \psi_{\ell, \varepsilon}(x) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^d h\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - \ell_j\right) \\ &= \sum_{\ell_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{\ell_{d-1} \in \mathbb{Z}} \prod_{j=1}^{d-1} h\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - \ell_j\right) \underbrace{\sum_{\ell_d \in \mathbb{Z}} h\left(\frac{x_d}{\varepsilon} - \ell_d\right)}_{=1} \\ &= \sum_{\ell_1 \in \mathbb{Z}} \cdots \sum_{\ell_{d-1} \in \mathbb{Z}} \prod_{j=1}^{d-1} h\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - \ell_j\right) = \cdots = 1. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 8.14.** Sei  $U' \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$  offen,  $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$  und  $g : U' \rightarrow I$  stetig differenzierbar. Wir setzen

$$A := \{(x', x_d) \in U' \times I : x_d \leq g(x')\} \text{ und } M := \{(x', x_d) \in U' \times I : x_d = g(x')\}.$$

Dann gilt für jede Funktion  $f \in C_c^1(U' \times I)$  und jedes  $j \in \{1, \dots, d\}$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) d\lambda_d(x) = \int_M f(x) \nu_j(x) dS_M(x),$$

wobei  $\nu_j(x)$  die  $j$ -te Komponente des Normalenvektors

$$\nu(x) := \frac{(-\nabla g(x'), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla g(x')\|_2^2}} \quad \text{mit } x = (x', x_d) \in M \quad (8.4)$$

ist (beachte Beispiel 8.9).



*Beweis.* Sei  $f \in C_c^1(U' \times I)$ . Wir erinnern zunächst daran, dass für das Oberflächenmaß von  $M$  bezüglich der Parametrisierung  $x' \mapsto (x', g(x'))$  gilt

$$\int_M f(x) dS_M(x) = \int_{U'} f(x', g(x')) \sqrt{1 + \|\nabla g(x')\|_2^2} d\lambda_{d-1}(x') \quad (8.5)$$

(vgl. Beispiel 7.19). Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

**1. Fall:**  $1 \leq j < d$ . Für die Funktion

$$F : U' \times I \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x', z) \mapsto \int_\alpha^z f(x', x_d) dx_d$$

gilt nach Satz 2.22

$$\partial_d F(x', z) = f(x', z) \quad \text{und} \quad \partial_j F(x', z) = \int_\alpha^z \partial_j f(x', x_d) dx_d.$$

Hieraus folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_d) dx_d &= \frac{\partial}{\partial x_j} F(x', g(x')) \\ &= \partial_d F(x', g(x')) \partial_j g(x') + \partial_j F(x', g(x')) \\ &= f(x', g(x')) \partial_j g(x') + \int_\alpha^{g(x')} \partial_j f(x', x_d) dx_d. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Da die Funktion  $x' \mapsto \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_d) dx_d$  einen kompakten Träger hat (Warum?), folgt aus Lemma 6.25

$$\int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_d) dx_d d\lambda_{d-1}(x') = 0. \quad (8.7)$$

Damit ergibt sich aus Cavalieri, (8.6), (8.7), (8.4), (8.5) und der Definition des Oberflächenintegrals

$$\begin{aligned} \int_A \partial_j f(x) d\lambda_d(x) &= \int_{U'} \int_\alpha^{g(x')} \partial_j f(x', x_d) dx_d d\lambda_{d-1}(x') \\ &= \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_d) dx_d d\lambda_{d-1}(x') - \int_{U'} f(x', g(x')) \partial_j g(x') d\lambda_{d-1}(x') \\ &= \int_{U'} f(x', g(x')) \frac{-\partial_j g(x)}{\sqrt{1 + \|\nabla g(x')\|_2^2}} \sqrt{1 + \|\nabla g(x')\|_2^2} d\lambda_{d-1}(x') \\ &= \int_M f(x) \nu_j(x) dS_M(x). \end{aligned}$$

**2. Fall:**  $j = d$ . Da für jedes  $x' \in U'$  die Funktion  $x_d \mapsto f(x', x_d)$  einen kompakten Träger hat, folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_{\alpha}^{g(x')} \partial_d f(x', x_d) dx_d = f(x', g(x')),$$

also wieder

$$\begin{aligned} \int_A \partial_d f(x) d\lambda_d(x) &= \int_{U'} \int_{\alpha}^{g(x')} \partial_d f(x', x_d) dx_d d\lambda_{d-1}(x') \\ &= \int_{U'} f(x', g(x')) d\lambda_{d-1}(x') = \int_M f(x) \nu_d(x) dS_M(x). \quad \square \end{aligned}$$

*Beweis des Gaußschen Integralsatzes 8.12.* Wir haben in Beispiel 8.10 gesehen, dass jeder Punkt  $p \in \partial A$  eine Umgebung  $U_p \subseteq \mathbb{R}^d$  hat, in der sich  $\partial A$  als Graph einer Funktion darstellen lässt sowie  $A \cap U_p$  als die Menge der Punkte, die unter diesem Graphen liegen. Damit ist  $\{U_p : p \in \partial A\}$  eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $A$ . Es gibt also ein  $\kappa > 0$ , so dass der Randstreifen  $\{x \in A : \text{dist}(x, \partial A) < \kappa\} \subseteq \bigcup_{p \in \partial A} U_p$  ist.

Wir setzen  $U_{\#} := \{x \in A : \text{dist}(x, \partial A) > \kappa/2\}$ . Dann ist nun  $\{U_p : p \in \partial A\} \cup \{U_{\#}\}$  eine offene Überdeckung von ganz  $A$ . Sei  $\lambda > 0$  eine Lebesgue-Zahl dieser Überdeckung nach Satz 8.11 und  $\varepsilon := \lambda/(2\sqrt{d})$ . Zu diesem  $\varepsilon$  nehmen wir uns eine glatte Zerlegung  $(\psi_{\ell, \varepsilon})_{\ell \in \mathbb{Z}^d}$  der Eins nach Lemma 8.13.

Der Träger jeder Funktion  $\psi_{\ell, \varepsilon}$  ist ein Würfel der Seitenlänge  $2\varepsilon$  und hat somit den Durchmesser  $2\varepsilon\sqrt{d} = \lambda$ . Jeder Träger  $\text{supp}(\psi_{\ell, \varepsilon})$ , der mit  $A$  wenigstens einen Punkt gemeinsam hat, ist also nach Satz 8.11 in einer der Mengen  $U_p$  oder  $U_{\#}$  enthalten. Sei

$$L := \{\ell \in \mathbb{Z}^d : \text{supp}(\psi_{\ell, \varepsilon}) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Da  $A$  beschränkt ist, ist  $L$  eine endliche Menge. Wir benutzen nun die Zerlegung der Eins, um den Gaußschen Integralsatz auf die Fälle zurückzuführen, in denen sich alles in einer der Mengen  $U_p$  bzw.  $U_{\#}$  abspielt. Es ist

$$\int_A \text{div}(F) d\lambda_d = \int_A \text{div}\left(\sum_{\ell \in L} \psi_{\ell, \varepsilon} F\right) d\lambda_d = \sum_{\ell \in L} \int_A \text{div}(\psi_{\ell, \varepsilon} F) d\lambda_d$$

und analog

$$\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS_{\partial A}(x) = \sum_{\ell \in L} \int_{\partial A} \langle (\psi_{\ell, \varepsilon} F)(x), \nu(x) \rangle dS_{\partial A}(x).$$

Wir müssen daher den Satz für jede der Funktionen  $\psi_{\ell, \varepsilon} F$  zeigen. Gemäß unserer Konstruktion ist für jedes  $\ell \in \mathbb{Z}^d$  der Träger von  $\psi_{\ell, \varepsilon}$  in einer der Mengen  $U_p$  oder in  $U_{\#}$  enthalten. Wir nennen diese Menge im Folgenden jeweils einfach  $U$ .

Wir behandeln zuerst den Fall, dass  $\text{supp}(\psi_{\ell,\varepsilon}) \subseteq \text{int}(A)$  ist. Dann gilt wegen Lemma 6.25 ( $\psi_{\ell,\varepsilon}F$  hat kompakten Träger in  $U$ !)

$$\int_A \text{div}(\psi_{\ell,\varepsilon}F) d\lambda_d = \int_U \text{div}(\psi_{\ell,\varepsilon}F) d\lambda_d = \sum_{j=1}^d \int_U \frac{\partial(\psi_{\ell,\varepsilon}F_j)}{\partial x_j} d\lambda_d = 0$$

Andererseits gilt auch

$$\int_{\partial A} \langle (\psi_{\ell,\varepsilon}F)(x), \nu(x) \rangle dS_{\partial A}(x) = 0,$$

da  $\psi_{\ell,\varepsilon}$  auf  $\partial A$  verschwindet. Also sind wir in diesem Fall fertig.

Schneidet der Träger von  $\psi_{\ell,\varepsilon}F$  dagegen den Rand von  $A$ , so folgt die Behauptung durch Anwendung von Lemma 8.14 auf die Komponentenfunktionen  $f_j := \psi_{\ell,\varepsilon}F_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , von  $\psi_{\ell,\varepsilon}F$  und durch Summation:

$$\begin{aligned} \int_A \text{div}(\psi_{\ell,\varepsilon}F) d\lambda_d &= \sum_{j=1}^d \int_U \frac{\partial(\psi_{\ell,\varepsilon}F_j)}{\partial x_j} d\lambda_d \\ &= \sum_{j=1}^d \int_{\partial A \cap U} \psi_{\ell,\varepsilon}(x) F_j(x) \nu_j(x) dS_{\partial A}(x) \\ &= \int_{\partial A} \langle \psi_{\ell,\varepsilon}(x) F(x), \nu(x) \rangle dS_{\partial A}(x). \quad \square \end{aligned}$$

Als eine Anwendung bestimmen wir damit nochmals mit einer deutlich kürzeren Rechnung das Volumen der  $(d-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre, vgl. Beispiel 7.22.

**Folgerung 8.15.** Für das  $(d-1)$ -dimensionale Volumen  $w_d$  der Einheitssphäre in  $\mathbb{R}^d$  gilt  $w_d = dc_d$ , wobei  $c_d$  das  $d$ -dimensionale Volumen der entsprechenden Einheitskugel ist.

*Beweis.* Für das Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $x \mapsto x$  ist  $\text{div}(F)(x) = d$ . Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt daher für jedes Kompaktum  $A$  mit glattem Rand

$$d\lambda_d(A) = \int_A \text{div}(F) d\lambda_d = \int_{\partial A} \langle x, \nu(x) \rangle dS_{\partial A}(x),$$

also

$$\lambda_d(A) = \frac{1}{d} \int_{\partial A} \langle x, \nu(x) \rangle dS_{\partial A}(x).$$

Ist speziell  $A$  die  $d$ -dimensionale Einheitskugel  $B_d$ , so ist  $\partial B_d$  die  $(d-1)$ -dimensionale Einheitssphäre  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Weiter ist  $\nu(x) = x$  für alle  $x \in \mathbb{S}^{d-1}$  und daher

$$c_d = \lambda_d(B_d) = \frac{1}{d} \int_{\partial B_d} \|x\|^2 dS_{\partial B_d}(x) = \frac{1}{d} \int_{\partial B_d} dS_{\partial B_d}(x) = w_d/d. \quad \square$$

**Definition 8.16.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $A \subseteq U$  ein Kompaktum mit glattem Rand und  $\nu$  das äußere Normalenfeld von  $A$ . Für eine stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir ihre Ableitung in Normalenrichtung oder kurz Normalenableitung im Punkt  $p \in \partial A$  durch

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(p) := \langle \nabla f(p), \nu(p) \rangle = \sum_{j=1}^d \partial_j f(p) \nu_j(p).$$

**Lemma 8.17.** Für  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ ,  $g \in C^2(U, \mathbb{R})$  und  $F \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$  gilt

$$(a) \operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div}(F) + \langle \nabla f, F \rangle.$$

$$(b) \operatorname{div}(\nabla g) = \Delta g.$$

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen.

**Satz 8.18** (Greensche Formel). Seien  $U$  und  $A$  wie im Gaußschen Integralsatz. Für  $f, g \in C^2(U)$  gilt

$$\int_A (f \Delta g - g \Delta f) d\lambda_d = \int_{\partial A} \left( f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dS_{\partial A}.$$

*Beweis.* Wir wenden den Gaußschen Satz auf das Vektorfeld  $F := f \nabla g - g \nabla f$  an und erhalten mit Lemma 8.17

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F) &= \operatorname{div}(f \nabla g) - \operatorname{div}(g \nabla f) \\ &= f \operatorname{div}(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g \rangle - g \operatorname{div}(\nabla f) - \langle \nabla g, \nabla f \rangle = f \Delta g - g \Delta f. \end{aligned}$$

Auf  $\partial A$  ergibt sich

$$\langle F, \nu \rangle = f \langle \nabla g, \nu \rangle - g \langle \nabla f, \nu \rangle = f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu},$$

und die Behauptung folgt aus dem Gaußschen Integralsatz.  $\square$

### 8.3 Der Greensche Integralsatz in der Ebene

Wir sehen uns nun den Gaußschen Integralsatz für  $d = 2$  genauer an. Da der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand im  $\mathbb{R}^2$  eine Kurve ist, versuchen wir, das Randintegral aus dem Gaußschen Satz als ein Wegintegral zu interpretieren.

Sei also  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist  $\partial A$  eine kompakte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ . Wir können  $\partial A$  also in endlich viele Stücke zerlegen, die wir jeweils durch Karten (= injektive Wege, die Immersionen sind)  $\gamma_j : (a_j, b_j) \rightarrow \partial A$  parametrisieren können (Parametrisierungssatz). Dabei wollen wir nur solche Wege  $\gamma_j$  betrachten, für die  $A$  links der Kurve

$\gamma_j((a_j, b_j))$  liegt. Letzteres bedeutet für einen Weg  $\gamma : (a, b) \rightarrow \partial A$ , dass der Normalenvektor  $\nu(\gamma(t))$  im Randpunkt  $\gamma(t)$  durch

$$\nu(\gamma(t)) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|_2} \begin{pmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

gegeben ist. Dann ist nämlich

$$\det(\nu(\gamma(t)), \gamma'(t)) = \frac{\|\gamma'(t)\|_2^2}{\|\gamma'(t)\|_2} = \|\gamma'(t)\|_2 > 0,$$

d. h. die Normale  $\nu(\gamma(t))$  und die Tangente  $\gamma'(t)$  bilden ein Rechtssystem.

Sind alle Wege  $\gamma_j$  so orientiert und überlappen sich zwei Bereiche  $\gamma_i((a_i, b_i))$  und  $\gamma_j((a_j, b_j))$ , so ist die zugehörige Parametertransformation

$$\varphi_{ij} : U_{ij} := \gamma_j^{-1}(\gamma_i((a_i, b_i))) \rightarrow \gamma_i^{-1}(\gamma_j((a_j, b_j))) =: U_{ji}$$

streng monoton wachsend. Wegen  $\gamma_j \circ \varphi_{ij} = \gamma_i$  ist nämlich

$$\gamma'_i(t) = (\gamma_j \circ \varphi_{ij})'(t) = \gamma'_j(\varphi_{ij}(t)) \varphi'_{ij}(t),$$

und da  $\gamma'_i$  und  $\gamma'_j$  wegen (8.8) in die gleiche Richtung zeigen, ist  $\varphi'_{ij}(t) > 0$ . Für jedes auf einer offenen Umgebung von  $A$  stetige Vektorfeld  $w$  ist daher

$$\int_{\gamma_j \circ \varphi_{ij}} w(x) dx = \int_{\gamma_i} w(x) dx.$$

Wir definieren nun wie in Kapitel 7

$$\int_{\partial A} w(x) dx := \sum_{j=1}^k \int_{I_j} \langle w(\gamma_j(t)), \gamma'_j(t) \rangle dt,$$

wobei die Intervalle  $I_j \subseteq (a_j, b_j)$  so gewählt sind, dass  $\partial A = \bigcup_{j=1}^k \gamma_j(I_j)$  und dass die Kurven  $\gamma_j(I_j)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , paarweise disjunkt sind. Ähnlich wie in Lemma 7.16 sieht man, dass dieses Integral nicht von den gewählten Wegen  $\gamma_j$  bzw. Mengen  $I_j$  abhängt.

**Satz 8.19** (Greenscher Integralsatz in der Ebene). *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $A \subseteq U$  ein Kompaktum mit glattem Rand. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt dann*

$$\int_A \operatorname{div}(F) d\lambda_2 = \int_{\partial A} \begin{pmatrix} F_2(x) \\ -F_1(x) \end{pmatrix} dx.$$

*Beweis.* Wegen des Gaußschen Integralsatzes ist noch zu zeigen, dass

$$\int_{\partial A} \begin{pmatrix} F_2(x) \\ -F_1(x) \end{pmatrix} dx = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS_{\partial A}(x). \quad (8.9)$$

Dazu verwenden wir eine Karte  $\gamma : (a, b) \rightarrow \partial A$ , wie wir sie oben diskutiert haben, und berechnen die beiden Integrale. Zunächst ist

$$\int_{\gamma} \begin{pmatrix} F_2(x) \\ -F_1(x) \end{pmatrix} dx = \int_a^b (F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)) dt$$

das Integral auf der linken Seite. Wegen (8.8) ist der Integrand des zugehörigen Teiles des rechten Integrals

$$\int_{\gamma((a,b))} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS_{\partial A}(x) = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \nu(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle F(\gamma(t)), \nu(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\|_2 &= \left\langle F(\gamma(t)), \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t). \end{aligned}$$

Da beide Integranden übereinstimmen, folgt (8.9) und die Behauptung.  $\square$

## 8.4 Der Stokessche Integralsatz im Raum

Im letzten Abschnitt betrachten wir einen einfachen Spezialfall des allgemeinen Stokeschen Satzes. In vielen Anwendungen tritt das Problem auf, den Fluss eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Kurve im Raum zu berechnen. Wir wollen zunächst diese Begriffe präzisieren. Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine injektive Immersion, die eine Einbettung ist. Dann ist  $M := \varphi(U)$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ . Sei nun  $A \subseteq U$  ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist  $G := \varphi(A) \subseteq M$  eine kompakte Menge, die von der Kurve  $\partial G = \varphi(\partial A)$  berandet wird. Wir definieren den *Fluss eines stetigen Vektorfeldes  $F$  durch die Kurve  $\partial G$*  als das Integral

$$\int_G \langle F(x), \nu(x) \rangle dS_M(x), \quad (8.10)$$

wobei wir die Richtung des Normalenvektors so festlegen, dass

$$\det(\partial_1 \varphi(p), \partial_2 \varphi(p), \nu(\varphi(p))) > 0.$$

Man beachte, dass wir dem anschaulichen Konzept des Flusses eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Kurve im Raum einen mathematischen Sinn gegeben

haben, indem wir „in diese Kurve eine Fläche  $G = \varphi(A)$  eingespannt“ haben und den Fluss durch (8.10), also als „Fluss durch eine Fläche“ definiert haben.

Wir zeigen nun, dass für spezielle Felder (Rotationsfelder) das Integral (8.10) tatsächlich nur von der Randkurve  $\partial G$  abhängt, und stellen das Integral (8.10) als Kurvenintegral über diesem Rand dar. Zur Erinnerung: Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so ist das Vektorfeld  $\text{rot } F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die *Rotation* von  $F$ , definiert durch

$$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}$$

**Satz 8.20** (Stokesscher Integralsatz). *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen und  $\varphi \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$  eine injektive Immersion, die eine Einbettung ist. Weiter sei  $G \subseteq \varphi(U)$  ein Kompaktum mit glattem Rand. Ist  $F$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  von  $G$ , so gilt mit  $M := \varphi(U)$*

$$\int_G \langle \text{rot } F, \nu \rangle dS_M = \int_{\partial G} F(x) dx.$$

*Beweis.* Wir bezeichnen die Koordinaten in  $U$  mit  $u = (u_1, u_2)$ . In Beispiel 8.9 haben wir gesehen, dass

$$\nu(\varphi(u)) = \frac{\partial_1 \varphi(u) \times \partial_2 \varphi(u)}{\|\partial_1 \varphi(u) \times \partial_2 \varphi(u)\|_2},$$

ist. Die Fläche des von den Vektoren  $\partial_1 \varphi(u)$  und  $\partial_2 \varphi(u)$  aufgespannten Parallelogramms ist gleich  $\|\partial_1 \varphi(u) \times \partial_2 \varphi(u)\|_2$ , so dass wir für das Oberflächenmaß  $S_M$  auf  $M = \varphi(U)$  die Beziehung

$$dS_M(u) = \|\partial_1 \varphi(u) \times \partial_2 \varphi(u)\| d\lambda_2(u)$$

erhalten. Hiermit ergibt sich für das Oberflächenintegral (mit  $A := \varphi^{-1}(G)$ )

$$\int_G \langle \text{rot}(F)(x), \nu(x) \rangle dS_M(x) = \int_A \langle \text{rot}(F)(\varphi(u)), \partial_1 \varphi(u) \times \partial_2 \varphi(u) \rangle d\lambda_2(u).$$

Bevor wir weiterrechnen, beachten wir, dass beide Seiten der Stokesschen Integralformel linear von  $F$  abhängen. Wir können daher die Fälle, in denen  $F$  nur eine von Null verschiedene Komponente hat, getrennt betrachten und nehmen o.E.d.A.  $F_2 = F_3 = 0$  an. Dann ist

$$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Der Integrand des Oberflächenintegrals, geschrieben als Integral über  $A$ , ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned}
& \langle \text{rot}(F) \circ \varphi, \partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi \rangle \\
&= \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \circ \varphi \right) (\partial_1 \varphi_3 \partial_2 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_1 \partial_2 \varphi_3) - \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \circ \varphi \right) (\partial_1 \varphi_1 \partial_2 \varphi_2 - \partial_1 \varphi_2 \partial_2 \varphi_1) \\
&= \left( \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \circ \varphi \right) \partial_1 \varphi_3 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \circ \varphi \right) \partial_1 \varphi_2 \right) \partial_2 \varphi_1 \\
&\quad - \left( \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \circ \varphi \right) \partial_2 \varphi_3 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \circ \varphi \right) \partial_2 \varphi_2 \right) \partial_1 \varphi_1 \\
&= \left( \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \circ \varphi \right) \partial_1 \varphi_3 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \circ \varphi \right) \partial_1 \varphi_2 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \circ \varphi \right) \partial_1 \varphi_1 \right) \partial_2 \varphi_1 \\
&\quad - \left( \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \circ \varphi \right) \partial_2 \varphi_1 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \circ \varphi \right) \partial_2 \varphi_3 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \circ \varphi \right) \partial_2 \varphi_2 \right) \partial_1 \varphi_1 \\
&= \frac{\partial(F_1 \circ \varphi)}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial(F_1 \circ \varphi)}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}. \tag{8.11}
\end{aligned}$$

Für das Kurvenintegral auf der rechten Seite der Stokesschen Formel erhalten wir mit einer geeigneten Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial A$  des Randes von  $A$  und dank unserer speziellen Wahl von  $F$

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi \circ \gamma} F dx &= \int_a^b F_1((\varphi \circ \gamma)(t)) (\varphi_1 \circ \gamma)'(t) dt \\
&= \int_a^b F_1((\varphi \circ \gamma)(t)) \left( \frac{\partial \varphi_1(\gamma(t))}{\partial u_1} \gamma_1'(t) + \frac{\partial \varphi_1(\gamma(t))}{\partial u_2} \gamma_2'(t) \right) dt \\
&= \int_{\gamma} \left( (F_1 \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \right) du.
\end{aligned}$$

Wir wollen den Greenschen Satz benutzen und betrachten dazu den Integranden dieses Wegintegrals als Vektorfeld  $H = (H_1, H_2)$  mit

$$H_1 := (F_1 \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}, \quad H_2 := -(F_1 \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}.$$

Dann ist dank der Rechnung in (8.11)

$$\begin{aligned}
\text{div}(H) &= \frac{\partial(F_1 \circ \varphi)}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} + (F_1 \circ \varphi) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial(F_1 \circ \varphi)}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} - (F_1 \circ \varphi) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u_1 \partial u_2} \\
&= \frac{\partial(F_1 \circ \varphi)}{\partial u_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial(F_1 \circ \varphi)}{\partial u_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \\
&= \langle \text{rot}(F) \circ \varphi, \partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi \rangle.
\end{aligned}$$



Der Greensche Integralsatz liefert nun

$$\int_{\partial A} \begin{pmatrix} -H_2 \\ H_1 \end{pmatrix} du = \int_A \operatorname{div}(H) d\lambda_2.$$

Setzen wir hier obige Formeln ein, erhalten wir den Stokesschen Satz.  $\square$

# Index

- Ableitung in Normalenrichtung, 156
- absolut stetige Funktion, 100
- Abstand zweier Mengen, 42
- Additivität von Maßen, 18
- äußeres Lebesgue-Maß, 47
- äußeres Maß, 37
  - Lebesguesches, 47
  - metrisches, 43
  - relativ, 37
- approximative Eins, 107
- Ausdehnungssatz von Tietze, 95
- Ausschöpfungssatz, 56
- äußerer Normalenvektor, 147
- äußeres Normalenfeld, 147
  
- Banach-Tarski-Paradox, 7
- Banachalgebra, 104
- Beppo Levi, Satz von, 31
- Bessel-Funktion, 122
- Beta-Funktion, 77
- Borel-Maß, 20
  - reguläres, 22
- Borelmenge, 9
- Borelsche  $\sigma$ -Algebra, 9
  - auf  $\overline{\mathbb{R}}$ , 15
  
- $C_c(\mathbb{R}^d)$ , 94
- $C_c^\infty$ , 107
- Carathéodory
  - messbar nach, 38
  - Satz von, 38
- Cauchyfolge in  $\mathcal{L}^p$ , 83
- Cavalieri, Prinzip von, 59
- charakteristische Funktion, 5
  
- $d$ -dimensionales Volumen, 44
- Determinante, Gramsche, 136
- Diameter einer Menge, 43
- Diffeomorphismus, 68
- Differentiationssatz, Lebesguescher, 96
- Dirac-Maß, 18
  
- Divergenz, 150
- Dreiecksungleichung, 30
- Durchmesser einer Menge, 43
- durchschnittstabil, 12
- Dynkin-System, 11
  - Erzeugersystem eines, 12
  - erzeugtes, 12
  
- Einbettung, 132
- einfache Funktion, 24
- Einheitskugel, Volumen der, 62, 78
- Einheitssphäre
  - in  $\mathbb{R}^3$ , 132
  - Volumen, 143, 155
- Eins, Zerlegung der, 151
- endliches Maß, 17
- erweiterte Zahlengerade, 15
- Erzeugersystem, 9, 12
- erzeugte  $\sigma$ -Algebra, 9
- erzeugtes Dynkin-System, 12
- Eulersche Beta-Funktion, 77
  
- $\varphi$ -messbar, 38
- $F_\sigma$ -Menge, 9
- Faltung, 103
- fast überall, 22
- Fatou, Lemma von, 34
- Fluss durch eine Kurve, 158
- Folge, Mollifier-, 108
- Formel
  - Greensche, 156
  - Stokessche, 145
- Fouriertransformation
  - auf  $L^1(\mathbb{R}^d)$ , 110
  - auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , 120
  - auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 118
  - umgekehrte, 118
  - und Ableitung, 112
- Fouriertransformierte
  - einer Gauß-Funktion, 114

einer  $L^1$ -Funktion, 109  
 einer  $L^2$ -Funktion, 120  
 umgekehrte, 109, 118  
 Fubini, Satz von, 64, 66  
 Fubini-Tonelli, Satz von, 68  
 Funktion  
   absolut stetige, 100  
   Bessel-, 122  
   Beta-, 77  
   charakteristische, 5  
   einfache, 24  
   Fouriertransformierte, 109  
   Gamma-, 63, 77  
   Gauß-, 114  
   Hardy-Littlewood-Maximal-, 97  
   Indikator-, 5  
   Inversion einer, 102  
   Lebesgue-integrierbare, 26  
   lokal-integrierbare, 95  
   messbare, 13  
   Mittelwert einer, 96  
   Negativteil, 25  
    $p$ -integrierbare, 81  
   Positivteil, 25  
   schnellfallende, 117  
   Schwartz-, 117  
   Stufen-, 24  
   Träger einer, 94, 95  
   Translation einer, 102  
   umgekehrte Fouriertransformierte, 109  
   wesentlich beschränkte, 84  
 $G_\delta$ -Menge, 9  
 Gamma-Funktion, 63, 77  
 Gauß-Funktion, 114  
 Gauß-Kern, 123  
 Gaußscher Integralsatz, 150  
 glatter Rand, Kompaktum mit, 145  
 Gramsche  
   Determinante, 136  
   Matrix, 136  
 Greensche Formel, 156  
 Greenscher Integralsatz, 157  
 gute Mengen, Prinzip der, 11, 13  
 halboffenes Intervall in  $\mathbb{R}^d$ , 10  
 Hardy-Littlewood-Maximalfunktion, 97  
 Hauptsatz, 99, 100  
 Hausdorff-Young-Ungleichung, 126  
 Hölder-Ungleichung, 82, 86  
 Immersion, 130  
 Indikatorfunktion, 5  
 Integral, 26  
   Dreiecksungleichung, 30  
   Kurven-, 138  
   Lebesgue-, 26  
   Oberflächen-, 136, 140  
   Parameter-, 35  
 integrierbar  
   über Untermannigfaltigkeit, 136  
 Interpolationsungleichung, 89  
 Intervall, halboffenes in  $\mathbb{R}^d$ , 10  
 Inversion einer Funktion, 102  
 Kompaktum mit glattem Rand, 145  
 Koordinaten  
   Kugel-, 78  
   Polar-, allgemeine, 78  
   Polar-, in der Ebene, 76  
 Kugelkoordinaten, 78  
 Kurvenintegral, 129, 138  
 Kurvenlänge, 138  
 $\mathcal{L}^0$ , 80  
 $L^p$ , 87  
 $\mathcal{L}^p$ , 81  
 $\ell^p$ , 88  
 $L^p$ -Norm, 87  
 $\mathcal{L}^\infty$ , 84  
 $L^1$  als Banachalgebra, 104  
 $L^1_{loc}$ , 95  
 Länge einer Kurve, 129, 138  
 Laplace-Operator, 122  
 Lebesgue  
   -Integral, 26  
   -Integrierbarkeit, 26

- Punkt, 99
- Raum, 87
- messbare Menge, 47
- Maß, 47
  - Translationsinvarianz, 48
- Menge, 47
- Satz von, 34
- Lebesgue-Integral, 26
  - Oberflächen-, 136, 140
- Lebesgue-Zahl einer Überdeckung, 150
- Lebesguesche  $\sigma$ -Algebra, 47
- Lebesguescher
  - Differentiationssatz, 96
  - Maßraum, 47
- Lebesguesches Überdeckungslemma, 150
- Leibniz-Regel, 118
- Lemma
  - Lebesguesches Überdeckungs-, 150
  - Urysohn-, 109
  - von Fatou, 34
- lokal-integrierbare Funktion, 95
- Luzin, Satz von, 53
- $\mu$ -fast überall, 22
- $\mu$ -Nullmenge, 22
- Majorisierte Konvergenz, Satz über, 34
- Maß, 5, 17
  - additiv, 18
  - äußeres, 37
    - Lebesguesches, 47
    - metrisches, 43
    - relativ, 37
  - Borel-, 20
    - reguläres, 22
  - Dirac-, 18
  - endliches, 17
  - Lebesgue-, 47
    - Translationsinvarianz, 48
  - monoton, 18
  - Oberflächen-, 137, 140
  - Punkt-, 18
  - $\sigma$ -endliches, 22
  - $\sigma$ -subadditiv, 18
- Stetigkeit
  - von oben, 18
  - von unten, 18
- Zähl-, 18
- Maßraum, 17
  - Lebesguescher, 47
  - $\sigma$ -endlicher, 22
  - vollständiger, 22
- Maßtensor, 136
- Matrix, Gramsche, 136
- Maximalfunktion, Hardy-Littlewood-, 97
- Menge
  - Borel-, 9
  - Diameter, 43
  - Durchmesser, 43
  - $F_\sigma$ -, 9
  - $G_\delta$ -, 9
  - Lebesgue-, 47
  - messbare, 8
    - in Untermannigfaltigkeit, 136, 139
    - Lebesgue-, 47
  - $\mu$ -Null-, 22
  - Null-, 22
    - in Untermannigfaltigkeit, 137
  - Potenz-, 5
  - Vitali-, 6
- messbar
  - Carathéodory, 38
  - $\phi$ -, 38
- messbare
  - Funktion, 13
  - Menge, 8
    - Lebesgue-, 47
- messbare Menge, 8
  - in Untermannigfaltigkeit, 136, 139
- messbarer Raum, 8
- metrisches äußeres Maß, 43
- Minkowski-Ungleichung, 82
- Mittelwert einer Funktion, 96
- Mollifier, 108
- Mollifier-Folge, 108
- Monotone Konvergenz, Satz über, 31
- Monotonie von Maßen, 18

$\mathcal{N}(\mu)$ , 87  
 Negativteil einer Funktion, 25  
 Neilsche Parabel, 130  
 Norm,  $L^p$ -, 87  
 Normalenableitung, 156  
 Normalenfeld, äußeres, 147  
 Normalenraum, 146  
 Normalenvektor, 146  
     äußerer, 147  
 Nullmenge, 22  
     in Untermannigfaltigkeit, 137  
  
 Oberflächenintegral, 136, 140  
 Oberflächenmaß, 137, 140  
  
 $p$ -integrierbare Funktion, 81  
 Paley-Wiener, Satz von, 126  
 Parabel, Neilsche, 130  
 Paradox, Banach-Tarski-, 7  
 Parallelotop, 69  
 Parameter-Transformation, 134  
 Parameterintegral, 35  
 Paramtrisierungssatz, 132  
 Peano-Kurve, 75  
 Plancherel, Satz von, 119  
 Poisson-Gleichung, 122  
 Polarkoordinaten  
     in allgemeiner Dimension, 78  
     in der Ebene, 76  
 Positivteil einer Funktion, 25  
 Potenzmenge, 5  
 Prinzip der guten Mengen, 11, 13  
 Prinzip von Cavalieri, 59  
 Punkt, Lebesgue-, 99  
 Punktmaß, 18  
  
 $\overline{\mathbb{R}}$ , 15  
 Rand, Kompaktum mit glattem, 145  
 Raum  
      $C_c(\mathbb{R}^d)$ , 94  
      $C_c^\infty$ , 107  
      $\mathcal{L}^0$ , 80  
      $L^p$ , 87  
      $\mathcal{L}^p$ , 81  
      $\mathcal{L}^\infty$ , 84  
     Lebesgue-, 87  
     Maß-, 17  
     messbarer, 8  
     Normalen-, 146  
      $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 117  
     Schwartz-, 117  
     Tangential-, 146  
     reguläres Borel-Maß, 22  
     relativ äußeres Maß, 37  
     Riemann-Lebesgue, Satz von, 111  
     Riesz-Fischer, Satz von, 84  
     Rotation eines Vektorfeldes, 159  
     Rotationsfläche, 131  
  
 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 117  
 $\sigma$ -additiv, 17  
 $\sigma$ -Algebra, 8  
     Borelsche, 9  
     auf  $\overline{\mathbb{R}}$ , 15  
     Erzeugersystem einer, 9  
     erzeugte, 9  
     Lebesguesche, 47  
     Spur-, 8  
 $\sigma$ -endlicher Maßraum, 22  
 $\sigma$ -endliches Maß, 22  
 $\sigma$ -Subadditivität von Maßen, 18  
 Satz  
     Ausdehnungs-, von Tietze, 95  
     Ausschöpfungs-, 56  
     Gaußscher Integral-, 150  
     Greenscher Integral-, 157  
     Haupt-, 99, 100  
     Lebesguescher Differentiations-, 96  
     Parametrisierungs-, 132  
     Parameter-Transformation, 134  
     Prinzip von Cavalieri, 59  
     Stokesscher Integral-, 159  
     über majorisierte Konvergenz, 34  
     über monotone Konvergenz, 31  
     von Beppo Levi, 31  
     von Carathéodory, 38  
     von Fubini, 64, 66

- von Fubini-Tonelli, 68
- von Lebesgue, 34
- von Luzin, 53
- von Paley-Wiener, 126
- von Plancherel, 119
- von Riemann-Lebesgue, 111
- von Riesz-Fischer, 84
- von Tonelli, 64
- schnellfallende Funktion, 117
- Schwartz-Funktion, 117
- Schwartz-Raum, 117
- Spat, 69
- Spur- $\sigma$ -Algebra, 8
- Stetigkeit
  - von oben, 18
  - von unten, 18
- Stokessche Formel, 145
- Stokesscher Integralsatz, 159
- Stufenfunktion, 24
  
- Tangentialraum, 146
- Tangentialvektor, 146
- Tensor, Maß-, 136
- Tietze, Ausdehnungssatz von, 95
- Tonelli, Satz von, 64
- Träger einer Funktion, 94, 95
- Translation einer Funktion, 102
- Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes, 48
- Tschebyscheff-Ungleichung, 83
  
- Überdeckung, Lebesgue-Zahl einer, 150
- Überdeckungslemma, Lebesguesches, 150
- umgekehrte Fouriertransformierte, 109, 118
- Ungleichung
  - Dreiecks-, 30
  - Hausdorff-Young, 126
  - Hölder-, 82, 86
  - Interpolations-, 89
  - Minkowski-, 82
  - Tschebyscheff-, 83
  - Youngsche, 81, 105
  
- Untermannigfaltigkeit
  - Normalenraum, 146
  - Normalenvektor, 146
  - Tangentialraum, 146
  - Tangentialvektor, 146
- Untermannigfaltigkeit, 132
- Urysohn-Lemma, 109
  
- Vektor
  - äußerer Normalen-, 147
  - Normalen-, 146
  - Tangential-, 146
- Vitali-Menge, 6
- vollständiger Maßraum, 22
- Volumen, 5, 44
  - der Einheitskugel, 62, 78
  - der Einheitssphäre, 143, 155
  - in Untermannigfaltigkeit, 136, 139
  
- Wärmeleitungsgleichung, 123
- Wärmeleitungskern, 123
- wesentlich beschränkte Funktion, 84
- Würfel, 73
  
- Youngsche Ungleichung, 81, 105
  
- Zählmaß, 18
- Zerlegung der Eins, 151