

Elementare partielle Differentialgleichungen: Klassische Methoden

Herbert Egger

13. Juli 2021

Vorbemerkungen

Partielle Differentialgleichungen dienen als Werkzeug zur mathematischen Beschreibung vieler relevanter physikalischer Phänomene. Typische Beispiele sind etwa Masse- und Stofftransport, Strömungsmechanik, Elastizitätstheorie oder Elektromagnetismus.

In dieser Vorlesung werden elementare mathematische Methoden zur Behandlung von linearen partiellen Differentialgleichungen anhand von Modellproblemen vorgestellt. Dabei werden qualitative Eigenschaften von Lösungen diskutiert und Lösungsdarstellungen für spezielle Probleme behandelt. Darüber hinaus wird die Wahl geeigneter Anfangs- und Randbedingungen besprochen und die Wohlgestelltheit der resultierenden Anfangs- und Randwertprobleme untersucht. Grundprinzipien der mathematischen Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen werden anhand von Beispielen erläutert; für eine tiefergehende Untersuchung von Modellierungsaspekten sei jedoch auf die entsprechenden Fachvorlesungen verwiesen.

Als wesentliche Grundlage zur Vorbereitung der Vorlesung diene

- Walter A. Strauss: Partielle Differentialgleichungen. Vieweg 1995.

Weiterführende Informationen zu einzelnen Themen sind darüber hinaus in folgenden Büchern zu finden:

- L. C. Evans: Partial Differential Equations. AMS 2010.
- A. Friedman: Partial Differential Equations of Parabolic Type. Dover 2008.
- D. Gilbarg & N. S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer 2001.
- J. Spurk & A. Nuri: Strömungslehre. Springer 2010.
- W. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer 2000.

- D. Werner: Funktionalanalysis. Springer 2007.

Neben dem Studium des Skriptums, das eine Zusammenfassung der Lehrinhalte der gleichnamigen Vorlesung darstellt, ist auch der Besuch der Vorlesung empfohlen. Dort werden weitere Erklärungen gegeben und Beispiele gerechnet. Für das Erlernen der Inhalte ist darüber hinaus die aktive Auseinandersetzung mit den Themen im Selbststudium sowie die eigenständige Bearbeitung der Übungsaufgaben unumgänglich. Ein gelegentliches Nachblättern in den angegebenen Literaturreferenzen wird ebenso empfohlen.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	iii
1 Grundlagen und Motivation	1
1.1 Allgemeine Begriffe	1
1.2 Lineare Differentialgleichungen	2
1.3 Bemerkungen zur Wohlgestellttheit	4
1.4 Aufgaben	5
Gleichungen in einer Raumdimension	6
2 Transportgleichung	7
2.1 Modellierung	7
2.2 Charakteristikenmethode	9
2.3 Anfangs- und Randbedingungen	11
2.4 Aufgaben	13
3 Wellengleichung	15
3.1 Modellierung	15
3.2 Allgemeine Lösung	16
3.3 Formel von d'Alembert	18
3.4 Aufgaben	19
4 Trennung der Variablen	21
4.1 Modellierung	21
4.2 Produktansatz	22
4.3 Superposition	23
4.4 Lösung des Anfangs-Randwertproblems	24
4.5 Sturm-Liouville Probleme und Fourierreihen*	27

4.6	Aufgaben	29
5	Wärmeleitung und Diffusion	33
5.1	Modellierung	33
5.2	Fundamentallösung	34
5.3	Duhamel Prinzip	37
5.4	Eindeutigkeit der Lösung	39
5.5	Aufgaben	40
6	Rund um das Maximumsprinzip	43
6.1	Maximumprinzip	43
6.2	Eindeutigkeit und Stabilität	44
6.3	Konstruktion der Lösung	46
6.4	Aufgaben	48
	Partielle Differentialgleichungen in höherer Dimension	50
7	Grundgleichungen der Fluiddynamik	51
7.1	Grundlagen	51
7.2	Bilanzgleichungen	53
7.3	Zustandsgleichungen und Materialgesetze	55
7.4	Modelle der Strömungsmechanik	57
7.5	Aufgaben	59
8	Harmonische Funktionen	63
8.1	Lösung auf dem Einheitskreis	63
8.2	Poisson-Formeln und Mittelwertsatz	65
8.3	Dreidimensionaler Fall	67
8.4	Das Dirichlet'sche Prinzip	68
8.5	Aufgaben	69
9	Fundamentallösung und Green'sche Funktion	73
9.1	Fundamentallösung	73
9.2	Darstellungssätze	76
9.3	Green'sche Funktion	77
9.4	Aufgaben	79

10 Wärmeleitung revisited	81
10.1 Maximumprinzip	81
10.2 Trennung der Variablen	82
10.3 Fundamentallösung	85
10.4 Aufgaben	86
11 Die Poissongleichung	89
11.1 Beispiele	89
11.2 Maximumprinzip	90
11.3 Nichteindeutigkeit beim Neumannproblem	92
11.4 Trennung der Variablen	93
11.5 Aufgaben	96
12 Fouriertransformation und die Kirchhoff Formel	99
12.1 Fouriertransformation	99
12.2 Formale Lösung der Wellengleichung	101
12.3 Kirchhoff Formel	102
12.4 Energieerhaltung	104
12.5 Aufgaben	105
13 Distributionen	109
13.1 Definitionen und Beispiele	109
13.2 Ableitung von Distributionen	112
13.3 Faltung von Distributionen	113
13.4 Fundamentallösungen	115
13.5 Weiterführende Themen*	117
13.6 Aufgaben	119
14 Klassifikation von linearen Differentialgleichungen	121
14.1 Typeneinteilung	121
14.2 Diskussion der unterschiedlichen Typen	122
14.3 Aufgaben	126

1 Grundlagen und Motivation

1.1 Allgemeine Begriffe

Definition 1.1. Eine **partielle Differentialgleichung** ist eine Gleichung, in der eine Funktion mehrerer Variablen samt ihren partiellen Ableitungen vorkommt. Die höchste vorkommende Ableitungsordnung bestimmt die **Ordnung** der Differentialgleichung.

Beispiel 1.2. Eine allgemeine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in zwei Variablen besitzt die Form

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \quad (1.1)$$

Dabei sei $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ eine vorgegebene stetige Funktion. Weiters müssen die Funktion $u = u(x, y)$ sowie ihre partiellen Ableitungen $u_x = \partial_x u(x, y)$ und $u_y = \partial_y u(x, y)$ jeweils an der Stelle (x, y) ausgewertet werden.

Definition 1.3. Eine Funktion u , welche stetig differenzierbar ist und die Gleichung (1.1) für alle $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ erfüllt, heißt **klassische Lösung** der Differentialgleichung (1.1) auf Ω oder einfach nur Lösung. Für Systeme von Differentialgleichungen, Differentialgleichungen höherer Ordnung und in mehreren Variablen wird der Begriff entsprechend erweitert.

Beispiel 1.4. Zur Veranschaulichung erwähnen wir einige partielle Differentialgleichungen in zwei Variablen und ihre physikalische Bedeutung.

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| (i) $u_t + cu_x = 0$ | instationärer Transport in 1D |
| (ii) $u_x + u_y = 0$ | stationärer Transport in 2D |
| (iii) $u_t + uu_x = 0$ | Burgers Gleichung, Schockwelle |
| (iv) $u_t - du_{xx} = 0$ | Diffusion, Wärmeleitung |
| (v) $u_{tt} - u_{xx} = 0$ | schwingende Saite, Wellengleichung |
| (vi) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ | Laplace-, Potentialgleichung |

- | | | |
|--------|--------------------------------|------------------------|
| (vii) | $u_{tt} + du_t^2 - u_{xx} = 0$ | Schwingung mit Reibung |
| (viii) | $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ | Dispersionswelle |
| (ix) | $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$ | schwingender Stab |

Alle Beispiele sind Gleichungen in zwei Variablen. Drei der obigen Gleichungen haben Ordnung eins, vier besitzen Ordnung zwei und je ein Beispiel hat Ordnung drei bzw. vier. Die Herleitung der Gleichungen aus physikalischen Grundprinzipien wird zum Teil später noch diskutiert.

Bemerkung 1.5. Alle obigen Beispiele lassen sich in der Form $L(u) = 0$ schreiben, wobei $L(u)$ einen **Differentialausdruck** ist, in dem Funktionen und ihre Ableitungen vorkommen. Eine Abbildung $L : u \mapsto L(u)$, welche eine Funktion u auf einen Differentialausdruck $L(u)$ abbildet, wird ein **Differentialoperator** genannt, oder allgemeiner ein Operator.

Für Beispiel 1.4.(i) lautet der Differentialoperator etwa $L = \partial_t + c\partial_x$ und der entsprechende Differentialausdruck $L(u) = \partial_t u + c\partial_x u$.

1.2 Lineare Differentialgleichungen

Im Rahmen der Vorlesung werden wir uns vor allem mit linearen Differentialgleichungen beschäftigen. Hierzu benötigen wir folgenden Begriffe.

Definition 1.6. Ein Operator $L : u \mapsto L(u)$ heißt **linear**, falls

$$L(u + v) = L(u) + L(v) \quad \text{und} \quad L(cu) = cL(u) \quad (1.2)$$

für alle geeigneten Funktionen u, v und Konstanten c gilt.

Mit diesem Begriff können wir nun Differentialgleichungen klassifizieren.

Definition 1.7. (a) Die Differentialgleichung $L(u) = f$ heißt **linear**, falls der Differentialoperator L linear ist, andernfalls heißt sie **nichtlinear**.

(b) Eine **lineare** Differentialgleichung $L(u) = 0$ heißt **homogen**, eine Gleichung der Form $L(u) = f$ mit $f \neq 0$ entsprechend **inhomogen**.

Sechs der Differentialgleichung in Beispiel 1.4 sind linear, alle davon sind auch homogen; siehe Übung. Für nichtlineare Differentialgleichungen macht die Unterscheidung in homogen bzw. inhomogen dagegen keinen Sinn.

Bemerkung 1.8. Die Struktur der Lösungsmenge von **linearen** Differentialgleichungen $L(u) = f$ ist völlig analog zu der bei linearen Gleichungssystemen. Insbesondere gelten folgende Sachverhalte:

- (i) Sind u_1 und u_2 Lösungen zur linearen Gleichung $L(u) = f$, dann ist $u = u_1 - u_2$ Lösung zur homogenen Gleichung $L(u) = 0$.
- (ii) Sei u_p spezielle Lösung zur inhomogenen Gleichung $L(u) = f$, dann lässt sich jede weitere Lösung darstellen als $u = u_p + u_h$, wobei u_h eine Lösung zur homogenen Gleichung $L(u) = 0$ ist.
- (iii) Sind u_1, u_2, \dots, u_n Lösungen zur homogenen Gleichung $L(u) = 0$, dann ist auch jede **Linearkombination** $u = \sum_{k=1}^n c_k u_k$ eine Lösung der homogenen Gleichung.

Die dritte Eigenschaft wird **Superpositionsprinzip** genannt. Von ihm werden wir im Laufe der Vorlesung noch häufig Gebrauch machen.

Im Folgenden veranschaulichen wir die Struktur der Menge von Lösungen zu linearen Differentialgleichungen sowie das Superpositionsprinzip anhand von einigen konkreten Beispielen.

Beispiel 1.9. (i) Sei ϕ stetig differenzierbar. Dann ist jede Funktion der Form $u(x, t) = \phi(x - ct)$ Lösung zur Differentialgleichung 1.4.(i). Es gibt also unendlich viele Lösungen: mindestens eine für jedes ϕ .

(ii) Seien ϕ, ψ zweimal und η einmal stetig differenzierbar. Dann ist $u(x, t) = \phi(x - t) + \psi(x + t) + \int_{x-t}^{x+t} \eta(s) ds$ Lösung zu Beispiel 1.4.(v). Jeder der Summanden für sich ist ebenfalls eine Lösung.

(iii) Für $k \in \mathbb{Z}$ ist $u_k(x, t) = e^{-dk^2 t} \sin(kx)$ Lösung der Diffusionsgleichung in Beispiel 1.4(iv). Des weiteren ist auch jede endliche Linearkombination $u(x, t) = \sum_k c_k u_k(x, t)$ mit $c_k \in \mathbb{R}$ wieder Lösung. Unter geeigneten Bedingungen an die Koeffizienten ist sogar die unendliche Reihe wieder eine Lösung; siehe später.

(iv) Die Funktion $\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$ ist für $t > 0$ ebenfalls eine Lösung zur Diffusionsgleichung 1.4.(iv) und ebenso $\phi(x - y, t)$ für jedes $y \in \mathbb{R}$. Auch $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x - y, t) g(y) dy$ ist für stetige und beschränkte Funktion g eine Lösung der Diffusionsgleichung 1.4.(iv) für $t > 0$; es handelt sich im Prinzip wieder um eine Superposition von Lösungen.

Der Nachweis der Behauptungen erfolgt durch Nachrechnen; siehe Übung.

Bemerkung 1.10. Wie obige Beispiele belegen, haben (lineare) Differentialgleichungen oftmals viele, sogar unendlich viele, Lösungen. Lassen sich diese in einer einheitlichen Form angeben, so sprechen wir von **allgemeiner Lösung** der Differentialgleichung. Um die Lösung eindeutig festzulegen sind typischerweise noch weitere Anfangs- oder Randbedingungen nötig; vergleiche mit Aussagen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Bemerkung 1.11. Für nichtlineare Differentialgleichungen ist die Frage der Lösbarkeit im Allgemeinen viel schwieriger zu behandeln; vgl mit der Lösung von nichtlinearen Gleichungen bzw. Gleichungssystemen. Dies lässt sich schon an einfachen Beispielen sehen. Die Gleichung $u_x^2 + u_y^2 + 1 = 0$ kann zum Beispiel offensichtlich keine reelle Lösung besitzen.

1.3 Bemerkungen zur Wohlgestelltheit

Im Rahmen der Vorlesung werden wir uns fast ausschließlich mit linearen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung beschäftigen, welche in der Praxis häufig auftreten. Vorweg einige Überlegungen:

- (i) Um sinnvoll über Lösungen sprechen zu können, muss noch festgelegt werden, auf welchem Bereich der Variablen (x, y, \dots) die Differentialgleichung eigentlich gelten soll. Das ergibt sich in der Praxis meist aus dem Anwendungskontext und ist Bestandteil des Modells.
- (ii) Ähnlich wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen sind bei partiellen Differentialgleichungen wieder zusätzliche Anfangs- und/oder Randbedingungen nötig, um die Lösung u eindeutig zu beschreiben. Auch diese sind wesentlicher Bestandteil des mathematischen Modells.
- (iii) Analytische Formeln für die Lösung werden sich nur in Spezialfällen angeben lassen. Allerdings kann man oft qualitative Eigenschaften der Lösung herleiten, zum Beispiel, ob sie positiv ist, eindeutig, u.s.w. Für praktische Probleme werden Lösungen fast ausschließlich näherungsweise mit numerischen Verfahren bestimmt.

Weitere Gesichtspunkte werden im Laufe der Vorlesung vorgestellt.

Bei der Untersuchung einer Differentialgleichung sollte man weiters bedenken, dass sie meist als mathematisches Modell für ein reales physikalisches

System dient. Ein “sinnvolles” Modell für einen physikalischen Zusammenhang sollte daher meistens die folgenden Eigenschaften besitzen.

Definition 1.12. Ein mathematisches Problem (z.B. eine partielle Differentialgleichung $L(u) = f$ auf entsprechendem Gebiet samt Anfangs- und Randbedingungen) heißt **wohlgestellt**, falls folgende Eigenschaften gelten:

- (i) Für jede (sinnvolle) Wahl von Daten f existiert eine Lösung u .
- (ii) Die Lösung u bei vorgegebenen Daten f ist eindeutig.
- (iii) Die Lösung u hängt stabil von den Daten f ab, d.h., kleine Änderungen in den Daten führen zu kleinen Änderungen in der Lösung.

Wir werden auf diese Gesichtspunkte anhand von Beispielen im Verlauf der Vorlesung noch des Öfteren genauer eingehen.

1.4 Aufgaben

Aufgabe 1.1. Zu den Differentialgleichungen aus Beispiel 1.4 bestimme man die Ordnung und gebe jeweils an, ob es sich um lineare oder nichtlineare Gleichungen handelt.

Aufgabe 1.2. Für welche der Differentialgleichungen aus Beispiel 1.4 sind die Funktionen (a) 1; (b) x ; (c) $x + t$; (d) $x - y$; (e) $\sin(x) \sinh(y)$ Lösungen. Dabei sind Variablen, die in der Gleichung nicht vorkommen, als Parameter zu verstehen.

Aufgabe 1.3. Zeigen Sie, dass die folgenden Operatoren linear sind.

(a) $L : u \rightarrow \int_0^1 u(x) dx$; (b) $L : u \mapsto \partial_x u$; (c) $L : u \mapsto 5u(1)$.

Hierbei sei u jeweils eine hinreichend glatte Funktion auf $[0, 1]$.

Aufgabe 1.4. Überführen Sie die Gleichung $\partial_t u(x, t) + \partial_x u(x, t) = 0$ durch Substitution $x = a + t$, $\phi(t) = u(a + t, t)$ in eine gewöhnliche Differentialgleichung für ϕ und berechnen Sie deren allgemeine Lösung.

Aufgabe 1.5. Finden Sie alle Lösungen $u(x, y)$ zur Differentialgleichung $u_{xx}(x, y) + u(x, y) = 0$. Man beachte, dass hier ist y als Parameter zu verstehen ist. Es handelt sich also genau genommen um eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und einem zusätzlichem Parameter.

Aufgabe 1.6. Finden Sie alle Lösungen $u(x, y)$ zur homogenen Differentialgleichung $u_{xy} = 0$. Tipp: zweimal integrieren.

Aufgabe 1.7. Beweisen Sie die drei Aussagen aus Bemerkung 1.8. Benutzen Sie hierzu die Eigenschaften linearer Operatoren.

Aufgabe 1.8. Überprüfen Sie die Aussagen aus Beispiel 1.9.

Aufgabe 1.9. Begründen Sie mit Beispiel 1.9, dass Differentialgleichungen ohne Angabe weiterer Bedingungen im Allgemeinen nicht wohlgestellt im Sinne von Definition 1.12 sind.

2 Transportgleichung

Eine allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung in zwei Variablen hat die Form

$$a(x, y)\partial_x u(x, y) + b(x, y)\partial_y u(x, y) + c(x, y)u(x, y) = f(x, y). \quad (2.1)$$

Man kann die Differentialgleichung dabei als stationäres, d.h., zeitunabhängiges Problem in zwei Raumdimensionen verstehen, oder eine der Variablen mit der Zeit indentifizieren, was zu einem instationären Problem in einer Raumdimension führt. Wir diskutieren kurz den Ursprung solcher Gleichungen, leiten dann Darstellungen für die (allgemeine) Lösung unter recht allgemeinen Voraussetzungen an die Koeffizienten a, b, c, f her und diskutieren zum Abschluss geeignete Anfangs- bzw. Randbedingungen, welche zu einem wohlgestellten mathematischen Problem führen.

2.1 Modellierung

Beispiel 2.1. Wir betrachten ein Rohr mit konstantem Querschnitt A , durch welches Wasser mit konstanter Geschwindigkeit c fließt. Im Wasser sei ein Schadstoff gelöst, dessen Konzentration $u(x, t)$ über den Querschnitt als konstant angenommen wird. Die Änderung der gesamten Schadstoffmenge im Rohrstück $[a, b]$ durch Zu- bzw. Abfluss über den Rand $\{a, b\}$ lässt sich beschreiben durch die Stoffbilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} \int_a^b Au(x, t)dx \stackrel{!}{=} Acu(a, t) - Acu(b, t).$$

Mit Hineinziehen der Ableitung im linken Term und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für den rechten erhält man hieraus

$$A \int_a^b \partial_t u(x, t)dx = -A \int_a^b \partial_x [cu(x, t)]dx.$$

Durch Umordnen der Terme und Kürzen durch A folgt die Integralbilanz

$$\int_a^b \partial_t u + \partial_x(cu) dx = 0. \quad (2.2)$$

Diese Beziehung gilt für beliebige Wahl von a und b . Mit Hilfe einer Skizze überzeugt man sich leicht davon, dass für stetiges f aus $\int_a^b f(x) dx = 0$ für alle a, b sofort $f(x) = 0$ für alle x folgt; siehe Aufgabe 2.3. Mit dieser Überlegung erhält man aus (2.2) die **Erhaltungsgleichung**

$$\partial_t u + \partial_x(cu) = 0, \quad (2.3)$$

welche für alle relevanten x und t gilt. Diese Differentialgleichung beschreibt also die Erhaltung der gesamten Stoffmenge im Rohr. Nimmt man weiters an, dass $c \equiv \text{const}$, also $\partial_x c = 0$ gilt, dann lässt sich die Gleichung (2.3) umschreiben in die **Transportgleichung**

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0 \quad (2.4)$$

Diese Differentialgleichung beschreibt den Transport eines Stoffes mit Konzentration u in einer Rohrströmung mit Geschwindigkeit c .

Bemerkung 2.2. Alle Schadstoffpartikel, welche sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Intervall $[a, b]$ befinden, bewegen sich mit Geschwindigkeit c und befinden sich daher zu einem späteren Zeitpunkt t im Intervall $[a(t), b(t)]$ mit $a(t) = a + ct$, $b(t) = b + ct$. Aus dem Erhaltungsprinzip für den Stoff folgt

$$A \int_{a(t)}^{b(t)} u(x, t) dx = A \int_{a(s)}^{b(s)} u(x, s) dx \quad \text{für alle } t, s,$$

woraus man durch Differenzen- und Grenzwertbildung auf die Integralformel $\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} u(x, t) dx = 0$ kommt; siehe Übung. Anwenden der Differentiationsregeln für parameterabhängige Integrale und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung liefert weiters

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} u(x, t) dx \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t u(x, t) dx + [b'(t)u(b(t), t) - a'(t)u(a(t), t)] \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t u(x, t) + \partial_x(cu(x, t)) dx. \end{aligned}$$

Dies entspricht gerade wieder der Integralbilanz (2.2). Wir können also dieselbe Integralbilanz, und folglich auch die entsprechenden Differentialgleichungen, auf zwei verschiedene Arten erhalten:

- (i) durch Betrachten eines ortsfesten Intervalls $[a, b]$ und der Zu- und Abflüsse über den Rand (=Euler'sche Beschreibung);
- (ii) durch Verfolgung eines Teilchenpaketes im Volumen $[a(t), b(t)]$, das sich im Strömungsfeld bewegt (=Lagrange'sche Beschreibung).

Beide Betrachtungsweisen werden in der Modellierung physikalischer Phänomene häufig eingesetzt und bieten je nach Aufgabe gewisse Vorteile.

2.2 Charakteristikenmethode

Die folgenden Überlegungen erlauben es, recht allgemeine Transport- und Erhaltungsgleichungen formal auf gewöhnliche Differentialgleichungen zu überführen und dann mit bekannten Methoden zu lösen.

Beispiel 2.3. Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$\partial_t u(x, t) + c(x, t) \partial_x u(x, t) + d(x, t) u(x, t) = f(x, t) \quad (2.5)$$

mit vorgegebenen stetigen Funktionen c , d und f . Mit

$$\phi(t) := u(x(t), t) \quad (2.6)$$

bezeichnen wir den Wert der Lösung entlang einer Raum-Zeit Kurve $(x(t), t)$. Für die zeitliche Änderung von $\phi(t)$ erhält man mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = \frac{d}{dt} u(x(t), t) = \partial_x u(x(t), t) x'(t) + \partial_t u(x(t), t).$$

Wählt man die Kurve $(x(t), t)$ so, dass $x'(t) = c(x(t), t)$ gilt, dann folgt mit Hilfe der Differentialgleichung (2.5) die Beziehung

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{d}{dt} \phi(t) = c(x(t), t) \partial_x u(x(t), t) + \partial_t u(x(t), t) \\ &= -d(x(t), t) u(x(t), t) + f(x(t), t) = -D(t) \phi(t) + F(t) \end{aligned}$$

mit $D(t) = d(x(t), t)$ und $F(t) = f(x(t), t)$. Es handelt sich dabei um eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung, die durch Trennung der Variablen und Variation der Konstanten gelöst werden kann.

Bemerkung 2.4. Die Kurven $(x(t), t)$ mit $x'(t) = c(x(t), t)$ haben offensichtlich eine besondere Bedeutung und werden **charakteristische Grundkurven** für die Differentialgleichung (2.5) genannt.

Aus obigen Überlegungen und dem Wissen über gewöhnliche Differentialgleichungen erhält man unmittelbar die folgende Aussage.

Satz 2.5. (i) Entlang von charakteristischen Grundkurven $(x(t), t)$ sind die Lösungen $u(x(t), t)$ der partiellen Differentialgleichung (2.5) durch eine gewöhnliche Differentialgleichung bestimmt.

(ii) Ist der Funktionswert $u(x(t), t)$ an einem Punkt (x_0, t_0) bekannt, dann entlang der ganzen Kurve $(x(t), t)$ mit $x(t_0) = x_0$.

Aus diesen Sachverhalten ergibt sich sogleich eine konstruktive Methode zur Bestimmung der allgemeinen Lösung zur Differentialgleichung (2.5), die sogenannte **Charakteristikenmethode**.

Beispiel 2.6. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\partial_t u + c \partial_x u = \lambda u,$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ mit konstanten Parametern $c, \lambda \in \mathbb{R}$.

Schritt 1. Die Gleichung für die charakteristischen Grundkurven lautet hier $x'(t) = c$, also $x(t) = a + ct$. Die charakteristischen Grundkurven sind also Geraden im Raum-Zeit-Diagramm mit Steigung $1/c$; siehe Skizze!

Schritt 2. Für $\phi(t) = u(x(t), t) = u(a + ct, t)$ folgt

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{d}{dt} \phi(t) = \frac{d}{dt} u(a + ct, t) \\ &= \partial_x u(a + ct, t) c + \partial_t u(a + ct, t) = \lambda u(a + ct, t) = \lambda \phi(t). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung hierzu lautet $\phi(t) = \phi(0)e^{\lambda t}$ und durch Einsetzen erhält man weiters $u(a + ct, t) = u(a, 0)e^{\lambda t}$.

Schritt 3. Mit der Wahl $a = x - ct$ und $u_0(a) := u(a, 0)$ erhält man sofort die Lösungsdarstellung

$$u(x, t) = u(x - ct, 0)e^{\lambda t} = u_0(x - ct)e^{\lambda t}.$$

Durch Vorgabe von Anfangswerten $u(x, 0) = u_0(x)$ ist die Lösung der obigen Differentialgleichung also eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Für $\lambda = 0$ erhält man die Transportgleichung $\partial_t u + c\partial_x u = 0$. Für diese sind die Lösungen $u(x, t)$ gegeben durch

$$u(x, t) = u_0(x - ct, 0).$$

Die Lösungen sind dann also konstant entlang von Charakteristiken.

2.3 Anfangs- und Randbedingungen

Anhand des obigen Beispiels sieht man sofort, dass zur eindeutigen Bestimmung der Lösung weitere Anfangs- bzw. Randbedingungen nötig sind. Diese sind so zu wählen, dass für jede charakteristische Grundkurve genau ein Anfangs- bzw. Randwert vorgegeben wird.

Beispiel 2.7. Für die Transportgleichung $\partial_t u + c\partial_x u = 0$ mit $c \neq 0$ führen folgende Anfangs- bzw. Randbedingungen jeweils auf eindeutige Lösungen

- (i) $u(x, 0) = u_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) $u(0, t) = g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$;
- (iii) $u(x, 0) = u_0(x)$ für $x \geq 0$ und $u(0, t) = g(t)$ für $t > 0$.

Jede dieser Wahlen definiert genau einen geeigneten Anfangswert für jede charakteristische Grundkurve; man überzeuge sich durch eine Skizze! Zu beachten ist weiters, dass auch vom betrachteten Gebiet abhängt, welche Anfangs- bzw. Randbedingungen sinnvoll sind.

Bemerkung 2.8. Mit Hilfe der Charakteristikenmethode lässt sich auch die Wohlgestelltheit von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bei Vorgabe geeigneter Anfangs- bzw. Randbedingungen zeigen. Insbesondere ist die lineare Transportgleichung $\partial_t u + c\partial_x u = 0$ für Anfangswerte $u(x, 0) = u_0(x)$ mit $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ wohlgestellt, d.h., es existiert eine eindeutige Lösung und diese hängt stabil von den Daten u_0 ab.

Zum Abschluss noch ein Beispiel, welches zeigt, dass die Charakteristikenmethode im Prinzip auch auf nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung erweitert werden kann. Das Beispiel zeigt aber auch, dass weitere Schwierigkeiten bei nichtlinearen Differentialgleichungen auftreten können.

Beispiel 2.9 (Burgers Gleichung). Die nichtlineare Transportgleichung

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0 \quad (2.7)$$

dient als einfaches Modell zur Beschreibung von Verkehrsflüssen entlang von Straßen. In diesem Kontext ist $u(x, t)$ die Dichte von Fahrzeugen und die Geschwindigkeit $c(u) = u$ der Fahrzeuge hängt von der Verkehrsdichte ab. Wie im linearen Fall sieht man, dass eine glatte Lösung u entlang charakteristischer Kurven konstant sein muss. Um diese Kurven zu bestimmen, müssen wir hier Anfangswerte wählen, etwa

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

Hiermit erhalten wir die charakteristischen Grundkurven

$$x(t) = \begin{cases} x_0, & x_0 \leq 0, \\ x_0(1 + t), & x_0 > 0. \end{cases}$$

Die Charakteristiken sind also wieder Geraden und die Lösung ist auf ihnen konstant und lautet entsprechend

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x/(1 + t), & x > 0. \end{cases}$$

Wählt man für die Anfangswerte alternativ als

$$u(x, 0) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

dann sind die charakteristischen Grundkurven Geraden der Form

$$x(t) = \begin{cases} x_0(1 - t), & x_0 \leq 0, \\ x_0, & x_0 > 0. \end{cases}$$

Hier schneiden sich allerdings die Geraden, siehe Skizze, was der Tatsache widerspricht, dass glatte Lösungen entlang der charakteristischen Kurven konstant sein müssen. Die Differentialgleichung (2.7) besitzt also bei Vorgabe von Anfangswerten (2.8) keine klassische Lösung. Selbst für glatt gewählte Anfangswerte kann die Existenz einer glatten Lösung nur für kleine Zeiten garantiert werden. Mehr dazu findet man z.B. im Buch von Evans: *Partial Differential Equations*.

2.4 Aufgaben

Aufgabe 2.1. Überführen Sie durch Substitution $x(y) = a(t) + y[b(t) - a(t)]$ das Integral $\int_{a(t)}^{b(t)} u(x, t) dx$ auf ein Integral $\int_0^1 \dots dy$.

Aufgabe 2.2. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2.1, dass gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} u(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t u(x, t) dx + b'(t)u(b(t), t) - a'(t)u(a(t), t).$$

Bemerkung: In mehreren Raumdimensionen ist das entsprechende Resultat als **Reynolds'sches Transporttheorem** bekannt; siehe Kapitel 7.

Aufgabe 2.3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte $\int_a^b f(x) dx = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Annahme $f(x) > 0$ für ein $x \in \mathbb{R}$ und Widerspruch; siehe Skizze!

Aufgabe 2.4. Seien A und F stetige Funktionen auf \mathbb{R} . Bestimmen Sie die allgemeine Lösung zur linearen Differentialgleichung

$$\phi'(t) + A(t)\phi(t) = F(t).$$

Begründen Sie weiters, dass die Lösung durch zusätzliche Vorgabe eines Anfangswertes $\phi(t_0) = \phi_0$ eindeutig bestimmt wird.

Aufgabe 2.5. Wir betrachten die eindimensionale Transportgleichung

$$\partial_t u(x, t) + x \partial_x u(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t_0 < t < t_1.$$

- (i) Berechnen und skizzieren Sie die charakteristischen Grundkurven.
- (ii) An welchem Teil des Randes von $Q = (x_0, x_1) \times (t_0, t_1)$ müssen Randbedingungen vorgegeben werden, um die Lösung $u(x, t)$ der Differentialgleichung eindeutig zu bestimmen? Machen Sie eine Skizze.
- (iii) Teilen Sie den Rand des Gebietes Q sinnvoll in Ein- und Ausflussrand.

Aufgabe 2.6. In einem Rohr der Länge L befindet sich gefärbtes Wasser. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Wasserhahn aufgedreht, und frisches Wasser strömt von links mit konstanter Geschwindigkeit c ins Rohr und drückt das gefärbte Wasser am rechten Rand aus dem Rohr.

- (i) Nach welcher Zeit t_1 ist das gefärbte Wasser aus dem Rohr abgeflossen?
- (ii) Formulieren Sie eine Transportgleichung und geeignete Anfangs- und Randbedingungen, die das “Entfärben” des Wassers im Rohr modellieren.
- (iii) Berechnen und skizzieren Sie die charakteristischen Grundkurven.
- (iv) Berechnen Sie die Lösung ihres Modells und vergleichen Sie mit (i).

Aufgabe 2.7. Berechnen Sie die Lösung von

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x u(x, t) + u(x, t) = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

zu vorgegebenen Anfangswerten $u(x, 0) = 1$ für alle x .

Aufgabe 2.8. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung zur Gleichung

$$\partial_t u(x, t) + 2tx \partial_x u(x, t) = 0, \quad t > 0.$$

Schlagen Sie geeignete Anfangs- bzw. Randbedingungen vor, mit deren Hilfe die Lösung eindeutig festgelegt werden kann.

Hinweis: Skizzieren Sie die charakteristischen Grundkurven.

Aufgabe 2.9. Berechnen Sie die Lösung von

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x(xu(x, t)) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

mit Anfangs- und Randbedingungen

$$u(x, 0) = x, \quad x > 0, \quad u(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

Hinweis: Skizzieren Sie die charakteristischen Grundkurven.

Aufgabe 2.10. Formulieren Sie Transportgleichungen für $u(x, t)$ welche Lösungen der folgenden Form besitzen:

- (i) $u(x, t) = g(x - 2t)$;
- (ii) $u(x, t) = g(x + t)$;
- (iii) $u(x, t) = g(x - t^2)$;
- (iv) $u(x, t) = g(x - t)e^{-t}$.

Skizzieren sie jeweils die charakteristischen Grundkurven und geben Sie die entsprechende Ausbreitungsgeschwindigkeit an.

3 Wellengleichung

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Ausbreitung von Wellen in einer Raumdimension. Die Differentialgleichungen lassen sich unter Symmetrieanahmen auch als Spezialfälle aus den entsprechenden dreidimensionalen Modellen herleiten, die später noch eingehend behandelt werden.

3.1 Modellierung

Beispiel 3.1 (Schallausbreitung). Die Ausbreitung von akustischem Schall in einem langen, mit Luft gefüllten Rohr lässt sich näherungsweise beschreiben durch die linearen Differentialgleichungen

$$\partial_t \rho + \rho_0 \partial_x v = 0 \quad \text{und} \quad \rho_0 \partial_t v + \partial_x p = 0.$$

Hierbei sind ρ und p die Abweichungen der Dichte und des Drucks von den konstanten Werten ρ_0 und p_0 eines ruhenden Mediums und v die Geschwindigkeit des durch die Schallwelle bewegten Luftvolumens. Zwischen Druck- und Dichteschwankungen wird ein linearer Zusammenhang angenommen, also $p = c^2 \rho$, wobei die Konstante c der Schallgeschwindigkeit im Medium entspricht. Eine Herleitung der obigen Gleichung aus den Grundgleichungen der Strömungsmechanik wird in Kapitel 7 noch genauer erläutert.

Bemerkung 3.2. Die Schallausbreitung wird durch ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben. Differenziert man die erste Gleichung nach t , die zweite nach x und setzt den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte ein, so erhält man eine einzelne lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\partial_{tt} p = c^2 \partial_{xx} p,$$

die eindimensionale **Wellengleichung**. Oft wird der Einfachheit halber $c = 1$ gesetzt, was sich durch Variablentransformation begründen lässt.

Bemerkung 3.3. Die gesamte Energie in einer eindimensionalen akustischen Welle zum Zeitpunkt t im Intervall $[a, b]$ ist gegeben durch

$$E_{ak}(t) = \int_a^b \rho_0 \frac{v(x, t)^2}{2} + \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{p(x, t)^2}{2} dx,$$

bestehend aus einem kinetischen und einem potentiellen Anteil. Hierbei sind ρ_0 und c als konstant in Zeit und Ort angenommen. Differenziert man diesen Ausdruck nach der Zeit, so erhält man

$$\frac{d}{dt} E_{ak}(t) = \int_a^b \rho_0 v_t(x, t) v(x, t) + \frac{1}{\rho_0 c^2} p_t(x, t) p(x, t) dx$$

Nach Einsetzen der Differentialgleichungen aus Beispiel 3.1 ergibt sich

$$\frac{d}{dt} E_{ak}(t) = \int_a^b -p_x v - v_x p dx = - \int_a^b \partial_x (vp) dx = -vp \Big|_{x=a}^b.$$

Da sich der Schall in endlicher Zeit nur endlich weit ausbreiten kann, siehe Abschnitt 3.3, kann man annehmen, dass $p(x, t) = v(x, t) = 0$ für $|x| > R$ und $t \leq T$ gilt. Für hinreichend großes Intervall $[a, b]$ verschwinden somit die Randterme und wir erhalten

$$\frac{d}{dt} E_{ak}(t) = 0.$$

Die Wellengleichung beschreibt also das Phänomen der Energieerhaltung. Etwas allgemeiner gilt

$$\frac{d}{dt} E_{ak}(t) = -vp \Big|_{x=a}^b,$$

d.h., die Energieänderung im Gebiet $[a, b]$ kommt durch Energiefluss über den Rand des Gebietes zustande. Dieser Zusammenhang ist als **Poynting Theorem** bekannt; man vergleiche mit den Erläuterungen in Kapitel 12.

3.2 Allgemeine Lösung

Wir betrachten im Folgenden die eindimensionale Wellengleichung

$$\partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

mit konstanter Schallgeschwindigkeit $c = 1$. Mit Hilfe der Resultate aus Kapitel 2 lässt sich die allgemeine Lösung wie folgt darstellen.

Satz 3.4. Die allgemeine Lösung zur Wellengleichung (3.1) hat die Form

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t) \quad (3.2)$$

mit frei wählbaren Funktionen f und g . Falls $f, g \in C^2$, also zweimal stetig differenzierbar sind, ist $u \in C^2$ eine klassische Lösung von (3.1).

BEWEIS. Mittels formaler Rechnung sieht man, dass

$$0 = \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u.$$

Somit lässt sich die Wellengleichung formal umschreiben in

$$\partial_t v + \partial_x v = 0 \quad \text{und} \quad \partial_t u - \partial_x u = v.$$

Dieses System von zwei gekoppelten Transportgleichungen ist äquivalent zur Wellengleichung und kann jetzt in zwei Schritten mit den Techniken des vorigen Kapitels gelöst werden. Nach Beispiel 2.6 lautet die allgemeine Lösung zur ersten Gleichung

$$v(x, t) = h(x - t)$$

mit freier Funktion h . Bemerkung 1.8 entsprechend, lässt sich die allgemeine Lösung zur zweiten Gleichung dann darstellen als

$$u(x, t) = u_h(x, t) + u_p(x, t),$$

wobei u_h allgemeine Lösung zur homogenen Gleichung $\partial_t u_h - \partial_x u_h = 0$ ist und u_p eine spezielle Lösung zur inhomogenen Gleichung $\partial_t u_p - \partial_x u_p = v$. Mit Beispiel 2.6 erhalten wir für den homogenen Anteil

$$u_h(x, t) = f(x + t)$$

mit noch frei wählbarer Funktion f . Für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$u_p(x, t) = g(x - t).$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung für $u = u_h + u_p$ und Verwendung der Lösungsdarstellung für v liefert

$$h(x - t) = v(x, t) = \partial_t u(x, t) - \partial_x u(x, t) = -2g'(x - t).$$

Durch Integration erhält man $g(s) = -\frac{1}{2} \int_0^s h(s) ds + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ und für $c = 0$ folgt die gesuchte Lösungsdarstellung. Man überzeugt sich leicht davon, dass jede Wahl von c zur selben Lösungsformel führt. \square

3.3 Formel von d'Alembert

Bemerkung 3.5. Um die Lösung der Wellengleichung (3.1) festzulegen, sind noch zwei Zusatzbedingungen nötig. Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung wählen wir zwei Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x). \quad (3.3)$$

Mit einfacher Rechnung erhält man nun folgende Aussage.

Satz 3.6 (d'Alembert). Für jede Vorgabe $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ von Anfangswerten in (3.3) existiert eine eindeutige klassische Lösung zur Wellengleichung (3.1) auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Diese ist gegeben durch die Formel

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) ds. \quad (3.4)$$

BEWEIS. Erfolgt durch Einsetzen der allgemeine Lösungsformel aus Satz 3.4 in die Anfangsbedingungen bzw. durch Ausdifferenzieren; siehe Übung. \square

Bemerkung 3.7 (Wohlgestelltheit). Aus der expliziten Lösungsdarstellung von d'Alembert sieht man sofort, dass die Wellengleichung (3.1) mit Anfangsbedingungen (3.3) für reguläre Anfangswerte wohlgestellt ist. Man beachte, dass die Welle vorwärts und rückwärts in der Zeit laufen darf.

Bemerkung 3.8 (Kausalität). Wie man aus der Darstellung der allgemeinen Lösung bzw. aus der d'Alembert Formel sieht, hängt der Wert $u(x, t)$ der Lösung zur Wellengleichung (3.1) nur von den Werten $u(y, s)$ mit

$$(y, s) \in V(x, t) := \{(y, s) : x - t + s \leq y \leq x + t - s, s \leq t\}$$

ab. Die Menge $V(x, t)$ heißt Vergangenheitskegel oder auch Abhängigkeitsbereich. Dies entspricht der physikalischen Beobachtung, dass sich Information höchstens mit Schallgeschwindigkeit c , hier $c = 1$, ausbreiten kann. Umgekehrt hat der Wert $u(x, t)$ der Lösung an der Stelle (x, t) nur Einfluss auf die Lösung $u(y, s)$ für (y, s) im Zukunftskegel

$$Z(x, t) := \{(y, s) : x - s + t \leq y \leq x + s - t, s \geq t\}$$

hat. Die Vereinigung $K(x, t) = V(x, t) \cup Z(x, t)$ wird charakteristischer Kegel genannt. Man veranschauliche sich die Begriffe anhand einer Skizze!

Bemerkung 3.9. Eine Funktion $v(x)$ besitzt beschränkten Träger, falls

$$v(x) = 0 \quad \text{für alle } |x| > R.$$

Aus der d'Alembertformel und Bemerkung 3.8 sieht man nun, dass die Lösung $u(\cdot, t)$ der Wellengleichung für alle $t \geq 0$ beschränkten Träger besitzt, falls die Anfangswerte u_0 und u_1 beschränkten Träger haben. Dieser kann sich natürlich mit der Zeit verändern. Der Sachverhalt repräsentiert das physikalische Prinzip, dass sich Information nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten kann.

3.4 Aufgaben

Aufgabe 3.1. Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $u(x, t) = f(x + t) + g(x - t)$ eine klassische Lösung zur Wellengleichung $\partial_{tt}u = \partial_{xx}u$ ist.

Aufgabe 3.2. Sei u eine klassische Lösung zur Wellengleichung $\partial_{tt}u = \partial_{xx}u$. Zeigen Sie, dass dann auch

- (a) jede Streckung $u(ax, at)$, $a \in \mathbb{R}$;
- (b) jede Translation $u(x + b, t)$, $b \in \mathbb{R}$;
- (c) jede Ableitung $(\partial_x)^j (\partial_t)^k u(x, t)$ mit $i, j \geq 0$

eine Lösung zur Wellengleichung ist. Im letzten Fall ist natürlich hinreichende Differenzierbarkeit von u vorauszusetzen.

Aufgabe 3.3. Beweisen Sie mit Satz 3.4 die Aussage von Satz 3.6.

Aufgabe 3.4. Sei $u_0(x) = \max(1 - |x|, 0)$ und $u_1(x) \equiv 0$. Skizzieren Sie die Lösung der Wellengleichung $u(x, t)$, welche durch die d'Alembertformel gegeben ist, für die Zeitpunkte $t = 0, 1/2, 1, 2$. Was zeigt dieses Beispiel?

Aufgabe 3.5. Ermitteln Sie eine Lösungsformel für die Wellengleichung $\partial_{tt}u = \partial_{xx}u$ für vorgegebene Randwerte $u(0, t) = g(t)$ und $\partial_x u(0, t) = h(t)$.

Aufgabe 3.6. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung zu $\partial_{tt}u - c^2 \partial_{xx}u = 0$. Hinweis: (a) Durch Substitution $y = x/c$ auf die Form $\partial_{tt}v - \partial_{yy}v = 0$ transformieren; oder (b) den Beweis von Satz 3.4 geeignet abändern.

Aufgabe 3.7. Berechnen Sie die Lösung zur Gleichung $\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0$ mit Anfangswerten $u(x, 0) = u_0(x)$ und $\partial_t u(x, 0) = u_1(x)$; vgl. d'Alembert.

Aufgabe 3.8. Das Schwingen einer Metallsaite lässt sich beschreiben durch

$$\rho_0 \partial_{tt}u = k \partial_{xx}u.$$

Hierbei ist u die Auslenkung, ρ_0 die Dichte und k die Steifigkeit der Saite. Zeigen Sie, dass für Lösungen mit beschränktem Träger die Energie

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} \rho_0 \frac{u_t^2(x, t)}{2} + k \frac{u_x^2(x, t)}{2} dx, \quad (3.5)$$

bestehend aus kinetischem und potentiellm Anteil, stets erhalten bleibt.

Aufgabe 3.9. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3.8, dass die inhomogene Wellengleichung $\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = f$ mit Anfangswerten $u(x, 0) = u_0(x)$ und $u_t(x, 0) = u_1(x)$ bei vorgegebenen Funktionen f, u_0, u_1 höchstens eine Lösung mit beschränktem Träger besitzen kann.

Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe zwei Lösungen u^1 und u^2 , betrachten Sie die Differenz $w = u^1 - u^2$, und benutzen Sie die Energieerhaltung.

Aufgabe 3.10. Die Gleichungen für die Ausbreitung einer ebenen (eindimensionalen) Schallwelle in einem viskosen Medium lauten

$$\partial_t \rho + \rho_0 \partial_x v = 0 \quad \text{und} \quad \rho_0 \partial_t v + \partial_x p = \nu \partial_{xx} v$$

mit $p = c^2 \rho$ und Konstanten $c, \rho_0 > 0$. Zeigen Sie, dass für Viskosität $\nu > 0$ die akustische Energie $E_{ak}(t)$ von Lösungen (p, v) mit beschränktem Träger stets abnimmt; vgl. Bemerkung 3.3.

4 Trennung der Variablen

Wir betrachten nun die eindimensionale Wellengleichung auf beschränkten Gebieten und mit zusätzlichen Randbedingungen. Wie wir sehen werden, kann in diesem Fall die Lösung explizit mit Hilfe der Methode der “Trennung der Variablen” konstruiert werden. Die Technik lässt sich beinahe wörtlich auch zum Lösen anderer linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und auf speziellen Gebieten anwenden.

4.1 Modellierung

Beispiel 4.1. Wir betrachten eine Saite, die bei $x = 0$ und $x = L$ fest eingespannt ist. Ihr Schwingen, d.h., die Auslenkung $u(x, t)$ aus der Ruhelage, wird beschrieben durch

$$\begin{aligned}\rho_0 \partial_{tt} u(x, t) - k \partial_{xx} u(x, t) &= 0 && \text{für } 0 < x < L, t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0 && \text{für } t > 0.\end{aligned}$$

Dabei ist ρ_0 die Massendichte der Saite und k ihre Steifigkeit. Der linke der Gleichung beschreibt die Trägheit der Masse und der rechte die Rückstellkraft der Saite. Die Gleichung entspricht somit dem zweiten Newton’schen Gesetz, das die Beschleunigung eines Körpers mit den auf ihn wirkenden Kräften in Verbindung stellt. Zur Vereinfachung wählen wir im Folgenden $L = 1$, $\rho = 1$ und $k = 1$ und erhalten somit das folgende Modellproblem

$$\partial_{tt} u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (4.1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.2)$$

Es handelt sich dabei um ein lineares homogenes Randwertproblem. Wie wir gleich sehen werden, ist zur eindeutigen Bestimmung noch die Vorgabe von geeigneten Anfangswerten nötig.

Bemerkung 4.2. Zum Lösen des Modellproblems gehen wir wie folgt vor:

- (i) Finden von **Grundlösungen** in Produktform $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$.
- (ii) Ansatz $u(x, t) = \sum_n c_n u_n(x, t)$ für die allgemeine Lösung als **Superposition** (=Linearkombination) von Grundlösungen u_n .
- (iii) Bestimmung der Koeffizienten c_n durch Vorgabe und Erfüllung von zusätzlichen Anfangsbedingungen.

Das Vorgehen ist unter dem Namen “Trennung der Variablen” bekannt. Die Schritte (i)–(iii) lassen sich relativ einfach formal durchführen. Wir werden auch überprüfen, dass man alle Schritte wirklich machen darf.

4.2 Produktansatz

Beispiel 4.3. Wir suchen nach Lösungen von (4.1)–(4.2) in der Form

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (4.3)$$

Man spricht vom Bernoulli’schen Produkt- oder auch Separationsansatz. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$0 = \partial_{tt}u(x, t) - \partial_{xx}u(x, t) = X(x)T''(t) - X''(x)T(t).$$

Durch Umstellen der Terme erhält man

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \text{für alle } 0 < x < 1 \text{ und } t > 0,$$

wobei wir formal annehmen müssen, dass die Nenner nicht verschwinden. Die linke Seite hängt nur von t und die rechte Seite nur von x ab; beide Terme müssen also konstant sein. Aus der Randbedingung $u(0, t) = u(1, t) = 0$ für alle t kann man weiters ableiten, dass

$$X(0) = X(1) = 0;$$

andernfalls müsste $T(t) \equiv 0$ sein, was zur trivialen Lösung $u(x, t) \equiv 0$ führen würde. Man erhält also zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x), & 0 < x < 1 & \quad \text{mit} \quad X(0) = X(1) = 0, \\ T''(t) &= \lambda T(t), & t > 0, & \end{aligned}$$

die über den gemeinsamen Parameter λ gekoppelt sind. Die erste Gleichung ist ein Randwertproblem und besitzt nur für

$$\lambda_n = -n^2\pi^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

nichttriviale Lösungen. Diese sind gegeben durch

$$X_n(x) = c_n \sin(n\pi x), \quad c_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N};$$

siehe Übung. Die zugehörigen Lösungen der zweiten Gleichung lauten dann

$$T_n(t) = a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungen zu (4.1)–(4.2) in Produktform (4.3) lauten also

$$u_n(x, t) = [a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)] \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N},$$

mit noch frei wählbaren Parametern $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

4.3 Superposition

Wir zeigen im Folgenden, dass sich die jede klassische Lösung von (4.1)–(4.2) einfach durch Linearkombination von Grundlösungen konstruieren lässt.

Beispiel 4.4. Als Ansatz für die Lösung $u(x, t)$ von (4.1)–(4.2) verwenden wir eine Superposition der Grundlösungen, also

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)] \sin(n\pi x). \quad (4.4)$$

Falls die Reihe geeignet konvergiert, folgt durch gliedweises Differenzieren, dass $u(x, t)$ eine Lösung zum Problem (4.1)–(4.2); vgl Bemerkung 1.8. Wie wir später noch sehen werden, gibt es auch keine weiteren Lösungen.

Satz 4.5. Seien a_n, b_n für $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben mit $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n| < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n| < \infty$. Dann ist (4.4) eine klassische Lösung zu (4.1)–(4.2).

BEWEIS. Wir setzen $u_n(x, t) = [a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)] \sin(n\pi x)$ und bezeichnen mit $u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N u_n(x, t)$ die endliche Summe. Dann gilt

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u_N(x, t)| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)| |\sin(n\pi x)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \rightarrow 0 \quad \text{mit } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Die Funktionenreihe u_N konvergiert also gleichmäßig in x und t gegen die folglich stetige Grenzfunktion u ; vgl. VL Mathematik MB. Nach gliedweisem Differenzieren sieht man, dass auch die Ableitungen $(\partial_x)^j (\partial_t)^k u_N$ für $0 \leq j + k \leq 2$ gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion konvergieren. Insbesondere sind Differenzieren und Summation hier vertauschbar und der Grenzwert lautet daher $(\partial_x)^j (\partial_t)^k u$. Somit ist u zweimal stetig differenzierbar. Weiters ist jedes Reihenglied nach Konstruktion eine Lösung der Wellengleichung und der Randbedingungen. Daher gilt

$$\partial_{tt}u(x, t) - \partial_{xx}u(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \partial_{tt}u_N(x, t) - \partial_{xx}u_N(x, t) = 0.$$

Somit ist u Lösung von (4.1). Weiters ist $u(r, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(r, t) = 0$ für $r = 0$ und $r = 1$. Somit sind auch die Randbedingungen (4.2) erfüllt. \square

Bemerkung. Der Satz belegt, dass unter recht allgemeinen allgemeinen Annahmen auch unendliche Linearkombinationen von Lösungen zu linearen homogenen Differentialgleichungen wieder eine Lösung ergeben; vergleiche hierzu auch Bemerkung 1.8.

4.4 Lösung des Anfangs-Randwertproblems

Beispiel 4.6. Zur Bestimmung der Koeffizienten a_n, b_n in der Reihendarstellung (4.4) sind wieder zusätzliche Bedingungen nötig. Zur Festlegung der zwei Parameterfolgen verwenden wir zwei Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = g(x) \quad \text{und} \quad \partial_t u(x, 0) = h(x), \quad 0 < x < 1. \quad (4.5)$$

Durch formales Einsetzen in die Reihendarstellung (4.4) erhält man hier

$$\begin{aligned} g(x) = u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) \\ h(x) = \partial_t u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \sin(n\pi x). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_n und b_n in diesen Fourierreihen lassen sich mit Hilfe des folgenden Satzes bestimmen; vgl. VL Mathematik MB.

Satz 4.7. Die Funktionen $\{u_n(x) := \sin(n\pi x), n \in \mathbb{N}\}$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem für die Menge $C_{pw}[0, 1]$ der stückweise stetigen und beschränkten Funktionen auf $[0, 1]$. Genauer

- (i) Es gilt $(u_n, u_m) := \int_0^1 u_n(x)u_m(x)dx = \frac{1}{2}\delta_{nm}$, d.h., die Funktionen $u_n(x) = \sin(n\pi x)$ sind paarweise orthogonal im Skalarprodukt (\cdot, \cdot) .
- (ii) Jede stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $u \in C[0, 1]$ mit $\partial_x u \in C_{pw}[0, 1]$ und $u(0) = u(1) = 0$ lässt sich darstellen als

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x).$$

Die Fourierreihe konvergiert hier sogar gleichmäßig und die Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$c_n = 2(u, u_n) = 2 \int_0^1 u(x) \sin(n\pi x) dx.$$

- (iii) Die Fourierkoeffizienten lassen sich auch für $u \in C_{pw}[0, 1]$ berechnen. Die Reihe konvergiert dann zumindest im quadratischen Mittel.

Für einen detaillierten Beweis der Aussagen verweisen wir auf die Bücher von Strauß: Partielle Differentialgleichungen und von Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Bemerkung 4.8. Wir werden weiter unten noch sehen, dass es viele Möglichkeiten gibt, vollständige Orthogonalsysteme $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ und entsprechende Fourierreihen zu definieren. Zum Beispiel bilden auch die Funktionen $\{1, \cos(2n\pi x), \sin(2n\pi x) : n \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthogonalsystem von $C_{pw}[0, 1]$; vgl. hierzu die Resultate aus der VL Mathematik MB. Die Grundlösungen, und im Falle gleichmäßiger Konvergenz auch entsprechend Reihen, erfüllen hier periodische Randbedingungen.

Beispiel 4.9. Wir betrachten die Funktion $u(x) \equiv 1$ auf $[0, 1]$. Diese ist stetig und lässt sich somit darstellen als Fourierreihe

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \quad u_n(x) = \sin(n\pi x),$$

wobei hier die Fourierkoeffizienten gegeben sind durch

$$\begin{aligned} c_n &= 2 \int_0^1 1 \cdot \sin(n\pi x) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1]. \end{aligned}$$

Also erhält man die Fourierreihenentwicklung $1 = \sum_{n=2k+1} \frac{4}{n\pi} \sin(n\pi x)$.

Achtung: Gleichheit kann für $x = 0$ und $x = 1$ hier sicher nicht gelten! Es liegt also keine gleichmäßige Konvergenz sondern nur Konvergenz im quadratischen Mittel vor.

Beispiel 4.10. Die Funktion $u(x) = x(1 - x)$ lässt sich als Fourierreihe

$$x(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \quad u_n(x) = \sin(n\pi x)$$

schreiben mit Fourierkoeffizienten

$$c_n = 2 \int_0^1 x(1 - x) \cdot \sin(n\pi x) dx = \frac{4}{n^3 \pi^3} [(-1)^{n+1} + 1].$$

Da die Koeffizienten schnell fallen, konvergiert die Reihe hier gleichmäßig.

Zusammenfassend lässt sich nun folgende Aussage zeigen.

Satz 4.11. Sei $g \in C^{2,\alpha}[0, 1]$ mit $g(0) = g(1) = 0$ und $h \in C^{1,\alpha}[a, b]$. Dann hat das Anfangs-Randwertproblem (4.1)–(4.2) und (4.5) eine eindeutige klassische Lösung, die sich in Form der Fourierreihe (4.4) darstellen lässt.

Man beachte die zusätzlichen **Kompatibilitätsbedingungen** an die Anfangswerte g , die notwendig sind, um eine klassische Lösung erhalten zu können. Zum Abschluss machen wir noch zwei allgemeine Bemerkungen.

Bemerkung 4.12 (Wohlgestelltheit). Jede klassische Lösung der Gleichungen (4.1)–(4.2) und (4.5) erfüllt automatisch die Kompatibilitätsbedingungen an die Anfangswerte g . Diese sind also notwendig für die Existenz einer Lösung, welche mit der Methode der “Trennung der Variablen”

gezeigt wurde. Die Eindeutigkeit der Lösung und die stetige Abhängigkeit von den Daten kann mit Energieabschätzungen nachgewiesen werden; siehe Aufgabe 4.11. Unter den Voraussetzungen des Satzes ist das Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung also wohlgestellt.

Bemerkung 4.13. Die Darstellung über Fourierreihen erlaubt es, Lösungen zur Wellengleichung auch unter geringeren Regularitätsannahmen an die Anfangswerte zu konstruieren. Sind z.B. u_0 und u_1 stückweise stetig, dann konvergiert die Fourierreihe (4.4) immer noch im quadratischen Mittel. Die so erhaltene eindeutige Funktion u kann als verallgemeinerte Lösung zum Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung betrachtet werden; vergleiche hierzu auch die Überlegungen in Abschnitt 13.

4.5 Sturm-Liouville Probleme und Fourierreihen*

Wir skizzieren kurz, dass das oben beschriebene Vorgehen für recht allgemeinere Probleme anwendbar ist. Hierzu wiederholen wir zunächst einige Aussagen zu Sturm-Liouville Problemen.

Definition 4.14. Ein Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} -\partial_x(p(x)\partial_x u(x)) + q(x)u(x) &= \lambda r(x)u(x), & a < x < b, \\ \alpha_0 u(a) - \alpha_1 \partial_x u(a) &= 0, \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 \partial_x u(b) &= 0, \end{aligned}$$

mit $p \in C^1[a, b]$, $q, r \in C[a, b]$ mit $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ und $q(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ sowie $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ und $\alpha_0 + \alpha_1 > 0$ sowie $\beta_0 + \beta_1 > 0$ heißt ein **reguläres Sturm-Liouville'sches Eigenwertproblem**. Jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, für das eine nichttriviale Lösung u existiert, heißt ein **Eigenwert** und u eine zugehörige **Eigenfunktion** zum Sturm-Liouville Problem.

Satz 4.15. Ein reguläres Sturm-Liouville'sches Eigenwertproblem besitzt abzählbar viele Eigenwerte λ_n , $n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty.$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen u_n können so normiert werden, dass

$$\|u_n\|_r^2 := \int_a^b r(x)|u_n(x)|^2 dx = 1.$$

Mit dieser Normierung gilt also

$$(u_m, u_n)_r := \int_a^b u_m(x)u_n(x)r(x)dx = \delta_{m,n}.$$

Die Eigenfunktionen zu unterschiedlichen Eigenwerten stehen also orthogonal aufeinander im Skalarprodukt mit Gewichtsfunktion r .

BEWEIS. siehe Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen. \square

Beispiel 4.16. Das Randwertproblem aus Beispiel 4.3 lässt sich nach Änderung eines Vorzeichens schreiben als

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad 0 < x < 1, \quad X(0) = X(1) = 0.$$

Es handelt sich um ein reguläres Sturm-Liouville Eigenwertproblem mit $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ und $r \equiv 1$ sowie $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ und $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Die Eigenwerte lauten $\lambda_n = n^2\pi^2$ und Eigenfunktionen sind gegeben durch

$$u_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x).$$

Mit der speziellen Normierung erhält man

$$(u_m, u_n)_r = 2 \int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \delta_{m,n},$$

was man leicht durch direktes Nachrechnen verifiziert; siehe Übung.

Satz 4.17. (i) Die Eigenfunktionen $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zu einem regulären Sturm-Liouville Problem bilden ein vollständiges Orthogonalsystem für die Menge $C_{pw}[a, b]$ der stückweise stetigen Funktionen; genau genommen sogar von den quadratisch integrierbaren Funktionen $L^2(a, b) \supset C_{pw}[a, b]$.

(ii) Jede Funktion $u \in C_{pw}[a, b]$ lässt sich daher darstellen als Fourierreihe

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$$

und die Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$c_n \|u_n\|_r^2 = (u, u_n)_r = \int_a^b u(x)u_n(x)r(x)dx.$$

Besonders einfach wird die Darstellung, wenn mit $\|u_n\|_r = 1$ normiert wurde. Die Fourierreihe konvergiert zumindest im quadratische Mittel, d.h.,

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n u_n(x) \right|^2 r(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Ist $u \in C^1[a, b]$ und erfüllt darüber hinaus die Randbedingungen aus Definition 4.14, dann konvergiert die Reihe sogar absolut und gleichmäßig und somit auch punktweise für alle $x \in [a, b]$.

BEWEIS. Einen detaillierten Beweis findet man in Strauss: Partielle Differentialgleichungen. Wir skizzieren hier nur kurz die Herleitung der Formel für die Fourierkoeffizienten: Durch formale Rechnung erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) u_n(x) r(x) dx &= \left(\sum_m c_m u_m(x), u_n \right)_r \\ &= \sum_m c_m (u_m, u_n)_r = c_n \|u_n\|_r^2. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Orthogonalitätsbeziehung verwendet. Man beachte, dass das Vertauschen der Integration und der Summation hier wegen der quadratischen Konvergenz der Reihe tatsächlich erlaubt ist. \square

Bemerkung 4.18. Die obigen Sätze sind als Verallgemeinerung von entsprechenden Sätzen aus der linearen Algebra zu verstehen: Der Differentialoperator eines regulären Sturm-Liouville Problems ist vergleichbar mit einer symmetrischen, positiv semi-definiten Matrix A . Diese besitzt reelle Eigenwerte $\lambda_n \geq 0$ und Eigenvektoren v_n , welche eine Orthonormalbasis bilden. Jeder Vektor x kann dann geschrieben werden als $x = \sum_n c_n v_n$ mit Koeffizienten $c_n = (x, v_n) = v_n^\top x$; man vergleiche mit Satz 4.7.

4.6 Aufgaben

Aufgabe 4.1. Bestimmen Sie jeweils alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für welche die Gleichung

$$X''(x) = \lambda X(x),$$

mit zusätzlichen Randbedingungen der Form (a) $X(0) = X(1) = 0$;

(b) $X'(0) = X'(1) = 0$; (c) $X(0) = X(1)$ und $X'(0) = X'(1)$;

nichttriviale Lösungen $X(x) \not\equiv 0$ besitzt und berechnen Sie diese.

Aufgabe 4.2. Bestimmen Sie für die Wellengleichung in Beispiel 4.1 mit $\rho_0, k, L > 0$ alle Lösungen in Produktform $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Aufgabe 4.3. Begründen Sie anhand der vorigen Aufgabe:

(a) Bei gleicher Steifigkeit k (\simeq Spannung) klingt eine längere Saite tiefer.

(b) Bei größerer Steifigkeit (\simeq Spannung) klingt die Saite höher.

Aufgabe 4.4. Lösen Sie die gedämpfte Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u + \partial_t u - \partial_{xx}u &= 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 & t > 0 \end{aligned}$$

und geben Sie die allgemeine Lösung in Form einer Fourierreihe an. Begründen Sie anhand des Abklingverhaltens der Lösungskomponenten den Namen “gedämpfte” Wellengleichung.

Aufgabe 4.5. Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen zum Sturm-Liouville Problem

$$\begin{aligned} -\partial_{xx}u + u &= \lambda u, & 0 < x < \pi, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.6. Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen zum Sturm-Liouville Problem

$$\begin{aligned} -\partial_{xx}u &= \lambda u, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1), \quad \partial_x u(0) &= \partial_x u(1). \end{aligned}$$

Aufgabe 4.7. Überprüfen Sie die Orthogonalitätsbeziehung der Eigenfunktionen aus Satz 4.7.

Aufgabe 4.8. Die Funktionen $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mögen ein (nicht notwendigerweise vollständiges) Orthonormalsystem bezüglich Gewichtsfunktion r bilden, d.h. $(u_m, u_n)_r = \delta_{m,n}$. Zeigen Sie, dass für alle $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) \in C_{pw}[a, b]$ die Bessel’sche Ungleichung gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \|u\|_r^2.$$

Falls $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zusätzlich vollständig ist, erhält man die Parseval’sche Gleichung. Formulieren sie diese.

Aufgabe 4.9. (a) Finden Sie geeignete Parameter a_n , um die Funktionen $u_n(x) = a_n \cos(nx)$, $n = 0, 1, \dots$ auf $\int_0^\pi |u_n(x)|^2 dx = 1$ zu normieren.

(b) Überprüfen Sie die Funktionen u_n , $n \in \mathbb{N}$ auf paarweise Orthogonalität.

(c) Berechnen Sie die Fourierreihen der Funktionen (i) $u(x) = 1$; (ii) $u(x) = x$; (iii) $u(x) = \sin(x)$ bzgl. des Orthogonalsystems aus (a)–(b).

(d) Überprüfen Sie die Rechnung aus (c), indem Sie die abgebrochenen Fourierreihen $\sum_{n=0}^N c_n u_n(x)$ plotten; z.B. in Mathematica oder Matlab.

Aufgabe 4.10. (i) Bestimmen Sie mittels Produkt- und Reihenansatz die allgemeine Lösung zu

$$\partial_{tt}u(x, t) = \partial_{xx}u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

mit homogenen Randwerten $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $t > 0$ und Anfangswerten

$$u(x, 0) = g(x), \quad \partial_t u(x, 0) = h(x), \quad 0 < x < \pi.$$

(ii) Berechnen Sie die Lösung mit Anfangswerten

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \sin(2x), \quad 0 < x < \pi.$$

Aufgabe 4.11. Wir betrachten die Wellengleichung

$$\partial_{tt}u(x, t) - \partial_{xx}u(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

mit homogenen Randbedingungen

(a) $u(0, t) = u(1, t) = 0$; oder

(b) $\partial_x u(0, t) = \partial_x u(1, t) = 0$.

Zeigen Sie, dass in beiden Fällen die Energie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u_t(x, t)|^2 + |u_x(x, t)|^2 dx$$

des Problems erhalten bleibt, d.h., $\frac{d}{dt}E(t) = 0$; vgl. Kapitel 3.

Aufgabe 4.12. Zeigen Sie, dass das Anfangs-Randwertproblem

$$\partial_{tt}u(x, t) - \partial_{xx}u(x, t) = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (4.6)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.7)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad \partial_t u(x, 0) = h(x), \quad 0 < x < 1 \quad (4.8)$$

höchstens eine klassische Lösung besitzen kann. Hinweis: Nehmen Sie an, es würden zwei Lösungen existieren, betrachten Sie die Differenz der beiden Lösungen und verwenden Sie die Aussage der vorhergehenden Aufgabe.

5 Wärmeleitung und Diffusion

Wir betrachten in diesem Abschnitt Diffusionsprozesse in einer Raumdimension. Wie schon bei der Wellengleichung diskutieren wir zunächst den Fall eines unbeschränkten Gebietes und leiten eine Darstellung der Lösung mit Hilfe der Fundamentallösung her. Im Anschluss beweisen wir die Eindeutigkeit der Lösung mit einer Energieabschätzung.

5.1 Modellierung

Beispiel 5.1. Wir betrachten ein unendlich langes Rohr mit konstantem Querschnitt A , welches mit Wasser gefüllt ist. Darin gelöst befindet sich ein Schadstoff mit Konzentration $u(x, t)$. Wie in Kapitel 2 erhalten wir aus dem Erhaltungsprinzip für die Stoffmenge, dass die Änderung der Stoffmenge im Rohrstück $[a, b]$ gleich dem Fluss über den Rand des Rohrstückes entspricht, also

$$\frac{d}{dt} \int_a^b Au(x, t) dx = A [q(a, t) - q(b, t)],$$

wobei $q(x, t)$ der Stoffmengenfluss bezeichnet. Selbst in einer ruhenden Flüssigkeit bewegen sich die Schadstoffteilchen aufgrund thermischer Fluktuationen. Aus experimentellen Beobachtungen erhält man das **Fick'sche Gesetz**

$$q(x, t) = -D\partial_x u(x, t)$$

mit Diffusionsparameter D . Die Teilchen diffundieren also stets von hoher zu niedriger Konzentration, und zwar proportional zur Konzentrationsdifferenz. Einsetzen in obige Bilanzgleichung liefert

$$\int_a^b \partial_t u(x, t) dx = \kappa \partial_x u(b, t) - D \partial_x u(a, t) = \int_a^b \partial_x (D \partial_x u(x, t)) dx.$$

Diese Integralbilanz gilt wieder für jede Wahl von a und b , woraus wir mit denselben Argumenten wie in Kapitel 2 die **Diffusionsgleichung**

$$\partial_t u = \partial_x (D \partial_x u)$$

erhalten. Diese beschreibt die Diffusion eines Stoffes in einem ruhenden homogenen Medium aufgrund von thermischen Fluktuationen.

Beispiel 5.2. Die Änderung der thermischen Energie in einem Stab mit konstantem Querschnitt lässt sich ganz ähnlich beschreiben durch

$$c \partial_t T(x, t) = \partial_x (\kappa \partial_x T(x, t)).$$

Hier ist $c = c_v \rho$ die Wärmekapazität und κ der Wärmeleitkoeffizient; vgl. Kapitel 7. Die Herleitung erfolgt wie bei der Diffusionsgleichung über Integralbilanzen; siehe Übung. Der Zusammenhang zwischen Wärmefluss und Temperatur $q(x, t) = -\kappa \partial_x T(x, t)$ heißt hier **Fourier'sches Gesetz**.

Bemerkung 5.3. Die Gleichung $\partial_t u = \partial_{xx} u$, welche man erhält, wenn man in obigen Problemen alle Modellparameter auf eins setzt, wird als eindimensionale **Wärmeleitungs-** oder **Diffusionsgleichung** bezeichnet. Wir verwenden den Begriff aber auch für etwas allgemeinere Gleichungen.

5.2 Fundamentallösung

Wir betrachten im Folgenden zunächst das Anfangswertproblem

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

für die Wärmeleitungsgleichung auf der ganzen reellen Achse und fassen einige elementare Eigenschaften von Lösungen zusammen.

Satz 5.4 (Invarianzeigenschaften). Sei $u = u(x, t)$ eine klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R} . Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $v(x, t) = u(x+a, t)$ und $v(x, t) = u(x, t+a)$ ebenfalls Lösung;
- (ii) Jede Streckung $v(x, t) = u(\sqrt{a}x, at)$ für $a > 0$ ist ebenso eine Lösung;

- (iii) Jede Linearkombination von Lösungen ist eine Lösung;
- (iv) Für jedes $f \in C(\mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ für $|x| > R$ ist die Faltung

$$v(x, t) = (u * f)(x, t) := \int_{\mathbb{R}} u(x - y, t) f(y) dy$$

eine Lösung zur Wärmeleitungsgleichung.

BEWEIS. Der Beweis ergibt sich durch Nachrechnen; siehe Übung. Bei (iv) darf Integration und Differentiation vertauscht werden! Es handelt sich auch dabei um eine Superposition von Lösungen; siehe Satz 5.5. \square

Die folgende spezielle Lösung der Wärmeleitungsgleichung wird uns erlauben, die allgemeine Lösung wieder durch Superposition darzustellen.

Satz 5.5. Die Funktion

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad t > 0$$

heißt **Fundamentallösung** der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ oder auch **Wärmeleitungskern**. Sie besitzt folgende Eigenschaften:

- (i) $\phi(x, t)$ erfüllt die Gleichung (5.1) für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$.
- (ii) Es gilt $\int_{\mathbb{R}} \phi(x, t) dx = 1$ für alle $t > 0$.
- (iii) Sei $u_0 \in C(\mathbb{R})$ mit $|u_0(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x - y, t) u_0(y) dy \quad (5.3)$$

Lösung zur Wärmeleitungsgleichung (5.1) und es gilt

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = u_0(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Somit ist u klassische Lösung zum Anfangswertproblem (5.1)–(5.2).

BEWEIS. (i) folgt durch Nachrechnen und (ii) mit Substitution und Integraltabelle; siehe Übung. Das Integral (5.3) hängt von den Parametern x und t ab. Aufgrund der Stetigkeit und Beschränktheit von u_0 und der Glatttheit von ϕ darf hier das Differenzieren nach x und t und die Integration bezüglich y vertauscht werden. Man erhält also

$$\partial_t u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} [\partial_t \phi(x - y, t) - \partial_{xx} \phi(x - y, t)] u_0(y) dy = 0.$$

Wegen (i) und Satz 5.4(i) erfüllt die Funktion u aus (5.3) die Wärmeleitungsgleichung. Wir überprüfen nun noch die Anfangsbedingung. Hierzu wählen wir $\delta > 0$ so, dass $|u_0(y) - u_0(x_0)| < \epsilon$ für alle $|y - x_0| < \delta$. Dann gilt wegen (ii) und (5.3)

$$\begin{aligned} u(x, t) - u_0(x_0) &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x - y, t) |u_0(y) - u_0(x_0)| dy \\ &= \int_{|y-x_0| < \delta} (*) dy + \int_{|y-x_0| > \delta} (*) dy = (i) + (ii). \end{aligned}$$

Das erste Integral kann nach Voraussetzung mit Hilfe von (ii) für alle $t > 0$ durch ϵ abgeschätzt werden. Das zweite Integral lässt sich aufgrund der Schranke an die Anfangswerte abschätzen durch

$$(ii) \leq 2C \int_{|y-x_0| > \delta} \phi(x - y, t) dy.$$

Falls $|x - x_0| < \delta/2$, können wir mit Substitution weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned} (ii) &\leq 2C \int_{|y-x| > \delta/2} \phi(x - y, t) dy && : y = x + z\sqrt{4t} \\ &= 2C \int_{|z| > \delta/(4\sqrt{t})} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-z^2} \sqrt{4t} dz \rightarrow 0 && \text{mit } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Hiermit ist auch die Gültigkeit der Anfangsbedingung nachgewiesen. \square

Somit ist die Wärmeleitungsgleichung (5.1) für vernünftige Anfangswerte u_0 lösbar. Die Eindeutigkeit der Lösung kann wieder mit Hilfe einer Energieabschätzung nachgewiesen werden; siehe Abschnitt 5.4.

Bemerkung 5.6. Aus der Darstellung (5.3) und den Eigenschaften der Fundamentallösung sieht man sofort, dass die Lösung $u(x, t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ unendlich oft differenzierbar ist. Weiters folgt $u(x, t) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$, falls $u_0(x) \geq 0$ und $u_0(\bar{x}) > 0$ für ein $\bar{x} \in \mathbb{R}$, und somit auf einem kleinen Intervall $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$. Im Gegensatz zur Wellengleichung breitet sich die Information durch Diffusion also beliebig schnell aus!

5.3 Duhamel Prinzip

Wir betrachten als nächstes noch die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Anfangsbedingungen, also

$$\partial_t u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) = f(x, t) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (5.4)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Hier lässt sich die Lösung als Integral über elementare Lösungen angeben. Hilfreich ist folgende Verallgemeinerung der Variation-der-Konstanten Formel, die für gewöhnliche Differentialgleichungen bekannt ist; vgl. Aufgabe 5.5.

Satz 5.7 (Duhamel-Prinzip). Sei $f(x, t)$ stetig und beschränkt und sei weiters $u^s(x, t)$ für jedes $s > 0$ Lösung zum Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u^s(x, t) - \partial_{xx} u^s(x, t) &= 0 & x \in \mathbb{R}, t > s, \\ u^s(x, s) &= f(x, s) & x \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

man beachte den speziellen Anfangszeitpunkt. Dann ist die Funktion

$$u(x, t) = \int_0^t u^s(x, t) ds \quad (5.6)$$

Lösung zum inhomogenen Anfangswertproblem (5.4)–(5.5).

BEWEIS. Wir präsentieren nur das formale Argument: Für $t = 0$ erhält man sofort $u(x, 0) = 0$. Durch Differenzieren der Lösungsdarstellung (5.6) nach t sieht man weiters, dass

$$\partial_t u(x, t) = u^t(x, t) + \int_0^t \partial_t u^s(x, t) ds;$$

vgl. Aufgabe 2.2. Ebenso zeigt man

$$\partial_{xx} u(x, t) = \int_0^t \partial_{xx} u^s(x, t) ds.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen und Einsetzen der bestimmenden Gleichungen für $u^s(x, t)$ führt unmittelbar auf die Behauptung. \square

Mit Hilfe der vorhergehenden Ergebnisse sieht man nun Folgendes.

Bemerkung 5.8. Mit Hilfe der Fundamentallösung ϕ lässt sich die Lösung zum inhomogenen Problem (5.4)–(5.5) also darstellen als

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(x - y, t - s) f(y, s) ds dy.$$

Unter Ausnutzung der Linearität, vgl. Bemerkung 1.8, kann man eine entsprechende Lösungsformel für das Anfangswertproblem mit inhomogener rechter Seite f und inhomogenen Anfangswerten u_0 herleiten; siehe Übung.

Das Duhamelprinzip lässt sich wörtlich auch für Probleme auf beschränkten Gebieten anwenden. Dies sieht man in folgendem Beispiel.

Beispiel 5.9. Gesucht ist eine Lösung zur inhomogenen Gleichung

$$\partial_t u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

mit Randwerten

$$\partial_x u(0, t) = \partial_x u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

Wir wollen das Duhamelprinzip verwenden und suchen daher zunächst nach Lösungen $u^s(x, t)$ zum Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u^s(x, t) - \partial_{xx} u^s(x, t) &= 0, & 0 < x < 1, \quad t > s, \\ \partial_x u^s(0, t) = \partial_x u^s(1, t) &= 0, & t > s, \\ u^s(x, s) &= 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Mit Trennung der Variablen erhält man die allgemeine Lösung

$$u^s(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\pi x) e^{-n^2\pi^2(t-s)}.$$

Durch Einsetzen in die Anfangsbedingung folgt weiters

$$1 = u^s(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\pi x).$$

Mit einfacher Rechnung erhält man hieraus $c_0 = 1$ und $c_n = 0$ für $n \geq 1$. Die Lösung zu den Hilfsproblemen lautet also $u^s(x, t) = 1$. Durch Aufintegration bezüglich s erhält man dann

$$u(x, t) = \int_0^t u^s(x, t) ds = \int_0^t 1 ds = t.$$

Durch Nachrechnen überprüft man leicht, dass dies tatsächlich eine Lösung zum inhomogenen Problem ist. Außerdem gilt sogar $u(x, 0) \equiv 0$.

5.4 Eindeutigkeit der Lösung

Die Eindeutigkeit der Lösung zur Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R} kann man unter anderem mit Hilfe einer Energieabschätzung nachweisen.

Satz 5.10. Sei $u(x, t)$ klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

mit $|u(x, t)| + |\partial_x u(x, t)| + |\partial_{xx} u(x, t)| \leq C(t)/(1 + |x|)$ für $t \geq 0$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x, s)|^2 dx \quad \text{für alle } t \geq s \geq 0.$$

Für Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung nimmt also der Ausdruck $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx$ mit der Zeit beständig ab.

BEWEIS. Mit formaler Rechnung folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(x, t) u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_{xx} u(x, t) u(x, t) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(x, t)|^2 dx + [\partial_x u(x, t) u(x, t)]|_{x=-\infty}^{\infty}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Glattheit und Schranken an die Lösung existieren die uneigentlichen Integrale, alle Schritte sind wohldefiniert und der Randterm im letzten Ausdruck verschwindet. Man erhält also $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx \leq 0$, woraus die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 5.11. Unter Ausnutzung der Linearität folgt weiters, dass das Anfangswertproblem für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}\partial_t u - \partial_{xx} u &= f, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

höchstens eine hinreichend schnell abfallende Lösung mit entsprechend abfallenden Ableitungen haben kann; siehe Übung.

5.5 Aufgaben

Aufgabe 5.1. Die gesamte Wärmemenge in einem Stabstück mit Querschnitt A ist gegeben durch $Q(t) = A \int_a^b cT(x, t)dx$. Leiten Sie eine Integralbilanz für die Wärmeänderung $\frac{d}{dt}Q(t)$ und die entsprechende Differentialgleichung her; vgl Beispiel 5.1 und 5.2.

Aufgabe 5.2. Überprüfen Sie die Aussagen aus Satz 5.4.

Aufgabe 5.3. Zeigen Sie die Aussagen aus Satz 5.5 Punkt (i)–(ii).

Aufgabe 5.4. Stellen Sie mit Hilfe der Fundamentallösung ϕ die Lösung zum Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\partial_t u - \partial_{xx} u &= f & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

mit stetigen und beschränkten Funktionen f und u_0 dar; vgl. Bem. 5.6.

Aufgabe 5.5. (i) Finden Sie die Lösung ϕ zum Anfangswertproblem

$$\phi'(t) + a(t)\phi(t) = 0, \quad \phi(0) = 1.$$

(ii) Stellen Sie mit Hilfe von ϕ die Lösung zum Problem

$$u'(t) + a(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u_0$$

dar und vergleichen Sie mit der Formel aus der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 5.6. Begründen Sie mit Hilfe der Lösungsdarstellung aus Aufgabe 5.4, dass aus $f(x, t) \geq 0$ und $u_0(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ auch $u(x, t) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ folgt (=Positivitätsprinzip).

Erklären Sie diesen Zusammenhang im Kontext der Wärmeleitung.

Aufgabe 5.7. Sei u klassische Lösung zur Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Zeigen Sie: falls die folgenden Integrale existieren, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x, s) dx, \quad s, t \geq 0.$$

Die gesamte Wärmemenge bleibt also auf ewig erhalten!

Aufgabe 5.8. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$c\partial_t u - \kappa\partial_{xx} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (*)$$

mit gegebenen konstanten Parametern $c, \kappa > 0$.

(i) Transformieren Sie das Problem mittels Substitution $v(t, x) = u(at, bx)$ mit geeigneten $a, b > 0$ auf die kanonische Form $\partial_t v - \partial_{xx} v = 0$.

(ii) Ermitteln Sie mit Hilfe von (i) die Fundamentallösung ψ für (*). Diese soll insbesondere die Eigenschaften (i)–(ii) von Satz 5.5 erfüllen.

Aufgabe 5.9. Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ mit vorgegebenen Anfangswerten

$$u(x) = 1 \quad \text{für } |x| < l \quad \text{und} \quad u(x) = 0 \quad \text{sonst.}$$

Schreiben Sie die Lösung mit Hilfe der Funktion $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(x, 1) dx$ auf. Hinweis: Im letzten Schritt Substitution anwenden.

Aufgabe 5.10. Beweisen Sie die Aussage aus Bemerkung 5.11.

6 Rund um das Maximumsprinzip

Wir zeigen jetzt, wie sich Eigenschaften der Lösung zur Wärmeleitungsgleichung herleiten lassen, ohne die Lösung explizit zu kennen. Insbesondere kann man auf Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung auf beschränkten Gebieten schließen. Im Anschluss skizzieren wir noch, wie sich für diesen Fall die Lösung mit Hilfe der “Trennung der Variablen” berechnen lässt.

6.1 Maximumprinzip

Beispiel 6.1. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = 0, \quad x \in (a, b), \quad t > 0,$$

auf einem beschränktem Gebiet (a, b) . Weiters definieren wir den Raum-Zeit-Zylinder Q_T und den parabolischen Rand Σ_T mittels

$$Q_T = \{(x, t) : a \leq x \leq b, \quad t_0 \leq t \leq T\} \quad \text{und} \\ \Sigma_T = \{(x, 0) : a \leq x \leq b\} \cup \{(a, t) : t_0 \leq t \leq T\} \cup \{(b, t) : t_0 \leq t \leq T\}.$$

Zur Veranschaulichung mache man sich eine kleine Skizze.

Ohne die Lösung wirklich zu kennen, kann man bereits qualitative Eigenschaften von Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung angeben.

Satz 6.2 (Maximumprinzip).

Sei u klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf Q_T . Dann gilt

$$\max_{(x,t) \in Q_T} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \Sigma_T} u(x, t) \quad \text{und} \quad \min_{(x,t) \in Q_T} u(x, t) = \min_{(x,t) \in \Sigma_T} u(x, t).$$

Sowohl Maximum als auch Minimum der Lösung auf Q_T werden also stets auf dem parabolischen Rand Σ_T angenommen. Genau da werden wir später weitere Anfangs- und Randbedingungen stellen.

BEWEIS. Wir zeigen nur die erste Aussage. Wir nehmen im Gegensatz zur Behauptung an, es gäbe einen Punkt $(\bar{x}, \bar{t}) \in Q_T \setminus \Sigma_T$ mit

$$u(\bar{x}, \bar{t}) > \max_{(x,t) \in \Sigma_T} u(x, t). \quad (\text{A})$$

Da Σ_T abgeschlossen und beschränkt ist, und somit kompakt, wird das Maximum der stetigen Funktion u auf der rechten Seite angenommen. Daher existiert ein $\epsilon > 0$, sodass

$$u(\bar{x}, \bar{t}) \geq \max_{(x,t) \in \Sigma_T} u(x, t) + \epsilon.$$

Wir betrachten die Funktion $u^\alpha(x, t) = u(x, t) + \alpha(x - \bar{x})^2$. Diese erfüllt

$$\partial_t u^\alpha - \partial_{xx} u^\alpha = -2\alpha < 0. \quad (6.1)$$

Weiters sieht man leicht, dass für $0 < \alpha \ll 1$ auch u^α sein Maximum an einer Stelle $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in Q_T \setminus \Sigma_T$ annimmt. Es gilt dann

$$\partial_x u^\alpha(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0, \quad \partial_{xx} u^\alpha(\tilde{x}, \tilde{t}) \leq 0 \quad \text{und} \quad \partial_t u^\alpha(\tilde{x}, \tilde{t}) \geq 0.$$

Hieraus folgt $\partial_t u^\alpha(\tilde{x}, \tilde{t}) - \partial_{xx} u^\alpha(\tilde{x}, \tilde{t}) \geq 0$, was im Widerspruch zur Ungleichung (6.1) steht. Somit muss die Annahme (A) falsch sein und folglich wird das Maximum am Rand Σ_T angenommen. Die Aussage über das Minimum folgt analog; siehe Übung. \square

Bemerkung 6.3. Die Aussage der obigen Sätze lässt sich leicht im Kontext der Wärmeleitung interpretieren: Nach dem Fourier'schen Gesetz fließt ja Wärme stets von hoher zu niedriger Temperatur. Das Temperaturmaximum muss also zum Anfangszeitpunkt oder am Rand des Rechengebietes angenommen werden; siehe Übung.

6.2 Eindeutigkeit und Stabilität

Aus dem Maximumprinzip kann man schon erahnen, dass zur eindeutigen Bestimmung der Lösung neben der Wärmeleitungsgleichung noch weitere Bedingungen entlang des parabolischen Randes Σ_T benötigt werden.

Beispiel 6.4. Wir betrachten das inhomogene Anfangs-Randwertproblem

$$\partial_t u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) = f(x, t), \quad a < x < b, \quad t > t_0, \quad (6.2)$$

$$u(a, t) = g_a(t), \quad u(b, t) = g_b(t), \quad t > t_0, \quad (6.3)$$

$$u(x, t_0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (6.4)$$

mit geeigneten vorgegebenen Funktionen f, g_a, g_b, u_0 . Der Einfachheit halber fassen wir im Folgenden $g = (g_a, g_b)$ zu einer Funktion zusammen.

Bemerkung 6.5. Mit Hilfe des Maximumprinzips lässt sich zeigen, dass

$$\begin{aligned} f \leq 0, \quad g \leq 0, \quad u_0 \leq 0 &\implies u \leq 0, \\ f \geq 0, \quad g \geq 0, \quad u_0 \geq 0 &\implies u \geq 0; \end{aligned}$$

siehe Übung. Man spricht von Positivitäts- bzw. Negativitätsprinzip. Die Beziehungen kann man sich im Kontext der Wärmeleitungsgleichung wieder leicht physikalisch veranschaulichen.

Satz 6.6 (Eindeutigkeit). Für gegebene Funktionen f, g, u_0 besitzt das Anfangs-Randwertproblem (6.2)–(6.3) höchstens eine klassische Lösung.

BEWEIS. Angenommen, es gäbe zwei Lösungen u^1 und u^2 . Dann ist die Differenz $w = u^1 - u^2$ Lösung des entsprechenden homogenen Problems (mit $f \equiv 0, g \equiv 0$ und $u_0 \equiv 0$). Mit Bemerkung 6.5 folgt $\max_{(x,t) \in Q_T} w(x, t) = \min_{(x,t) \in Q_T} w(x, t) = 0$. Somit stimmen die beiden Lösungen überein. \square

Mit einem ähnlichen Argument zeigt man, dass die Lösung u zu obigem Problem stetig von den Daten f, g und u_0 abhängt.

Satz 6.7 (Stabilität, a-priori Abschätzung).

Sei u eine klassische Lösung von (6.2)–(6.4) auf Q_T . Dann gilt

$$\|u\|_{\infty; Q_T} \leq C \left(\|f\|_{\infty; Q_T} + \|g\|_{\infty; \{a,b\} \times [0, T]} + \|u_0\|_{\infty; [a,b]} \right).$$

Hierbei bezeichnet $\|v\|_{\infty; S} = \sup_{z \in S} |v(z)|$ jeweils die Maximumsnorm; diese wird auch Supremumsnorm genannt.

BEWEIS. Man betrachtet die Funktion $w(x, t) = u(x, t) + \alpha x^2 + \beta$.

$$\partial_t w - \partial_{xx} w = \partial_t u - \partial_{xx} u - 2\alpha = f - 2\alpha =: \tilde{f}.$$

Für $\alpha = \|f\|_\infty/2$ ist $\tilde{f} \leq 0$. Weiter gilt dann

$$w(x, t) = u(x, t) + \|f\|_\infty/2x^2 + \beta.$$

Für $\beta = -\|g\|_\infty - \|u_0\|_\infty - \max\{|a|^2, |b|^2\}\|f\|_\infty/2$ ist $w(x, t) \leq 0$ auf dem parabolischen Rand Σ_T . Mit Bemerkung 6.5 folgt somit $w(x, t) \leq 0$ auf dem ganzen Gebiet Q_T und daher

$$u(x, t) = w(x, t) - \alpha x^2 - \beta \leq -\beta \leq C(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|u_0\|_\infty)$$

mit $C = \max\{|a|^2, |b|^2, 1\}$ für $(x, t) \in Q_T$. In ähnlicher Weise zeigt man

$$u(x, t) \geq -C(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|u_0\|_\infty).$$

Die Behauptung folgt dann direkt aus den beiden Ungleichungen. \square

Bemerkung 6.8. (i) Für zwei Lösungen u^1, u^2 mit rechten Seiten f^1, f^2 , Randwerten g^1, g^2 und Anfangswerten u_0^1, u_0^2 folgt hieraus sofort

$$\begin{aligned} \|u^1 - u^2\|_{\infty; Q_T} \leq C & \left(\|f^1 - f^2\|_{\infty; Q_T} \right. \\ & \left. + \|g^1 - g^2\|_{\infty; \{a,b\} \times [0,T]} + \|u_0^1 - u_0^2\|_{\infty; [a,b]} \right). \end{aligned}$$

Die Lösung hängt also stetig (stabil) von den Daten ab; siehe Übung.

(ii) Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung zu (6.2)–(6.4) lässt sich auch wieder über eine Energieabschätzung nachweisen; siehe Übung.

6.3 Konstruktion der Lösung

Zum Abschluss skizzieren wir noch, wie sich die Lösung zur Wärmeleitungsgleichung mit gegebenen Anfangs- und Randbedingungen mit bereits bekannten Methoden schrittweise konstruieren lässt. Wir veranschaulichen das prinzipielle Vorgehen anhand eines einfachen Beispiels.

Beispiel 6.9. Gesucht ist die Lösung zu

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx} u &= 1, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ \partial_x u(0, t) &= \partial_x u(1, t) = 1, & t > 0, \\ u(x, 0) &= x + \cos(\pi x), & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Schritt 1. Die Funktion $g(x, t) = x$ erfüllt $\partial_x g(0, t) = \partial_x g(1, t) = 1$. Sie kann also zur ‘‘Homogenisierung der Randbedingungen’’ verwendet werden. Die verbleibende Funktion $v(x, t) = u(x, t) - g(x, t) = u(x, t) - x$ erfüllt

$$\begin{aligned}\partial_t v - \partial_{xx} v &= 1, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \partial_x v(0, t) = \partial_x v(1, t) &= 0, & t > 0, \\ v(x, 0) &= \cos(\pi x), & 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

Wir zerlegen im Folgenden die Funktion v noch mittels $v = v_h + v_p$ in eine spezielle Lösung v_p der inhomogenen Gleichung und die Lösung v_h mit homogener rechter Seite.

Schritt 2. Mit Trennung der Variablen lässt sich die allgemeine Lösung zur homogenen Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_t v - \partial_{xx} v &= 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \partial_x v(0, t) = \partial_x v(1, t) &= 0, & t > 0,\end{aligned}$$

in Form einer Fourierreihe

$$v_h(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}.$$

angeben. Durch Einsetzen in die Anfangsbedingung

$$v(x, 0) = \cos(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

und Koeffizientenvergleich folgt, $c_1 = 1$ und $c_n = 0$ sonst. Die Lösung lautet hier also $v_h(x, t) = \cos(\pi x) e^{-\pi^2 t}$.

Schritt 3. Die Lösung v_p zum inhomogenen Problem

$$\begin{aligned}\partial_t v - \partial_{xx} v &= 1, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \partial_x v(0, t) = \partial_x v(1, t) &= 0, & t > 0, \\ v(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq 1,\end{aligned}$$

lässt sich nun mit dem Duhamel Prinzip bestimmen; siehe Bsp. 5.9. Es gilt

$$v_p(x, t) = \int_0^t v_p(x, t; s) ds$$

wobei hier $v_p(x, t; s)$ für $0 \leq s \leq t$ als die Lösung zu

$$\begin{aligned} \partial_t v - \partial_{xx} v &= 0, & 0 < x < 1, \quad t > s \\ \partial_x v(0, t) = \partial_x v(1, t) &= 0, & t > s, \\ v(x, s) &= 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

definiert ist. Man sieht sofort, dass $v_p(x, t; s) = 1$ die gesuchte Funktion ist. Durch Aufintegrieren erhält man weiters

$$v_p(x, t) = \int_0^t v_p(x, t; s) ds = \int_0^t 1 ds = t.$$

Zusammenfassend. Die Lösung u zum ursprünglichen Problem lautet also $u(x, t) = g(x, t) + v_p(x, t) + v_h(x, t) = x + t + \cos(\pi x)e^{-\pi^2 t}$. Von der Korrektheit überzeugt man sich leicht durch Einsetzen in die Gleichungen.

6.4 Aufgaben

Aufgabe 6.1. Zeigen Sie die Aussagen über das Minimum in Satz 6.2. Hinweis: Direkt wie beim Maximum oder wenden Sie das Maximumsprinzip auf die Funktion $v(x, t) = -u(x, t)$ an.

Aufgabe 6.2. (i) Zeigen Sie, dass $u(x, t) = 1 - x^2 - 2t$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

(ii) Finden Sie das Maximum von u auf $Q = [0, L] \times [0, T]$.

(iii) Finden Sie Maximum und Minimum auf $\Sigma = [0, L] \times \{0\} \cup \{0, L\} \times [0, L]$.
Vergleichen und begründen Sie die Ergebnisse aus (ii) und (iii).

Aufgabe 6.3. Sei u Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $[a, b] \times [0, \infty)$ mit Randwerten $u(a, t) = u(b, t) = 0$ für alle $t > 0$. Zeigen Sie:

(i) $M(t) = \max\{u(x, t) : a \leq x \leq b\}$ ist monoton fallend;

(ii) $m(t) = \min\{u(x, t) : a \leq x \leq b\}$ ist monoton wachsend.

Aufgabe 6.4 (Positivität). Sei u Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx} u &= f, & a < x < b, \quad t > 0, \\ u(a, t) = g_a, \quad u(b, t) &= g_b(t), & t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & a < x < b. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Aus $f(x, t) \geq 0$, $g_a(t) \geq 0$, $g_b(t) \geq 0$ und $u_0(x) \geq 0$ für alle $(x, t) \in [a, b] \times [0, T]$ folgt $u(x, t) \geq 0$ für alle (x, t) .

Wie lautet die Aussage, wenn man die Vorzeichenbedingungen umdreht?

Aufgabe 6.5 (Vergleichsprinzip). Seien u^1, u^2 Lösungen zu

$$\begin{aligned} \partial_t u^i - \partial_{xx} u^i &= f^i, & a < x < b, \quad t > 0, \\ u^i(a, t) &= g_a^i(t), \quad u^i(b, t) = g_b^i(t), & t > 0, \\ u^i(x, 0) &= u_0^i(x), & a < x < b, \end{aligned}$$

für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass aus $f^1 \geq f^2$, $g_a^1 \geq g_a^2$, $g_b^1 \geq g_b^2$ und $u_0^1 \geq u_0^2$ die Ungleichung $u^1 \geq u^2$ auf $[a, b] \times [0, T]$ folgt.

Aufgabe 6.6. Zeigen Sie, dass das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx} u &= f, & a < x < b, \quad t > 0, \\ u(a, t) &= g_a, \quad u(b, t) = g_b(t), & t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & a < x < b, \end{aligned}$$

höchstens eine klassische Lösung besitzen kann.

Hinweis: Betrachten Sie die Differenz $w = u^1 - u^2$ zweier Lösungen und zeigen sie durch Energieabschätzung, dass $w \equiv 0$ gilt.

Aufgabe 6.7. Wiederholen Sie die Rechnung von Aufgabe 6.6 für das Problem mit gemischten Randbedingungen

$$u(a, t) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_x u(b, t) = 0, \quad t > 0.$$

Aufgabe 6.8. (i) Bestimmen Sie mit Trennung der Variablen und Reihenansatz die allgemeine Lösung zu

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx} u &= 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, & t > 0. \end{aligned}$$

(ii) Geben Sie die Lösung mit Anfangswert $u(x, 0) = u_0(x)$ in Form einer Fourierreihe an und skizzieren Sie die Berechnung der Fourierkoeffizienten.

Aufgabe 6.9. Berechnen Sie die Lösung zu

$$\begin{aligned}\partial_t u - \partial_{xx} u &= 1, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) &= 1, & t > 0, \\ u(x, 0) &= 1 + \sin(\pi x), & 0 < x < 1.\end{aligned}$$

Hinweis: Die Reihenentwicklung für $x(1-x)$ ist in Kapitel 4 zu finden.

7 Grundgleichungen der Fluiddynamik

Wir diskutieren nun die Modellierung physikalischer Prozesse mit Differentialgleichungen. Das prinzipielle Vorgehen wird anhand der Grundgleichungen der Strömungsmechanik demonstriert, die Argumente lassen sich aber auch auf andere physikalische Phänomene erweitern. Durch verschiedene Vereinfachungen erhalten wir Modellprobleme in mehreren Raumdimensionen, welche wir in den folgenden Kapiteln genauer beleuchten werden.

7.1 Grundlagen

Als Ausgangspunkt für die Beschreibung von Fluiden mittels partieller Differentialgleichungen wird folgende Annahme gemacht.

Annahme 7.1 (Kontinuumshypothese). Der Zustand des Fluids (Gas oder Flüssigkeit) lässt sich durch Funktionen beschreiben, z.B. die Massendichte $\rho(\vec{x}, t)$, den Druck $p(\vec{x}, t)$, das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(\vec{x}, t)$, u.s.w.

Da Materie aus Teilchen besteht, ist diese Annahme alles andere als selbstverständlich. Sie erlaubt es, die Bewegung von Fluiden durch einfache mathematische Modelle, nämlich Differentialgleichungen, zu beschreiben.

Bemerkung 7.2 (Ausgangspunkt, Lagrange'sche Beschreibung). Wir betrachten ein Ensemble von Partikeln, das sich mit Geschwindigkeit \vec{u} bewegt. Weiters sei $\{\vec{X}(t; \vec{X}_0)\}$ die Menge der Trajektorien, d.h., der Pfade, welche die Partikel mit Anfangsposition $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$ zurücklegen. Dann gilt

$$\vec{X}'(t; \vec{X}_0) = \vec{u}(\vec{X}(t), t), \quad \vec{X}(0; \vec{X}_0) = \vec{X}_0.$$

Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sei hinreichend glatt. Die Partikel, welche bei $t = 0$ das Volumen $V_0 \subset \mathbb{R}^d$ eingenommen haben, befinden sich dann zum Zeitpunkt t im Volumen

$$V(t) = \{\vec{X}(t; \vec{X}_0) : \vec{X}_0 \in V_0\} \subset \mathbb{R}^d$$

Man betrachte hierzu die Bemerkungen zur Lagrange'schen Beschreibungsweise in Abschnitt 2. Mittels Substitution zeigt man folgendes Resultat.

Satz 7.3 (Reynolds' Transport Theorem). Sei $V(t)$ und \vec{u} wie oben definiert und $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi(\vec{x}, t) d\vec{x} = \int_{V(t)} \partial_t \phi(\vec{x}, t) dx + \int_{\partial V(t)} \phi(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) ds(\vec{x}).$$

Dabei ist $\vec{n}(\vec{x}, t)$ der äußere Einheitsnormalenvektor am Rand $\partial V(t)$.

BEWEIS. Für den Beweis verweisen wir auf das Buch von Spurk: Strömungslehre. Der eindimensionale Fall wurde in Kapitel 2 behandelt. \square

Bemerkung 7.4 (Euler'sche Beschreibung). Sei $c(\vec{x}, t)$ die Konzentration eines Stoffes der sich in einer Strömung mit Geschwindigkeit $\vec{u}(\vec{x}, t)$ bewegt. Dann gilt nach dem Gesetz der Stofferhaltung $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} c(\vec{x}, t) d\vec{x} = 0$, und aus dem Transporttheorem folgt

$$0 = \int_{V(t)} \partial_t c(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial V(t)} c(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) ds(\vec{x}).$$

Fixiert man t und setzt $V = V(t)$, so lässt sich dies umformen in

$$\frac{d}{dt} \int_V c(\vec{x}, t) d\vec{x} = \int_V \partial_t c(\vec{x}, t) d\vec{x} = - \int_{\partial V} c(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) ds(\vec{x}),$$

wobei im ersten Schritt verwendet wurde, dass V unabhängig von t ist. Die Änderung der Stoffmenge in einem fixen Volumen V ergibt sich also stets durch den Fluss des Stoffes über den Rand; vgl. Beispiel 2.1.

Beachte: Die Lagrange'sche Beschreibung betrachtet Bilanzen in einem mitbewegten Volumen $V(t)$, während die Euler'sche Betrachtung die Bilanzen in einem fixen Volumen V beschreibt. In der Strömungsmechanik wird meistens die Euler'sche Beschreibung bevorzugt.

Ein weiteres wichtiges Werkzeug für die Modellierung ist das folgende elementare Resultat aus der Integrationstheorie.

Satz 7.5 (Gauß'scher Integralsatz). Sei $V \subset \mathbb{R}^d$ ein hinreichend reguläres Gebiet und $\vec{\psi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{\partial V} \vec{\psi}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) ds(\vec{x}) = \int_V \operatorname{div} \vec{\psi}(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Dabei ist $\operatorname{div} \vec{\psi}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \psi_i(\vec{x})$ die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{\psi}$.

BEWEIS. Siehe z.B. Vorlesungen Mathematik für MB. In einer Dimension ist das gerade der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. \square

Für die Herleitung von Differentialgleichungen aus Bilanzgleichungen in integraler Form wird darüber hinaus der folgende Sachverhalt nützlich sein.

Satz 7.6 (Fundamentallemma der Variationsrechnung).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_V f(x) dx = 0 \quad \text{für alle } V \subset \Omega \quad \iff \quad f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Die Mengen V müssen natürlich so regulär sein, dass man integrieren kann.

BEWEIS. Folgt wie in einer Raumdimension; siehe Kapitel 2. \square

Bemerkung: Der Satz gilt sinngemäß auch für weniger glatte, z.B. stückweise stetige Funktionen. Für im Lebesgue-Sinne integrierbare Funktionen muss man im rechten Teil der Aussage “für fast alle $\vec{x} \in \Omega$ ” schreiben.

7.2 Bilanzgleichungen

Wir betrachten in den folgenden Überlegungen stets ein Kontinuum von Fluidpartikeln in \mathbb{R}^3 , welche sich mit Geschwindigkeit $\vec{u}(\vec{x}, t)$ bewegen und zum Zeitpunkt t das Volumen $V(t)$ einnehmen.

7.2.1 Massenbilanz

Aus dem Prinzip der Massenerhaltung und dem Reynolds’schen Transporttheorem folgt unmittelbar die Integralbilanz

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\vec{x}, t) d\vec{x} \\ &= \int_{V(t)} \partial_t \rho(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial V(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) ds(\vec{x}). \end{aligned}$$

Dabei ist $\rho(\vec{x}, t)$ die Massendichte [kg/m^3] des Fluids. Setzt man $V = V(t)$ und wendet den Gauß’schen Integralsatz an, so erhält man

$$\int_V \partial_t \rho(\vec{x}, t) + \text{div} (\rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t)) d\vec{x} = 0.$$

Diese Identität gilt nach Herleitung für jedes beliebige Kontrollvolumen V . Anwenden des Fundamentallemmas der Variationsrechnung liefert also

$$\partial_t \rho(\vec{x}, t) + \operatorname{div} (\rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t)) = 0.$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung beschreibt das Prinzip der Massenerhaltung und wird auch als **Kontinuitätsgleichung** bezeichnet.

7.2.2 Impulsbilanz

Ausgangspunkt für die Impulsbilanz ist das zweite Newton'sche Gesetz, nach welchem die Beschleunigung eines Körpers, bzw. die Änderung des Impulses, durch einwirkende Kräfte zustandekommt. Für die Änderung des Gesamtimpulses eines Ensembles von Fluidpartikeln ergibt sich hieraus

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) d\vec{x} = \int_{V(t)} \vec{f}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial V(t)} \vec{t}(\vec{x}, t) ds(\vec{x}).$$

Dabei ist \vec{f} die Dichte der Volumenkräfte, z.B. $\vec{f} = -\rho g \vec{e}_z$ im Falle der Erdbeschleunigung, und \vec{t} die Dichte von Kontaktkräften.

Annahme 7.7 (Cauchy'scher Spannungstensor). Laut einer Hypothese von Cauchy lassen sich die Kontaktkräfte in der Form

$$\vec{t}(\vec{x}, t) = \mathbb{S}(\vec{x}, t) \vec{n}(\vec{x}, t)$$

über einen Spannungstensor $\mathbb{S}(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ darstellen. Aus weiteren Überlegungen folgt, dass $\mathbb{S} = \mathbb{S}^\top$ symmetrisch ist.

Mit dem Ausdruck für die Kontaktkräfte, dem Reynolds'schen Transporttheorem und dem Gauß'schen Integralsatz erhält man dann

$$\begin{aligned} \int_V \partial_t (\rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t)) + \operatorname{div} (\rho(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \otimes \vec{u}(\vec{x}, t)) d\vec{x} \\ = \int_V \vec{f}(\vec{x}, t) + \operatorname{div} \mathbb{S}(\vec{x}, t) d\vec{x}. \end{aligned}$$

Dabei ist $[\vec{u} \otimes \vec{u}]_{ij} = u_i u_j$ und $[\operatorname{div} A]_i = \operatorname{div} A_i = \sum_j \partial_{x_j} A_{ij}$ und wir haben wie zuvor $V = V(t)$ gesetzt. Die Gleichung ist komponentenweise zu verstehen und $(\operatorname{div} \mathbb{S})_i = \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \mathbb{S}_{ij}$ erhält man durch Anwenden der

Divergenz auf die Zeilen von \mathbb{S} . Das Fundamentallemma der Variationsrechnung führt schließlich auf die Differentialgleichung

$$\partial_t(\rho\vec{u}) + \operatorname{div}(\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) = \vec{f} + \operatorname{div} \mathbb{S},$$

wobei wir der Einfachheit halber die Argumente (\vec{x}, t) weggelassen haben. Diese Gleichung beschreibt die Impulsbilanz in der Strömung.

7.2.3 Energiebilanz

Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ändert sich die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems nur durch Zu- bzw. Abgabe von Energie mittels Arbeit oder Wärme. In Formeln lautet dies

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} E(\vec{x}, t) d\vec{x} &= \int_{V(t)} \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{f}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial V(t)} \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{t}(\vec{x}, t) ds(\vec{x}) \\ &+ \int_{V(t)} s(\vec{x}, t) d\vec{x} - \int_{\partial V(t)} \vec{q}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) ds(\vec{x}). \end{aligned}$$

Dabei ist $E(\vec{x}, t)$ die Energiedichte des Fluids, $s(\vec{x}, t)$ die Dichte von Wärmequellen und $\vec{q}(\vec{x}, t)$ die Dichte des Wärmeflusses. Einsetzen der Cauchy'schen Hypothese und Anwenden des Reynolds'schen Transporttheorems und des Gauß'schen Integralsatzes liefert für fixes Volumen V die Bilanz

$$\begin{aligned} &\int_V \partial_t E(\vec{x}, t) + \operatorname{div}(E(\vec{x}, t)\vec{u}(\vec{x}, t)) d\vec{x} \\ &= \int_V \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{f}(\vec{x}, t) + \operatorname{div}(\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \mathbb{S}(\vec{x}, t)) d\vec{x} + \int_V s(\vec{x}, t) - \operatorname{div} \vec{q}(\vec{x}, t) d\vec{x}. \end{aligned}$$

Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung erhält man hieraus

$$\partial_t E + \operatorname{div}(E\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{f} + \operatorname{div}(\vec{u} \cdot \mathbb{S}) + s - \operatorname{div} \vec{q}.$$

Diese Differentialgleichung drückt das Gesetz der Energieerhaltung aus.

7.3 Zustandsgleichungen und Materialgesetze

Die 1+3+1=5 Differentialgleichungen für die Massenerhaltung, Impuls- und Energiebilanz beinhalten noch 1+3+6+1=11 unbekannte Funktionen ρ , \vec{u} , \mathbb{S} und E . Um ein geschlossenes System, d.h., gleich viele Differentialgleichungen wie unbekannte Funktionen, zu erhalten, müssen noch

zusätzliche Beziehungen zwischen den Größen vorgeschrieben werden. Diese heißen Zustandsgleichungen oder Materialgesetze.

7.3.1 Newton'sche Fluide

Wir bezeichnen mit $\mathbb{D}(\vec{u}) = \frac{1}{2}[\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^\top]$ den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor, d.h., den symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten. Aus Experimenten erhält man in vielen Fällen den Zusammenhang

$$\mathbb{S} = \mathbb{V} - p\mathbb{I} = 2\mu\mathbb{D}(\vec{u}) + \lambda\text{tr}\mathbb{D}(\vec{u})\mathbb{I} - p\mathbb{I}.$$

Dabei sind \mathbb{V} die viskosen Spannungen, p der Druck und λ und μ Materialparameter. Weiters ist $\text{tr}(A) = \sum_i A_{ii}$ die Spur der Matrix A und es gilt $\text{tr}\mathbb{D}(\vec{u}) = \text{div}\vec{u}$; siehe Übung. Der viskose Spannungstensor \mathbb{V} hängt hier linear vom Verzerrungsgeschwindigkeitsgradienten $\mathbb{D}(\vec{u})$ ab. Man nennt ein solches Medium ein **Newton'schen Fluid**.

7.3.2 Ideale Gase

Die Energiedichte in einem Fluid lässt sich mittels

$$E = \rho \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \rho e$$

stets in einen kinetischen und einen inneren Anteil aufteilen. Die Größe e heißt spezifische innere Energiedichte. In einem idealen Gas gilt

$$p = R\theta\rho \quad \text{und} \quad e = c_v\theta.$$

Dabei ist R die Gaskonstante, θ die Temperatur und c_v die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen.

7.3.3 Fourier'sches Gesetz

In vielen Experimenten kann man feststellen, dass der Wärmefluss in etwa proportional zum Temperaturgradienten ist, also

$$\vec{q} = -\kappa\nabla\theta.$$

Das negative Vorzeichen besagt hier, dass in Übereinstimmung mit den Hauptsätzen der Thermodynamik, Wärme stets von hoher zu niedriger Temperatur fließt. Der Parameter κ heißt Wärmeleitfähigkeit und hängt vom betrachteten Stoff und gegebenenfalls auch von der Temperatur ab.

7.4 Modelle der Strömungsmechanik

Zusammen mit den Materialgleichungen lassen sich aus den physikalischen Grundgesetzen jetzt geschlossene Systeme von Differentialgleichungen für bestimmte Situationen herleiten. Im Folgenden ein paar wichtige Beispiele.

7.4.1 Eulergleichungen der Gasdynamik

Wir betrachten die Strömung eines idealen nicht viskosen und nicht wärmeleitenden Newton'schen Fluids. Es gilt also $\mathbb{S} = -p\mathbb{I}$, $p = R\rho\theta$, $e = c_v\theta$ und $\vec{q} = 0$. Weiters sei die Wärmequelle $s = 0$. Dann erhält man

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) &= 0 \\ \partial_t(\rho \vec{u}) + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + p\mathbb{I}) &= 0 \\ \partial_t E + \operatorname{div}(\vec{u}(E + p)) &= 0.\end{aligned}$$

Dieses System von fünf Differentialgleichungen beschreibt die Erhaltung von Masse, Impuls, und Energie. Mittels $E = \rho \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \rho e$ und obigen Zustandsgleichungen kann man Druck und innere Energiedichte durch ρ , \vec{u} und E ausdrücken. Man erhält dann ein geschlossenes System mit fünf Differentialgleichungen für fünf unbekannte Funktionen.

7.4.2 Navier-Stokes Gleichungen

In der Strömungsmechanik wird häufig der folgende Begriff verwendet.

Definition 7.8. Sei $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\frac{D}{Dt} \phi(\vec{x}, t) = \partial_t \phi(\vec{x}, t) + \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \phi(\vec{x}, t)$$

materielle oder auch konvektive Ableitung von ϕ . Wie zuvor bezeichnet \vec{u} wieder das Geschwindigkeitsfeld der betrachteten Strömung.

Hiermit lassen sich Massen- und Impulsbilanz nun kompakt formulieren als

$$\frac{D}{Dt} \rho = -\rho \operatorname{div} \vec{u} \quad \text{und} \quad \rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \vec{f} + \operatorname{div} \mathbb{S}.$$

Die genaue Herleitung der Gleichungen wird in der Übung diskutiert.

Bemerkung 7.9. Die Strömung eines Fluids heißt **inkompressibel**, falls

$$\operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}, t) = 0$$

gilt. Diese Beziehung beschreibt, dass ein fixes Ensemble von Fluidpartikeln stets das gleiche Volumen belegt; siehe Übung. Da man ohne Weiters annehmen darf, dass $\rho > 0$ gilt, ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\frac{D}{Dt}\rho = 0,$$

was aus dem Transporttheorem und der Massenerhaltung folgt; siehe Übung.

Bemerkung 7.10. Für ein inkompressibles Newton'sches Fluid lassen sich die Bilanzgleichungen für Masse und Impuls umschreiben in

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) &= \vec{f} + \mu \Delta \vec{u} - \nabla p, \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \end{aligned}$$

wobei $[\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}]_i = \vec{u} \cdot \nabla u_i$ und $[\Delta \vec{u}]_i = \Delta u_i$ ist. Wir haben weiters verwendet, dass $2 \operatorname{div} (\mathbb{D}(\vec{u})) = \Delta \vec{u}$ ist, falls $\operatorname{div} \vec{u} = 0$; siehe Übung. Die obigen Gleichungen heißen inkompressible Navier-Stokes Gleichungen.

7.4.3 Wärmeleitung

Wir betrachten noch die Wärmeleitung in einem ruhenden idealen Fluid, d.h., $\vec{u} = 0$ und $e = c_v \theta$. Aus der Bilanzgleichung für die Energieerhaltung, der Massenerhaltung und dem Fourier'schen Gesetz ergibt sich dann

$$\rho c_v \partial_t \theta = \operatorname{div} (\kappa \nabla \theta) + s. \quad (7.1)$$

die Herleitung wird wieder in der Übung besprochen. Diese Gleichung heißt, insbesondere für den Fall $c_v = \rho = \kappa = 1$, die Wärmeleitungsgleichung.

Falls sich die Temperaturverteilung in der Zeit nicht ändert, so gilt

$$-\operatorname{div} (\kappa \nabla \theta) = s. \quad (7.2)$$

Die Gleichung heißt "Poissongleichung" und beschreibt die stationäre Temperaturverteilung in einem ruhenden homogenen wärmeleitenden Medium.

Ausblick

In den folgenden Abschnitten diskutieren wir Lösungstechniken und Eigenschaften von Lösungen für einige wichtige lineare partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, welche sich als Spezialfälle aus den Gleichungen dieses Abschnitts ergeben. Mit den vorgestellten Techniken lassen sich aber auch mathematische Modelle für eine Reihe anderer physikalischer Phänomene herleiten. Beispiele findet man in den Übungen und diversen Vorlesungen in den Ingenieurwissenschaften.

7.5 Aufgaben

Aufgabe 7.1. (a) Sei $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ and $\vec{u} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = \rho \operatorname{div} \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \rho.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $p \in C^1(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\operatorname{div}(p \mathbb{I}) = \nabla p.$$

Hierbei ist \mathbb{I} die Einheitsmatrix der entsprechenden Größe und der Divergenzoperator ist zeilenweise anzuwenden.

Aufgabe 7.2 (Green'sche Formeln). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend regulärem Rand. Leiten Sie mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes und obiger Aufgabe folgende Identitäten her.

$$(a) \int_{\Omega} \nabla u(\vec{x}) \cdot \vec{\psi}(\vec{x}) d\vec{x} = - \int_{\Omega} u(\vec{x}) \operatorname{div} \vec{\psi}(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} u(\vec{x}) \vec{\psi}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) ds(\vec{x})$$

$$(b) \int_{\Omega} \nabla u(\vec{x}) \cdot \nabla v(\vec{x}) d\vec{x} = - \int_{\Omega} u(\vec{x}) \Delta v(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} u(\vec{x}) \partial_n v(\vec{x}) ds(\vec{x}).$$

Dabei sind $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ und $\vec{\psi} \in C^1(\bar{\Omega})^d$ hinreichend regulär angenommen, sodass alle Ausdrücke Sinn machen.

Aufgabe 7.3. Die Funktionen $\rho, p : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{u} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ seien stetig differenzierbar. Stellen Sie die Impulsgleichung

$$\partial_t(\rho \vec{u}) + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + p \mathbb{I}) = 0$$

komponentenweise dar, also in der Form $\partial_t(\rho u_i) + \dots = 0$

Aufgabe 7.4. Wir betrachten die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls in einem Newton'schen Fluid ohne Reibung (Viskosität)

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) &= 0 \\ \partial_t(\rho \vec{u}) + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + p \mathbb{I}) &= 0.\end{aligned}$$

Schreiben Sie die zweite Gleichung mit Hilfe der ersten um in

$$\rho \partial_t \vec{u} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = 0.$$

Aufgabe 7.5. Leiten Sie aus den Bilanzgleichungen für Masse, Impuls, und Energie in Abschnitt 7.2 das folgende System von Gleichungen her

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) &= 0, \\ \rho(\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) &= \vec{f} + \operatorname{div} \mathbb{S}, \\ \rho(\partial_t e + \vec{u} \cdot \nabla e) &= \nabla \vec{u} : \mathbb{S} - \operatorname{div} \vec{q} + s.\end{aligned}$$

Hier ist $A : B = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}$ die doppelte Kontraktion für Tensoren.

Aufgabe 7.6. Leiten Sie aus Massen- und Impulsbilanz die beiden Gleichungen

$$\frac{D}{Dt} \rho = -\rho \operatorname{div} \vec{u} \quad \rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \vec{f} + \operatorname{div} \mathbb{S}$$

her. Dabei ist $\frac{D}{Dt} v = \partial_t v + \vec{u}(\cdot \nabla) v$ die materielle Ableitung.

Aufgabe 7.7. (a) Für $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ gilt $\operatorname{tr}(A) = \sum_i A_{ii}$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{tr}(\mathbb{D}(\vec{u})) = \operatorname{div} \vec{u}.$$

(b) Sei $\vec{u} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ zweimal stetig differenzierbar und $\operatorname{div} \vec{u} = 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$2 \operatorname{div} \mathbb{D}(\vec{u}) = \Delta \vec{u}.$$

Aufgabe 7.8. Leiten Sie mit Hilfe von Aufgabe 7.6 und 7.7 die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen her.

Aufgabe 7.9. Die gesamte Wärmemenge im Volumen V zur Zeit t sei gegeben durch $Q_V(t) = \int_V c_v \rho \theta(\vec{x}, t) d\vec{x}$. Weiters sei $\vec{q}(x, t) = -\kappa \nabla \theta(\vec{x}, t)$

der Wärmefluss durch Wärmeleitung laut Fourier'schem Gesetz und $s(x, t)$ eine Wärmequellendichte.

(a) Leiten Sie aus dem Erhaltungsprinzip "Änderung der Wärmemenge = Wärmezuzug minus Abfluss plus Eintrag durch Wärmequellen" eine Integralbilanz für die zeitliche Änderung von $Q_V(t)$ her.

(b) Überführen Sie die Bilanzgleichung mit dem Gauß'schen Integralsatz und dem Fundamentallemma der Variationsrechnung auf die Wärmeleitungsgleichung.

Aufgabe 7.10. Wir betrachten Massen- und Impulserhaltung für ein ideales nichtviskoses Fluid, vgl. Aufgabe 7.4. Weiters nehmen wir an, dass

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{x}, t) \quad \text{und} \quad \vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_0(\vec{x}, t) + \vec{u}_1(\vec{x}, t)$$

mit Konstanten $\rho_0 = O(1)$, $\vec{u}_0 = 0$, welche den Ruhezustand beschreiben, und kleinen Änderungen $\rho_1(\vec{x}, t) = O(\epsilon)$ und $\vec{u}_1(\vec{x}, t) = O(\epsilon)$. Darüber hinaus nehmen wir an, dass die Temperatur konstant ist, woraus $p = c^2 \rho$ mit konstanter Schallgeschwindigkeit c folgt.

(a) Leiten Sie durch Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung in ϵ die folgenden Gleichungen der (linearen bzw. linearisierten) Akustik her

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_t p + \operatorname{div}(\rho_0 \vec{u}_1) &= 0 \\ \partial_t(\rho_0 \vec{u}_1) + \nabla p &= 0. \end{aligned}$$

(b) Überführen Sie das System auf die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} p = \Delta p.$$

Aufgabe 7.11. Eine Strömung heißt rotationsfrei, wenn $\operatorname{rot} \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = 0$ gilt. Begründen Sie die folgenden Zusammenhänge:

(a) Sei \vec{u} rotationsfrei auf der einfach zusammenhängenden Menge V . Dann gibt es ein Potential ϕ , sodass $\vec{u} = -\nabla \phi$.

(b) Zeigen Sie, dass eine inkompressible rotationsfreie Strömung durch die Laplacegleichung $-\Delta \phi = 0$ beschrieben wird.

Hinweis zu (a): dies wurde im Kontext der Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen in VL Mathematik MB diskutiert.

Aufgabe 7.12. Sei $V(t)$ das Volumen, das durch eine Menge von Partikeln, die sich mit Geschwindigkeit $\vec{u}(\vec{x}, t)$ bewegen, eingenommen wird.

7 Grundgleichungen der Fluiddynamik

- (a) Interpretieren Sie die Gleichung $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} 1 d\vec{x} = 0$.
- (b) Leiten Sie aus (a) die Inkompressibilitätsbedingung $\operatorname{div} \vec{u}(\vec{x}, t) = 0$ her.
- (c) Folgern Sie aus (b) und der Massenerhaltung $\frac{D}{Dt} \rho(\vec{x}, t) = 0$.

8 Harmonische Funktionen

Die homogene Poissongleichung

$$-\Delta u = 0 \tag{8.1}$$

heißt auch **Potential-** oder **Laplacegleichung** und ihre Lösungen heißen **harmonische Funktionen**. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass solche Funktionen viele interessante Eigenschaften besitzen.

8.1 Lösung auf dem Einheitskreis

Wir betrachten das Randwertproblem

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{8.2}$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{8.3}$$

auf dem Einheitskreis $\Omega = B_1(\vec{0}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| < 1\}$. Durch Transformation auf Polarkoordinaten lässt sich dieses Problem auch schreiben als

$$\partial_{rr}v(r, \phi) + \frac{1}{r}\partial_rv(r, \phi) + \frac{1}{r^2}\partial_{\phi\phi}v(r, \phi) = 0 \quad \text{in } Q \tag{8.4}$$

$$v(1, \phi) = h(\phi) \quad \text{auf } \Gamma. \tag{8.5}$$

wobei wir die Substitution $(x, y) := (r \cos \phi, r \sin \phi)$ und

$$v(r, \phi) := u(r \cos \phi, r \sin \phi), \quad Q := [0, 1) \times [0, 2\pi),$$

$$h(\phi) := g(\cos \phi, \sin \phi), \quad \Gamma := \{1\} \times [0, 2\pi),$$

verwendet haben; siehe Übung. Zusätzlich wurde das Vorzeichen gedreht. Das Gebiet Q hat nun Tensorprodukt-Struktur und die Lösung zum Problem (8.4)–(8.5) kann mit “Trennung der Variablen” gefunden werden.

Bemerkung 8.1. Nach Definition der Funktionen v und h müssen diese offensichtlich 2π -periodisch in ϕ sein, d.h., insbesondere muss

$$v(r, 0) = v(r, 2\pi) \quad \text{und} \quad \partial_\phi v(r, 0) = \partial_\phi v(r, 2\pi), \quad (8.6)$$

$$h(0) = h(2\pi) \quad \text{und} \quad h'(0) = h'(2\pi) \quad (8.7)$$

gelten. Falls u klassische Lösung ist, muss darüber hinaus $u(0, 0) = v(0, \phi)$ beschränkt bleiben! Diese Bedingungen sind “versteckte Randbedingungen”, die wir im Weiteren auch berücksichtigen müssen.

Die Berechnung der Lösung kann jetzt in bekannter Weise erfolgen.

Schritt 1 (Produktansatz). Wir suchen zunächst nach speziellen Lösungen der Form $v(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$. Einsetzen in (8.4) führt auf

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \lambda \equiv \text{const.}$$

Durch Splitten der beiden Gleichungen und Verwendung der oben erwähnten “versteckten Randbedingungen” erhält man

$$\begin{aligned} r^2 R''(r) + rR'(r) &= \lambda R(r), & \text{mit } R(0) < \infty, \\ -\Phi''(\phi) &= \lambda \Phi(\phi), & \text{mit } \Phi(0) = \Phi(2\pi) \text{ und } \Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \end{aligned}$$

Das zweite Problem hat für $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$, die periodischen Lösungen

$$\Phi_0(\phi) = a_0 \quad \text{und} \quad \Phi_n(\phi) = a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die erste Gleichung ist eine “Euler’sche Differentialgleichung” und die entsprechenden Lösungen für $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$, lauten

$$R_0(r) = c_0 + d_0 \log(r) \quad \text{und} \quad R_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da die Lösungen bei $r = 0$ beschränkt bleiben sollen, muss $d_0 = d_n = 0$ gelten. Als Lösungen für (8.4)–(8.5) in Produktgestalt erhalten wir also

$$\begin{aligned} v_0(r, \phi) &= a_0 \quad \text{und} \\ v_n(r, \phi) &= r^n [a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)], \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion werden auch die “versteckten Randbedingungen” erfüllt.

Schritt 2 (Superposition). Als Ansatz für die Lösung zu (8.4)–(8.5) verwenden wir nun wie gehabt Linearkombinationen der Form

$$v(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)].$$

Der Faktor $1/2$ im ersten Glied erleichtert später die Berechnung der Fourierkoeffizienten. Falls die Koeffizienten hinreichend schnell abfallen und somit die Reihe schnell genug konvergiert, kann gliedweise differenziert werden und v ist nach Konstruktion Lösung zu (8.4) und erfüllt zusätzlich die versteckten Randbedingungen (8.6)–(8.7). Weiters bleibt v bei $r = 0$ beschränkt. Einsetzen in (8.5) führt dann auf die Gleichung

$$h(\phi) = v(1, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi).$$

Dies ist die “normale” Fourierreihe für die 2π -periodische Funktion h und die entsprechenden Fourierkoeffizienten lassen sich berechnen durch

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) \cos(n\phi) d\phi \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) \sin(n\phi) d\phi;$$

siehe Übung und vergleiche mit VL Mathematik MB. Einsetzen der Koeffizienten in den Reihenansatz und $u(r \cos \phi, r \sin \phi) = v(r, \phi)$ liefert dann die Lösung zum Dirichletproblem (8.2)–(8.3) in Polarkoordinaten.

8.2 Poisson-Formeln und Mittelwertsatz

Aus der Fourierreihendarstellung der Lösung in Polarkoordinaten lassen sich folgende Darstellungen für die Lösung von (8.2)–(8.3) herleiten.

Satz 8.2 (Poisson’sche Formeln). Sei g stetig. Dann ist die Lösung u zu Problem (8.2)–(8.3) auf dem Einheitskreis $\Omega = B_1(\vec{0})$ gegeben durch

$$u(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{(1 - r^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\phi')}{1 - 2r \cos(\phi - \phi') + r^2} d\phi'.$$

Die entsprechende Darstellung in kartesischen Koordinaten lautet

$$u(x, y) = \frac{1 - |(x, y)|^2}{2\pi} \int_{|(x', y')|=1} \frac{g(x', y')}{|(x - x', y - y')|^2} ds(x', y')$$

BEWEIS. Für eine direkte Herleitung aus der Fourierreihendarstellung sei auf das Buch von Strauss verwiesen. Im nächsten Kapitel liefern wir noch einen alternativen Beweis mit Hilfe der Green'schen Funktion. \square

Aus der Poissonformel ergeben sich sofort weitere Eigenschaften der Lösung.

Satz 8.3 (Mittelwertsatz).

Sei u harmonisch auf \mathbb{R}^2 . Dann gilt für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ und alle $R > 0$

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\vec{x}-\vec{y}|=R} u(\vec{y}) ds(\vec{y}) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{|\vec{x}-\vec{y}|\leq R} u(\vec{y}) d\vec{y}.$$

BEWEIS. Wegen Translationsinvarianz des Laplace Operators, kann man nach Verschiebung des Koordinatensystem $\vec{x} = (0, 0)$ annehmen; siehe Übung. Für $R = 1$ folgt die erste Aussage dann sofort aus der Poissonformel. Die Formel für andere Radien R lässt sich durch Substitution finden. Mit Transformation auf Polarkoordinaten folgt weiters

$$\int_{|(x,y)|\leq R} u(x,y) d(x,y) = \int_0^R \int_0^{2\pi} u(r \cos \phi, r \sin \phi) r d\phi dr = (*).$$

Für das innere Integral kann man die erste Aussage verwenden und erhält

$$(*) = \int_0^R 2\pi r u(0,0) dr = \pi R^2 u(0,0),$$

was genau die zweite Behauptung für den Fall $\vec{x} = (0, 0)$ war. \square

Bemerkung 8.4. Der Wert $u(\vec{x})$ lässt sich also durch Mittelwerte von u auf Kreisen rund um \vec{x} bestimmen (=sphärische Mittel). Falls u nur auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ harmonisch ist, dann gilt die Aussage sinngemäß ebenso; hier muss man allerdings fordern, dass die Radien R hinreichend klein sind, damit die entsprechenden Kreise zur Gänze in Ω liegen.

Aus der Poissonformel kann man weiters ablesen, dass harmonische Funktionen stets beliebig oft differenzierbar sind.

Satz 8.5 (Differenzierbarkeit). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und u stetig und harmonisch auf Ω . Dann ist u in Ω beliebig oft stetig differenzierbar.

BEWEIS. Sei $\vec{x} \in \Omega$ und $B_\epsilon(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{y} - \vec{x}| < \epsilon\}$ ein kleiner Kreis um \vec{x} , sodass $\overline{B}_\epsilon(\vec{x}) \subset \Omega$. Dann folgt die Aussage durch Differenzieren der zweiten Poissonformel. Beachte: der Nenner ist stets größer als Null. \square

8.3 Dreidimensionaler Fall

Der Mittelwertsatz für harmonische Funktionen gilt auch in allgemeinen Raumdimensionen. Wir demonstrieren dies für den Fall $d = 3$.

Satz 8.6 (Mittelwertsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und u stetig und harmonisch auf Ω . Dann gilt für alle $\vec{x} \in \Omega$ und $R > 0$ hinreichend klein, dass

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|\vec{x}-\vec{y}|=R} u(\vec{y}) ds(\vec{y}) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{|\vec{x}-\vec{y}| \leq R} u(\vec{y}) d\vec{y}.$$

Der Wert $u(\vec{x})$ lässt sich also wieder durch geeignete Mittelwerte über Kugeln oder Kugeloberflächen beschreiben.

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir wieder $\vec{x} = 0$ annehmen; siehe oben. Wir transformieren nun mittels

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) \quad \text{und} \\ v(r, \phi, \theta) &= u(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta). \end{aligned}$$

auf Kugelkoordinaten. Dann gilt für $\partial V = \{\vec{x} : |\vec{x}| = R\} \subset \Omega$, dass

$$\partial_n u(x, y, z) = \partial_r v(R, \phi, \theta) \quad \text{für alle } (x, y, z) \in \partial V.$$

Mit Gauß'schem Integralsatz bzw. Green'scher Formel, folgt weiters

$$0 = \int_V \Delta u(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\partial V} \partial_n u(\vec{x}) ds(\vec{x}).$$

Durch der Substitution auf Kugelkoordinaten und mit der entsprechenden Transformationsregel für Integrale folgt somit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r^2} \int_{|\vec{x}|=r} \partial_n u(\vec{x}) dx(\vec{x}) = \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \partial_r v(r, \phi, \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} v(r, \phi, \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \int_{|\vec{x}|=r} u(\vec{x}) ds(\vec{x}) \right). \end{aligned}$$

Somit ist $\frac{1}{r^2} \int_{|\vec{x}|=r} u(\vec{x}) ds(\vec{x}) = c$ unabhängig von r . Hieraus folgt weiters

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\pi R^3} \int_{|\vec{x}| \leq R} u(\vec{x}) d\vec{x} &= \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \int_{|\vec{x}|=r} u(\vec{x}) ds(\vec{x}) dr \\ &= \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R cr^2 dr = \frac{c}{4\pi}. \end{aligned}$$

Somit ist auch der Mittelwert von u über Kugeln mit Radius R konstant. Da u stetig ist, konvergiert der Mittelwert mit $R \rightarrow 0$ gegen $u(0)$, woraus man $c = 4\pi u(0)$ erhält. Hieraus folgen dann die Behauptungen. \square

Die Argumentation, die im Beweis verwendet wurde, lässt sich in allgemeinen Raumdimensionen anwenden und der Wert $u(\vec{x})$ einer harmonischen Funktion lässt sich entsprechend stets über sphärische Mittel ausdrücken.

8.4 Das Dirichlet'sche Prinzip

Zum Abschluss zeigen wir noch eine Charakterisierung von harmonischen Funktionen, die eine physikalische Interpretation zulässt. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Jeder hinreichend glatten und beschränkten Funktion w auf Ω ordnen wir die Energie

$$E(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w(\vec{x})|^2 d\vec{x}$$

zu. Mit elementaren Rechnungen erhält man nun folgendes Resultat.

Satz 8.7 (Dirichlet-Prinzip).

Sei u harmonisch auf Ω und stetig auf $\bar{\Omega}$ mit $u(\vec{x}) = g(\vec{x})$ auf $\partial\Omega$.

Dann ist $E(u) \leq E(w)$ für alle $w \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit $w(\vec{x}) = g(\vec{x})$ auf $\partial\Omega$.

Unter allen hinreichend glatten Funktionen mit denselben Randwerten besitzt also die entsprechende harmonische Funktion die minimale Energie.

BEWEIS. Sei $z = w - u$. Dann gilt

$$\begin{aligned} E(w) &= E(u + z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u(\vec{x}) + z(\vec{x}))|^2 d\vec{x} \\ &= E(u) + \int_{\Omega} \nabla u(\vec{x}) \nabla z(\vec{x}) d\vec{x} + E(z). \end{aligned}$$

Mittels Green'schen Formeln sieht man weiters, dass

$$\int_{\Omega} \nabla u(\vec{x}) \nabla z(\vec{x}) d\vec{x} = - \int_{\Omega} \Delta u(\vec{x}) z(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \partial_n u(\vec{x}) z(\vec{x}) ds(\vec{x}).$$

Der erste Term verschwindet, da u harmonisch ist; der zweite fällt weg, da $z(\vec{x}) = w(\vec{x}) - u(\vec{x}) = 0$ auf $\partial\Omega$. Mit $E(z) \geq 0$ folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 8.8. Ganz ähnlich kann man zeigen, dass die Lösung zu

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

die entsprechende modifizierte Energie

$$E_f(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w(\vec{x})|^2 d\vec{x} - \int_{\Omega} f(\vec{x})w(\vec{x})d\vec{x}$$

unter allen Funktionen mit denselben Randwerten minimiert; siehe Übung.

Bemerkung 8.9. Es lässt sich auch die Umkehrung zeigen: Eine Funktion w , welche die Energie minimiert, die Randbedingungen erfüllt und hinreichend regulär ist, muss auch Lösung des entsprechenden Poissonproblems sein. Unter recht allgemeinen Bedingungen an Ω , f und g lässt sich nun zeigen, dass eine minimierende Funktion tatsächlich immer existiert, und zwar im Raum $H^1(\Omega) = \{w : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |\nabla w(\vec{x})|^2 + |w(\vec{x})|^2 d\vec{x} < \infty\}$. Falls die Funktion nicht zweimal stetig differenzierbar ist, nennt man sie eine “schwache Lösung” zum entsprechenden Poissonproblem.

8.5 Aufgaben

Aufgabe 8.1. Sei $v(x, y) = u(x + a, y + b)$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta v(x, y) = (\Delta u)(x + a, y + b)$$

gilt. Der Laplace-Operator ist also invariant unter Verschiebung des Koordinatensystems (=Translationsinvarianz).

Aufgabe 8.2 (Laplace Operator in Polarkoordinaten).

Sei $v(r, \phi) = u(r \cos \phi, r \sin \phi) = u(x, y)$. Drücken Sie $\Delta u(x, y)$ als Funktion von v und seinen Ableitungen aus.

Hinweis: Die Identität $v(r, \phi) = u(r \cos \phi, r \sin \phi)$ mit Hilfe der Kettenregel nach r und ϕ differenzieren und das Ergebnis geeignet umstellen.

Aufgabe 8.3. Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator in \mathbb{R}^2 auch invariant unter Rotations des Koordinatensystems ist.

Hinweis: Formulieren und beweisen Sie das Ergebnis in Polarkoordinaten!

Aufgabe 8.4 (Laplace-Operator in Kugelkoordinaten).

Sei $v(r, \phi, \theta) = u(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$. Stellen Sie $\Delta u(x, y, z)$ durch entsprechende Ableitungen von v nach r, ϕ und θ dar.

Hinweis: Vergleiche mit Aufgabe 8.2.

Aufgabe 8.5. Sei $F : (r, \phi, \theta) \mapsto (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$ und $Q = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ gegeben. Bestimmen Sie $B = F(Q)$ und drücken Sie dann mit Hilfe der Transformationsregel für Integrale

$$\int_{F(Q)} u(\vec{x}) d\vec{x} = \int_Q u(F(\vec{y})) |\det DF(\vec{y})| d\vec{y}$$

das Integral $\int_B u(\vec{x}) d\vec{x}$ als Integral von $v(r, \phi, \theta)$ über Q aus.

Aufgabe 8.6. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung zu

$$r^2 R''(r) + r R'(r) = n^2 R(r), \quad n \geq 0.$$

Hinweis: Für jedes fixe n hat man (nach Umstellen) eine lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung lässt sich also in der Form $R_n(r) = a_n u_n(r) + b_n v_n(r)$ finden, wobei $\{u_n, v_n\}$ ein entsprechendes Fundamentalsystem ist. Für $n = 0$ kann man dann direkt lösen. Für $n \geq 1$ kann man den Potenzreihen-Ansatz $w(r) = \sum_k w_k r^k$ probieren.

Aufgabe 8.7. Sei u harmonisch auf \mathbb{R}^2 . Leiten Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes folgende Aussagen her:

- (i) Für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ und $R > 0$ gilt $u(\vec{x}) \leq \max_{|\vec{y}-\vec{x}| \leq R} u(\vec{y})$.
- (ii) Aus $u(\vec{x}) = \max_{|\vec{y}-\vec{x}| \leq R} u(\vec{y})$ folgt $u(\vec{x}) \equiv \text{const.}$ auf $\{\vec{y} : |\vec{y} - \vec{x}| \leq R\}$.

Aufgabe 8.8. Sei $f(x, y) = \sin(x) \cosh(y)$ gegeben.

- (i) Zeigen Sie, dass f auf \mathbb{R}^2 harmonisch ist.
- (ii) Berechnen Sie $\int_{|(x,y)| \leq 1} f(x, y) d(x, y)$.

Aufgabe 8.9. Beweisen Sie den Mittelwertsatz in \mathbb{R}^2 mittels der Technik aus dem Beweis zum Satz 8.6.

Aufgabe 8.10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\overline{\Omega})$ klassische Lösung zum Poissonproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass u unter alle Funktionen $w \in C^1(\overline{\Omega})$ mit denselben Randwerten $w = g$ auf $\partial\Omega$ die modifizierte Energie

$$E_f(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w(\vec{x})|^2 d\vec{x} - \int_{\Omega} f(\vec{x})w(\vec{x})d\vec{x}$$

minimiert, dass also $E_f(u) \leq E_f(w)$ gilt.

Hinweis: Völlig analog zum Beweis des Dirichlet'schen Prinzips.

Fazit: Eine reguläre Lösung des Poissonproblems ist also stets Minimierer der entsprechenden modifizierten Energie. In den folgenden zwei Aufgaben zeigen wir, dass auch die Umkehrung gilt.

Aufgabe 8.11. Die Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ erfülle die Randwerte $u = g$ auf $\partial\Omega$ und minimiere die modifizierte Energie $E_f(w)$ unter allen regulären Funktionen mit $w = g$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\Omega} \nabla u(\vec{x}) \nabla z(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x})z(\vec{x})$$

für alle $z \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $z = 0$ auf $\partial\Omega$ gelten muss.

Hinweis: Sei $J(t) := E_f(u + tz)$. Dann muss $\frac{d}{dt}J(0) = 0$ gelten! Benutzen Sie dies, um die Aussage zu beweisen.

Aufgabe 8.12. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $u = g$ auf $\partial\Omega$ und es gelte

$$\int_{\Omega} \nabla u(\vec{x}) \nabla z(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x})z(\vec{x})d(\vec{x}) \quad (8.8)$$

für alle $z \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $z = 0$ auf $\partial\Omega$. Begründen Sie, dass dann

$$-\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x}) \quad \text{für all } \vec{x} \in \Omega$$

gelten muss. Hinweis: Vgl. Fundamentallemma der Variationsrechnung.

Fazit: Ein hinreichend regulärer Minimierer der modifizierten Energie E_f ist also auch Lösung des entsprechenden Poissonproblems.

9 Fundamentallösung und Green'sche Funktion

In diesem Abschnitt leiten wir eine Darstellung für die Lösung des Poissonproblems her, welche die Poisson'sche Formel als Spezialfall enthält.

9.1 Fundamentallösung

Wir betrachten im Folgenden das Poissonproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^d$$

im ganzen Raum \mathbb{R}^d der Dimension $d = 2$ oder $d = 3$.

Satz 9.1. Die radialsymmetrische Funktion

$$\Phi(\vec{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |\vec{x}|, & d = 2, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}|}, & d = 3, \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung** zum Laplace-Operator in Dimension $d = 2, 3$. Sie besitzt die folgenden elementaren Eigenschaften.

- (i) Für alle $\vec{x} \neq 0$ ist $\Phi(\vec{x})$ beliebig oft differenzierbar.
- (ii) Es gilt $\Delta_{\vec{x}} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) = 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{y}$, wobei nach \vec{x} abgeleitet wird.
- (iii) $\int_{|\vec{x}| \leq \epsilon} \Phi(\vec{x}) d\vec{x} \rightarrow 0$ und $\int_{|\vec{x}| = \epsilon} \Phi(\vec{x}) ds(\vec{x}) \rightarrow 0$ mit $\epsilon \rightarrow 0$.
- (iv) $\int_{|\vec{x}| = \epsilon} \partial_n \Phi(\vec{x}) ds(\vec{x}) = 1$ für alle $\epsilon > 0$ mit $\vec{n} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$.

BEWEIS. Zur Veranschaulichung zeigen wir (iii) im Fall $d = 3$. Transformation auf Kugelkoordinaten liefert

$$\int_{|\vec{x}| \leq \epsilon} \Phi(\vec{x}) d\vec{x} = 4\pi \int_0^\epsilon \frac{1}{4\pi r} r^2 dr = \epsilon^2/2 \rightarrow 0 \quad \text{mit } \epsilon \rightarrow 0.$$

Die restlichen Aussagen folgen ebenso relativ einfach durch Nachrechnen und werden in der Übung bewiesen. \square

Die Lösung zum obigen Poissonproblem lässt sich nun mit Hilfe der Fundamentallösung wie folgt in expliziter Form darstellen.

Satz 9.2. Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ und es gelte $f(\vec{x}) = 0$ für $|\vec{x}| \geq R$ für ein $R > 0$ (d.h. f hat kompakten Träger, $\text{supp}(f) := \{\vec{x} : f(\vec{x}) \neq 0\}$ ist beschränkt). Dann ist die Funktion

$$u(\vec{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y}$$

zweimal stetig differenzierbar und erfüllt $-\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$.

BEWEIS. Da $f(\vec{x})$ für $|\vec{x}| > R$ verschwindet, gilt nach Substitution $\vec{y} = \vec{x} - \vec{z}$

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\vec{z}) f(\vec{x} - \vec{z}) d\vec{z} = \int_{|\vec{z}| \leq 2R} \Phi(\vec{z}) f(\vec{x} - \vec{z}) d\vec{z}. \end{aligned}$$

Mit Satz 9.1 folgt weiters, dass das uneigentliche Integral existiert; siehe Übung. Wir zeigen als Nächstes die Stetigkeit von u . Es gilt

$$\begin{aligned} |u(\vec{x}) - u(\vec{y})| &= \left| \int_{|\vec{z}| \leq 2R} \Phi(\vec{z}) [f(\vec{x} - \vec{z}) - f(\vec{y} - \vec{z})] d\vec{z} \right| \\ &\leq \int_{|\vec{z}| \leq 2R} \Phi(\vec{z}) |f(\vec{x} - \vec{z}) - f(\vec{y} - \vec{z})| d\vec{z}. \end{aligned}$$

Die Funktion $f(\vec{x})$ ist stetig und daher auf der kompakten Menge $|\vec{x}| \leq R$ gleichmäßig stetig, d.h., $|f(\vec{x} - \vec{z}) - f(\vec{y} - \vec{z})| \leq c(|\vec{x} - \vec{y}|) \rightarrow 0$ mit $|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow 0$, und zwar gleichmäßig für alle relevanten $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Da das Integral über Φ wegen Satz 9.1 beschränkt ist, folgt hiermit

$$|u(\vec{x}) - u(\vec{y})| \leq \int_{|\vec{z}| \leq 2R} \Phi(\vec{z}) d\vec{z} c(|\vec{x} - \vec{y}|) \rightarrow 0 \quad \text{mit } |\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow 0.$$

In ähnlicher Weise folgt, dass $\partial_{x_i} u(\vec{x})$ und $\partial_{x_i x_j} u(\vec{x})$ stetig sind und

$$\partial_{x_i x_j} u(\vec{x}) = \int_{|\vec{z}| \leq 2R} \Phi(\vec{z}) \partial_{x_i x_j} f(\vec{x} - \vec{z}) d\vec{z} = \int_{|\vec{z}| \leq 2R} \Phi(\vec{z}) \partial_{z_i z_j} f(\vec{x} - \vec{z}) d\vec{z}.$$

Wir berechnen jetzt noch $\Delta u(\vec{x})$. Nach obigen Überlegungen gilt

$$\begin{aligned}\Delta u(\vec{x}) &= \int_{|\vec{z}| \leq \epsilon} \Phi(\vec{z}) \Delta_{\vec{z}} f(\vec{x} - \vec{z}) d\vec{z} + \int_{\epsilon \leq |\vec{z}| \leq 2R} \Phi(\vec{z}) \Delta_{\vec{z}} f(\vec{x} - \vec{z}) d\vec{z} \\ &= (1_\epsilon) + (2_\epsilon).\end{aligned}$$

Da die Ableitungen von f beschränkt sind, folgt mit Satz 9.1(iii), dass der erste Teil (1_ϵ) mit $\epsilon \rightarrow 0$ verschwindet. Für den zweiten erhält man durch Anwenden der Green'schen Formel

$$\begin{aligned}(2_\epsilon) &= \int_{\epsilon \leq |\vec{z}| \leq 2R} \Phi(\vec{z}) \Delta_{\vec{z}} f(\vec{x} - \vec{z}) d\vec{z} \\ &= - \int_{\epsilon \leq |\vec{z}| \leq 2R} \nabla_{\vec{z}} \Phi(\vec{z}) \nabla_{\vec{z}} f(\vec{x} - \vec{z}) d\vec{z} + \int_{|\vec{z}|=\epsilon} \Phi(\vec{z}) \partial_{n(\vec{z})} f(\vec{x} - \vec{z}) ds(\vec{z}).\end{aligned}$$

Das Randintegral bei $|\vec{z}| = R$ taucht nicht auf, weil $f(\vec{x}) \equiv 0$ für $|\vec{x}| \geq R$ angenommen wurde und das verbleibende Randintegral verschwindet wegen Satz 9.1(iii) ebenfalls mit $\epsilon \rightarrow 0$. Nochmaliges Anwenden der Green'schen Formel liefert für den verbleibenden Teil

$$\begin{aligned}(2'_\epsilon) &= - \int_{\epsilon \leq |\vec{z}| \leq 2R} \nabla_{\vec{z}} \Phi(\vec{z}) \nabla_{\vec{z}} f(\vec{x} - \vec{z}) d\vec{z} \\ &= \int_{\epsilon \leq |\vec{z}| \leq 2R} \Delta_{\vec{z}} \Phi(\vec{z}) f(\vec{x} - \vec{z}) d\vec{z} - \int_{|\vec{z}|=\epsilon} \partial_{n(\vec{z})} \Phi(\vec{z}) f(\vec{x} - \vec{z}) ds(\vec{z}).\end{aligned}$$

Da $\Delta \Phi(\vec{z}) = 0$ für $\vec{z} \neq 0$, verschwindet der erste Teil. Also folgt

$$(2'_\epsilon) = - \int_{|\vec{z}|=\epsilon} \partial_{n(\vec{z})} \Phi(\vec{z}) f(\vec{x}) ds(\vec{z}) - \int_{|\vec{z}|=\epsilon} \partial_{n(\vec{z})} \Phi(\vec{z}) [f(\vec{x} - \vec{z}) - f(\vec{x})] ds(\vec{z}).$$

Da f stetig ist und das Integral über $\partial_n \Phi$ beschränkt ist, verschwindet der zweite Teil für $\epsilon \rightarrow 0$ und der erste liefert mit Satz 9.1(iv) gerade $-f(\vec{x})$. Zusammenfassend erhalten wir also

$$\Delta u(\vec{x}) = (1_\epsilon) + (2_\epsilon) \rightarrow -f(\vec{x}) \quad \text{mit } \epsilon \rightarrow 0.$$

Hieraus folgt, dass $-\Delta u(\vec{x}) = f(\vec{x})$ ist, also die letzte Behauptung. \square

Bemerkung 9.3. (i) Der Satz lässt sich auch unter schwächeren Voraussetzungen an f beweisen, z.B., f stetig, stückweise stetig differenzierbar und beschränkt. Wir geben hierzu später noch genauer Auskunft.

(ii) Da f beschränkt ist und kompakten Träger hat, verhält sich $u(\vec{x})$ für große \vec{x} ähnlich wie die Fundamentallösung, z.B., $|u(\vec{x})| \approx 1/|\vec{x}|$ und $|\partial_n u(\vec{x})| \approx 1/|\vec{x}|^2$ im Fall $d = 3$. Mittels Hilfe einer Energieabschätzung lässt sich dann die Eindeutigkeit der Lösung in der Klasse von Funktionen mit diesem Abklingverhalten zeigen. Für $d = 2$ ist die Aussage etwas diffiziler; siehe Übung.

9.2 Darstellungssätze

Wir leiten jetzt eine ähnliche Formel für die Lösung des Poissonproblems

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ her. Hierzu verwenden wir

Satz 9.4 (Zweite Green'sche Formel). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend regulärem Rand. Dann gilt für alle $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} u(\vec{x}) \Delta v(\vec{x}) - v(\vec{x}) \Delta u(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} u(\vec{x}) \partial_n v(\vec{x}) - v(\vec{x}) \partial_n u(\vec{x}) ds(\vec{x}).$$

BEWEIS. Folgt durch zweimaliges Anwenden der Green'schen Formel. \square

Mit ähnlichen Argumenten wie zuvor, erhalten wir jetzt folgendes Resultat.

Satz 9.5 (Darstellungsformel). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand. Dann gilt für alle $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und alle $\vec{x} \in \Omega$

$$u(\vec{x}) = \int_{\partial\Omega} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) \partial_{n(\vec{y})} u(\vec{y}) ds(\vec{y}) - \int_{\partial\Omega} u(\vec{y}) \partial_{n(\vec{y})} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) ds(\vec{y}) - \int_{\Omega} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) \Delta u(\vec{y}) d\vec{y}.$$

BEWEIS. Sei $B_\epsilon(\vec{x}) = \{\vec{y} : |\vec{y} - \vec{x}| \leq \epsilon\}$ und $\Omega_\epsilon(\vec{x}) = \Omega \setminus B_\epsilon(\vec{x})$. Wir teilen dann das letzte Integral auf in

$$\int_{\Omega} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) \Delta u(\vec{y}) d\vec{y} = \int_{B_\epsilon(\vec{x})} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) \Delta u(\vec{y}) d\vec{y} + \int_{\Omega_\epsilon(\vec{x})} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) \Delta u(\vec{y}) d\vec{y}.$$

Wendet man die zweite Green'sche Formel mit $v(\vec{y}) = \Phi(\vec{x} - \vec{y})$ auf das zweite Integral an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (*) &= - \int_{\Omega} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) \Delta_{\vec{y}} u(\vec{y}) d\vec{y} - \int_{\partial\Omega} u(\vec{y}) \partial_{n(\vec{y})} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) - \Phi(\vec{x} - \vec{y}) \partial_{n(\vec{y})} u(\vec{y}) ds(\vec{y}) \\
 &= - \int_{B_{\epsilon}(\vec{x})} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) \Delta_{\vec{y}} u(\vec{y}) d\vec{y} - \int_{\Omega_{\epsilon}(\vec{x})} u(\vec{y}) \Delta_{\vec{y}} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} \\
 &\quad + \int_{|\vec{x} - \vec{y}| = \epsilon} u(\vec{y}) \partial_{n(\vec{y})} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) - \Phi(\vec{x} - \vec{y}) \partial_{n(\vec{y})} u(\vec{y}) ds(\vec{y}) \\
 &= (1_{\epsilon}) + (2_{\epsilon}) + (3_{\epsilon}) + (4_{\epsilon}).
 \end{aligned}$$

Da u beschränkte Ableitungen besitzt, folgt mit Satz 9.1(iii)-(iv), dass $(1_{\epsilon}) \rightarrow 0$ und $(4_{\epsilon}) \rightarrow 0$ mit $\epsilon \rightarrow 0$. Da $\Delta\Phi(\vec{x} - \vec{y}) = 0$ für $\vec{y} \neq \vec{x}$ ist $(2_{\epsilon}) \equiv 0$. Der dritte Term lässt sich schreiben als

$$(3_{\epsilon}) = \int_{|\vec{x} - \vec{y}| = \epsilon} \partial_{n(\vec{y})} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) u(\vec{x}) ds(\vec{y}) + \int_{|\vec{x} - \vec{y}| = \epsilon} \partial_n \Phi(\vec{x} - \vec{y}) [u(\vec{y}) - u(\vec{x})] ds(\vec{y}).$$

Aufgrund der Stetigkeit von u verschwindet der zweite Term mit $\epsilon \rightarrow 0$. Für den ersten erhält man mit Satz 9.1(iv) gerade $u(\vec{x})$. Also gilt

$$(*) = (1_{\epsilon}) + (2_{\epsilon}) + (3_{\epsilon}) + (4_{\epsilon}) \rightarrow u(\vec{x}) \quad \text{mit } \epsilon \rightarrow 0,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 9.6. Sei $\vec{x} = 0$ und $\Omega = \{\vec{y} : |\vec{y}| < 1\}$. Dann gilt $|\vec{y}| \equiv 1$ und $\vec{n}(\vec{y}) \equiv \vec{y}$ auf $\partial\Omega$. Für $d = 2$ erhält man hiermit $\Phi(\vec{y}) = -\frac{1}{2\pi} \log |\vec{y}| = 0$ und $\partial_{n(\vec{y})} \Phi(\vec{y}) = -\frac{1}{2\pi}$ auf $\partial\Omega$. Falls zusätzlich $\Delta u \equiv 0$ ist, dann liefert die Darstellungsformel aus dem vorigen Satz

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\vec{y}|=1} u(\vec{y}) d\vec{y}.$$

Dies entspricht gerade dem Mittelwertsatz für harmonische Funktionen.

9.3 Green'sche Funktion

Die Darstellungsformel ist zum Lösen des Poissonproblems

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \tag{9.1}$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{9.2}$$

in dieser Form nicht wirklich anwendbar, da die zusätzliche Information über die Neumann-Randwerte $\partial_n u$ fehlt. Wir modifizieren die Fundamentallösung jetzt einfach so, dass die entsprechenden Integrale wegfallen. Zuvor zitieren wir noch ein tiefgehendes Resultat.

Satz 9.7. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend regulärem Rand. Dann besitzt das Poissonproblem für hölderstetige Daten $g \in C^\alpha(\partial\Omega)$ und $f \in C^\alpha(\Omega)$ eine eindeutige klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Der Beweis würde den Rahmen der Vorlesung bei Weitem sprengen; wir verweisen hier auf das Buch von Gilbarg&Trudinger: Elliptic partial differential equations of second order.

Bemerkung 9.8. Wegen Satz 9.7 existiert für $\vec{x} \in \Omega$ eine Lösung $w_{\vec{x}}$ zu

$$\begin{aligned} -\Delta_{\vec{y}} w_{\vec{x}}(\vec{y}) &= 0, & \vec{y} &\in \Omega, \\ w_{\vec{x}}(\vec{y}) &= \Phi(\vec{x} - \vec{y}), & \vec{y} &\in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die modifizierte Fundamentallösung $G(\vec{x}; \vec{y}) := \Phi(\vec{x} - \vec{y}) - w_{\vec{x}}(\vec{y})$ heißt dann Green'sche Funktion zum Laplace-Operator auf dem Gebiet Ω .

Die Green'sche Funktion besitzt die folgenden interessanten Eigenschaften.

Satz 9.9. (i) $\Delta_{\vec{y}} G(\vec{x}; \vec{y}) = 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{y}$ in Ω .

(ii) $G(\vec{x}; \vec{y}) = 0$ für alle $\vec{y} \in \partial\Omega$.

(iii) $G(\vec{x}; \vec{y}) = G(\vec{y}; \vec{x})$ für alle $\vec{x} \neq \vec{y}$.

BEWEIS. (i) und (ii) folgen aus der Konstruktion und den Eigenschaften der Fundamentallösung. Für (iii) siehe das Buch von Strauss. \square

Mit Hilfe der Green'sche Funktion lässt sich nun die Lösung zum Poisson-Problem (9.1)–(9.2) wie folgt darstellen.

Satz 9.10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit regulärem Rand und $u \in C^2(\overline{\Omega})$ klassische Lösung zu (9.1)–(9.2). Dann gilt

$$u(\vec{x}) = \int_{\Omega} G(\vec{x}; \vec{y}) f(\vec{y}) d\vec{y} - \int_{\partial\Omega} g(\vec{y}) \partial_{n(\vec{y})} G(\vec{x}; \vec{y}) ds(\vec{y}).$$

BEWEIS. Die Aussage folgt aus der Konstruktion der Green'schen Funktion und dem Darstellungssatz über die Fundamentallösung; siehe Übung. \square

Für spezielle Gebiete, z.B. Kugeln oder Halbräume, kann man die Green'sche Funktion angeben und man erhält eine explizite Lösungsdarstellung.

Bemerkung 9.11 (Green'sche Funktion auf Kugeln).

Sei $\Omega = \{\vec{y} : |\vec{y}| < 1\}$ die Einheitskugel im \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$. Dann ist

$$G(\vec{x}; \vec{y}) = \Phi(\vec{x} - \vec{y}) - \Phi(|\vec{x}|(\vec{x}' - \vec{y})) \quad \text{mit} \quad \vec{x}' = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}$$

die entsprechende Green'sche Funktion. Auf die Formel kommt man mittels geometrischer Überlegungen. Die Eigenschaften aus Satz 9.9 lassen sich relativ einfach überprüfen; siehe Übung. Im Fall $d = 2$ ergibt sich etwa

$$G(\vec{x}; \vec{y}) = -\frac{1}{2\pi} \log |\vec{x} - \vec{y}| + \frac{1}{2\pi} \log (|\vec{x}| |\vec{x}' - \vec{y}|).$$

Setzt man dies in Satz 9.10 mit $f \equiv 0$ ein, so folgt (siehe Übung)

$$u(\vec{x}) = \frac{1 - |\vec{x}|^2}{2\pi} \int_{|\vec{y}|=1} \frac{g(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} ds(\vec{y}).$$

Das ist gerade die Poisson'sche Formel für harmonische Funktionen; siehe Abschnitt 8. Im Fall $d = 3$ erhält man mit ähnlicher Rechnung

$$u(\vec{x}) = \frac{1 - |\vec{x}|^2}{4\pi} \int_{|\vec{y}|=1} \frac{g(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} d\vec{y};$$

dies ist die Verallgemeinerung der Poissonformel auf drei Dimensionen.

9.4 Aufgaben

Aufgabe 9.1. Finden Sie durch Transformation auf Polar- bzw. Kugelkoordinaten die allgemeine radial-symmetrische Lösung $u(|\vec{x}|)$ zur Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ in \mathbb{R}^d für $d = 2$ und $d = 3$.

Aufgabe 9.2. Zeigen Sie die Aussagen von Satz 9.1 für die Fundamentallösung Φ in Dimension $d = 2$ und $d = 3$.

Aufgabe 9.3. Zeigen Sie folgende Sachverhalte:

(i) Für $u(\vec{x}) := \Phi(\vec{x} - \vec{y})$ gilt $\Delta u(\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x} \neq \vec{y}$.

(ii) Für $d = 2, 3$ gilt $\int_{|\vec{y}| \leq 2R} \Phi(\vec{y}) d\vec{y} \leq C_R$ für geeignete Konstante C_R .

Aufgabe 9.4. Leiten Sie aus der (ersten) Green'schen Formel die zweite Green'sche Formel aus Satz 9.4 her.

Aufgabe 9.5. Leiten Sie aus der Definition der Green'schen Funktion die Eigenschaften (i) und (ii) in Satz 9.9 her.

Aufgabe 9.6. Bestimmen Sie mittels der Vorschrift

$$G(\vec{x}; \vec{y}) = \Phi(\vec{x} - \vec{y}) - \Phi(|\vec{x}|(\vec{x}' - \vec{y})) \quad \text{mit} \quad \vec{x}' = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2}$$

die Green'schen Funktionen für den Einheitskreis und die Einheitskugel.

Aufgabe 9.7. Zeigen Sie, dass die Green'schen Funktionen aus Aufgabe 9.6 jeweils die Eigenschaften aus Satz 9.9 erfüllen.

Aufgabe 9.8. Zeigen Sie, dass die Funktion $w_{\vec{y}}(\vec{x}) := \Phi(|\vec{x}|(\vec{x}' - \vec{y}))$ mit $\vec{x}' = \vec{x}/|\vec{x}|^2$ die eindeutige Lösung zum Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u_{\vec{y}}(\vec{x}) &= 0 && \text{für } |\vec{x}| < 1 \\ u_{\vec{y}}(\vec{x}) &= \Phi(\vec{x} - \vec{y}) && \text{für } |\vec{x}| = 1 \end{aligned}$$

ist. Betrachten Sie hierzu die Fälle $d = 2$ und $d = 3$ separat.

Aufgabe 9.9. Leiten Sie aus der Lösungsformel von Satz 9.10 die Poisson'sche Darstellungsformel

$$u(\vec{x}) = \frac{1 - |\vec{x}|^2}{2\pi} \int_{|\vec{y}|=1} \frac{u(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} ds(\vec{y})$$

für harmonische Funktionen u auf dem Einheitskreis her.

Aufgabe 9.10. Leiten Sie aus der Lösungsformel von Satz 9.10 die Poisson'sche Darstellungsformel

$$u(\vec{x}) = \frac{1 - |\vec{x}|^2}{4\pi} \int_{|\vec{y}|=1} \frac{u(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} ds(\vec{y})$$

für harmonische Funktionen u auf der Einheitskugel her.

10 Wärmeleitung revisited

Wir erweitern jetzt unsere Betrachtungen für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung auf den mehrdimensionalen Fall. Wie wir sehen werden, lassen sich praktisch alle Resultate aus Kapitel 5 fast wörtlich übertragen.

10.1 Maximumprinzip

Wir betrachten zunächst die einfache Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (10.1)$$

auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Für einige der Resultate fordern wir zusätzliche Rand- und Anfangsbedingungen

$$u = g \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (10.2)$$

$$u = u_0 \quad x \in \Omega, \quad t = 0. \quad (10.3)$$

Zur Erinnerung. Als klassische Lösung des obigen Problems bezeichnet man eine Funktion $u : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die hinreichend regulär ist, sodass alle Gleichungen punktweise Sinn machen und erfüllt sind.

Mit ähnlicher Argumentation wie in einer Raumdimension oder bei der Poisson-Gleichung lassen sich folgend Aussagen zeigen.

Satz 10.1 (Maximum-Prinzip).

(i) Sei u eine klassische Lösung zu (10.1) auf $\bar{\Omega} \times [0, T]$ mit $f \leq 0$. Dann nimmt u sein Maximum bei $t = 0$ oder am Rand $\partial\Omega$ an.

(ii) Ist $f \geq 0$, dann nimmt u sein Minimum bei $t = 0$ oder auf $\partial\Omega$ an.

BEWEIS. Analog zum eindimensionalen Fall; siehe Übung. □

Mit denselben Argumenten wie in einer Dimension erhält man auch sofort wieder einige wichtige Folgerungen aus dem Maximumprinzip.

Satz 10.2 (Folgerungen aus dem Maximumprinzip).

- (i) Positivität/Negativität: Ist u Lösung zu (10.1)–(10.3) mit $f \geq 0$, $u_0 \geq 0$ und $g \geq 0$, dann ist $u \geq 0$. Ist $f \leq 0$, $u_0 \leq 0$ und $g \leq 0$, dann $u \leq 0$.
- (ii) Vergleichsprinzip: Seien u^1, u^2 Lösungen von (10.1)–(10.3) mit Daten $f^1 \geq f^2$, $u_0^1 \geq u_0^2$ und $g^1 \geq g^2$. Dann gilt $u^1 \geq u^2$ für alle $\vec{x} \in \Omega$ und $t > 0$.
- (iii) Eindeutigkeit: Es gibt max. eine klassische Lösung zu (10.1)–(10.3).
- (iv) Stabilität: Die Lösung zu (10.1)–(10.3) lässt sich abschätzen durch

$$\|u\|_{\infty, Q_T} \leq C_T (\|f\|_{\infty, Q_T} + \|g\|_{\infty, S_T} + \|u_0\|_{\infty, \Omega}),$$

wobei $Q_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$ und $S_T = \partial\Omega \times [0, T]$ für $T > 0$ ist.

Wie zuvor bezeichnet $\|v\|_{\infty, M} = \sup_{y \in M} |v(y)|$ die Maximumsnorm.

BEWEIS. Vergleiche Kapitel 5 und siehe Übungen. □

Bemerkung 10.3. Alternativ lässt sich die Eindeutigkeit von Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung auch mit Hilfe von Energieabschätzungen zeigen; vergleiche mit Kapitel 5 und siehe Übung.

Bemerkung 10.4. Unter relativ allgemeinen Bedingungen an das Gebiet und die Daten lässt sich auch die Existenz einer Lösung beweisen; siehe das Buch von Friedman: *Partial differential equations of parabolic type*. Auf einfachen Gebieten werden wir später die Lösungen wieder explizit mittels Trennung der Variablen konstruieren.

10.2 Trennung der Variablen

Wir zeigen jetzt mit “Trennung der Variablen”, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung zumindest auf einfachen Gebieten tatsächlich existiert. Sei im Folgenden $\Omega = (0, 1)^2$ das Einheitsquadrat. Wir betrachten hierzu das Anfangs-Randwertproblem (10.1)–(10.3) mit $f = 0$ und $g = 0$.

Schritt 1: Wir suchen zunächst nach speziellen Lösungen in der Form eines Produkts $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$. Einsetzen in die Gleichung (10.1) mit rechter Seite $f = 0$ liefert

$$X(x)Y(y)T'(t) = X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t).$$

Umordnen der Terme führt mit der üblichen Argumentation auf

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \lambda \equiv \text{const.}$$

Die letzten beiden Gleichungen folgen, da die linke Seite von t und die rechte nur von x und y abhängt. Einbeziehung von (10.2) mit $g = 0$ liefert

$$\begin{aligned} X'' &= \mu X, & X(0) &= X(1) = 0, \\ Y'' &= \nu Y, & Y(0) &= Y(1) = 0, \end{aligned}$$

wobei wir $\lambda = \mu + \nu$ gesplittet haben. Weiters erhalten wir

$$T' = \lambda T.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen erhält man wie in einer Dimension

$$\begin{aligned} X_m(x) &= a_m \sin(m\pi x), & \mu_m &= -m^2\pi^2, & m &\in \mathbb{N}, \\ Y_n(y) &= b_n \sin(n\pi y), & \nu_n &= -n^2\pi^2, & n &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt entsprechend

$$T_{mn}(t) = c_{mn} e^{-(m^2+n^2)\pi^2 t}.$$

Jede Funktion der speziellen Form

$$u_{mn}(x, y, t) = c_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) e^{-(m^2+n^2)\pi^2 t}$$

mit $c_{mn} \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ erfüllt also die Wärmeleitungsgleichung (10.1) mit $f = 0$ sowie die Randbedingungen (10.2) mit $g = 0$ und alle Grundlösungen in Produktform besitzen diese Gestalt.

Schritt 2: Wir wählen einen Superpositionsansatz

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) e^{-(m^2+n^2)\pi^2 t}. \quad (10.4)$$

Durch Einsetzen in die Anfangsbedingung (10.3) erhält man

$$u_0(x, y) = u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y).$$

Mit den Resultaten aus Abschnitt 4 kann man zeigen, dass die Fourierkoeffizienten c_{mn} der Lösung dann gegeben sind durch

$$c_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 u_0(x, y) \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) dx dy;$$

Bei der Herleitung dieser Formel werden wieder die Orthogonalitätsbeziehungen für die Sinus-Funktionen verwendet; siehe Übung.

Schritt 3: Falls u_0 geeignet gewählt ist, kann man wieder garantieren, dass die Reihen in geeignetem Sinne konvergieren, sodass die Grenzfunktion zweimal stetig differenzierbar ist und gliedweise differenziert werden darf. Aus der Konstruktion folgt dann, dass eine Lösung gefunden wurde.

Beispiel 10.5. Gesucht ist die Lösung zu (10.1)–(10.3) auf $\Omega = (0, 1)^2$ mit $f \equiv 0$ und $g \equiv 0$ sowie $u_0(x, y) = \sin(\pi x)y(1 - y)$. Nach obiger Argumentation lässt sich die Lösung als Fourierreihe (10.3) darstellen und die Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} c_{mn} &= 4 \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi x)y(1 - y) \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) dx dy \\ &= 2 \int_0^1 \sin(\pi x) \sin(m\pi x) dx \cdot 2 \int_0^1 y(1 - y) \sin(n\pi y) dy. \end{aligned}$$

Das erste Integral ergibt aufgrund der Orthogonalitätsbeziehungen

$$2 \int_0^1 \sin(\pi x) \sin(m\pi x) dx = \delta_{1,m}.$$

Für das zweite Integral erhält man

$$2 \int_0^1 y(1 - y) \sin(n\pi y) dy = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 8/(n^3\pi^3), & n = 2k + 1 \end{cases}.$$

Die Lösung lautet also

$$u(x, y, t) = \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{8}{n^3\pi^3} \sin(\pi x) \sin(n\pi y) e^{-(1+n^2)\pi^2 t}.$$

Durch formales Differenzieren und Überprüfung der Konvergenz der Reihen folgt, dass die Lösung u hier zweimal differenzierbar nach x, y und einmal differenzierbar nach t ist. Wir haben also die klassische Lösung gefunden.

10.3 Fundamentallösung

Wir betrachten zum Abschluss noch die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(\vec{x}, t) - \Delta u(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{für } \vec{x} \in \mathbb{R}^d, t > 0 \quad (10.5)$$

im Ganzraum. Völlig analog zum Resultat in einer Raumdimension gilt:

Satz 10.6. Die Funktion

$$\phi(x, t) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}} \quad (10.6)$$

heißt Fundamentallösung zur Wärmeleitungsgleichung (10.5) und es gilt:

- (i) Für $t > 0$ ist ϕ beliebig oft nach \vec{x} und t differenzierbar.
- (ii) Für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^d$ ist $u(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} - \vec{y}, t)$ für $t > 0$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung.
- (iii) Für alle $t > 0$ ist $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\vec{x}, t) d\vec{x} = 1$.

BEWEIS. (i) und (ii) folgt durch Nachrechnen. (iii) lässt sich durch Transformation auf Polar- bzw. Kugelkoordinaten ausrechnen; siehe Übung. \square

Wie in einer Dimension kann man jetzt die Lösung zu

$$\partial_t u(\vec{x}, t) - \Delta u(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^d, t > 0, \quad (10.7)$$

$$u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (10.8)$$

mit Hilfe der Fundamentallösung und dem Duhamel-Prinzip darstellen.

Satz 10.7 (Lösungsdarstellung). Seien $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ und $u_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist

$$u(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\vec{x} - \vec{y}, t) u_0(\vec{y}) d\vec{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\vec{x} - \vec{y}, t - s) f(\vec{y}, s) d\vec{y} ds$$

die eindeutige beschränkte klassische Lösung zu (10.7)–(10.8).

BEWEIS. Der Nachweis, dass es sich um eine Lösung handelt, folgt formal durch Nachrechnen. Die Eindeutigkeit erhält man z.B. wieder mittels Energieabschätzung; vgl. hierzu den eindimensionalen Fall in Kapitel 5. \square

Bemerkung 10.8. An der Lösungsdarstellung erkennt man, dass sich u durch wieder Superposition von verschobenen Fundamentallösungen ergibt! In den folgenden Kapiteln werden wir noch Techniken kennen lernen, mit denen sich obige Lösungsdarstellung mit formaler Rechnung relativ einfach herleiten lässt.

10.4 Aufgaben

Aufgabe 10.1. Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung der Aussagen von Satz 10.1 im Kontext der instationären Wärmeleitung.

Aufgabe 10.2. Beweisen Sie Satz 10.1.

Hinweis: Analog zum Beweis von Satz 6.2 mit $w(\vec{x}, t) = u(\vec{x}, t) + \alpha|\vec{x} - \bar{x}|^2$.

Aufgabe 10.3. Zeigen Sie mit Satz 10.1 die Aussagen (i)-(iv) von Satz 10.2.

Aufgabe 10.4 (Energieabschätzung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend regulärem Rand und u klassische Lösung zu

$$\partial_t u(\vec{x}, t) - \Delta u(\vec{x}, t) = f \quad \vec{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (10.9)$$

$$\partial_n u(\vec{x}, t) + u(\vec{x}, t) = g \quad \vec{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (10.10)$$

mit homogene Daten $f = 0$ und $g = 0$. Zeigen Sie, dass dann $\int_{\Omega} |u(\vec{x}, t)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |u(\vec{x}, s)|^2 dx$ für alle $t \geq s \geq 0$ gilt.

Aufgabe 10.5. Zeigen Sie, dass die Lösung zu (10.9)–(10.10) für gegebene Funktionen f und g und Anfangswerten $u(x, 0) = u_0(x)$ eindeutig ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Differenz von zwei Lösungen und benutzen Sie das Ergebnis der vorhergehenden Aufgabe.

Aufgabe 10.6. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\rho c_v \partial_t \theta - \operatorname{div}(\kappa \nabla \theta) = 0 \quad \vec{x} \in \Omega, \quad t > 0$$

$$\kappa \partial_n \theta = 0 \quad \vec{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0$$

mit konstanten Parametern $\rho, c_v, \kappa > 0$. Zeigen Sie, dass $W(t) := \int_{\Omega} \rho c_v \theta(\vec{x}, t) d\vec{x}$ im gesamten Gebiet für alle Zeiten $t \geq 0$ erhalten bleibt.

Aufgabe 10.7. Sei $\Omega = (0, 1)^2$ das Einheitsquadrat und $T > 0$.

Stellen Sie die allgemeine Lösung zum Anfangs-Randwertproblem

$$\partial_t u = \Delta u \quad \vec{x} \in \Omega, \quad t > 0$$

$$u = 0 \quad \vec{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0$$

$$u = u_0 \quad \vec{x} \in \Omega, \quad t = 0$$

in Form einer Fourierreihe dar. Begründen Sie mit dieser Darstellung, dass die Lösungen für $t < 0$ im allgemeinen unbeschränkt sind. Die Wärmeleitungsgleichung kann also nicht stabil rückwärts in der Zeit gelöst werden.

Aufgabe 10.8. Sei $\Omega = (0, \pi)^2$. Geben Sie die allgemeine Lösung zu

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u & \vec{x} \in \Omega, t > 0 \\ \partial_n u &= 0 & \vec{x} \in \partial\Omega, t > 0 \end{aligned}$$

in Form einer Fourierreihe an und begründen Sie, dass sich durch Vorgabe von Anfangswerten die Lösung eindeutig bestimmen lässt.

Vergleichen Sie mit der entsprechenden Aussage für das Neumann-Randwert Problem für die Laplace-Gleichung.

Aufgabe 10.9. Sei $\Omega = (0, 1)^2$. Berechnen Sie für vorgegebene Funktionen $f(x, y, t) = x(1-x) + y(1-y)$ und $u_0(x, y) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y)$ die Lösung zum Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u + f, & \vec{x} \in \Omega, t > 0 \\ u &= 0 & \vec{x} \in \partial\Omega, t > 0 \\ u &= u_0 & \vec{x} \in \Omega, t = 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Suchen Sie zuerst nach einer partikulären Lösung u_p für die inhomogene Gleichung. Ergänzen Sie anschließend zu $u = u_p + u_h$ mit geeigneter Lösung u_h zur homogenen Gleichung.

Aufgabe 10.10. Überprüfen Sie die Aussagen (i) und (ii) in Satz 10.6 durch explizites Nachrechnen.

Aufgabe 10.11. Wir erinnern an die Substitutionsregel für Integrale

$$\int_{F(\Omega)} u(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega} u(F(\vec{y})) |\det DF(\vec{y})| d\vec{y},$$

wobei $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus sei, d.h., die Funktion ist stetig differenzierbar und bijektiv mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion.

Sei nun $F : (r, \phi) \rightarrow (x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ die Transformation in Polarkoordinaten und $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ radial-symmetrisch, d.h. $u(\vec{x}) = v(|\vec{x}|)$.

(a) Geben Sie eine möglichst einfache Formel zur Berechnung des Integrals

$\int_{B_1(0)} u(\vec{x}) d\vec{x}$ mit Hilfe der Funktion v an.

(b) Berechnen Sie das Integral für $u(\vec{x}) = |\vec{x}|$.

(c) Zeigen Sie Punkt (iii) von Satz 10.6.

Aufgabe 10.12. Sei $u(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\vec{x} - \vec{y}, t) u_0(\vec{y}) d\vec{y}$ mit Fundamentallösung

$\Phi(\vec{x}, t) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}}$ und Anfangswert u_0 stetig und beschränkt.

(a) Zeigen Sie, dass $\partial_t u(\vec{x}, t) - \Delta u(\vec{x}, t) = 0$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ und $t > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $u(\vec{x}, t) \rightarrow u_0(\vec{x})$ mit $t \rightarrow 0$.

Hinweis: Ganz ähnlich zum Beweis in einer Dimension.

Aufgabe 10.13. Sei $u(\vec{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\vec{x} - \vec{y}, t - s) f(\vec{y}, s) d\vec{y} ds$ mit Fun-

damentallösung $\Phi(\vec{x}, t) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}}$ und f stetig und beschränkt.

(a) Berechnen Sie $\partial_t u(\vec{x}, t)$ und $\Delta u(\vec{x}, t)$.

(b) Überzeugen Sie sich, dass u die inhomogene Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \Delta u = f$ mit homogenen Anfangswerten $u \equiv 0$ bei $t = 0$ löst.

Aufgabe 10.14. Sei $u(\vec{x}, t)$ wie in Satz 10.7 definiert. Zeigen Sie mit Hilfe der Positivität der Fundamentallösung, dass

(a) $f \geq 0$ und $u_0 \geq 0 \implies u \geq 0$.

(b) $f \leq 0$ und $u_0 \leq 0 \implies u \leq 0$.

11 Die Poissongleichung

Wie in Kapitel 7 gesehen, taucht die Poissongleichung

$$-\Delta u = f \quad (11.1)$$

in verschiedenen Anwendungen auf. Wir wiederholen kurz zwei davon.

11.1 Beispiele

Beispiel 11.1 (Stationäre Wärmeleitung). Wie im vorangegangenen Kapitel erläutert, lässt sich die stationäre Temperaturverteilung $\theta(\vec{x}, t)$ in einen Körper, der das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ einnimmt, beschreiben durch

$$-\operatorname{div}(\kappa \nabla \theta(\vec{x})) = s(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \Omega,$$

siehe (7.2). Zur vollständigen Beschreibung der Temperaturverteilung sind noch geeigneten Randbedingungen nötig, etwa

$$\begin{aligned} \theta(\vec{x}) &= g(\vec{x}) & \vec{x} \in \partial\Omega_D \\ \kappa \partial_n \theta(\vec{x}) &= h(\vec{x}) & \vec{x} \in \partial\Omega_N = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D. \end{aligned}$$

Im ersten Fall spricht man von einer **Dirichlet-** und im zweiten Fall von einer **Neumann-Randbedingung**. Vorgegeben wird dadurch die Temperatur bzw. der Wärmefluss über den Rand. Für $\kappa \equiv \text{const.}$ erhält man aus der stationären Wärmeleitungsgleichung durch Umstellen der Terme sofort die Poissongleichung (11.1).

Beispiel 11.2 (Potentialströmung).

Für die inkompressible Strömung eines Fluids in \mathbb{R}^3 gilt

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Ist die Strömung auch noch rotationsfrei (=wirbelfrei), dann gilt weiters

$$\operatorname{rot} \vec{u} = 0 \quad \text{und somit} \quad \vec{u} = -\nabla\phi$$

für ein geeignetes Potential ϕ . Hierbei ist $\operatorname{rot} \vec{u} = \nabla \times \vec{u}$ die Rotation von \vec{u} und die Bedingung “rotationsfrei” entspricht der “Integrabilitätsbedingung” im Lemma von Poincaré (Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen, exakte Differentialgleichungen), woraus die Existenz eines Potentials ϕ folgt; vgl. VL Mathematik MB. Durch Kombination der beiden Gleichungen erhält man sofort

$$-\Delta\phi = 0. \tag{11.2}$$

Dieser Spezialfall der Poissongleichung beschreibt also das Potential einer rotationsfreien inkompressiblen Strömung; die Gleichung (11.2) heißt deshalb auch **Potential-** oder **Laplacegleichung**.

Die Poissongleichung beschreibt außerdem noch das elektrische Potential, welches durch eine Ladungsverteilung hervorgerufen wird, siehe Übung; oder auch das Prinzip der Energieminimierung, siehe nächster Abschnitt.

11.2 Maximumprinzip

Wir betrachten im Folgenden die Poissongleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \tag{11.3}$$

auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (=offene beschränkte Menge). Ähnlich zur Wärmeleitungsgleichung erhält man folgende Eigenschaften.

Satz 11.3 (Maximumsprinzip).

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ klassische Lösung von (11.3). Dann gilt:

(i) Ist $f \leq 0$ in Ω , so nimmt u sein Maximum am Rand $\partial\Omega$ an, d.h.,

$$\max_{\vec{x} \in \overline{\Omega}} u(\vec{x}) \leq \max_{\vec{x} \in \partial\Omega} u(\vec{x}).$$

(ii) Gilt $f \geq 0$ in Ω , dann nimmt u sein Minimum am Rand an, d.h.,

$$\min_{\vec{x} \in \overline{\Omega}} u(\vec{x}) \geq \min_{\vec{x} \in \partial\Omega} u(\vec{x}).$$

Man veranschauliche sich die physikalische Bedeutung der beiden Aussagen anhand der stationären Wärmeleitung!

BEWEIS. (i) Angenommen, es wäre $u(\vec{x}^*) > \max_{\vec{x} \in \partial\Omega} u(\vec{x})$ für ein $\vec{x}^* \in \Omega$. Dann folgt $u(\vec{x}^*) \geq \max_{\vec{x} \in \partial\Omega} u(\vec{x}) + \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$. Somit nimmt auch

$$u^\alpha(\vec{x}) = u(\vec{x}) + \alpha|\vec{x} - \vec{x}^*|^2$$

für alle $0 \leq \alpha \ll 1$ sein Maximum an einer Stelle $\vec{x}^\alpha \in \Omega$ an. Durch elementares Nachrechnen sieht man, dass

$$-\Delta u^\alpha(\vec{x}) = -\Delta u(\vec{x}) - \alpha\Delta|\vec{x} - \vec{x}^*|^2 = f(\vec{x}) - 2\alpha d < 0, \quad (11.4)$$

wobei d die Raumdimension ist. Da nach Vorüberlegung $\vec{x}^\alpha \in \Omega$ Stelle eines Maximums von u^α in der offenen Menge Ω ist, folgt andererseits, dass die Hessematrix $Hu^\alpha(\vec{x}^\alpha)$ negativ semidefinit ist, d.h.,

$$\vec{v}^\top Hu^\alpha(\vec{x}^\alpha)\vec{v} \leq 0 \quad \text{für alle } \vec{v} \in \mathbb{R}^d.$$

Hieraus folgt insbesondere, dass $\partial_{x_j x_j} u^\alpha(\vec{x}^\alpha) \leq 0$ für $1 \leq j \leq d$, und somit

$$-\Delta u^\alpha(\vec{x}^\alpha) = -\sum_{j=1}^d \partial_{x_j x_j} u^\alpha(\vec{x}^\alpha) \geq 0.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu (11.4); also muss das Maximum auch am Rand angenommen werden. Aussage (ii) folgt analog, siehe Übung. \square

Aus dem Maximumsprinzip lassen sich wieder weitere Aussagen herleiten.

Satz 11.4 (Folgerungen aus dem Maximumsprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ eine klassische Lösung zu

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Aus $f \leq 0$, $g \leq 0$ folgt $u \leq 0$ und aus $f \geq 0$, $g \geq 0$ folgt $u \geq 0$.
- (ii) Die Lösung zu obigem Problem ist stets eindeutig.
- (iii) Es gilt $\|u\|_{\infty; \Omega} \leq C(\|f\|_{\infty; \Omega} + \|g\|_{\infty; \partial\Omega})$.

Bemerkungen: $\|v\|_{\infty; S} = \sup_{\vec{x} \in S} |v(\vec{x})|$ bezeichnet die Maximumsnorm.

BEWEIS. Die Aussagen folgen mit denselben Argumenten wie bei der in-stationären Wärmeleitungsgleichung in einer Dimension; siehe Übung. \square

Bemerkung 11.5. Eine Alternative zum Nachweis von Eindeutigkeit bzw. Nicht-Eindeutigkeit und zur Herleitung von a-priori Abschätzungen bieten Energieabschätzungen; siehe nächster Abschnitt und Übung.

11.3 Nichteindeutigkeit beim Neumannproblem

Wir betrachten die Poissongleichung mit Neumann-Randbedingungen

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (11.5)$$

$$\partial_n u = h \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (11.6)$$

Dieses Randwertproblem wird auch als “Neumannproblem” bezeichnet. Wir nehmen an, dass Ω beschränkt und $\partial\Omega$ hinreichend regulär ist, sodass die Green’sche Formel und der Gauß’sche Integralsatz anwendbar sind. Mit einfachen Überlegungen sieht man folgende Sachverhalte.

Satz 11.6 (Eindeutigkeit). Sei u klassische Lösung zum Neumannproblem (11.5)–(11.6). Dann ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ auch $w(\vec{x}) = u(\vec{x}) + c$ eine klassische Lösung. Weitere Lösungen kann es aber nicht geben.

BEWEIS. Seien u, w klassische Lösungen. Dann ist $z = u - w$ Lösung zu

$$\begin{aligned} -\Delta z &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \partial_n z &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Differentialgleichung mit z , integrieren über Ω und erhalten mit Hilfe der Green’schen Formel

$$0 = - \int_{\Omega} \Delta z(\vec{x}) z(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega} \nabla z(\vec{x}) \nabla z(\vec{x}) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} \partial_n z(\vec{x}) z(\vec{x}) ds(\vec{x}).$$

Wegen der Randbedingung ist der letzte Term null und $\int_{\Omega} |\nabla z(\vec{x})|^2 d\vec{x} = 0$. Hieraus folgt $\nabla z(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x}$ und somit $z(\vec{x}) \equiv \text{const}$. Das verwendete Beweisprinzip wird Energieabschätzung genannt. \square

Die Lösung zum Neumannproblem ist also nur eindeutig bis auf Konstante. Umgekehrt ist das Neumannproblem aber auch nicht für alle Daten lösbar.

Satz 11.7 (Lösbarkeit). Das Neumannproblem (11.5)–(11.6) kann nur dann eine klassische Lösung besitzen, wenn f und g kompatibel sind, d.h.

$$\int_{\Omega} f(\vec{x})d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} h(\vec{x})ds(\vec{x}) = 0.$$

BEWEIS. Wir nehmen an, dass eine Lösung u existiert. Durch Integration, Anwenden des Gauß'schen Integralsatzes und Verwendung der Randbedingung folgt dann

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\vec{x})d\vec{x} &= - \int_{\Omega} \Delta u(\vec{x})d\vec{x} = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u(\vec{x}))d\vec{x} \\ &= - \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \nabla u(\vec{x})ds(\vec{x}) = - \int_{\partial\Omega} h(\vec{x})ds(\vec{x}). \end{aligned}$$

Durch Umstellen der Terme folgt bereits die Behauptung. \square

Im Kontext der Wärmeleitung heißt das: Eine stationäre Temperaturverteilung kann nur dann existieren, wenn sich der Eintrag durch Wärmequellen mit dem Abfluss von Wärme über den Rand die Waage hält.

11.4 Trennung der Variablen

Auf einfachen Gebieten Ω lässt sich die Lösung zu Randwertaufgaben für die Poissongleichung wieder mit Hilfe der "Trennung der Variablen" konstruieren. Zur Veranschaulichung diskutieren wir ein Beispiel im Detail. Weitere Fälle werden in der Übung behandelt.

Beispiel 11.8 (Inhomogene Randbedingungen).

Wir betrachten die homogene Poissongleichung auf dem Einheitsquadrat mit inhomogenen Dirichlet Randbedingungen, genauer

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } (0, 1)^2, \quad (11.7)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\}, \quad (11.8)$$

$$u = g \quad \text{auf } [0, 1] \times \{1\}, \quad (11.9)$$

wobei $g \in C[0, 1]$ und $g(0) = g(1) = 0$; man mache sich hierzu eine Skizze.

Schritt 1 (Produktansatz). Wir suchen zunächst nach speziellen Lösungen der Form $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Einsetzen in die Differentialgleichung und Umordnen der Terme liefert hier mit der üblichen Argumentation

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \equiv \text{const.}$$

Zusammen mit den Randbedingungen erhalten wir somit

$$\begin{aligned} -X''(x) &= \lambda X(x), & x \in (0, 1), & & X(0) &= X(1) = 0 \\ Y''(y) &= \lambda Y(y), & y \in (0, 1), & & Y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Man beachte die Vorzeichen sowie das Fehlen einer der Randbedingungen. Die nicht-trivialen Lösungen zum ersten Problem für $\lambda_n = n^2\pi^2$ lauten

$$X_n(x) = c_n \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N},$$

Die entsprechenden Lösungen zum zweiten Problem sind dann

$$Y_n(y) = d_n \sinh(n\pi y).$$

Die Grundlösungen zu (11.7)–(11.8) in Produktform lauten hier also

$$u_n(x, y) = c_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Weitere Lösungen in der Produktform $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$ gibt es nicht.

Schritt 2 (Superpositionsansatz). Wir suchen nach einer Lösung für die beiden Gleichungen (11.7)–(11.8) in der Form

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y).$$

Falls die Koeffizienten c_n hinreichend schnell klein werden und somit die Reihe schnell genug konvergiert, darf gliedweise differenziert werden, und die Funktion u erfüllt nach Konstruktion und dem Superpositionsprinzip die Poissongleichung (11.7) sowie die homogenen Randbedingung (11.8); vergleiche mit Abschnitt 4.

Schritt 3 (Berechnung der Koeffizienten). Formales Einsetzen in die verbliebene Randbedingung (11.9) liefert

$$g(x) = u(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi).$$

Die rechte Seite entspricht der Darstellung von $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m \sin(n\pi x)$ als Fourierreihe. Mit der Formel zur Berechnung der Fourierkoeffizienten von g und Koeffizientenvergleich erhält man sofort

$$c_n = \frac{2}{\sinh(n\pi)} \int_0^1 g(x) \sin(n\pi x) dx.$$

Zusammen mit dem Lösungsansatz erhält man hiermit die Darstellung der Lösung u als Fourierreihe. Da die Koeffizienten hier sehr schnell abfallen, kann man zeigen, dass es sich um eine klassische Lösung handelt.

Bemerkung 11.9. Anhand der Lösungsdarstellung über Fourierreihen erkennt man, dass etwaige Oszillationen in den Randdaten für $y < 1$ sehr schnell gedämpft werden. Dies ist eine typische Eigenschaft der homogenen Poissongleichung (=Laplacegleichung), die auch als “elliptische Regularität” bezeichnet wird. Zur Veranschaulichung der Aussage denke man wieder an die stationäre Wärmeleitung!

Bemerkung 11.10. In ähnlicher Weise lässt sich auch die inhomogene Poissongleichung mit homogenen Randwerten

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$ behandeln. Hier sucht man zunächst nach Lösungen $u_{m,n}(x, y) = X_m(x)Y_n(y)$ zum Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

und macht dann den Reihenansatz $u(x, y) = \sum_{m,n} c_{m,n} u_{m,n}(x, y)$ für die

Lösung. Einsetzen in die Poissongleichung führt weiters formal auf

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\Delta u(x, y) = \sum_{n,m} c_{m,n} [-\Delta u_{m,n}(x, y)] \\ &= \sum_{m,n} c_{m,n} \lambda_{m,n} u_{m,n}(x, y). \end{aligned}$$

Dies entspricht gerade wieder der Fourierreihe für f bezüglich der Eigenfunktionen $u_{m,n}$. Die Koeffizienten $c_{m,n}$ lassen sich ähnlich wie zuvor mit der Formel für die Fourierkoeffizienten bestimmen; vgl. Abschnitt 4.

Lösungen mit inhomogenen rechten Seiten und inhomogenen Randbedingungen lassen sich aufgrund der Linearität schließlich wieder durch Lösungen von Teilproblemen zusammensetzen; mehr dazu in der Übung.

11.5 Aufgaben

Aufgabe 11.1. (i) In Abwesenheit eines zeitlich veränderlichen Magnetfeldes, gilt nach dem Faraday'schen Gesetz

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0.$$

Beschreiben Sie hiermit das elektrische Feld durch ein Potential.

(ii) Nach dem Gauß'schen Gesetz der Elektrostatik, vgl. auch mit Coulomb'schem Gesetz, bewirkt eine Ladung mit Dichte ρ in einem Volumen V , einen elektrischen Fluss durch die Oberfläche der Kugel, und zwar gemäß

$$\int_{\partial V} \vec{D}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) ds(\vec{x}) = \int_V \rho(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Leiten Sie eine entsprechende partielle Differentialgleichung her.

(iii) In einfachen Materialien gilt der lineare Zusammenhang $\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(\vec{x})$, wobei die Permittivität ϵ des Materials in der Kugel als konstant angenommen werden kann. Zeigen Sie hiermit, dass das elektrische Potential aus (i) durch eine Poissongleichung mit der Ladungsdichte ρ verknüpft ist.

Aufgabe 11.2. Beweisen Sie das Minimumprinzip aus Satz 11.3(ii).

Aufgabe 11.3. Beweisen Sie die Aussagen von Satz 11.4.

Aufgabe 11.4. Zeigen Sie mit einer Energieabschätzung, dass das Poissonproblem mit **Robin-Randbedingungen**

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ \partial_n u + \alpha u &= h && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für $\alpha > 0$ höchstens eine Lösung besitzen kann.

Hinweis: Man stelle zuerst die Gleichungen auf, die für die Differenz $u = u^1 - u^2$ zweier Lösungen gelten. Dann multipliziere man die Gleichung mit u und wende in einem der Terme partielle Integration an; vgl. Beweis von Satz 11.6.

Aufgabe 11.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein reguläres Gebiet mit Rand $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ und die Länge des Dirichlet-Randes $|\partial\Omega_D| > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_D \\ \partial_n u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_N = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D. \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung $u \equiv 0$ haben kann. Hinweis: Energieabschätzung.

Aufgabe 11.6. Sei Ω das Einheitsquadrat. Gesucht ist die Lösung zu

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Omega. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie mit “Trennung der Variablen” die Lösung in Form einer Fourierreihe; vgl. Bemerkung 11.10.

Aufgabe 11.7. Bestimmen Sie für $g(x) = x(1-x)$ die Lösung zu

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } (0, 1)^2 \\ \partial_n u &= 0 && \text{auf } \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\} \\ u &= g && \text{auf } [0, 1] \times \{1\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11.8. Sie $\Omega = (0, 1)^2$ und $\partial\Omega_i$, $i \in \{L, R, O, U\}$ das linke, rechte, obere bzw. untere Randstück. Gesucht ist die Lösung zu

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Diese soll in mehreren Schritten wie folgt konstruiert werden.

- (i) Finde Funktion $u_E(x, y) = a + bx + cy + dxy$, die mit g in den Eckpunkten übereinstimmt.
- (ii) Finde ähnlich wie in Beispiel 11.8 Lösungen $u_i, i \in \{L, R, O, U\}$ zu

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \setminus \partial\Omega_i \\ u &= g - u_E && \text{auf } \partial\Omega_i \end{aligned}$$

- (iii) Find die Lösung u_I zum Poissonproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit homogenen Randwerten; vgl. Bemerkung 11.10 und Aufgabe 11.6.

Zeigen Sie, dass dann $u = u_E + u_L + u_R + u_O + u_U + u_I$ die gesuchte Lösung zum ursprünglichen Poissonproblem ist. Hinweis: Nachrechnen.

Aufgabe 11.9. Bestimmen Sie für $g(x, y) = xy$ die Lösung zu

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 && \text{in } \Omega = (0, 1)^2 \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

12 Fouriertransformation und die Kirchhoff Formel

Wir betrachten die Wellengleichung im dreidimensionalen Raum

$$\partial_{tt}u - \Delta u = 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \quad (12.1)$$

welche nach Abschnitt 7 die Schallausbreitung im freien Raum mit Schallgeschwindigkeit $c \equiv 1$ beschreibt. Um Eindeutigkeit einer Lösung zu garantieren, fordern wir wieder zwei zusätzliche Anfangsbedingungen

$$u = u_0 \quad \text{und} \quad \partial_t u = u_1, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad t = 0. \quad (12.2)$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Resultate aus Kapitel 3, insbesondere die Lösungsdarstellung über die d'Alembert Formel, auf den dreidimensionalen Fall zu erweitern. Hierzu verwenden wir eine Integraltransformation, welche sich besonders zur Behandlung von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten eignet.

12.1 Fouriertransformation

In diesem Abschnitt führen wir die Fouriertransformation ein, welche eine Verallgemeinerung der Fourierreihenentwicklung auf \mathbb{R}^d darstellt. Um sie definieren zu können, benötigen wir

Definition 12.1 (Schnell fallende Funktionen).

Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ die Menge der reell- oder komplexwertigen Funktionen ϕ auf \mathbb{R}^d , welche unendlich oft stetig differenzierbar sind und samt ihren Ableitungen schnell abfallen, d.h., sodass für alle $k, l \geq 0$ gilt

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}|^k |D^\alpha \phi(\vec{x})| = 0 \quad \text{for alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^d, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Hierbei ist $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^d$ ein Multiindex, $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$ und D^α bezeichnet die $|\alpha|$ -fache Ableitung, und zwar je α_i -mal nach x_i .

Bemerkung 12.2. Man beachte, dass schnell fallende Funktionen glatt sind und ihre Ableitungen schneller fallen als jedes Polynom! Daher darf man bei schnell fallenden Funktionen die Regel der partiellen Integration (Gauß, Green) anwenden ohne Randterme berücksichtigen zu müssen.

Beispiel 12.3. (i) Die Funktion $\phi(\vec{x}) = e^{-|\vec{x}|^2}$ ist schnell fallend im Sinne der obigen Definition. Die Funktion $1/(1 + |x|^2)$ dagegen nicht.

(ii) Für $\alpha = (2, 1)$ ist $D^\alpha u(x, y) = \partial_x^2 \partial_y u(x, y) = \partial_{xxy} u(x, y)$.

Definition 12.4. Sei $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann heißt

$$(\mathcal{F}u)(\vec{k}) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} u(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \vec{k} \in \mathbb{R}^d,$$

die Fouriertransformierte von u . Man schreibt auch kurz $\widehat{u}(\vec{k}) = (\mathcal{F}u)(\vec{k})$. Die Abbildung $\mathcal{F} : u \mapsto \mathcal{F}u$ heißt Fouriertransformation auf \mathbb{R}^d .

Bemerkung 12.5. Die Existenz des Integrals ist im Sinne eines uneigentlichen Riemann Integrals gesichert. Dafür würde schon genügen, dass die Funktion u im Betrag integrierbar ist. Die folgenden Aussagen sind daher, soweit sie Sinn machen, auch für solche Funktionen gültig.

Beispiel 12.6. Die Fouriertransformierte von $u(x) = e^{-x^2/2}$ ist

$$\begin{aligned} \widehat{u}(k) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx - x^2/2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+ik)^2/2} e^{i^2 k^2/2} dx = \sqrt{2\pi} e^{-k^2/2}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass $\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+ik)^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ für alle $k \in \mathbb{R}$ gilt, was man zum Beispiel in Integraltabellen nachlesen kann.

Die Fouriertransformation besitzt folgende interessante Eigenschaften.

Satz 12.7. (i) Ist $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, dann ist auch $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(ii) $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist invertierbar mit

$$u(\vec{x}) = (\mathcal{F}^{-1}\widehat{u})(\vec{x}) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} \widehat{u}(\vec{k}) d\vec{k}.$$

(iii) Es gilt die Plancherel Identität $\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{u}(\vec{k})|^2 d\vec{k} = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |u(\vec{x})|^2 d\vec{x}$.

Für einen Beweis verweisen wir auf das Buch von Werner: Funktionalanalysis. Man vergleiche auch mit den Eigenschaften von Fourierreihen!

Für die Praxis sind des Weiteren die folgenden Rechenregeln wichtig.

Satz 12.8. Seien $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

- (i) $\mathcal{F}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{F}(u) + \beta \mathcal{F}(v)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- (ii) $\widehat{D^\alpha u}(\vec{k}) = (i\vec{k})^\alpha \widehat{u}(\vec{k})$ mit $\vec{z}^\alpha = \prod_i z_i^{\alpha_i}$ für Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.
- (iii) Sei $(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)dy$ die Faltung von u mit v .
Dann gilt $\widehat{u * v}(\vec{k}) = \widehat{u}(\vec{k}) \cdot \widehat{v}(\vec{k})$.

BEWEIS. Wir zeigen nur (ii): Mit partieller Integration nach x_i sieht man

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_{x_i} u}(\vec{k}) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \partial_{x_i} u(\vec{x}) d\vec{x} = - \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_i} (e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}) u(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= ik_i \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} u(\vec{x}) d\vec{x} = ik_i \widehat{u}(\vec{k}). \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt durch wiederholtes Anwenden. Die restlichen Aussagen und weitere Eigenschaften werden in der Übung gezeigt. \square

Beispiel 12.9. (i) Sei $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt $\widehat{\nabla u}(\vec{k}) = i\vec{k} \widehat{u}(\vec{k})$. Dabei wird die Fouriertransformation auf jede Komponente einzeln angewendet.

(ii) Für $\vec{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^d$ ist $\widehat{\operatorname{div} \vec{u}}(\vec{k}) = i\vec{k} \cdot \widehat{\vec{u}}(\vec{k})$.

(iii) Mit (i) und (ii) erhält man $\widehat{\Delta u}(\vec{k}) = (i\vec{k}) \cdot (i\vec{k}) \widehat{u}(\vec{k}) = -|\vec{k}|^2 \widehat{u}(\vec{k})$.

12.2 Formale Lösung der Wellengleichung

Wir leiten jetzt mit Hilfe der Fouriertransformation eine Darstellung für die Lösung zum Anfangswertproblem (12.1)–(12.2) her. Durch formales Anwenden der Fouriertransformation bezüglich \vec{x} auf die Gleichung (12.1) erhalten wir mit obigen Rechenregeln

$$\widehat{u}_{tt}(\vec{k}, t) + |\vec{k}|^2 \widehat{u}(\vec{k}, t) = 0, \quad \vec{k} \in \mathbb{R}^d, t > 0.$$

Für jedes fixe \vec{k} erhält man hier also eine gewöhnliche Differentialgleichung mit der allgemeinen Lösung

$$\widehat{u}(\vec{k}, t) = a(\vec{k}) \cos(|\vec{k}|t) + b(\vec{k}) \sin(|\vec{k}|t).$$

Transformation der Anfangsbedingungen liefert weiters

$$\widehat{u}(\vec{k}, 0) = \widehat{u}_0(\vec{k}) \quad \text{und} \quad \widehat{\partial_t u}(\vec{k}, 0) = \widehat{u}_1(\vec{k}).$$

Durch Einsetzen der Lösung in die Anfangsbedingungen erhält man

$$\widehat{u}_0(\vec{k}) = \widehat{u}(\vec{k}, 0) = a(\vec{k}) \quad \text{und} \quad \widehat{u}_1(\vec{k}) = \partial_t \widehat{u}(\vec{k}, 0) = |\vec{k}|b(\vec{k}).$$

Hieraus lassen sich die Koeffizienten $a(\vec{k})$ und $b(\vec{k})$ bestimmen. Anwenden der inversen Fouriertransformation liefert dann

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} \widehat{u}(\vec{k}, t) d\vec{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} \left(\widehat{u}_0(\vec{k}) \cos(|\vec{k}|t) + \widehat{u}_1(\vec{k}) \frac{\sin(|\vec{k}|t)}{|\vec{k}|} \right) d\vec{k}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Diese Formel gilt sogar in allgemeinen Raumdimensionen $d \geq 1$. In einer Dimension erhält man durch Umformen und Rücktransformation gerade wieder die d'Alembert Formel; siehe Übung.

12.3 Kirchhoff Formel

Die im vorigen Abschnitt gefundene Lösungsdarstellung lässt sich für Dimension $d = 3$ noch weiter vereinfachen, was auf eine Verallgemeinerung der d'Alembert Formel für den dreidimensionalen Fall führt.

Beispiel 12.10. Wir betrachten zunächst den Fall $u_0 \equiv 0$, d.h.,

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{x}\cdot\vec{k}} \widehat{u}_1(\vec{k}) \frac{\sin(|\vec{k}|t)}{|\vec{k}|} d\vec{k}. \quad (12.4)$$

Mittels Transformation auf Kugelkoordinaten lässt sich zeigen, dass

$$\frac{\sin(|\vec{k}|R)}{|\vec{k}|R} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|\vec{y}|=R} e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} ds(\vec{y}). \quad (12.5)$$

Um das zu zeigen, wählt man die z -Achse parallel zu \vec{k} und erhält durch diese Wahl $\vec{k} \cdot \vec{y} = |\vec{k}|R \cos \theta$ und

$$\begin{aligned} \int_{|\vec{y}|=R} e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}} ds(\vec{y}) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i|\vec{k}|R \cos \theta} R^2 \sin \theta d\phi d\theta \\ &= 2\pi R^2 \int_{-1}^1 e^{i|\vec{k}|Rz} dz = \frac{2\pi R}{i|\vec{k}|} \left(e^{i|\vec{k}|R} - e^{-i|\vec{k}|R} \right). \end{aligned}$$

Mit der Identität $\sin(|\vec{k}|R) = \frac{1}{2i}(e^{i|\vec{k}|R} - e^{-i|\vec{k}|R})$ und einfachen Umformungen folgt dann die Behauptung. Man beachte, dass hierbei $d = 3$ explizit verwendet wurde. Setzt man nun die Identität (12.5) mit $R = t$ in die Formel (12.4) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{u}_1(\vec{k}) \frac{1}{4\pi t} \int_{|\vec{y}|=t} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{y} + \vec{x})} ds(\vec{y}) d\vec{k} \\ &= \frac{1}{4\pi t} \int_{|\vec{y}|=t} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{y} + \vec{x})} \widehat{u}_1(\vec{k}) d\vec{k} \right) ds(\vec{y}), \end{aligned}$$

wobei wir die beiden Exponentialterme zusammengezogen und dann die Integrationsreihenfolge vertauscht haben. Das innere Integral ist genau die Rücktransformation $u_1(\vec{x} + \vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} + \vec{y})} \widehat{u}_1(\vec{k}) d\vec{k}$ und wir erhalten

$$u(\vec{x}, t) = \frac{t}{4\pi t^2} \int_{|\vec{y}|=t} u_1(\vec{x} + \vec{y}) ds(\vec{y}).$$

Somit ist die Lösung $u(\vec{x}, t)$ gerade das t -fache des Mittelwertes von u_1 über der Kugelschale mit Radius t .

Bemerkung 12.11. Der Fall mit $u_0 \neq 0$ und $u_1 \equiv 0$ kann in derselben Weise behandelt werden. Hierzu braucht man nur zu beachten, dass

$$\cos(|\vec{k}|t) = \frac{d \sin(|\vec{k}|t)}{dt} \frac{1}{|\vec{k}|}$$

ist; die genaue Rechnung wird in der Übung durchgeführt.

Zusammenfassend erhält man dann folgende explizite Lösungsformel für die Wellengleichung in drei Raumdimensionen.

Satz 12.12 (Kirchhoff Formel). Seien u_0, u_1 glatt und schnell fallend. Dann ist die Lösung zu (12.1)–(12.2) gegeben durch

$$u(\vec{x}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{|\vec{y}|=t} u_0(\vec{x} + \vec{y}) ds(\vec{y}) \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{|\vec{y}|=t} u_1(\vec{x} + \vec{y}) ds(\vec{y}).$$

Die Eindeutigkeit der Lösung wird weiter unten behandelt.

Bemerkung 12.13. (i) Wie bei der d'Alembert Formel lässt sich auch hier die Lösungsformel im Prinzip auch für relativ unglatte Daten anwenden.
(ii) Aus der Kirchhoff Formel ist sofort ersichtlich, dass sich Information durch Wellen in drei Raumdimensionen genau mit der Schallgeschwindigkeit, hier $c \equiv 1$, ausbreitet. Diese Eigenschaft wird auch Huygen'sches Prinzip genannt, und ist für das scharfe Hören und Sehen sehr wichtig!

12.4 Energieerhaltung

Wir zeigen noch, dass die klassische Lösung zur Wellengleichung im \mathbb{R}^d unter recht schwachen Bedingungen eindeutig ist. Hierzu verwenden wir, wie schon in Abschnitt 3, Energiargumente.

Satz 12.14 (Poynting-Theorem). Sei u eine klassische Lösung der Wellengleichung (12.1) auf einem beschränkten regulären Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und

$$E_\Omega(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\partial_t u(\vec{x}, t)|^2 + |\nabla u(\vec{x}, t)|^2 d\vec{x}.$$

die im Gebiet Ω enthaltene Energie der Welle. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} E_\Omega(t) = - \int_{\partial\Omega} \vec{S}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) ds(\vec{x}),$$

wobei $\vec{S}(\vec{x}, t) = -u_t(\vec{x}, t) \nabla u(\vec{x}, t)$ als **Poyntingvektor** bezeichnet wird.

BEWEIS. Durch Einsetzen in die Definition der Energie und mit Hilfe der Green'schen Formeln erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_\Omega(t) &= \int_\Omega u_{tt}(\vec{x}, t) u_t(\vec{x}, t) + \nabla u(\vec{x}, t) \cdot \nabla u_t(\vec{x}, t) d\vec{x} \\ &= \int_\Omega (u_{tt}(\vec{x}, t) - \Delta u(\vec{x}, t)) u_t(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \partial_n u(\vec{x}, t) u_t(\vec{x}, t) d\vec{x}. \end{aligned}$$

Da u Lösung zu (12.1) ist, fällt der erste Term weg, und der Integrand im zweiten Term lässt sich mittels

$$\partial_n u(\vec{x}, t) u_t(\vec{x}, t) = \vec{n}(\vec{x}) \cdot \nabla u(\vec{x}, t) u_t(\vec{x}, t) = -\vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{S}(\vec{x}, t)$$

umschreiben in den entsprechenden Term in der Behauptung. \square

Bemerkung 12.15. Die Gesamtenergie in Ω kann sich also nur durch Abstrahlung über den Rand verändern. Der Poyntingvektor beschreibt die Energieflussdichte und erlaubt insbesondere die über den Rand $\partial\Omega$ abgestrahlte Energie auszudrücken. Die Aussagen des Satzes gelten fast wörtlich auch für elektromagnetische Wellen und andere Arten von Schwingungen.

Als direkte Folgerung des obigen Satzes erhalten wir das folgende Resultat.

Satz 12.16. Sei u klassische Lösung von (12.1) auf \mathbb{R}^d mit

$$\int_{|\vec{y}|=R} \partial_n u(\vec{y}, t) u_t(\vec{y}, t) ds(\vec{y}) \rightarrow 0 \quad \text{mit} \quad R \rightarrow \infty \quad (12.6)$$

und für alle $t \geq 0$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u_t(\vec{x}, t)|^2 + |\nabla u(\vec{x}, t)|^2 d\vec{x} = 0.$$

Die gesamte Energie der Welle bleibt also für alle Zeiten erhalten.

Bemerkung 12.17. (i) Als direkte Konsequenz aus der Linearität der Gleichung erhalten wir, dass das Problem (12.1)–(12.2) höchstens eine klassische Lösung besitzen kann, die der Abklingbedingung (12.6) genügt. Diese ist durch die Kirchhoff Formel gegeben.

(ii) Für Wellen in endlichen Gebieten gelten wieder analoge Aussagen wie in einer Raumdimension. Insbesondere kann auf einfachen Gebieten und bei vorgegebenen Randwerten die Lösung mit Hilfe der “Trennung der Variablen” berechnet werden; mehr hierzu in der Übung.

12.5 Aufgaben

Aufgabe 12.1. Überprüfen Sie, welche der folgenden Funktionen schnellfallend im Sinne von Definition 12.1 sind.

- (i) $u(x) = e^{-ax}$;
- (ii) $u(x) = xe^{-x^2}$;
- (iii) $u(x) = e^{-|x|}$.

Geben Sie jeweils auch eine kurze Begründung für Ihre Behauptungen.

Aufgabe 12.2. Skizzieren Sie die folgenden Funktionen in einer Variablen, berechnen Sie die entsprechenden Fouriertransformierten $\widehat{u}(k) = (\mathcal{F}u)(k)$, und skizzieren Sie auch diese.

- (i) $u(x) = H(a - |x|)$ mit $H(r) = 1$ für $r > 0$ und $H(r) = 0$ sonst;
 (ii) $u(x) = e^{-a|x|}$

Beachte: Die Funktionen sind integrierbar und somit existiert die Fouriertransformation nach Bemerkung 12.5. Die Berechnung ist dann elementar.

Aufgabe 12.3. Zeigen Sie die Aussagen von Satz 12.8.

Aufgabe 12.4. Seien $u, v, w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Faltung $(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x - y)v(y)dy$.

- (i) $u * v = v * u$;
 (ii) $(u * v)' = u' * v = u * v'$;
 (iii) $(u * v) * w = u * (v * w)$.

Aufgabe 12.5. Sei $d = 1$. Leiten Sie mit Hilfe der Formeln

$$\cos(|k|t) = \cos(kt) = \frac{1}{2}(e^{ikt} + e^{-ikt})$$

und

$$\sin(|k|t)/|k| = \sin(kt)/k = \int_0^t \cos(ks)ds = \frac{1}{2} \int_0^t e^{iks} + e^{-iks} ds$$

und der Fourier-Rücktransformation aus der allgemeinen Lösungsformel (12.3) die bekannte d'Alembert Formel her.

Hinweis: Man sollte die Fälle $u_1 \equiv 0$ und $u_0 \equiv 0$ getrennt betrachten. Das Vorgehen ist dann ähnlich wie im Beispiel ??.

Aufgabe 12.6. Zeigen Sie im Detail die Behauptung von Bemerkung 12.11 und komplettieren Sie damit den Beweis von Satz 12.12.

Aufgabe 12.7. Sei u klassische Lösung zur Wellengleichung in \mathbb{R}^3 mit Anfangswerten $u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x})$ und $\partial_t u(\vec{x}, 0) = u_1(\vec{x})$, welche beschränkten Träger besitzen, d.h., $u_0(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) \equiv 0$ für $|\vec{x}| > R$. Zeigen Sie, dass dann auch $u(\vec{x}, t)$ für jedes $t > 0$ beschränkten Träger besitzt.

Aufgabe 12.8. Die Funktionen $u(\vec{x}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ heißen “ebene Wellen”. Zeigen Sie, dass diese Funktionen Lösungen zur Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} u(\vec{x}, t) - \Delta u(\vec{x}, t) = 0$$

mit Schallgeschwindigkeit $c = \omega/|\vec{k}|$ sind.

Aufgabe 12.9. Zeigen Sie, dass für $\vec{k} = (1, 0, 0)$ die ebenen Wellen aus voriger Aufgabe die Gestalt $u(x, y, z, t) = v(x, t)$ besitzen, und überprüfen Sie, dass v Lösung zur eindimensionalen Wellengleichung $\partial_{tt} v - \partial_{xx} v = 0$ ist. Diese ist also ein Spezialfall der dreidimensionalen Wellengleichung.

Aufgabe 12.10. Wir betrachten die gedämpfte Wellengleichung

$$\partial_{tt} u - \Delta u + u = 0.$$

Zeigen Sie, dass für eine hinreichend schnelle für $|x| \rightarrow \infty$ abklingende Lösung die modifizierte Energie

$$E_{mod}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u_t(\vec{x}, t)|^2 + |\nabla u(\vec{x}, t)|^2 + |u(\vec{x}, t)|^2 d\vec{x}$$

in der Zeit erhalten bleibt.

Aufgabe 12.11. Sei $\Omega = (0, 1)^2$. Das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u(x, y, t) - \Delta u(x, y, t) &= 0 & (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ u(x, y, t) &= 0 & (x, y) \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y), \quad \partial_t u(x, y, 0) &= 0 & (x, y) \in \Omega \end{aligned}$$

beschreibt das Schwingen, genauer die Auslenkung u , einer Membran die über einen quadratischen Rahmen gespannt ist, aus ihrer Ruhelage.

(i) Zeigen Sie mit einer Energieabschätzung, dass höchstens eine klassische Lösung zu obigem Problem existieren kann.

(ii) Berechnen Sie die Lösung durch “Trennung der Variablen”.

Aufgabe 12.12. Sei $\Omega = \{(x, y) : |(x, y)| < 1\}$ der Einheitskreis.

(i) Formulieren Sie die Wellengleichung und entsprechende Randbedingungen in Polarkoordinaten zur Beschreibung des Schwingens einer Membran die über einen kreisrunden Rahmen gespannt ist; vgl Aufgabe 12.11.

(ii) Machen Sie eine Produktansatz für die Lösung und formulieren Sie die entsprechenden gewöhnlichen Differentialgleichungsprobleme für die einzelnen Lösungskomponenten.

Bemerkung: Im Buch von Strauss im Kapitel 10.2 wird hiermit die Lösung zum Problem aus Punkt (i) in Form einer Fourierreihe berechnet.

13 Distributionen

Im Kontext der Wärmeleitungsgleichung haben wir gesehen, dass für die Integraldarstellung der Lösung zur homogenen Gleichung im Ganzraum

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|^2}{4t}} u_0(\vec{y}) d\vec{y} \xrightarrow{t \rightarrow 0} u_0(\vec{x})$$

gilt. Die Lösung $u(\vec{x}, t)$ zum Zeitpunkt t stellt also gerade ein gewichtetes Mittel der Anfangswerte u_0 um den Punkt \vec{x} dar, welches mit $t \rightarrow 0$ gegen $u_0(\vec{x})$ konvergiert. Wir stellen jetzt einen Rahmen vor, in dem sich diese Aussage und auch die entsprechende Lösungsdarstellung für die Poisson-Gleichung mit Hilfe der Fundamentallösung besser verstehen lassen.

13.1 Definitionen und Beispiele

Sowohl die linke als auch die rechte Seite in obiger Darstellung hängt linear von der Anfangsfunktion u_0 ab. Dies motiviert folgende Definition.

Definition 13.1. Eine lineare und stetige Abbildung $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (temperierte) Distribution. Dabei meint linear, dass

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

für alle $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt. Mit stetig ist gemeint, dass

$$T(u_n) \rightarrow T(u) \quad \text{falls } u_n \rightarrow u \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

wobei $u_n \rightarrow u$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ausdrückt, dass $D^\alpha u_n(\vec{x}) \rightarrow D^\alpha u(\vec{x})$ gleichmäßig und für alle Ableitungsordnungen $|\alpha|$ konvergiert; siehe Anhang.

Bemerkung 13.2. Die Menge der Distributionen $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ bildet einen Vektorraum, der mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet wird. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ wird die Menge der Testfunktionen genannt. Für die Auswertung $T(u)$ einer Distribution an einer Testfunktion schreiben wir auch $\langle T, u \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}$ oder kurz $\langle T, u \rangle$.

Beispiel 13.3. (i) Sei $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann definiert

$$\langle T_g, u \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} g(\vec{x})u(\vec{x})d\vec{x}$$

eine Distribution $T_g : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$. Linearität und Stetigkeit folgen sofort aus den Eigenschaften des Integrals; siehe Übung.

(ii) Die Abbildung $\delta_{\vec{x}} : u \mapsto u(\vec{x})$ ist linear, denn

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\vec{x}}, \alpha u + \beta v \rangle &= \delta_{\vec{x}}(\alpha u + \beta v) = (\alpha u + \beta v)(\vec{x}) \\ &= \alpha u(\vec{x}) + \beta v(\vec{x}) = \alpha \delta_{\vec{x}}(u) + \beta \delta_{\vec{x}}(v) = \alpha \langle \delta_{\vec{x}}, u \rangle + \beta \langle \delta_{\vec{x}}, v \rangle. \end{aligned}$$

Weiters ist die Abbildung stetig, denn

$$|\delta_{\vec{x}}(u_n) - \delta_{\vec{x}}(u)| = |u_n(\vec{x}) - u(\vec{x})| \leq \|u_n - u\|_{\infty},$$

woraus die Konvergenz mit $n \rightarrow \infty$ folgt, falls u_n gleichmäßig gegen u konvergiert. Die Abbildung $\delta_{\vec{x}}$ heißt “Delta-Distribution” oder auch “Dirac-Delta”. Oftmals wird statt δ_0 auch kurz δ geschrieben.

(iii) Die Abbildung $\delta_{|\vec{y}|=a} : u \mapsto \int_{|\vec{y}|=a} u(\vec{y})d\vec{y}$ beschreibt das Integral der Funktion u über der Kugelfläche mit Radius a . Auch hierbei handelt es sich um eine Distribution in obigem Sinne; siehe Übung.

Bemerkung 13.4. Jede lokal integrierbare und nicht zu schnell wachsende Funktion g lässt sich nach obigem Beispiel mit einer Distribution identifizieren. Statt T_g schreiben wir dann meist einfach g . Andererseits heißt eine Distribution, die sich mit Hilfe einer Funktion g in der Art (i) darstellen lässt, “regulär”. Wie Beispiel (ii) und (iii) belegen, gibt es auch nicht-reguläre Distributionen. Man nennt Distributionen daher manchmal auch “verallgemeinerte Funktionen”.

Als nächstes führen wir einen Konvergenzbegriff für Distributionen ein.

Definition 13.5. Seien T und T_n , $n \geq 1$ Distributionen in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Mittels

$$T_n(u) \rightarrow T(u) \quad \text{für alle } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \text{mit } n \rightarrow \infty$$

definieren wir die Konvergenz von Distributionenfolgen. Man schreibt dafür kurz $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$ oder $T_n \rightarrow T$ in \mathcal{S}' und sagt: “ T_n konvergiert gegen T im Sinne von Distributionen” oder kurz: “konvergiert distributionell”.

Beispiel 13.6. (i) Seien g und g_n für $n \geq 1$ beschränkt und stetig und es gelte $\|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann folgt

$$\langle T_{g_n}, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} g_n(\vec{x}) u(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^d} g(\vec{x}) u(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\mathbb{R}^d} [g_n(\vec{x}) - g(\vec{x})] u(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Da $g_n \rightarrow g$ gleichmäßig konvergiert und $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ integrierbar ist, verschwindet der letzte Term mit $n \rightarrow \infty$. Hieraus folgt $T_{g_n} \rightarrow T_g$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Das heißt: $g_n \rightarrow g$ gleichmäßig impliziert $g_n \rightarrow g$ (genauer: $T_{g_n} \rightarrow T_g$) im Sinne von Distributionen.

(ii) Sei $\phi(\vec{x}, t) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}}$. Nach Satz 10.7 gilt dann für jede Testfunktion $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, dass

$$\begin{aligned} \langle \phi(\cdot, t), u_0 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\vec{y}, t) u_0(\vec{y}) d\vec{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(0 - \vec{y}, t) u_0(\vec{y}) d\vec{y} \xrightarrow{t \rightarrow 0} u_0(0) = \langle \delta_0, u_0 \rangle. \end{aligned}$$

Man sagt, dass $\phi(\cdot, t) \rightarrow \delta_0$ mit $t \rightarrow 0$ im Sinne von Distributionen.

(iii) Für $\epsilon > 0$ definieren wir die Funktionen

$$\delta^\epsilon(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3}, & |\vec{x}| < \epsilon \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt für alle $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, dass

$$\langle \delta^\epsilon, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \delta^\epsilon(\vec{x}) u(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \int_{|\vec{x}| < \epsilon} u(\vec{x}) d\vec{x} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u(0) = \langle \delta, u \rangle.$$

Dies zeigt, dass $\delta^\epsilon \rightarrow \delta$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Der Grenzwert der Funktionen δ^ϵ ist keine reguläre Distribution, lässt sich also nicht mit einer Funktion darstellen!

Bemerkung 13.7. Obige Beispiele zeigen, dass sich Distributionen meist direkt oder durch Grenzübergänge aus gewöhnlichen Funktionen bilden lassen. Entsprechend sollten sich auch elementare Rechenregeln auf diese verallgemeinerten Funktionen übertragen lassen.

13.2 Ableitung von Distributionen

Wir erinnern an die Schreibweise $D^\alpha u(\vec{x})$ für die gemischte Ableitung von u , und zwar je α_i -mal nach x_i . Für $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha u(\vec{x})v(\vec{x})dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(\vec{x})D^\alpha v(\vec{x})d\vec{x},$$

da für schnell fallende Funktionen die Randterme bei der partiellen Integration verschwinden. Diese Beobachtung motiviert

Definition 13.8. Für eine Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definieren wir mittels

$$\langle D^\alpha T, u \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha u \rangle \quad \text{für alle } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

die distributionelle Ableitung $D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Bemerkung 13.9. Jede Distribution und somit auch jede integrierbare Funktion ist also im distributionellen Sinne beliebig oft differenzierbar!

Beispiel 13.10. (i) Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha T_g, u \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T_g, D^\alpha u \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} g(\vec{x})D^\alpha u(\vec{x})d\vec{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha g(\vec{x})u(\vec{x})d\vec{x} = \langle T_{D^\alpha g}, u \rangle. \end{aligned}$$

Im dritten Schritt haben wir hier partielle Integration angewendet und ausgenutzt, dass u schnell fällt und somit die Randterme verschwinden. Es gilt also $D^\alpha T_g = T_{D^\alpha g}$, d.h., die distributionelle Ableitung stimmt mit der klassischen Ableitung überein, falls die Funktion g hinreichend regulär ist.

(ii) Wir betrachten die Heaviside Funktion $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H(x) = 1$ für $x > 0$ und $H(x) = 0$ sonst. Dann gilt

$$\langle H', u \rangle = -\langle H, u' \rangle = -\int_0^\infty u'(x)dx = -u(x)\Big|_{x=0}^\infty = u(0) = \langle \delta, u \rangle.$$

Wir haben also gezeigt, dass $H' = \delta$ im Sinne von Distributionen gilt. Die distributionelle Ableitung von H ist demnach keine reguläre Distribution, also nicht im klassischen Sinne definiert!

(iii) Für die Ableitung der δ -Distribution gilt

$$\langle \delta', u \rangle = -\langle \delta, u' \rangle = -u'(0).$$

Wir schreiben dafür auch kurz $\delta'(u) = -u'(0)$.

Bemerkung 13.11 (Merkregel). Für eine stückweise glatte Funktion stimmt die distributionelle Ableitung überall dort, wo die Funktion klassisch differenzierbar ist, auch mit der klassischen Ableitung überein! Springt die Funktion, so erhält man als Ableitung dort eine δ -Distribution.

13.3 Faltung von Distributionen

Für unsere weiteren Überlegungen werden wir auch die Faltung von Funktionen und Distributionen benötigen. Wir wiederholen zunächst

Definition 13.12 (Faltung). Der Ausdruck

$$(v * w)(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} v(\vec{x} - \vec{y})w(\vec{y})d\vec{y}.$$

bezeichnet die Faltung zweier schnell-fallender Funktionen $v, w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Mittels einfacher Rechnung zeigt man folgende Eigenschaften

Satz 13.13. Seien $u, v, w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

- (i) $u * v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$; (ii) $u * v = v * u$; (iii) $(u * v) * w = u * (v * w)$; sowie
 (iv) $D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v)$ für alle Multiindizes α .

BEWEIS. Die Eigenschaften ergeben sich unmittelbar durch Nachrechnen. Zur Illustration zeigen wir (ii): Mit Substitution $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$ folgt

$$(u * v)(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} u(\vec{x} - \vec{y})v(\vec{y})d\vec{y} = \int_{\mathbb{R}^d} u(\vec{z})v(\vec{x} - \vec{z})d\vec{z}.$$

Die anderen Behauptungen folgen ähnlich; siehe Übung. □

Als nächstes wollen wir den Faltungsbegriff auf Distributionen erweitern. Hierzu ist folgende Beobachtung hilfreich. Durch Testen von $v * w$ mit u

und Substitution folgt

$$\begin{aligned}\langle v * w, u \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} v(\vec{x} - \vec{y}) w(\vec{y}) u(\vec{x}) d\vec{y} d\vec{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} v(\vec{z}) w(\vec{y}) u(\vec{z} + \vec{y}) d\vec{y} d\vec{z} = \langle v, u \diamond w \rangle\end{aligned}$$

mit $(w \diamond u)(\vec{z}) = \int_{\mathbb{R}^d} w(\vec{y}) u(\vec{z} + \vec{y}) d\vec{y}$. Wie oben folgt, dass $(w \diamond u) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Hiermit kann man nun auch die Faltung für Distributionen definieren.

Definition 13.14. Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ und $\vec{w} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet

$$\langle w * T, u \rangle := \langle T * w, u \rangle := \langle T, w \diamond u \rangle$$

die Faltung $T * w$ der Distribution T mit der schnell fallenden Funktion w . Dabei ist $(w \diamond u)(\vec{z}) = \int_{\mathbb{R}^d} w(\vec{y}) u(\vec{z} + \vec{y}) d\vec{y}$.

Durch Einsetzen in die Definition und elementares Nachrechnen erhält man nun folgende Aussagen.

Satz 13.15. Für $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ gilt

- (i) $T * w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
- (ii) $D^\alpha(T * w) = (D^\alpha T) * w = T * (D^\alpha w)$.

Bemerkung 13.16. Die Faltung einer Distribution T mit einer glatten Funktion w führt also stets auf eine glatte Funktion $T * w$. Auch das Falten mit weniger glatten Funktionen w hat stets einen glättenden Charakter. Die Faltung zweier Distributionen ist allerdings nicht immer wohl-definiert; siehe hierzu die Übungsaufgaben.

Für unsere weiteren Überlegungen ist das folgende Beispiel wichtig.

Beispiel 13.17. Für die Delta-Distribution gilt

$$\langle \delta * w, u \rangle = \langle \delta, w \diamond u \rangle = (w \diamond u)(0) = \int_{\mathbb{R}} w(y) u(y) dy = \langle w, u \rangle.$$

Dies zeigt, dass $\delta * w = w$ für alle hinreichend glatten Funktionen w gilt.

13.4 Fundamentallösungen

Mit Hilfe obiger Resultate können wir jetzt die Bedeutung der Fundamentallösung bei der Lösungsdarstellung etwas genauer beleuchten. Wir erklären kurz das prinzipielle Vorgehen.

Definition 13.18. Sei L ein linearer Differentialoperator auf \mathbb{R}^d mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt eine Funktion ϕ mit

$$L\phi = \delta \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

eine **Fundamentallösung** zum Differentialoperator L .

Bemerkung 13.19. Sei ϕ eine Fundamentallösung zu L . Dann gilt

$$L(\phi * f) = (L\phi) * f = \delta * f = f.$$

Eine Lösung zur inhomogenen Gleichung $Lu = f$ lässt sich also einfach durch Faltung $u = \phi * f$ mit der Fundamentallösung bestimmen.

Wir diskutieren jetzt die Anwendung dieses Arguments anhand von Beispielen, die wir im Rahmen der Vorlesung bereits kennengelernt haben.

Beispiel 13.20. Sei $\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}$. Dann gilt nach Satz 9.2 und den Rechenregeln für die Faltung, dass

$$(-\Delta\phi) * f = -\Delta(\phi * f) = -\Delta u = f = \delta * f.$$

Durch Vergleich der beiden Seiten sieht man, dass $-\Delta\phi = \delta$ im Sinne von Distributionen gilt; genau das wurde im Beweis zu Satz 9.2 bewiesen.

Bemerkung 13.21. Nach Aufgabe 11.1 und Satz 9.2 ist $u^\epsilon = \phi * \delta^\epsilon$ das elektrische Potential zur Ladungsverteilung δ^ϵ in \mathbb{R}^3 . Nach Beispiel 13.6(iii) gilt $\delta^\epsilon \rightarrow \delta$ in \mathcal{S}' mit $\epsilon \rightarrow 0$ und somit $u^\epsilon \rightarrow \phi$ mit $\epsilon \rightarrow 0$ im distributionellen Sinn. Die Fundamentallösung $\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}$ ist somit gerade das Potential einer Punktladung, das sogenannte Coulomb-Potential.

Als nächstes diskutieren wir die Wärmeleitungsgleichung.

Beispiel 13.22. Sei $\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}}$ die Fundamentallösung zur Wärmeleitungsgleichung. Dann gilt für $u(\cdot, t) = \phi(\cdot, t) * u_0$ und $t > 0$

$$\partial_t u(\cdot, t) - \Delta u(\cdot, t) = (\partial_t - \Delta)(\phi(\cdot, t) * u_0) = [(\partial_t - \Delta)\phi(\cdot, t)] * u_0 = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 10.6 benutzt haben. Weiters gilt

$$u_0 = \delta * u_0 = \lim_{t \rightarrow 0} (\phi(\cdot, t) * u_0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(\cdot, t).$$

Hiermit sieht man, dass $u = \phi * u_0 = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\vec{x} - \vec{y}, t) u_0(\vec{y}) d\vec{y}$ die Lösung zu

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 & \vec{x} \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ u &= u_0 & \vec{x} \in \mathbb{R}^d, t = 0, \end{aligned}$$

ist. Das ist gerade die Aussagen von Satz 10.7 im Fall $f \equiv 0$. Diese Aussage lässt sich auch uminterpretieren als

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(\cdot, t) - \Delta \phi(\cdot, t) &= 0 & t > 0 \\ \phi(\cdot, 0) &= \delta. \end{aligned}$$

Die Fundamentallösung ist hier also Lösung zur Wärmeleitungsgleichung mit speziellen Anfangswerten. Mit dem folgenden Beispiel zeigen wir, dass auch die Fundamentallösung zur Wärmeleitungsgleichung wieder in das Konzept von Definition 13.18 und Bemerkung 13.19 passt.

Beispiel 13.23. Sei u Lösung zur Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(\vec{x}, t) - \Delta u(\vec{x}, t) &= f(\vec{x}, t), & \vec{x} \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ u(\vec{x}, 0) &= u_0(\vec{x}), & \vec{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Wir setzen $u(\vec{x}, t) \equiv 0$ für $t < 0$. Dann springt u bei $t = 0$ und wir erhalten für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\partial_t u(\vec{x}, \cdot) = -\Delta u(\vec{x}, \cdot) + \delta_{t=0} u_0(\vec{x}).$$

Somit lässt sich die Wärmeleitungsgleichung formal umschreiben in

$$\partial_t u - \Delta u = f + u_0 \delta_{t=0} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}),$$

wobei wir wieder $f(\vec{x}, t) \equiv 0$ für $t < 0$ gesetzt haben. Wir erweitern nun auch die Fundamentallösung mittels

$$\phi(\vec{x}, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}}, & t > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

zu einer Funktion auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Aus obigen Überlegungen und Satz 10.7 folgt dann

$$\partial_t \phi - \Delta \phi = \delta_{(\vec{x}, t)=(0,0)} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$$

und die Lösung zur inhomogenen Wärmeleitungsgleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= (\phi * (f + u_0 \delta_{t=0}))(\vec{x}, t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\vec{x} - \vec{y}, t - s) (f(\vec{y}, s) + u_0(\vec{y}) \delta_{s=0}(s)) d\vec{y} ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\vec{x} - \vec{y}, t - s) f(\vec{y}, s) d\vec{y} ds + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\vec{x} - \vec{y}, t) u_0(\vec{y}) d\vec{y}. \end{aligned}$$

Dies entspricht gerade der Aussage von Satz 10.7.

Bemerkung 13.24. Auch die Lösungsformel für die Transportgleichung sowie die d'Alembert und Kirchhoff-Formeln für die Wellengleichung lassen sich in ähnlicher Weise motivieren. Insbesondere definieren die Formeln auch für nicht-glatte Daten Lösungen der Wellengleichung im distributionellen Sinn. Für weitere Details sei auf das Buch von Strauss verwiesen.

13.5 Weiterführende Themen*

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch einige weitere Sachverhalte.

13.5.1 Fouriertransformation von Distributionen

Zunächst erläutern wir die Erweiterung der Fourierertransformation auf Distributionen. Hierbei tauchen natürlicher Weise komplexwertige Funktionen $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Für diese setzen wir

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} u(\vec{x}) \overline{v(\vec{x})} d\vec{x}.$$

Hiermit gilt insbesondere $\langle u, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} |u(\vec{x})|^2 d\vec{x} \geq 0$. Dann lässt sich die Fouriertransformation wie folgt auf Distributionen erweitern.

Definition 13.25. Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ komplexwertig. Dann ist mit

$$\langle \mathcal{F}T, v \rangle := (2\pi)^d \langle T, \mathcal{F}^{-1}v \rangle \quad \text{für alle } v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

die Fouriertransformierte von T als Distribution $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definiert.

Die stimmt für reguläre Distributionen $T = T_g$ mit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gerade wieder mit der üblichen Definition der Fouriertransformation überein.

Beispiel 13.26. (i) Seien $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}u, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} u(\vec{x}) d\vec{x} \overline{v(\vec{k})} d\vec{k} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(\vec{x}) \overline{e^{i\vec{x} \cdot \vec{k}} v(\vec{k})} d\vec{k} d\vec{x} = (2\pi)^d \langle u, \mathcal{F}^{-1}v \rangle. \end{aligned}$$

Hieraus erklärt sich auch die Formel aus der Definition.

(ii) Für die Fouriertransformierte der Delta-Distribution gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\delta, v \rangle &= (2\pi)^d \langle \delta, \mathcal{F}^{-1}v \rangle = (2\pi)^d \overline{(\mathcal{F}^{-1}v)(0)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{v(\vec{x})} d\vec{x} = \langle 1, v \rangle. \end{aligned}$$

Somit ist $\mathcal{F}\delta = 1$, d.h., eine konstante Funktion.

(iii) Die konstante Funktion $g(\vec{x}) = 1$ lässt sich als Distribution auffassen und wir erhalten

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}1, w \rangle &= (2\pi)^d \langle 1, \mathcal{F}^{-1}w \rangle = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \overline{e^{-i\vec{k} \cdot 0} (\mathcal{F}^{-1}w)(\vec{x})} d\vec{x} \\ &= (2\pi)^d \overline{(\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}w)(0)} = (2\pi)^d \overline{w(0)} = (2\pi)^d \langle \delta, w \rangle. \end{aligned}$$

Somit ist $\mathcal{F}1 = (2\pi)^d \delta$ ein Vielfaches der Delta-Distribution.

Achtung: Manchmal werden die Fouriertransformation und ihre Inverse mit anderen Vorfaktoren definiert. Man findet daher für (ii) und (iii) in Tabellen manchmal etwas andere Konstanten!

13.5.2 Distributionen auf beschränkten Gebieten

Distributionen lassen sich in ähnlicher Weise auch auf beschränkten Gebieten definieren. Wir skizzieren die wesentlichen Begriffe.

Definition 13.27. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, d.h., eine beschränkte offene und zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^d .

(i) Für $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(\vec{x}) \neq 0\}}$ der Träger (englisch: support) von u . Falls $\text{supp}(u) \subset \Omega$ spricht man von “kompaktem Träger”.

(iii) Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(u) \subset \Omega\}$ die Menge der glatten Testfunktionen mit kompaktem Träger.

(iv) Mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge der Distributionen auf Ω , d.h., der linearen und stetigen Abbildungen $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$).

Bemerkung 13.28. (i) Testfunktionen $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ haben insbesondere kompakten Träger $\text{supp}(u) \subset \Omega$. Da Ω offen ist, muss u in einer Umgebung des Randes $\partial\Omega$ samt seinen Ableitungen verschwinden. Man kann wieder beliebig partiell integrieren, ohne Randterme beachten zu müssen.

(ii) Fast alle Definitionen und Rechenregeln für Distributionen $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ lassen sich beinahe wörtlich auf Distributionen $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ übertragen.

Beispiel 13.29. Sei $G(\vec{x}, \vec{y})$ die Green'sche Funktion für den Laplace-Operator $-\Delta$ auf Ω ; siehe Abschnitt 9.3. Dann gilt

$$-\Delta_{\vec{y}} G(\vec{x}, \cdot) = \delta_{\vec{x}} \quad \text{im distributionellen Sinn.}$$

Hierbei ist \vec{x} als Parameter zu verstehen und es wird nach \vec{y} abgeleitet.

13.6 Aufgaben

Aufgabe 13.1. Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T_g : u \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x)u(x)dx$$

linear und stetig im Sinne von Definition 13.1 ist.

Aufgabe 13.2. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\delta_{|\vec{x}|=a} : u \mapsto \int_{|\vec{x}|=a} u(\vec{x})d\vec{x}$$

linear und stetig im Sinne von Definition 13.1 ist.

Aufgabe 13.3. Zeigen Sie, dass für eine Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ auch die distributionelle Ableitung $D^\alpha T$ wieder eine Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ist.

Aufgabe 13.4. Berechnen Sie die erste und zweite distributionelle Ableitung von

$$(i) \quad f(x) = |x|; \quad \text{und} \quad (ii) \quad g(x) = \begin{cases} \sin(x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 13.5. Bestimmen Sie für die Distribution

$$\delta_{|\vec{x}|=1} : u \mapsto \int_{|\vec{x}|=1} u(\vec{x}) d\vec{x}$$

in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ die distributionellen Ableitungen $D^\alpha \delta_{|\vec{x}|=1}$ mit $|\alpha| \leq 1$.

Aufgabe 13.6. Zeigen Sie die Aussagen (i), (iii) und (iv) aus Satz 13.13.

Aufgabe 13.7. Sei $H(x)$ die Heaviside Funktion; siehe Beispiel 13.10(ii). Zeigen Sie, dass die Faltung $H * u$ eine Stammfunktion zu u ist.

Aufgabe 13.8. Berechnen Sie $D(x) = (H * H)(x)$ und $S(x) = (H * D)(x)$. Hinweis: Es handelt sich jeweils um stückweise Polynome.

Aufgabe 13.9. Zeigen Sie die Aussagen (ii) von Satz 13.15.

Aufgabe 13.10. Bestimmen Sie mit Satz 13.15 und Beispiel 13.17 eine Formel für die n -te Ableitung $\partial_x^{(n)} \delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Aufgabe 13.11. Zeigen Sie anhand des Laplace-Operators $-\Delta$ in \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, dass die Fundamentallösung im Allgemeinen nicht eindeutig ist.

Aufgabe 13.12. Bestimmen Sie eine Fundamentallösung zum eindimensionalen Laplace-Operator $-\partial_{xx}$.

Aufgabe 13.13. Eine Ladung der Größe $\int_{\mathbb{R}^3} q(\vec{x}) d\vec{x} = \langle q, 1 \rangle = 1$ wird gleichmäßig auf der Einheitskugelschale verteilt. Geben Sie eine Formel für q in Form einer Distribution und das zugehörige elektrische Potential an; vgl. Beispiel 13.3(iii) und Bemerkung 13.21.

Aufgabe 13.14. Bestimmen Sie mit Hilfe der d'Alembert Formel aus Abschnitt 4 eine Fundamentallösung zum Differenzialoperator $\partial_{tt}u - \partial_{xx}u$ der eindimensionalen Wellengleichung; vergleiche mit Beispiel 13.22 und 13.23.

14 Klassifikation von linearen Differentialgleichungen

Ein großer Teil der Vorlesung hat sich mit linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der folgenden Form beschäftigt

$$Lu(\vec{x}) := - \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i}(A_{ij}(\vec{x})\partial_{x_j}u(\vec{x})) + \sum_{j=1}^d b_j(\vec{x})\partial_{x_j}u(\vec{x}) + c(\vec{x})u(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Bemerkung 14.1. Ohne Beschränkung kann man annehmen, dass $A_{ij}(\vec{x}) = A_{ji}(\vec{x})$ symmetrisch ist, was wir in der Folge auch tun werden; siehe Übung.

14.1 Typeneinteilung

Die Poissongleichung, Wärmeleitungsgleichung, die Wellengleichung, und sogar die Transportgleichung lassen sich in obige Form bringen. Letztere ist allerdings eine Differentialgleichung erster Ordnung. Die Lösungsstruktur, das Verhalten der Lösung sowie die Anzahl und Art der benötigten Anfangs- und Randbedingungen für die verschiedenen Gleichungen war jedoch recht unterschiedlich. Wir teilen daher lineare Differentialgleichungen in verschiedene Typen ein.

Definition 14.2. Ein linearer Differentialoperator $L : u \mapsto Lu$ zweiter Ordnung der obigen Gestalt heißt

(i) **elliptisch** bei \vec{x} , falls die Matrix $A(\vec{x})$ positiv definit ist, d.h., alle Eigenwerte der Matrix $A(\vec{x})$ sind größer 0.

(ii) **hyperbolisch** bei \vec{x} , falls die Matrix $A(\vec{x})$ einen negativen und sonst lauter positive Eigenwerte besitzt.

(iii) **parabolisch** bei \vec{x} , falls $A(\vec{x})$ einen Eigenwert 0 und sonst lauter positive Eigenwerte besitzt und die erweiterte Matrix $[A(\vec{x})|b(\vec{x})]$ vollen Rang besitzt.

Gelten die entsprechenden Eigenschaften für alle $\vec{x} \in \Omega$, dann heißt der Operator L elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch auf Ω . Dieselben Bezeichnungen werden auch für die entsprechende partielle Differentialgleichung $Lu(\vec{x}) = f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Omega$ verwendet.

Beispiel 14.3. (i) Die Poissongleichung $-\Delta u = f$ in \mathbb{R}^d hat obige Struktur mit $A_{ij}(\vec{x}) = \delta_{i,j}$, $b \equiv 0$ und $c \equiv 0$. Die Eigenwerte von A sind also alle gleich 1. Die Gleichung ist daher elliptisch auf ihrem Definitionsgebiet.

(ii) Die Wellengleichung $\partial_{tt}u - \Delta u = 0$ auf \mathbb{R}^d kann man als Differentialgleichung in \mathbb{R}^{d+1} verstehen; dabei fassen wir die Zeit als $(d+1)$ te Variable auf. Die Gleichung hat dann obige Form mit $A_{ij} = 0$ für $i \neq j$, $A_{ii} = 1$ für $1 \leq i \leq d$ und $A_{ii} = -1$ für $i = d+1$; weiters ist $b \equiv 0$ und $c \equiv 0$. Die Gleichung ist also hyperbolisch auf ihrem Definitionsbereich.

(iii) Die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u - \Delta u = f$ kann ebenso wieder als Gleichung in \mathbb{R}^{d+1} verstanden werden. Hier ist $A_{ij} = 0$ für $i \neq j$, $A_{ii} = 1$ für $1 \leq i \leq d$ und $A_{ii} = 0$ für $i = d+1$; somit hat A einen 0 Eigenwert und d Eigenwerte 1. Weiters ist $b_j = 0$ für $1 \leq j \leq d$ und $b_{d+1} = 1$. Somit hat die erweiterte Matrix $[A|b]$ maximalen Rang. Die Wärmeleitungsgleichung ist also parabolisch auf ihrem Definitionsbereich.

Bemerkung 14.4. Bei Bedarf kann man die ganze Differentialgleichung mit -1 multiplizieren und so das Vorzeichen (der Eigenwerte) von A verdrehen. Die Typenbezeichnung lässt sich entsprechend erweitern. Wir nennen also sowohl $-\Delta$ als auch Δ elliptisch!

14.2 Diskussion der unterschiedlichen Typen

Die Bedeutung der Typeneinteilung liegt darin, dass Gleichungen desselben Typs ähnliche Phänomene beschreiben, ähnliche Anfangs- und Randbedingungen benötigen, und mit ähnlichen Techniken analysiert werden können. Wir fassen das kurz zusammen:

Elliptische Differentialgleichungen

Als Paradebeispiel für elliptische Differentialgleichungen haben wir das Poissonproblem kennengelernt. Aus den Aussagen, welche in den vorhergehenden Kapiteln hergeleitet wurden, lässt sich erkennen:

- Elliptische Gleichungen $Lu(\vec{x}) = f(\vec{x})$ in Ω beschreiben allgemeine Gleichgewichtsphänomene.
- Auf beschränkten Gebieten Ω wird eine Randbedingung (z.B. Dirichlet, Neumann, oder Robin) an jedem Punkt des Randes $\partial\Omega$ benötigt.
- Zur Lösungsdarstellung eignen sich, in Abhängigkeit der Parameter und des Gebietes, Fundamentallösung, Green'sche Funktion, Darstellungsformeln, oder Trennung der Variablen.
- Zur Weiteren Analyse können Maximumprinzip, Energieabschätzungen, oder das Dirichletprinzip verwendet werden.
- Für $f \equiv 0$ und reguläre Parameterfunktionen A , b und c ist die Lösung im Inneren des Gebietes regulär (elliptische Regularität).

Beispiel 14.5. (i) Für die Konvektions-Diffusionsgleichung

$$-\Delta u(\vec{x}) + \vec{b}(\vec{x}) \cdot \nabla u(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega$$

mit vorgegebenem glatten Geschwindigkeitsfeld \vec{b} gilt das Maximumprinzip und daraus abgeleitete Aussagen.

(ii) Sei ein $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes, hinreichend reguläres Gebiet und $a \in C^1(\bar{\Omega})$ sowie $c \in C(\bar{\Omega})$ strikt positiv. Dann besitzt das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(\vec{x})\nabla u(\vec{x})) + c(\vec{x})u(\vec{x}) &= f(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega \\ a(\vec{x})\partial_n u(\vec{x}) &= h(\vec{x}), & \vec{x} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

höchstens eine klassische Lösung. Diese lässt sich charakterisieren durch

$$E(u) = \min_{v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})} E(v)$$

mit Energie $E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(\vec{x}) |\nabla v(\vec{x})|^2 d\vec{x} - \int_{\Omega} f(\vec{x})v(\vec{x}) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} h(\vec{x})v(\vec{x}) ds(\vec{x})$.

Der Beweis zu obigen Aussagen wird in der Übung erbracht.

Parabolische Differentialgleichungen

Die Wärmeleitungsgleichung ist Paradebeispiel für parabolische Differentialgleichungen. Diese lassen sich wie folgt charakterisieren. Aus den entsprechenden Resultaten schließen wir:

- Parabolische Differentialgleichungen beschreiben allgemeine Diffusionsvorgänge, wie z.B. das Fließen von Wärme.
- Neben einer Randbedingung wird auf beschränkten Gebieten Ω genau eine Randbedingung für jeden Punkt des Randes $\partial\Omega$ benötigt.
- Die Lösung lässt sich, zumindest bei konstanten Koeffizienten, mit Hilfe der Fundamentallösung oder mit Trennung der Variablen darstellen.
- Eindeutigkeit und a-priori Schranken lassen sich mit Maximumprinzip und Energieabschätzung herleiten.
- Bei zeit-unabhängigen Daten konvergiert die Lösung mit $t \rightarrow \infty$ oftmals gegen einen stationären Zustand. Dieser wird durch eine entsprechende elliptische Differentialgleichung beschrieben.
- Im Gegensatz zur Wellengleichung breitet sich bei parabolischen Gleichungen Information unendlich schnell aus.

Beispiel 14.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend regulärem Rand und $a \in C^1(\overline{\Omega})$ strikt positiv, sowie \vec{b}, c stetig auf $\overline{\Omega}$.

(i) Mit einer Energieabschätzung folgt, dass die Differentialgleichung

$$\partial_t u(\vec{x}, t) - \operatorname{div}(a(\vec{x})\nabla u(\vec{x})) + \vec{b}(\vec{x})u(\vec{x}, t) + c(\vec{x})u(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t),$$

welche für $\vec{x} \in \Omega$ und $t > 0$ gelten soll, für vorgegebene Daten, d.h. rechte Seite $f(\vec{x}, t)$, $\vec{x} \in \Omega$, $t > 0$, Anfangswerte $u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Omega$ und Randwerte $u(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t)$, $\vec{x} \in \Omega$, $t > 0$, höchstens eine Lösung besitzt.

(ii) Falls $f \geq 0$, $g \geq 0$ und $u_0 \geq 0$ gilt, dann folgt $u \geq 0$ für alle $t \geq 0$. Dies lässt sich mit einem Maximumprinzip beweisen.

Hyperbolische Differentialgleichungen

Als Beispiel für hyperbolische Differentialgleichungen haben wir die Wellengleichung in ein und drei Raumdimensionen kennengelernt. Aus den Überlegungen und Resultate für diese Gleichungen lässt sich erschließen:

- Hyperbolische Differentialgleichungen beschreiben die Ausbreitung von Wellen und andere Schwingungsphänomene.

- Für die Wohlgestelltheit werden zwei Anfangsbedingungen sowie auf beschränkten Gebieten Ω eine Randbedingung am gesamten Rand $\partial\Omega$ benötigt.
- Die Lösung im freien Raum lässt sich, bei konstanten Koeffizienten, durch Formeln wie die von d'Alembert oder Kirchhoff darstellen. Auf beschränkten Gebieten kann wieder Trennung der Variablen verwendet werden.
- Hyperbolische Differentialgleichungen Sie modellieren das Prinzip der Energieerhaltung.
- Die Lösung beschreibt Energietransport bzw. Ausbreitung von Information mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Beispiel 14.7. (i) Die Gleichung

$$\begin{aligned} c(\vec{x})\partial_{tt}p(\vec{x}, t) - \operatorname{div}(a(\vec{x})\nabla p(\vec{x}, t)) + d(\vec{x})\partial_t p(\vec{x}, t) &= 0, & \vec{x} \in \Omega, t > 0, \\ a(\vec{x})\partial_n p(\vec{x}, t) &= 0, & \vec{x} \in \partial\Omega, t > 0, \end{aligned}$$

beschreibt die Ausbreitung einer gedämpften Welle in einem beschränkten Gebiet Ω , das mit einem inhomogenen Material gefüllt und mit einer schallharten Wand umgeben ist. Die Parameterfunktionen a , c und d seien wieder glatt und strikt positiv. Mit Energieabschätzung zeigt man, dass die Lösung durch Vorgabe von Anfangswerten

$$p(\vec{x}, 0) = p_0(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \partial_t p(\vec{x}, 0) = p_1(\vec{x}), \quad x \in \Omega$$

eindeutig festgelegt wird. Aufgrund der Dämpfung nimmt die Energie $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(\vec{x})|\partial_t p(\vec{x}, t)|^2 + a(\vec{x})|\nabla p(\vec{x}, t)|^2 d\vec{x}$ mit der Zeit ständig ab.

(ii) Die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{D}(\vec{x}, t) + \sigma(\vec{x})E(\vec{x}, t) &= \operatorname{rot} H(\vec{x}, t), & \vec{x} \in \Omega, t > 0, \\ \partial_t B(\vec{x}, t) &= -\operatorname{rot} E(\vec{x}, t), & \vec{x} \in \Omega, t > 0, \end{aligned}$$

beschreiben zusammen mit den Materialgesetzen $\vec{D}(\vec{x}, t) = \epsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}, t)$ und $\vec{B}(\vec{x}, t) = \mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x}, t)$ die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Die strikt positiven und glatten Parameterfunktionen ϵ , μ und σ charakterisieren die Eigenschaften des Mediums in Ω . Durch Differenzieren der ersten Gleichung nach t und Einsetzen der zweiten Gleichung lässt sich eine "hyperbolische" Differentialgleichung für \vec{E} herleiten.

Ist das Gebiet Ω elektrisch isoliert, dann gilt weiters

$$\vec{n}(\vec{x}) \times \vec{E}(\vec{x}, t) = 0 \quad \vec{x} \in \partial\Omega, t > 0.$$

Ähnlich wie in (i) lässt sich nun wieder zeigen, dass zu vorgegebenen Anfangswerten $\vec{E}(\vec{x}, 0) = \vec{E}_0(\vec{x})$ und $\vec{H}(\vec{x}, 0) = \vec{H}_0(\vec{x})$ eine eindeutige Lösung existiert, deren Energie $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon(\vec{x}) |\vec{E}(\vec{x})|^2 + \mu(\vec{x}) |\vec{H}(\vec{x})|^2 d\vec{x}$ stetig abnimmt.

14.3 Aufgaben

Aufgabe 14.1. Welchen Typ besitzen die folgenden Gleichungen

(i) $2\partial_{xx}u(x, y) - \partial_{xy}u(x, y) + 2\partial_{xx}u(x, y) = 0;$

(ii) $e^x \partial_x^2 u(x, y) - e^y \partial_y^2 u(x, y) = f(x, y).$

Aufgabe 14.2. Zeigen Sie die Aussage von Beispiel 14.5(i).

Aufgabe 14.3. Zeigen Sie die Aussage von Beispiel 14.5(ii).

Aufgabe 14.4. Verifizieren Sie die Behauptung von Beispiel 14.6(i).

Aufgabe 14.5. Beweisen Sie die Behauptung von Beispiel 14.6(ii).

Aufgabe 14.6. Überprüfen Sie die Aussagen von Beispiel 14.7(i).

Aufgabe 14.7. Überführen Sie die Maxwell-Gleichungen aus Beispiel 14.7(ii) auf eine Differentialgleichung (eigentlich: ein DGL-System) zweiter Ordnung für \vec{E} .

Aufgabe 14.8. Zeigen Sie mit Hilfe der vorigen Aufgabe, die Energieabschätzung zu Beispiel 14.7(ii).