

Vorlesungsskript

Höhere Mathematik II

Steffen Roch

17. Juli 2017

Technische Universität Darmstadt
Sommersemester 2017

Vorwort

Der vorliegende Text wurde von Mads Kyed als Skript für die Vorlesung *Höhere Mathematik II* im Sommersemester 2015 an der TU Darmstadt konzipiert und von Christian Mönch für seine Vorlesung (TU Darmstadt, SS 2016) geringfügig modifiziert. Wesentliche Bestandteile gehen auf das Skript von Philipp Habegger (TU Darmstadt, SS 2014) zurück. Ich danke den Genannten für die freundliche Zurverfügungstellung des Materials.

Für Korrekturen und Anmerkungen zum Skript in der Vorlesung oder per Email an

`roch@mathematik.tu-darmstadt.de`,

bin ich sehr dankbar.

Steffen Roch
Darmstadt, 2017

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
1 Matrixrechnung und Eigenwerttheorie	1
1.1 Wiederholung: Matrizen, Gaußverfahren und Determinanten	1
1.2 Eigenwerttheorie	13
2 Mehrdimensionale Differentialrechnung	25
2.1 Einleitung	25
2.2 Folgen und Stetigkeit	26
2.3 Partielle Ableitungen	30
2.4 Totale Differenzierbarkeit	37
2.5 Bestimmen von Extrema in mehreren Variablen	41
2.6 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen	46
3 Mehrdimensionale Integration	51
3.1 Zweidimensionale Integration	51
3.2 Dreidimensionale Integration	55
3.3 Kurvenintegrale	59
3.4 Oberflächenintegrale	63
3.5 Integralsätze von Gauß und Stokes	66
4 Gewöhnliche Differentialgleichungen	69
4.1 Erste Beispiele und Begriffe	69
4.2 DGLen mit getrennten Variablen	71
4.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	73
4.4 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	74
5 Differentialgleichungssysteme	79
5.1 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	79
5.2 Lineare DGL höhere Ordnung als System	82
Literaturverzeichnis	83
Index	84

1 Matrixrechnung und Eigenwerttheorie

Dieses Kapitel schließt sich dem Kapitel „Elemente der linearen Algebra“ der Vorlesung *Höhere Mathematik I* an.

1.1 Wiederholung: Matrizen, Gaußverfahren und Determinanten

Definition 1.1.1 (Matrix). Eine Menge von Elementen

$$\{a_{ij} \in \mathbb{R} \mid i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$$

geordnet in n Zeilen und m Spalten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

heißt $n \times m$ -**Matrix**. Mit $M_{n,m}(\mathbb{R})$ oder $\mathbb{R}^{n \times m}$ bezeichnen wir die Menge aller $n \times m$ -Matrizen. Mit (a_{ij}) bezeichnen wir eine Matrix in $M_{n,m}(\mathbb{R})$.

Beispiel 1.1.2.

$$2 \times 3\text{-Matrix: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3\text{-Matrix: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Definition 1.1.3 (Koeffizientenmatrix). Die Koeffizienten des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

bilden die **Koeffizientenmatrix**

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

1 Matrixrechnung und Eigenwerttheorie

Führen wir die (Spalten-)Vektoren $b := (b_1, \dots, b_n)^T$ und $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ein, so können wir mit der Koeffizientenmatrix das Gleichungssystem als

$$Ax = b$$

schreiben. Ist x unbekannt, so stellen wir das Gleichungssystem durch die **erweiterte Koeffizientenmatrix**

$$(A|b) := \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3m} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

dar.

Definition 1.1.4. Eine Matrix ist in **Zeilenstufenform**, wenn jede Zeile entweder

- I) mehr aufeinanderfolgende Nullen am Zeilenanfang hat als die direkt darüber stehende Zeile oder
- II) eine Nullzeile ist.

Der erste von 0 verschiedene Eintrag einer Zeile wird auch als *Pivotelement* bezeichnet.

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} 0 & \dots & 0 & \mathbf{X} & * & \dots & * & * & \dots & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{X} & * & \dots & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mathbf{X} & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{X} & \dots & * \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Beispiel 1.1.5.

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{array} \right) \quad \text{Keine Zeilenstufenform!}$$

1.1 Wiederholung: Matrizen, Gaußverfahren und Determinanten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Zeilenstufenform! (•} \rightsquigarrow \text{Pivotelement)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Keine Zeilenstufenform!}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Zeilenstufenform! (•} \rightsquigarrow \text{Pivotelement)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Keine Zeilenstufenform!}$$

Wir erinnern uns, dass es für eine Matrix in Zeilenstufenform besonders einfach ist, das zugehörige Gleichungssystem zu lösen.

Satz 1.1.6 (Lösbarkeit linearer GLS). *Sei A die Koeffizientenmatrix und $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems. Ist A in Zeilenstufenform, so gilt:*

- A) *Das Gleichungssystem hat genau dann keine Lösung, wenn für mindestens ein i die i -te Zeile von A eine Nullzeile ist und $b_i \neq 0$.*
- B) *Hat das Gleichungssystem eine Lösung (siehe A)), und gibt es in jeder Spalte von A ein Pivotelement, dann besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.*
- C) *Hat das Gleichungssystem eine Lösung (siehe A)), und existiert eine Spalte ohne Pivotelement, dann besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.*

Beweis.

- A) Sei die i -te Zeile von A eine Nullzeile. Die i -te Gleichung des Gleichungssystems ist dann

$$0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_m = b_i.$$

Ist $b_i \neq 0$ existiert somit keine Lösung.

- B) Gibt es in jeder Spalte von A ein Pivotelement (o.B.d.A gleich 1), dann ist das

1 Matrixrechnung und Eigenwerttheorie

Gleichungssystem in der Form:

$$\begin{aligned}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\x_3 + \dots + a_{3m}x_m &= b_3 \\&\vdots \\x_m &= b_m.\end{aligned}$$

In diesem System ist x_m eindeutig durch b_m bestimmt. Substituieren wir in den anderen Gleichungen x_m durch b_m , so erhalten wir für x_{m-1} einen eindeutigen Wert. Wiederholen wir diesen Vorgang, erhalten wir für jedes x_k einen eindeutigen Wert.

- C) Nehmen wir o.B.d.A. an, dass es nur in der zweiten Spalte kein Pivotelement gibt. Dann ist das Gleichungssystem in der Form:

$$\begin{aligned}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\x_3 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\&\vdots \\x_m &= b_m.\end{aligned}$$

Wir wählen nun einen beliebigen Wert t für x_2 und schreiben das System als

$$\begin{aligned}x_1 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 - a_{12}t \\x_3 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\&\vdots \\x_m &= b_m.\end{aligned}$$

Wiederholen wir nun den Vorgang aus B), so erhalten wir für x_1, x_3, \dots, x_m eindeutige Werte. Da x_2 beliebig gewählt werden kann, haben wir unendlich viele Lösungen.

□

Beispiel 1.1.7. Das LGS

$$(A|b) := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

hat unendlich viele Lösungen, denn in der dritten und fünften Spalte von A gibt es kein Pivotelement.

Beispiel 1.1.8. Das LGS

$$(A|b) := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

hat keine Lösung, denn die vierte Zeile von A ist eine Nullzeile und $b_4 = 1 \neq 0$.

Beispiel 1.1.9. Das LGS

$$(A|b) := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

hat eine eindeutige Lösung, denn in allen Spalten von A gibt es Pivotelemente.

Methode 1.1.10 (Lösen eines LGS in Zeilenstufenform). Sei A die Koeffizientenmatrix und $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

mit unbekanntem x . Ist A auf Zeilenstufenform, so können wir die Lösungsmenge L des Gleichungssystems durch folgende Schritte bestimmen:

- 1) Ist für ein i die i -te Zeile von A eine Nullzeile und gleichzeitig $b_i \neq 0$, dann gilt $L = \emptyset$.
- 2) Für jede Spalte S_j von A ohne Pivotelement führen wir einen freien Parameter t_j ein. Somit erhalten wir die freien Parameter t_{j_1}, \dots, t_{j_k} .
- 3) Für jede von einer Nullzeile verschiedene Zeile Z_i von $(A|b)$ schreiben wir die zugehörige lineare Gleichung auf und ersetzen dabei für jeden freien Parameter die Unbekannte x_j durch t_j :

$$(*) \quad a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}t_j + \dots + a_{im}x_m = b_i.$$

- 4) Fangen wir von unten an, so können wir in den Gleichungen $(*)$ durch iterative Rücksubstitutionen die Unbekannten x_l , die nicht durch freie Parameter ersetzt wurden, der Reihe nach mittels der freien Parameter ausdrücken. Somit haben wir alle Unbekannten x_1, \dots, x_n mittels der freien Parameter ausgedrückt und damit

die Lösungsmenge als

$$\begin{aligned}
 L &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = c_{11}t_{j_1} + \dots + c_{k1}t_{j_k}, \\
 &\quad x_2 = c_{12}t_{j_1} + \dots + c_{k2}t_{j_k}, \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad x_n = c_{1n}t_{j_1} + \dots + c_{kn}t_{j_k} \\
 &\quad \text{für } t_{j_1}, \dots, t_{j_k} \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{t_{j_1}c_1 + t_{j_2}c_2 + \dots + t_{j_k}c_k \mid t_{j_1}, \dots, t_{j_k} \in \mathbb{R}\}
 \end{aligned}$$

ermittelt, wobei $c_i := (c_{i1}, \dots, c_{in}) \in \mathbb{R}^n$.

□

Wir betrachten nun ein beliebiges lineares Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Da wir die Lösungsmenge eines Gleichungssystems bestimmen können, wenn A auf Zeilenstufenform ist, werden wir versuchen A auf Zeilenstufenform zu bringen, ohne dadurch die Lösungsmenge zu ändern. Dazu erinnern wir uns an den GAUSS-Algorithmus ein.

Definition 1.1.11 (Elementare Matrixumformungen). Sei $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ eine Matrix. Wir bezeichnen die folgenden Umformungen von A als **elementar**:

- G1) Zwei Zeilen von A werden vertauscht: $Z_j \leftrightarrow Z_k$.
- G2) Multiplikation einer Zeile von A mit einer Zahl $c \neq 0$: $cZ_j \rightarrow Z_j$.
- G3) Zu einer Zeile von A wird das Vielfache einer anderen Zeile addiert: $Z_j + cZ_k \rightarrow Z_j$ für $j \neq k$.

Notation 1.1.12. Wir schreiben $A \sim A'$, falls wir durch Umformungen G1)–G3) die Matrix A in A' umformen können.

Satz 1.1.13. Durch mehrfaches Ausführen der elementaren Umformungen G1)–G3) lässt sich jede Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ auf Zeilenstufenform bringen.

Beweis. (GAUSS-Algorithmus) Die Reduktion erreicht man, indem man die folgenden Schritte zunächst für $i = 1$ (erste Zeile), dann für $i = 2$ (zweite Zeile) usw. ausführt:

- 1) Falls ab der i -ten Zeile nur noch Nullzeilen auftreten, beende die Durchführung.
- 2) Tausche sofern nötig die i -te Zeile mit einer der darunter stehenden Zeilen, so dass die Anzahl der führenden Nullen in der (neuen) i -ten Zeile kleinstmöglich wird.
- 3) Hat die $(i + 1)$ -te Zeile ein Pivotelement d , das unter dem Pivotelement c der i -ten Zeile steht, so addiere das $\frac{-d}{c}$ -fache der i -ten Zeile zur $(i + 1)$ -ten Zeile, sodass die Zahl unter dem Pivotelement der i -ten Zeile nachher gleich 0 ist; verfähre genauso nicht nur für die $(i + 1)$ -te Zeile, sondern auch für die $(i + 2)$ -te Zeile, die $(i + 3)$ -te Zeile und so weiter. (Es wird sich jedoch immer auf das Pivotelement der i -ten Zeile bezogen!)

□

Elementare (Zeilen-) Umformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix lassen die Lösungsmenge des Gleichungssystems unverändert.

Satz 1.1.14. Die Lösungsmenge eines LGS $(A|b)$ wird durch die elementaren Umformungen *G1*–*G3*) auf die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ nicht verändert.

Methode 1.1.15 (Lösen eines LGS mit dem GAUSS-Algorithmus). Sei A die Koeffizientenmatrix und $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit unbekanntem x .

- 1) Mit dem GAUSS-Algorithmus die Matrix $(A|b)$ auf Zeilenstufenform $(A'|b')$ bringen.
- 2) Lösungsmenge L mit Methode 1.1.10 bestimmen. □

Als entscheidenden Vorteil von Matrizen hatten wir ihre mathematische Struktur erkannt. Mit Matrizen kann man (fast) wie mit Zahlen *rechnen*.

Definition 1.1.16. Eine Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt **invertierbar** oder **regulär**, wenn es eine Matrix $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gibt mit der Eigenschaft

$$AC = CA = I_n.$$

Die Matrix C heißt **inverse Matrix** von A und wird mit A^{-1} bezeichnet. Ist eine Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ nicht **invertierbar**, so heißt A **singulär**.

Notation 1.1.17. Seien $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ zwei Matrizen. Mit

$$(A|B)$$

bezeichnen wir die Matrix, die aus den Spalten von A und B besteht.

Satz 1.1.18 (Berechnung von A^{-1}). Seien $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ zwei Matrizen. Gilt

$$(A|I_n) \sim (I_n|B),$$

so ist $A^{-1} = B$.

Einige wichtige Eigenschaften einer Matrix lassen sich bereits an einer einzigen Zahl ablesen – ihrer Determinante. Da die Determinantenberechnung über Permutationen für große Matrizen sehr aufwändig ist, benutzen wir gewöhnlich die LAPLACE-Entwicklung.

Definition 1.1.19 (Streichungsmatrix). Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Streichen wir aus A die i -te Zeile und j -te Spalte, so erhalten wir die **Streichungsmatrix** $A'_{ij} \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$.

$$A'_{ij} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1j-1} & a_{n-1j} & a_{n-1j+1} & \dots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definition 1.1.20 (Determinante). Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix. Die Zahl

$$\begin{aligned} n = 1 : \quad \det A &:= a_{11}, \\ n > 1 : \quad \det A &:= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det A'_{i1}. \end{aligned}$$

heißt **Determinante** von A .

Bemerkung 1.1.21. (Entwicklung nach k -ter Zeile/Spalte) In der obigen Definition benutzen wir der Einfachheit halber rekursiv die Entwicklung nach der ersten Spalte. Nach dem LAPLACESchen Entwicklungssatz können wir natürlich auch nach jeder anderen Zeile oder Spalte der Matrix entwickeln, ohne das Ergebnis zu verändern.

Bemerkung 1.1.22. (Determinante einer 2×2 -Matrix)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} a_{22} + (-1)^{2+1} a_{21} a_{12} = \underline{\underline{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}}$$

Beispiel 1.1.23.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 0 \\ &= 3 - 24 = \underline{\underline{-21}}. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.1.24. Für Matrizen in $M_{3,3}(\mathbb{R})$ gilt die Regel von SARRUS:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ & \searrow & \times & \times & \nearrow \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ & \nearrow & \times & \times & \searrow \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \right| \\ = \boxed{\sum \searrow - \sum \nearrow} \end{array}$$

1.1 Wiederholung: Matrizen, Gaußverfahren und Determinanten

$$\begin{aligned}
 &= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1 \\
 &= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1).
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.1.25.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ \searrow & \times & \times & \nearrow & \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ \nearrow & \times & \times & \searrow & \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{array} = 15 - 12 - 24 = \underline{\underline{-21}}.$$

Beispiel 1.1.26.

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} &= 0 + (-1)^{2+3} \cdot 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= -12 - 9 = \underline{\underline{-21}}.
 \end{aligned}$$

Korollar 1.1.27. Für $A \in M_{n,n}$ gilt $\det(A) = \det(A^T)$.

Satz 1.1.28 (Determinante und Zeilenvertauschung). Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit Zeilenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Für $j < k$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_j & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_k & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_n & \text{---} \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_k & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_j & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_n & \text{---} \end{pmatrix}$$

Das heißt, jede Zeilenvertauschung verursacht einen Vorzeichenwechsel in der Determinante.

Beweis. Vertauschen wir Zeile j mit Zeile $j + 1$, so erhalten wir für die Determinante durch eine Entwicklung nach Zeile $j + 1$:

$$\det \begin{pmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_{j+1} & \text{---} \\ \text{---} & a_j & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_n & \text{---} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j+1} a_{ji} A'_{ji} = -\det A.$$

1 Matrixrechnung und Eigenwerttheorie

Wiederholen wir den Vorgang $(k-j)$ -mal um die j -te Zeile $(k-j)$ Positionen nach unten zu rücken und weitere $(k-1-j)$ -mal um Zeile k in Position j zu bekommen, so wechselt das Vorzeichen $(2(k-j)-1)$ -mal. Da

$$(-1)^{2(k-j)-1} = -1,$$

folgt die Behauptung. □

Korollar 1.1.29. *Sind zwei Zeilen von A gleich, so ist $\det A = 0$.*

Satz 1.1.30 (Determinante und Zeilenaddition). *Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit Zeilenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Sei ferner $j \neq k$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $b_j := a_j + \lambda a_k$ gilt*

$$\det \begin{pmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_{j-1} & \text{---} \\ \text{---} & b_j & \text{---} \\ \text{---} & a_{j+1} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_n & \text{---} \end{pmatrix} = \det A.$$

Das heißt, der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile das Vielfache einer anderen addiert wird.

Beweis. Eine Entwicklung nach der j -ten Zeile ergibt

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_{j-1} & \text{---} \\ \text{---} & b_j & \text{---} \\ \text{---} & a_{j+1} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_n & \text{---} \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} (a_{ji} + \lambda a_{ki}) A'_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ji} A'_{ji} + \lambda \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ki} A'_{ji} \\ &= \det A + \lambda \det C, \end{aligned}$$

wobei man die Matrix $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ erhält, indem man in A die j -te Zeile mit a_k ersetzt. Da die j -te und k -te Zeile von C gleich sind, gilt $\det C = 0$. Es folgt die Behauptung. □

Satz 1.1.31 (Determinante und Skalarmultiplikation einer Zeile). *Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine*

1.1 Wiederholung: Matrizen, Gaußverfahren und Determinanten

Matrix mit Zeilenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \lambda a_j & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_n & \text{---} \end{pmatrix} = \lambda \det A.$$

Beweis. Eine Entwicklung nach der j -ten Zeile ergibt

$$\det \begin{pmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \lambda a_j & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_n & \text{---} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \lambda a_{ji} A'_{ji} = \lambda \det A.$$

□

Satz 1.1.32 (Determinante und elementare Umformungen). *Elementare Umformungen verursachen folgende Veränderung in der Determinante:*

G1) zwei Zeilen/Spalten von A werden vertauscht
 \Rightarrow Multiplikation mit -1 ,

G2) Multiplikation einer Zeile/Spalte von A mit einer Zahl $c \neq 0$
 \Rightarrow Multiplikation mit c ,

G3) zu einer Zeile/Spalte von A wird das Vielfache einer anderen Zeile/Spalte addiert
 \Rightarrow keine Veränderung.

Seien $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Gilt $A \sim B$, so ist also

$$\det A = \mu \det B$$

für ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Methode 1.1.33 (Determinantenberechnung durch GAUSS-Algorithmus). Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Ist n groß, so dauert es oft viel zu lange die Determinante von A per Spalten- oder Zeilenentwicklung zu bestimmen. Deutlich schneller geht es, wenn man die Matrix A durch Gauß-Schritte G1)–G3) zuerst auf Zeilenstufenform (siehe Satz 1.1.13) bringt. Ist nämlich $A \sim B$ und

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix},$$

1 Matrixrechnung und Eigenwerttheorie

so folgt

$$\det A = \mu \det B = \mu b_{11} \cdot b_{22} \cdots b_{nn}.$$

□

Beispiel 1.1.34. Zu Bestimmen:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Lösung: Es gilt

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\widetilde{z_3+3z_1 \rightarrow z_3}]{z_2-2z_1 \rightarrow z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3+11z_2 \rightarrow z_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: B.$$

Wir haben somit die Matrix A durch drei Ausführungen vom Gaussschritt **G3**) in B umgeformt. Da **G3**) die Determinante nicht ändert, folgt

$$\det A = \det B = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = \underline{\underline{-1}}.$$

□

Aus dem Vorsemester wissen wir bereits, dass sich der GAUSS-Algorithmus auch als iterierte Multiplikation mit bestimmten Matrizen auffassen lässt. In den Übungen werden wir uns dieser Tatsache noch einmal vergegenwärtigen. Wir halten auch noch einmal fest, dass die Determinante direkt Auskunft über die Regularität einer Matrix gibt.

Satz 1.1.35 (Determinante und Invertierbarkeit). *Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix. Es gilt*

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

Beweis. Mit GAUSS-Schritten bringen wir A auf Zeilenstufenform: $A \sim H$. Dann gilt $\det A = \mu \det H$ für ein $\mu \neq 0$. Es folgt:

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \text{Rang } A = n$$

$$\Leftrightarrow \text{Rang } H = n$$

$$\Leftrightarrow H \text{ hat in jeder Spalte ein Pivotelement}$$

$$\Leftrightarrow \det H = \det \begin{pmatrix} 1 & * & * & \text{---} & * \\ 0 & 1 & * & \text{---} & * \\ 0 & 0 & 1 & \text{---} & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

□

Satz 1.1.36 (Determinante und Matrixprodukt). Für $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Beweis.

A nicht invertierbar: Dann ist auch AB nicht invertierbar und somit $0 = \det(AB) = \det A \cdot \det B$.

A invertierbar: Dann ist $A \sim I$. Stellen wir die dazu benötigten GAUSS-Schritte als Matrix $G \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ dar, so folgt

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \mu \det(G(AB)) = \mu \det((GA)B) \\ &= \mu \det(B) \\ &= \mu \det(GA) \det(B) \\ &= \det(A) \det(B). \end{aligned}$$

□

Korollar 1.1.37. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertierbar. Dann gilt $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

1.2 Eigenwerttheorie

Die Determinante einer Abbildungsmatrix ist wichtig für eine Vielzahl von Berechnungen, kann aber offensichtlich nur einen kleinen Teil der Information wiedergeben, die in der Matrix enthalten ist. Weitere wichtige Eigenschaften einer Matrix (bzw. der zugehörigen linearen Abbildung) lassen sich an ihren *Eigenwerten* ablesen.

Definition 1.2.1 (Eigenwert und Eigenvektor). Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **Eigenwert** von A , wenn es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt, sodass

$$Av = \lambda v.$$

Der Vektor v heißt dann **Eigenvektor** zum **Eigenwert** λ .

Beispiel 1.2.2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } 2.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist kein Eigenvektor.}$$

Bemerkung 1.2.3. Der Nullvektor $v = 0$ ist kein Eigenvektor.

Definition 1.2.4 (Charakteristisches Polynom). Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Dann heißt

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

charakteristisches Polynom der Matrix A .

1 Matrixrechnung und Eigenwerttheorie

Satz 1.2.5 (Eigenwerte = Nullstellen des charakteristischen Polynoms). Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit charakteristischem Polynom p . Es gilt

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ Eigenwert von } A \Leftrightarrow p(\lambda) = 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & \lambda \in \mathbb{R} \text{ Eigenwert von } A \\ \Leftrightarrow & \exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : Av = \lambda v \\ \Leftrightarrow & \exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (A - \lambda I)v = 0 \\ \Leftrightarrow & \text{Rang}(A - \lambda I_n) < n \\ \Leftrightarrow & A - \lambda I_n \text{ nicht invertierbar} \\ \Leftrightarrow & \det(A - \lambda I_n) = 0. \end{aligned}$$

□

Definition 1.2.6 (Eigenraum). Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A . Der Vektorraum

$$E_\lambda := \ker(A - \lambda I_n)$$

heißt **Eigenraum** von λ .

Satz 1.2.7.

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ Eigenvektor zu } \lambda\} \cup \{0\}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} v \in E_\lambda & \Leftrightarrow v \in \ker(A - \lambda I_n) \\ & \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)v = 0 \\ & \Leftrightarrow Av = \lambda v \\ & \Leftrightarrow v \text{ Eigenvektor zu } \lambda \quad \vee \quad v = 0. \end{aligned}$$

□

Methode 1.2.8 (Eigenwerte und Eigenräume von $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ bestimmen).

- 1) Alle Nullstellen $p(\lambda) = 0$ bestimmen. (**Eigenwerte**)
- 2) Für jede Nullstelle λ das Gleichungssystem $(A - \lambda I_n|0)$ lösen. (**Eigenräume**)

Beispiel 1.2.9. Wir bestimmen alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Lösung:1) Charakteristisches Polynom p berechnen:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)(-\lambda(1-\lambda) - 3) - (-(1-\lambda) - 1) \\
&= (2-\lambda)(-\lambda(1-\lambda) - 3) + (2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)((-\lambda(1-\lambda) - 3) + 1) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)
\end{aligned}$$

Nullstellen von p bestimmen:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (2-\lambda) = 0 \quad \vee \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = 2}} \quad \vee \quad \underline{\underline{\lambda = -1}} \quad \vee \quad \underline{\underline{\lambda = 2}}
\end{aligned}$$

2) $(A - 2I_3|0)$ lösen:

$$\begin{aligned}
(A - 2I_3|0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$(A - 2I_3)v = 0 \Leftrightarrow v_3 = t \wedge v_2 = 0 \wedge v_1 - t = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{v = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}}}$$

1 Matrixrechnung und Eigenwerttheorie

$(A - (-1)I_3|0)$ lösen:

$$\begin{aligned} (A - (-1)I_3|0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$(A - (-1)I_3)v = 0 \Leftrightarrow v_3 = t \wedge 4v_2 + 3t = 0 \wedge v_1 - \frac{1}{4}t = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{v = t \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}}}$$

Folgerung:

$$\lambda = 2 \text{ ist Eigenwert mit Eigenraum } E_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\lambda = -1 \text{ ist Eigenwert mit Eigenraum } E_{-1} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

Definition 1.2.10. Seien $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Der Unterraum

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_m\} := \{t_1v_1 + t_2v_2 + \dots + t_mv_m \mid t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

heißt **Spann** von v_1, \dots, v_m .

Bemerkung 1.2.11. Eigenräume werden typischerweise als Spann von Eigenvektoren angegeben. Zum Beispiel die Eigenräume aus Beispiel 1.2.9:

$$E_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_{-1} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Satz 1.2.12. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Definition 1.2.13. Zwei Matrizen $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heißen **ähnlich**, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gibt mit

$$B = S^{-1}AS.$$

Definition 1.2.14. Eine Matrix $D \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ der Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}$$

heißt **Diagonalmatrix**.

Definition 1.2.15. Eine Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt **diagonalisierbar**, falls A ähnlich zu einer Diagonalmatrix $D \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ist: $D = S^{-1}AS$.

Satz 1.2.16. Eine Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis von \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren von A gibt.

Beweis. Sei $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von \mathbb{R}^n bestehend aus Eigenvektoren von A . Sei λ_i der Eigenwert zu v_i . Setze

$$S := \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Da $\text{Rang } S = n$, ist S invertierbar. Ferner setzen wir

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$AS = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Av_1 & Av_2 & \dots & Av_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

$$SD = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ S\lambda_1 e_1 & S\lambda_2 e_2 & \dots & S\lambda_n e_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Also ist $AS = SD$ und somit $S^{-1}AS = D$. □

1 Matrixrechnung und Eigenwerttheorie

Wir sehen also, dass die lineare Abbildung φ_A , die zu einer diagonalisierbaren Matrix A gehört, im wesentlichen durch die Eigenwerte bestimmt ist: bezüglich einer passend gewählten Basis (diese ist in der Matrix S kodiert) ist φ_A lediglich die Kombination von Streckungen in Richtung des i -ten Basisvektors um den Faktor λ_i .

Bemerkung 1.2.17. Nicht jede Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ist diagonalisierbar. Zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Methode 1.2.18 (Diagonalisierung einer Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$).

1) Eigenwerte bestimmen:

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_1 \vee \lambda = \lambda_2 \dots \vee \lambda = \lambda_m$$

2) Für jeden Eigenwert λ_j das LGS $(A - \lambda_j I_n | 0)$ lösen um damit die Eigenräume als Spann von lin. unab. Vektoren zu bestimmen:

$$E_{\lambda_1} = \text{span}\{v_1^1, \dots, v_{\rho_1}^1\}, \dots, E_{\lambda_m} = \text{span}\{v_1^m, \dots, v_{\rho_m}^m\}$$

3) Diagonalisierbarkeit überprüfen: $\sum_{j=1}^m \rho_j = n \Rightarrow A$ diagonalisierbar .

4) Mit

$$S := \left(\begin{array}{c|ccc|c} | & & & & | \\ v_1^1 & \dots & v_{\rho_1}^1 & \dots & v_{\rho_m}^m \\ | & & & & | \end{array} \right), \quad D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

folgt $D = S^{-1}AS$.

Beispiel 1.2.19. Wir diagonalisieren die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

1)

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &:= \det(A - \lambda I) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \lambda)((2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1) - (1 - \lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \lambda)((2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \\
&\Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = 0 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 3}}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
(A - 0I|0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
(A - 0I_3)v = 0 &\Leftrightarrow v_3 = t \wedge v_2 + t = 0 \wedge v_1 + v_2 = 0, t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow v_3 = t \wedge v_2 = -t \wedge v_1 = t, t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow v \in \underline{\underline{\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =: E_0}} \\
(A - 1I_3|0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
(A - 1I_3)v = 0 &\Leftrightarrow v_3 = t \wedge v_2 = 0 \wedge v_1 + t = 0, t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow v_3 = t \wedge v_2 = 0 \wedge v_1 = -t, t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow v \in \underline{\underline{\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =: E_1}}
\end{aligned}$$

1 Matrixrechnung und Eigenwerttheorie

2)

$$(A - 3I_3|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(A - 3I_3)v = 0 \Leftrightarrow v_3 = t \wedge -v_2 + 2t = 0 \wedge v_1 - t = 0, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow v_3 = t \wedge v_2 = 2t \wedge v_1 = t, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow v \in \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =: \underline{\underline{E_3}}$$

3) $\sum_{j=1}^3 \rho_j = 1 + 1 + 1 = 3 = n \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar!

4)

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

□

Satz 1.2.20 (Potenzen von diagonalisierbaren Matrizen). Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine diagonalisierbare Matrix:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} =: D.$$

Dann gilt

$$A^k = SDS^{-1} = S \begin{pmatrix} \mu_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_n^k \end{pmatrix} S^{-1}$$

Beweis. $A^k = AA \cdots A = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) \cdots (SDS^{-1}) = SD^kS^{-1}$.

□

Beispiel 1.2.21. Wir bestimmen die 2016-te Stelle der Fibonacci-Folge

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Lösung: Es sei $F_0 = 0, F_1 = 1$. Wir bezeichnen die k -te Stelle der Folge mit F_k und erinnern uns, dass (F_k) der Rekursion

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad k \geq 2$$

genügt. Ferner setzen wir

$$v_k := \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Dann gilt

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_{k-1}.$$

Es folgt

$$v_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 v_{k-1} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k v_1.$$

Um $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$ zu berechnen, diagonalisieren wir $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1)

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \lambda)(-\lambda) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

1 Matrixrechnung und Eigenwerttheorie

2)

$$\left(A - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} I_2 \mid 0\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(A - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} I_2\right)v = 0 \Leftrightarrow v_2 = t \wedge \frac{1 - \sqrt{5}}{2}v_1 + t = 0, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow v \in \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2/(\sqrt{5}-1) \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow v \in \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}\right\} =: \underline{\underline{E_{\lambda_1}}}$$

3)

$$\left(A - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} I_2 \mid 0\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(A - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} I_2\right)v = 0 \Leftrightarrow v_2 = t \wedge \frac{1 + \sqrt{5}}{2}v_1 + t = 0, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow v \in \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2/(\sqrt{5}+1) \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow v \in \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}\right\} =: \underline{\underline{E_{\lambda_2}}}$$

4) $\sum_{j=1}^2 \rho_j = 1 + 1 = 2 = n \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar!

5)

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} & -\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}} & \frac{2}{4\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} & \frac{2}{4\sqrt{5}} \end{array} \right)$$

und somit

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}} & \frac{2}{4\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} & \frac{2}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}} & \frac{2}{4\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} & \frac{2}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}} & \frac{2}{4\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} & \frac{2}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Wir können nun $A^k v_1$ berechnen:

$$\begin{aligned} A^k v_1 &= A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}} \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \frac{1-\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \frac{1}{\sqrt{5}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Schließlich folgt:

$$\begin{pmatrix} F_{2017} \\ F_{2016} \end{pmatrix} = v_{2017} = A^{2016} v_1 = \begin{pmatrix} \dots \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2016} \frac{1}{\sqrt{5}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2016} \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

und somit

$$F_{2016} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2016} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2016} \right).$$

□

2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

2.1 Einleitung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Eigenschaften von Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Insbesondere geht es uns darum, die in der *Höheren Mathematik I* durchgeführten Kurvendiskussionen auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern.

Beispiele 2.1.1.

- (i) Die Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die einem Punkt (x, y) (in gegebenem Koordinatensystem) die Temperatur zuordnet. Grundsätzliche Frage: wo ist die Temperatur minimal/maximal? Wie lässt sich ein Extremum bestimmen?
- (ii) Die Abbildung $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die jedem Punkt die Windrichtung oder eine elektrische Feldstärke zuordnet. Wo sind bspw. Quellen des Felds?
- (iii) Ein abstrakteres Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = x^2 + y^2$ gegeben. Diese Funktion beschreibt den Abstand zum Quadrat eines Punktes (x, y) zum Ursprung $(0, 0)$. Ein weiteres Beispiel: $g(x, y) = \sin(x) \cos(y)$. Die Graphen solcher Funktionen lassen sich als Flächen im \mathbb{R}^3 visualisieren.
- (iv) Für jede Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ definiert $v \mapsto Av$ mit $v \in \mathbb{R}^n$ eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
- (v) Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (x, y)$ und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $g(x, y) = (y, -x)$ sind Beispiele für sog. *Vektorfelder*. Zwei- und dreidimensionale Vektorfelder kann man durch Pfeile in einem Koordinatensystem darstellen.
- (vi) Der Druck eines Gases ist näherungsweise gegeben durch die VAN DER WAALS-Gleichung

$$(2.1) \quad p(T, V) = \frac{RT}{V/n - b} - \frac{an^2}{V^2}$$

2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

wobei

T = Temperatur in Kelvin,

$R \approx 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$, die universelle Gaskonstante,

V = Volumen in m^3 ,

n = Anzahl Mol, 1 Mol entspricht $6,022 \cdot 10^{23}$ Gasteilchen,

a, b = Konstanten die vom Gas abhängen.

Definition 2.1.2. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Skalarfeld**. Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißen **Vektorfelder**. Ein Vektorfeld ist von der Form (f_1, f_2, \dots, f_n) wobei $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ i -te Koordinatenfunktion heißt.

2.2 Folgen und Stetigkeit

In diesem Abschnitt wiederholen und verallgemeinern wir wichtige Grundlagen der reellen Analysis aus der *Höheren Mathematik I*.

Wir erinnern uns, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x \in \mathbb{R}$ ist, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

für alle Folgen x_1, x_2, x_3, \dots , die gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.

Wie lässt sich die Stetigkeit von $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definieren? Wir gehen ähnlich vor, benötigen aber Folgen von Vektoren, da die Argumente von f Vektoren sind.

Definition 2.2.1. Eine **Folge** im \mathbb{R}^m ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Konkret schreiben wir $(v^{(i)})$ für eine Folge, wobei $v^{(i)} = (v_1^{(i)}, \dots, v_m^{(i)}) \in \mathbb{R}^m$ Vektoren sind. Die reellwertige Folge $(v_j^{(i)})$ heißt j -te **Koordinatenfolge** für $1 \leq j \leq m$.

Bemerkung 2.2.2. Beachten Sie die Änderung der Notation! Der Folgegliedindex steht nun oben.

Beispiele 2.2.3.

(i) Falls $m = 2$ definiert

$$v^{(i)} = \begin{pmatrix} 1/i \\ 1 - 1/i \end{pmatrix}.$$

eine Folge im \mathbb{R}^2 . Beide Koordinatenfolgen $v_1^{(i)} = 1/i$ und $v_2^{(i)} = 1 - 1/i$ konvergieren. Die Grenzwerte sind 0 und 1.

(ii) Jetzt setzen wir

$$v^{(i)} = \begin{pmatrix} (-1)^i \\ 1/i^2 \end{pmatrix}.$$

Hier konvergiert die zweite Koordinatenfolge $v_2^{(i)} = 1/i^2$ gegen Null. Die erste Koordinatenfolge $v_1^{(i)} = (-1)^i$ konvergiert nicht, sie *divergiert*. Aber beide Koordinatenfolgen sind beschränkt.

(iii) Schließlich betrachten wir die Folge

$$v^{(i)} = \begin{pmatrix} i \\ i^2 \end{pmatrix}.$$

Beide Koordinatenfolgen $v_1^{(i)} = i$ und $v_2^{(i)} = i^2$ divergieren, sie sind beide unbeschränkt.

Definition 2.2.4. Sei $(v^{(i)})$ eine Folge im \mathbb{R}^m .

- (i) Die Folge $(v^{(i)})$ heißt **beschränkt**, falls alle m Koordinatenfolgen $(v_j^{(i)})$, $j = 1, \dots, m$ beschränkt sind.
- (ii) Die Folge $(v^{(i)})$ heißt **konvergent**, falls alle m Koordinatenfolgen $(v_j^{(i)})$, $j = 1, \dots, m$ gegen reelle Zahlen v_1, \dots, v_m konvergieren. Wir nennen den Vektor $(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ **Grenzwert** der Folge $(v^{(i)})$ und wird mit $\lim_{i \rightarrow \infty} v^{(i)}$ bezeichnet.

Die Folge im ersten Beispiel oben ist beschränkt und konvergent. Die Folge in (ii) ist zwar beschränkt, konvergiert aber nicht. Schließlich ist die Folge in (iii) weder beschränkt noch konvergent.

Wir können nun Stetigkeit mittels konvergenter Folgen definieren.

Definition 2.2.5. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge.

- (i) Ein Skalarfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig in** $v \in D$, falls

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(v^{(i)}) = f(v)$$

für jede konvergente Folge $(v^{(i)})$ mit $v^{(i)} \in D$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} v^{(i)} = v$. Wir nennen f **stetig**, falls f für jedes $v \in D$ stetig ist.

- (ii) Eine Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **stetig**, falls jede Koordinatenfunktion f_1, \dots, f_n stetig ist.

Beispiel 2.2.6. Wir betrachten das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, welches durch

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2} & : (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

definiert wird. Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass f bei (x, y) stetig ist. Sei dazu $((x^{(i)}, y^{(i)}))$ eine Folge, die gegen (x, y) konvergiert. Es gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x^{(i)}, y^{(i)}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{(i)2} + y^{(i)2}} = \frac{1}{\lim_{i \rightarrow \infty} (x^{(i)2} + y^{(i)2})} = \frac{1}{x^2 + y^2} = f(x, y).$$

Hieraus folgt die Stetigkeit bei (x, y) . Dabei haben wir nur Rechenregeln für konvergente Folgen benutzt.

Schließlich zeigen wir, dass f bei $(0, 0)$ nicht stetig ist. Dazu wählen wir die Folge $v^{(i)} = (1/i, 0)$, die gegen $(0, 0)$ konvergiert. Nun gilt $f(v^{(i)}) = 1/(1/i^2 + 0^2) = i^2$ und diese Bildfolge divergiert. Also ist f nicht stetig bei $(0, 0)$.

2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Wie im eindimensionalen können wir aus stetigen Funktionen durch Addition, Subtraktion und (koordinatenweise) Multiplikation neue stetige Funktionen generieren. Bei der (koordinatenweisen) Division muss man wie im eindimensionalen Fall vorsichtig sein und Division durch 0 ausschließen.

Rechenregeln 2.2.7. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Skalarfelder, die stetig in $v \in D$ sind.

- (i) Die Funktionen $f + g$, $f - g$ und fg sind stetig in v .
- (ii) Gilt $g(v) \neq 0$, so ist auch f/g stetig in v .
- (iii) Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig bei $f(v)$. Dann ist $h \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig bei v .

Mit der Hilfe dieser Regeln können wir Stetigkeit leichter überprüfen.

Beispiele 2.2.8.

- (i) Der Ausdruck aus Beispiel 2.1.1(vi) für den Druck p eines Gases in Funktion von Temperatur T und Volumen V ist stetig auf der Menge

$$D = (0, \infty) \times (bn, \infty) = \{(T, V); T > 0 \text{ und } V > bn\}.$$

Wir schließen $T = 0$ und $V = bn$ aus, um sicherzustellen, dass nicht durch Null dividiert wird in (2.1).

- (ii) Das Vektorfeld $e : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ welches durch

$$e(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x) \cos(y) \\ xy^2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, ist auf \mathbb{R}^2 stetig. Um dies nachzuweisen, müssen wir Stetigkeit der Koordinatenfunktionen von e beweisen. Die Koordinatenfunktionen sind $(x, y) \mapsto \sin(x) \cos(y)$ und $(x, y) \mapsto xy^2$. Die trigonometrischen Funktionen $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ sind stetig. Also sind die Koordinatenfunktionen wegen den Rechenregeln oben stetig.

- (iii) Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & : (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & : (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist Quotient zweier Funktionen $f_1(x, y) = xy$ und $f_2(x, y) = x^2 + y^2$. Beide Funktionen sind Polynome und daher stetig. Weiterhin gilt $f_2(x, y) \neq 0$, falls $(x, y) \neq (0, 0)$. Also ist $f = f_1/f_2$ in jedem Punkt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig.

Wie in Beispiel 2.2.6 gibt es höchstens für $v = (0, 0)$ Schwierigkeiten. Sei dazu $v^{(i)} = (1/i, 1/i)$. Es gilt

$$f(v^{(i)}) = \frac{1/i^2}{1/i^2 + 1/i^2} = \frac{1}{2}.$$

Zwar konvergiert die Bildfolge $f(v^{(i)})$, aber nicht gegen den Funktionswert 0 bei $(0, 0)$. Also ist f nicht stetig bei $(0, 0)$.

(iv) Die Funktion

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & : (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & : (x, y) = 0 \end{cases}$$

ähnelt auf den ersten Blick f aus Beispiel (iii). Aber sie verbirgt eine Überraschung. Wie oben zeigt man leicht, dass g für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig ist.

Wir werden nun zeigen, dass g auch bei $(0, 0)$ stetig ist. Also betrachten wir eine Folge $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots \in \mathbb{R}^2$, die gegen $(0, 0)$ konvergiert. Es gilt

$$0 \leq |g(x_j, y_j)| = \frac{|x_j y_j^2|}{|x_j^2 + y_j^2|} = \frac{|x_j| y_j^2}{x_j^2 + y_j^2} \leq \frac{|x_j| y_j^2}{y_j^2} = |x_j|.$$

Aus $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0$ schließen wir $\lim_{j \rightarrow \infty} g(x_j, y_j) = 0 = g(0, 0)$. Also ist g stetig bei $(0, 0)$.

Definition 2.2.9. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $D \subset \mathbb{R}^m$ und $v_0 \in \mathbb{R}^m$. Existiert der Grenzwert $\lim_{i \rightarrow \infty} f(v^{(i)})$ für alle Folgen $(v^{(i)})$ in $\mathbb{R}^m \setminus \{v_0\}$, die gegen v_0 konvergieren, so bezeichnen wir diesen Grenzwert mit $\lim_{v \rightarrow v_0} f(v)$. (Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Folge $(v^{(i)})$.)

In der reellen Analysis einer Dimension spielte das Suchen nach Maxima und Minima eine wichtige Rolle. Ähnliche Methoden existieren für Skalarfelder. Wir werden im nächsten Abschnitt die dafür wichtigen Begriff der partiellen Ableitung behandeln. Zuerst halten wir aber fest, dass Maxima und Minima in vielen Situationen existieren.

Definition 2.2.10. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge.

(i) Wir nennen D **beschränkt**, falls $B \in \mathbb{R}$ mit

$$|v_i| \leq B \quad \text{für alle } v = (v_1, \dots, v_m) \in D \quad \text{und alle } 1 \leq i \leq m.$$

existiert.

(ii) Wir nennen D **abgeschlossen**, falls $\lim_{i \rightarrow \infty} v^{(i)} \in D$ für alle konvergenten Folgen $(v^{(i)})$ mit Folgenglieder in D .

Beispiel 2.2.11. Die Menge $[0, 1] \times [0, 2]$ ist abgeschlossen in \mathbb{R}^2 . Die Menge $(0, 1) \times [0, 1]$ ist nicht abgeschlossen: die Folge $(1/i, 1/i)$ liegt in dieser Menge, konvergiert jedoch gegen $(0, 0) \notin (0, 1) \times [0, 1]$. Beide Mengen $[0, 1] \times [0, 2]$ und $(0, 1) \times [0, 1]$ sind beschränkt.

Satz 2.2.12. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf D sein Maximum und Minimum an. D.h. es existiert $v_{\max} \in D$ und $v_{\min} \in D$ mit

$$f(v_{\min}) \leq f(v) \leq f(v_{\max})$$

für alle $v \in D$.

2.3 Partielle Ableitungen

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist die Ableitung in $x_0 \in \mathbb{R}$ durch den Grenzwert

$$(2.2) \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

gegeben. Wir möchten Skalar- und Vektorfelder differenzieren. Leider macht der Differentialquotient auf der rechten Seite keinen Sinn, wenn x und x_0 Punkte im \mathbb{R}^m mit $m \geq 2$ sind. Es gibt keine sinnvolle Möglichkeit, durch einen Vektor, hier $x - x_0$, zu dividieren. Dieses Problem werden wir später lösen. Zunächst gilt es, ein technisches Problem zu lösen. Um den Grenzwerte wie in (2.2) zu definieren, braucht es um den Basispunkt x_0 genügend Platz im Definitionsbereich von f .

Definition 2.3.1. (i) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^m$ und $r > 0$, dann heißt

$$K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| < r\}$$

Kugel vom Radius r um x_0 .

(ii) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^m$ heißt **offen**, falls es zu jedem $x_0 \in D$ ein $r > 0$ mit $K(x_0, r) \subset D$ gibt.

Beispiele 2.3.2. (i) Jede Kugel $K(x_0, r)$ ist offen. Falls $m = 1$, so gilt

$$K(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r).$$

Eine Kugel im \mathbb{R}^1 ist also ein Intervall.

(ii) Das Intervall $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}$ ist offen. Das Quadrat

$$(0, 1) \times (0, 1) = \{(x, y); 0 < x < 1 \quad \text{und} \quad 0 < y < 1\}$$

ist ebenfalls offen.

(iii) Seien $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a_i < b_i$ für $1 \leq i \leq m$. Im \mathbb{R}^m ist die Menge

$$\{(x_1, \dots, x_m); a_i < x_i < b_i \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq m\}$$

offen.

(iv) Das Intervall $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 1\}$ ist nicht offen. Das Problem ist der linke Rand, d.h. $0 \in [0, 1)$. Keine Kugel $K(0, r)$ mit $0 \in [0, 1)$ als Mittelpunkt liegt ganz in $[0, 1)$.

Achtung! Im letzten Abschnitt haben wir abgeschlossene Teilmengen des \mathbb{R}^m definiert. Mengen sind keine Türen. Es gibt Mengen wie $[0, 1)$, die weder offen noch abgeschlossen sind. Weiterhin gibt es Mengen, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Ein Beispiel hierfür ist \mathbb{R}^m selber.

Nun kehren wir zurück zum eigentlichen Problem. Wie können wir Skalarfelder ableiten?

Beispiel 2.3.3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die durch $f(x, y) = xe^y$ definierte Funktion.

- (i) Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten $g(x) = f(x, y_0)$ als Funktion in dem wir die zweite Variable als festen Parameter verstehen. Es handelt sich um eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und somit ist das Differenzieren für uns kein Problem. Wir leiten g an der Stelle x_0 ab

$$g'(x_0) = e^{y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

- (ii) Umgekehrt können wir auch die x -Koordinate festhalten. D.h. sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h(y) = f(x_0, y)$ die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Hier leiten wir nach y ab und erhalten

$$h'(y_0) = x_0 e^{y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Zur Erinnerung, die Ableitung der Exponentialfunktion ist die Exponentialfunktion.

Fazit: für eine Funktion f in zwei Variablen gibt es auch zwei Ableitungen. Wir nennen g' bzw. h' partielle Ableitungen von f nach x bzw. y . In Symbolen werden wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g' \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = h'.$$

Dieses Beispiel überträgt sich auf Skalarfelder in beliebiger Dimension.

Definition 2.3.4. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld, $x \in D$ und $k \in \{1, \dots, m\}$. Sei

$$e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-te Komponente}}, 0, \dots, 0).$$

- (i) Existiert der Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + e_k h) - f(x)}{h}$$

so heißt f in x **partiell nach x_k differenzierbar**.¹ Der Grenzwert heißt **partielle Ableitung nach x_k** von f in x und wird mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \quad \text{oder} \quad \partial_k f(x) \quad \text{oder} \quad f_{x_k}(x)$$

bezeichnet.

¹An der Stelle von x_k werden wir stillschweigend andere übliche Koordinatenbezeichnungen benutzen. Ist z.B. $f(x, y) = xe^y$ so schreiben wir $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

- (ii) Ist f in x nach x_1, \dots, x_m partiell differenzierbar, so heißt f **partiell differenzierbar** in x . Ist f in jedem Punkt von D partiell differenzierbar, so nennen wir f **partiell differenzierbar**. Trifft dies zu und sind weiterhin alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$$

stetige Funktionen auf D , so nennt man f **stetig partiell differenzierbar**.

- (iii) Sei $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit Komponentenfunktionen F_1, \dots, F_n . Wir übertragen die Bezeichnung von (i) und (ii) auf F , falls die entsprechenden Bedingungen für alle F_i zutreffen. Wir schreiben auch

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen 2.3.5. Partiiell differenzieren nach x_k bedeutet, dass man alle anderen Variablen als feste Parameter betrachtet. In diesem Sinne kann wie aus der *Höheren Mathematik I* gewohnt ableiten. Mehr Beispiele folgen in Kürze.

Anschaulich bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

die Änderungsrate von f wenn die Variable x_k variiert wird und alle anderen Variablen festgehalten werden.

Beispiele 2.3.6. (i) Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3y - 2x^2y^2$. Es gilt

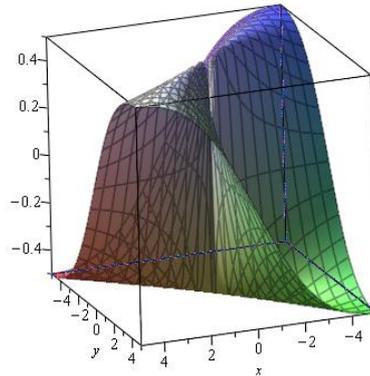
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 4xy^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 4x^2y.$$

- (ii) Es gibt keinen Grund, sich auf den \mathbb{R}^2 zu beschränken. Sei also $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = xe^{xz+y^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= e^{xz+y^2} + xe^{xz+y^2} \cdot z = (1+xz)e^{xz+y^2} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= xe^{xz+y^2} \cdot 2y = 2xye^{xz+y^2} \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= xe^{xz+y^2} \cdot x = x^2e^{xz+y^2}. \end{aligned}$$

- (iii) Wir betrachten die Gleichung von van der Waals, cf. Beispiel 2.1.1(iv). D.h.

$$p(T, V) = \frac{RT}{V/n - b} - \frac{an^2}{V^2}$$

Abbildung 2.1: $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$

und $D = (0, +\infty) \times (bn, +\infty)$.

Die partielle Ableitung $\frac{\partial p}{\partial T}$ beschreibt die Änderung des Drucks bei konstantem Volumen (isochore Zustandsänderung). Es gilt

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V/n - b}.$$

Die partielle Ableitung $\frac{\partial p}{\partial V}$ beschreibt die Druckänderung bei konstanter Temperatur (isotherme Zustandsänderung). Es gilt

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{(V/n - b)^2 n} + 2\frac{an^2}{V^3}.$$

Beispiel 2.3.7. Wir knüpfen an Beispiel 2.2.8(iii) an. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & : (x, y) \neq 0, \\ 0 & : (x, y) = 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig in $(0, 0)$ aber stetig in allen anderen Punkten des \mathbb{R}^2 . Dieses Skalarfeld ist in Figur 2.1 abgebildet.

Wie sieht es mit den partiellen Ableitungen im Koordinatenursprung aus? Es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Also existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ bei $(0, 0)$ mit Wert 0. Aus Symmetriegründen gilt weiterhin

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Daher existiert auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ bei $(0, 0)$ und nimmt den Wert 0 an.

2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Außerhalb des Ursprungs gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

für $(x, y) \neq 0$. Wegen $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 1/y$ ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht stetig in $(0, 0)$. Also ist f nicht stetig partiell differenzierbar.

Definition 2.3.8. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ offen.

(i) Sei das Skalarfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in $x \in D$. Der Vektor

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$$

heißt **Gradient** von f in x .

(ii) Das Vektorfeld $f = (f_1, \dots, f_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei partiell differenzierbar in $x \in D$. Die Matrix

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

heißt **Jacobi-Matrix** von f in x .

Bemerkungen 2.3.9. Sei f ein Skalarfeld wie in (i) der Definition. Anschaulich bedeutet der Gradient folgendes: Der Vektor $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^m$ gibt die Richtung an, in welche f am stärksten wächst. Seine Norm ist das Ausmaß der Steigung.

Beispiel 2.3.10. Die durch

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

definierte Funktion $f : K(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt die Höhe einer Halbkugel. Wir berechnen

$$\nabla f(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x), \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \cdot (-2y) \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}(-x, -y).$$

Das Skalarfeld f ist in (2.2a) abgebildet. Sein Gradient ist direkt daneben illustriert.

Uns hindert nichts daran, höhere partielle Ableitungen zu betrachten.

Definition 2.3.11. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar auf D . Ist $\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf D erneut partiell differenzierbar, so heißt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}$$

partielle Ableitung 2. Ordnung von f nach x_l und x_k . Analog definiert man die Ableitung 3, 4, 5, ...ter Ordnung.

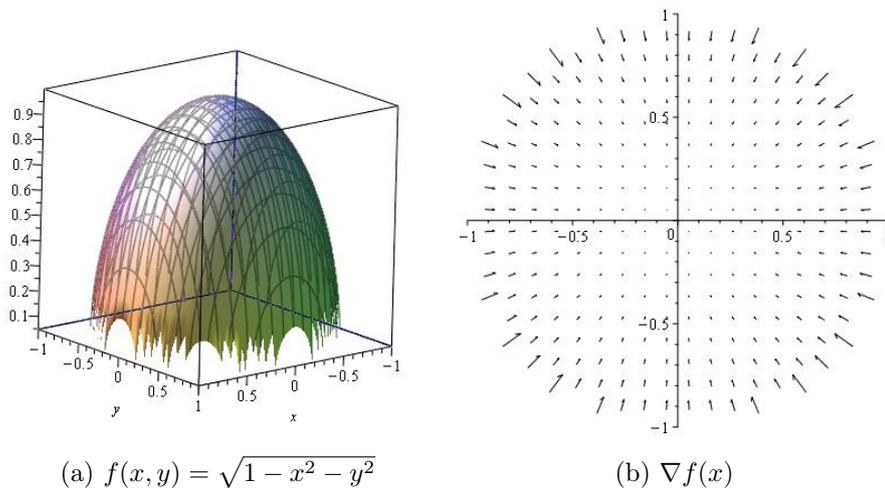


Abbildung 2.2

Beispiel 2.3.12. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = x^3y + xe^y$ definiert. Es gilt

$$\begin{array}{ll}
 \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + e^y, & \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + xe^y, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 + e^y, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 + e^y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^y, \\
 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6y, & \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 6x, \\
 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 6x, & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = e^y, \\
 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = 6x, & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = e^y, \\
 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = e^y, & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = xe^y.
 \end{array}$$

Wie wir im Beispiel oben feststellen, kommt es nicht auf die Reihenfolge der Differentiation an. Konkret, es gilt beispielsweise

$$\frac{\partial f^3}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial f^3}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial f^3}{\partial y \partial x^2}.$$

Dies ist kein Zufall. Unter einer geeigneten Voraussetzung an die Funktion f kommt es nicht auf die Reihenfolge der partiellen Ableitung an.

Satz 2.3.13 (Satz von SCHWARZ). Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein p -mal stetig partiell differenzierbares Skalarfeld auf D . Dann kommt es bei der Bildung der partiellen Ableitung p -ter Ordnung nicht auf die Reihenfolge der Differentiation an.

Definition 2.3.14. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt

$$\operatorname{div} f = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_k}$$

Divergenz von f .

Beispiele 2.3.15. Die Divergenz eines Vektorfelds f lässt sich wie folgt veranschaulichen. Für $m = 2$ beschreibt f beispielsweise ein Magnetfeld oder die Flussrichtung einer Flüssigkeit oder eines Gases. Die Divergenz $\operatorname{div} f$ ist nun ein Skalarfeld, da es reelle Werte annimmt.

- (i) Positive Divergenz an einem Punkt $\operatorname{div} f(x) > 0$ deutet auf eine Quelle des Felds. Die Divergenz des Felds $f(x, y) = (x, y)$ aus der Einleitung ist

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2.$$

Anschaulich entsteht Feldstärke in jedem Punkt der Ebene.

- (ii) Betrachtet man $g(x, y) = (-x, -y)$, vgl. Abbildung 2.3, zeigen die Feldpfeile zum Koordinatenursprung. Das Feld hat in jedem Punkt eine Senke.

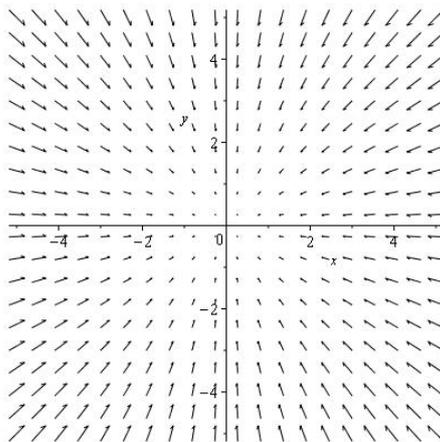


Abbildung 2.3: $g(x, y) = (-x, -y)$

- (iii) Das Feld $h(x, y) = (y, -x)$ hat die Divergenz

$$\operatorname{div} h = \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} = 0 + 0 = 0.$$

Dieses Feld hat keine Quellen oder Senken.

2.4 Totale Differenzierbarkeit

Erinnern wir uns an die *Höhere Mathematik I*: geometrisch beschreibt die Ableitung $f'(x_0)$ einer differenzierbaren Funktion die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt mit der x -Koordinate x_0 . In Formeln ausgedrückt gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)$$

wobei $r(x)$ den Approximationsfehler (also den Abstand zwischen dem Graphen von f und der approximierenden Tangente) bezeichnet, es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0.$$

In diesem Kapitel interessieren wir uns für Vektorfelder $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wie können wir f in der Nähe eines Vektors $x_0 \in \mathbb{R}^m$ approximieren? Lässt sich auch in mehreren Dimensionen die Ableitung geometrisch interpretieren?

Die einfachsten Funktionen sind die linearen Funktionen. Motiviert durch den eindimensionalen Fall werden wir versuchen, f linear in x_0 zu approximieren.

Definition 2.4.1. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $x_0 \in D$. Man nennt f **total differenzierbar** in x_0 , wenn es eine Matrix $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ mit

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + r(x)$$

gibt, wobei

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|r(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Die Matrix A heißt **totale Ableitung** oder **totales Differential** von f in x_0 . Man schreibt $Df(x_0) = A$ oder $\frac{df}{dx}(x_0) = A$ oder $f'(x_0) = A$ und nennt $r(x)$ Restterm.

Beispiele 2.4.2. (i) Wir betrachten das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Sei $(x_0, y_0) \in D$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0 + x - x_0, y_0 + y - y_0) = (x_0 + (x - x_0))^2 + (y_0 + (y - y_0))^2 \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ &= f(x_0, y_0) + (2x_0, 2y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + r(x, y) \end{aligned}$$

mit $r(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Der Restterm erfüllt $r(x, y) = \|(x - x_0, y - y_0)\|^2$, also gilt auch

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{r(x, y)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0.$$

2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

- (ii) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ irgendein Skalarfeld, welches auf \mathbb{R}^2 total differenzierbar ist. Es gibt also eine 1×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

mit $f(x, y) = f(x_0, y_0) + A \cdot (x - x_0, y - y_0) + r(x, y)$, wobei $r(x, y)$ der Restterm ist.

Im Spezialfall $x = x_0 + h$ und $y = y_0$ erhalten wir

$$f(x_0 + h, y_0) = f(x_0, y_0) + a \cdot h + r(x_0 + h, y_0).$$

Nach einer einfachen Umformung gilt also

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a + \frac{r(x_0 + h, y_0)}{h}.$$

Der Quotient auf der rechten Seite konvergiert gegen Null für $h \rightarrow 0$. Der entsprechende Grenzwert auf der linken Seite ist gerade die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ ausgewertet an der Stelle (x_0, y_0) . Es gilt also

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Eine völlig analoge Rechnung liefert

$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Beim Vektor A handelt es sich also um den Gradienten $\nabla f(x_0)$.

Das zweite Beispiel lässt sich auf total differenzierbare Vektorfelder verallgemeinern. Der Beweis des folgenden Satzes ist lediglich eine Verallgemeinerung des Arguments in (ii).

Satz 2.4.3. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ total differenzierbar in $x_0 \in D$ wie in Definition 2.4.1. Dann ist

$$Df(x_0) = J_f(x_0)$$

die Jacobi-Matrix von f an der Stelle x_0 , vgl. Definition 2.3.8.

Achtung! Ein Skalarfeld welches partiell differenzierbar ist, muss nicht notwendigerweise total differenzierbar sein. Dazu schauen wir uns das in Figur 2.4 abgebildete Skalarfeld

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}.$$

an. Aus der Definition erhalten wir $f(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Damit ist f partiell nach x differenzierbar in $(0, 0)$ und es gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Völlig analog gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Wäre nun f in $(0, 0)$ total differenzierbar, so würde wegen Satz 2.4.3

$$f(x, y) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r(x, y)$$

mit

$$(2.3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{r(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0$$

gelten. Nun ist aber $\nabla f(0, 0) = f(0, 0) = 0$ und damit wäre $f(x, y) = r(x, y)$. Nun gilt

$$\frac{r(x, x)}{\|(x, x)\|} = \frac{\sqrt{|x^2|}}{\sqrt{x^2 + x^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2}|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es kann also unmöglich (2.3) gelten. Dies ist ein Widerspruch, also ist f nicht total differenzierbar in $(0, 0)$.

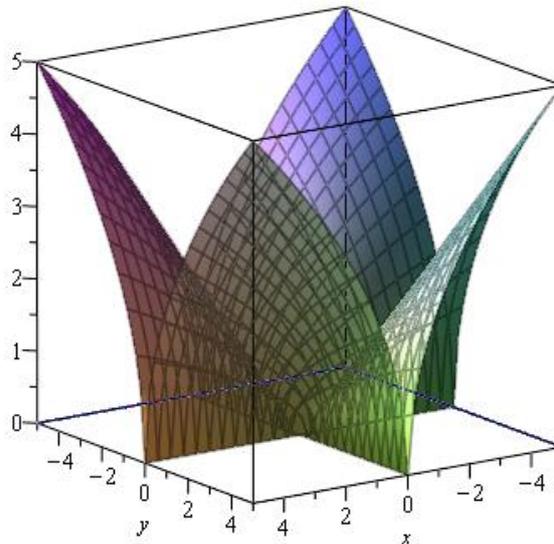


Abbildung 2.4: $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

Hinreichend gutartige Funktionen sind jedoch total differenzierbar nach dem folgenden Resultat.

Satz 2.4.4. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f in jedem Punkt aus D auch total differenzierbar.

Bemerkungen 2.4.5. (i) Das Skalarfeld $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ ist zwar in jedem Punkt partiell differenzierbar, aber die partielle Ableitung ist nicht stetig in $(0, 0)$. Deshalb lässt sich der Satz oben nicht auf f anwenden.

(ii) Wir stellen fest, dass die zwei Ableitungsbegriffe *partiell differenzierbar* und *total differenzierbar* für hinreichend gutartige Funktionen übereinstimmen.

(iii) Für beide Begriffe gelten ähnliche Rechenregeln wie in Dimension eins. Wir wollen nun kurz die Kettenregel ansprechen, da sie die Bedeutung der Matrixmultiplikation für die höherdimensionale Analysis verdeutlicht.

Rechenregeln 2.4.6.

(i) **(Summenregel)** Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ total differenzierbar. Dann ist die Summe $f + g$ total differenzierbar und es gilt

$$D(f + g)(x_0) = D(f)(x_0) + D(g)(x_0)$$

für alle $x_0 \in D$.

(ii) **(Produktregel)** Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar. Dann ist das Produkt fg total differenzierbar und es gilt

$$D(fg)(x_0) = \underbrace{D(f)(x_0)}_{\text{in } M_{n,m}(\mathbb{R})} \underbrace{g(x_0)}_{\text{Skalar}} + f(x_0) \otimes \nabla g(x_0)$$

wobei $f(x_0) \otimes \nabla g(x_0)$ die $n \times m$ Matrix mit $[f(x_0) \otimes \nabla g(x_0)]_{ij} = f_i(x_0) \partial_j g(x_0)$ bezeichnet.

(iii) **(Kettenregel)** Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ total differenzierbar. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $f(D) \subset E$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}^p$ total differenzierbar. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ total differenzierbar und es gilt

$$(2.4) \quad D(g \circ f)(x) = D(g)(f(x)) \cdot D(f)(x).$$

für alle $x \in D$.

Bemerkungen 2.4.7. Die Gleichung (2.4) ist eine Gleichung von *Matrizen*. Links steht die $p \times m$ Matrix $D(g \circ f)(x)$. Die Matrix $D(g)(f(x))$ liegt in $M_{p,n}(\mathbb{R})$ und $D(f)(x)$ liegt in $M_{n,m}(\mathbb{R})$. Das Matrixprodukt $D(g)(f(x)) \cdot D(f)(x)$ ist also eine $p \times m$ Matrix.

Beispiel 2.4.8. Sei $f(t) = (t^2, t^3)$ und $g(x, y) = x^3y + xe^y$. Es handelt sich um ein Vektorfeld $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ und um ein Skalarfeld $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Beide sind total differenzierbar und die Verknüpfung ist $(g \circ f)(t) = t^9 + t^2e^{t^3}$. Durch direktes Ausrechnen erhalten wir

$$(2.5) \quad \frac{d(g \circ f)}{dt} = 9t^8 + 2te^{t^3} + t^2e^{t^3} \cdot 3t^2 = 9t^8 + 2te^{t^3} + 3t^4e^{t^3}.$$

Diese Ableitung können wir auch mit der Kettenregel bestimmen. Dazu halten wir

$$D(f)(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D(g)(x, y) = \nabla g(x, y) = (3x^2y + e^y \quad x^3 + xe^y)$$

fest. Um die Kettenregel anzuwenden setzen wir $f(x)$ in $D(g)$ ein und multiplizieren die entsprechende Matrix mit $D(f)$. Es gilt

$$\begin{aligned} D(g)(f(t)) \cdot D(f)(t) &= \begin{pmatrix} 3t^7 + e^{t^3} & t^6 + t^2e^{t^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \\ &= (3t^7 + e^{t^3}) \cdot (2t) + (t^6 + t^2e^{t^3}) \cdot (3t^2) \\ &= 6t^8 + 2te^{t^3} + 3t^8 + 3t^4e^{t^3} = 9t^8 + 2te^{t^3} + 3t^4e^{t^3}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck stimmt mit (2.5) überein.

2.5 Bestimmen von Extrema in mehreren Variablen

Wieder besinnen wir uns auf ein schon bekanntes eindimensionales Resultat:

Bemerkungen 2.5.1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.

- (i) Besitzt f in $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokales Extremum (d.h. lokales Minimum oder ein lokales Maximum), so gilt $f'(x_0) = 0$.
- (ii) Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, so besitzt f ein lokales Extremum in x_0 . Für $f''(x_0) < 0$ ist x_0 ein lokales Maximum von f und für $f''(x_0) > 0$ ist x_0 ein lokales Minimum.

Lokale Extrema von Funktionen lassen sich also durch die Ableitungen charakterisieren. Wie übertragen wir dies nun auf mehrere Dimensionen?

Definition 2.5.2. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Dann hat f in $x_0 \in D$

- (i) ein **globales Minimum (Maximum)**, falls $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) für alle $x \in D$
- (ii) ein **lokales Minimum (Maximum)**, falls es $r > 0$ gibt, mit $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) für alle $x \in D \cap K(x_0, r)$.
- (iii) ein **lokales** bzw. **globales Extremum**, falls f in x_0 ein lokales bzw. globales Minimum oder Maximum besitzt.

Wie kann man die Extrema eines Skalarfelds, beispielsweise

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2},$$

bestimmen?

Wie in der reellen Analysis einer Variablen verschwinden die partiellen Ableitungen in einem lokalen Extremum.

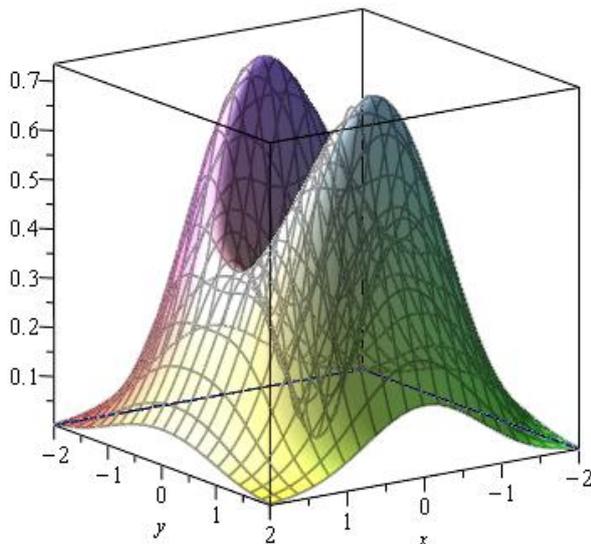


Abbildung 2.5: $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2}$

Satz 2.5.3. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar. Ist $x_0 \in D$ ein lokales Extremum, so gilt $\nabla f(x_0) = 0$.

Achtung! Die Umkehrung ist falsch. Gilt $\nabla f(x_0) = 0$, so muss x_0 nicht notwendigerweise ein lokales Extremum von f sein. Wie in der Analysis in einer Variablen muss man die zweite Ableitung berücksichtigen. Wie wir im letzten Abschnitt festgestellt haben, gibt es viele Möglichkeiten, partielle Ableitungen zweiter Ordnung zu bilden.

Definition 2.5.4. Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Die Matrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in M_{m,m}(\mathbb{R})$$

heißt **Hesse-Matrix** von f an der Stelle x .

Bemerkungen 2.5.5. (i) Eine Matrix $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ heißt **symmetrisch**, falls $A_{ij} = A_{ji}$. Nach dem Satz von Schwarz (Satz 2.3.13) ist $H_f(x)$ eine *symmetrische Matrix*.

(ii) Die Hesse-Matrix $H_f(x)$ ist die Jacobi-Matrix des Skalarfelds $\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definition 2.5.6. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein total differenzierbares Skalarfeld. Man nennt $x \in D$ **kritischer Punkt** von f , falls $\nabla f(x) = 0$.

Beispiel 2.5.7. Sei $f(x, y) = x^2y^2 - 3xy$. Der Gradient ist

$$\nabla f(x, y) = (2xy^2 - 3y, 2x^2y - 3x)$$

und die Hesse-Matrix ist

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy - 3 \\ 4xy - 3 & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Die kritischen Punkte von f sind

$$(0, 0) \quad \text{und} \quad (x, 3/(2x)) \quad \text{mit} \quad x \neq 0.$$

Um lokale Minima und Maxima von Skalarfeldern zu finden, muss man die Hesse-Matrix auf positive bzw. negative Definitheit überprüfen.

Definition 2.5.8. Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in M_{m,m}(\mathbb{R})$, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, m$ heißt

- (i) **positiv definit** (bzw. **negativ definit**), falls alle Eigenwerte positiv (bzw. negativ) sind.
- (ii) **positiv semidefinit** (bzw. **negativ semidefinit**), falls alle Eigenwerte ≥ 0 (bzw. ≤ 0) sind.
- (iii) **indefinit**, falls A positive und negative Eigenwerte besitzt.

Ob eine Matrix positiv oder negativ definit ist, kann man an bestimmten Determinanten ablesen.

Satz 2.5.9. Sei $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ symmetrisch, d.h. $A_{ij} = A_{ji}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- (i) Die Matrix A ist positiv (resp. negativ) definit.
- (ii) Es gilt $v \cdot Av > 0$ (resp. < 0) für alle $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.
- (iii) Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \leq k \leq m$$

(resp.

$$(-1)^k \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \leq k \leq m$$

im negativ definiten Fall.)

2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Satz 2.5.10. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Sei $x_0 \in D$ mit $\nabla f(x_0) = 0$.

- (i) Ist $H_f(x_0)$ negativ definit, so ist x_0 ein lokales Maximum von f .
- (ii) Ist $H_f(x_0)$ positiv definit, so ist x_0 ein lokales Minimum von f .
- (iii) Ist $H_f(x_0)$ indefinit, so ist x_0 kein lokales Extremum (sondern ein Sattelpunkt).

Im semidefiniten Fall ist keine Aussage möglich.

Beispiel 2.5.11. Wir untersuchen die Funktion $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2}$, deren Graph in Figur 2.5 abgebildet ist, auf lokale Extrema.

Zuerst suchen wir die kritischen Punkte. Dazu berechnen wir den Gradienten

$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= (2xe^{-x^2 - y^2} + (x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2} \cdot (-2x), \quad 4ye^{-x^2 - y^2} + (x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2} \cdot (-2y)) \\ &= (2x - 2x^3 - 4xy^2, 4y - 2x^2y - 4y^3)e^{-x^2 - y^2} \\ &= (2x(1 - x^2 - 2y^2), 2y(2 - x^2 - 2y^2))e^{-x^2 - y^2}.\end{aligned}$$

Der Faktor $e^{-x^2 - y^2}$ ist stets positiv. Es gilt also, alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ zu finden, die

$$(2.6) \quad 2x_0(1 - x_0^2 - 2y_0^2) = 0 \quad \text{und} \quad 2y_0(2 - x_0^2 - 2y_0^2) = 0$$

erfüllen. Wir untersuchen dabei zwei Fälle.

Fall 1: $x_0 = 0$. Dann ist die erste Gleichung in (2.6) erfüllt. Die Zweite vereinfacht sich zu $2y_0(2 - 2y_0^2) = 0$, oder $y_0(1 - y_0^2) = 0$. Nun gilt entweder $y_0 = 0$ oder $y_0^2 = 1$. In anderen Worten, es gilt

$$y_0 \in \{-1, 0, 1\}.$$

Fall 2: $x_0 \neq 0$. Die erste Gleichung oben impliziert $x_0^2 + 2y_0^2 = 1$, also $x_0^2 = 1 - 2y_0^2$. Wir ersetzen den Term x_0^2 in der zweiten Gleichung (2.6) durch diesen Ausdruck. Wir erhalten

$$0 = y_0(2 - (1 - 2y_0^2) - 2y_0^2) = y_0(1 + 2y_0^2 - 2y_0^2) = y_0.$$

Kurzum, es muss $y_0 = 0$ gelten. Wir nutzen diese Erkenntnis, und erhalten aus der ersten Gleichung in (2.6), dass $x_0(1 - x_0^2) = 0$ gelten muss. Wie im ersten Fall erfolgt

$$x_0 \in \{-1, 1\}.$$

Abschließend halten wir fest, dass die kritischen Punkt von f genau

$$(2.7) \quad \{(0, -1), (0, 0), (0, 1), (-1, 0), (1, 0)\}$$

sind.

2.5 Bestimmen von Extrema in mehreren Variablen

Um zu entscheiden, ob es sich bei einem dieser Punkt um ein lokales Extremum handelt, müssen wir die Hesse-Matrix berechnen. Zunächst berechnen wir die zweiten Ableitungen und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((2x - 2x^3 - 4xy^2)e^{-x^2-y^2} \right) \\ &= (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2} + (2x - 2x^3 - 4xy^2)e^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) \\ &= (2 - 6x^2 - 4y^2 - 4x^2 + 4x^4 + 8x^2y^2)e^{-x^2-y^2} \\ &= (2 - 10x^2 - 4y^2 + 4x^4 + 8x^2y^2)e^{-x^2-y^2}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(2.8) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left((2x - 2x^3 - 4xy^2)e^{-x^2-y^2} \right) \\ &= (-8xy)e^{-x^2-y^2} + (2x - 2x^3 - 4xy^2)e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) \\ &= (-8xy)e^{-x^2-y^2} + (-4xy + 4x^3y + 8xy^3)e^{-x^2-y^2} \\ &= (-12xy + 4x^3y + 8xy^3)e^{-x^2-y^2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left((4y - 2x^2y - 4y^3)e^{-x^2-y^2} \right) \\ &= (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2} + (4y - 2x^2y - 4y^3)e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) \\ &= (4 - 2x^2 - 12y^2 - 8y^2 + 4x^2y^2 + 8y^4)e^{-x^2-y^2} \\ &= (4 - 2x^2 - 20y^2 + 4x^2y^2 + 8y^4)e^{-x^2-y^2}.\end{aligned}$$

Die Berechnung von $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ können wir uns wegen dem Satz von Schwarz ersparen. Diese partielle Ableitung ist gleich (2.8).

Schließlich werten wir die Hesse-Matrix

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

an den fünf Punkten (2.7) aus. Wir erhalten nach einer kurzer Rechnung

$$\begin{aligned}
 H_f(0, -1) &= \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8e^{-1} \end{pmatrix}, \\
 H_f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \\
 H_f(0, 1) &= \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8e^{-1} \end{pmatrix}, \\
 H_f(-1, 0) &= \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}, \\
 H_f(1, 0) &= \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Diese fünf Matrizen sind in Diagonalfom, deshalb sind die Diagonaleinträge genau die Eigenwerte. Den Vorzeichen der Eigenwerte kann man die Definitheit der Matrix ablesen. Wir fassen das Resultat in einer Tabelle zusammen.

(x_0, y_0)	Die Hesse-Matrix $H_f(x_0, y_0)$ ist ...	Der Punkt (x_0, y_0) ist ein ...
$(0, -1)$	negativ definit	lokales Maximum
$(0, 0)$	positiv definit	lokales Minimum
$(0, 1)$	negativ definit	lokales Maximum
$(-1, 0)$	indefinit	kein lokales Extremum
$(1, 0)$	indefinit	kein lokales Extremum

2.6 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Beispiel 2.6.1. Wir stellen uns das folgende Problem. Wir suchen Extremwerte der Funktion

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

eingeschränkt auf den Einheitskreis

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

siehe Abbildung 2.6.

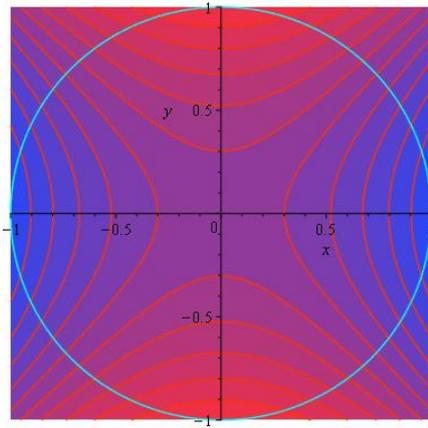
In diesem Spezialfall können wir wie folgt vorgehen: Der Einheitskreis kann durch

$$w : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad w(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

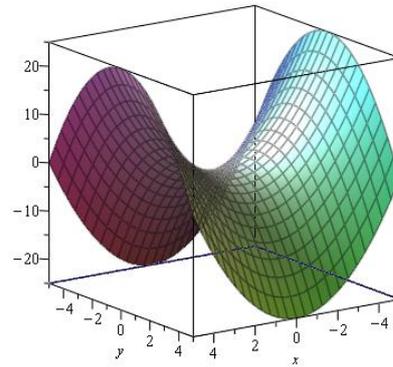
parametrisiert werden. Man stellt sich $w(t)$ als Weg vor, der den Kreis im Gegenuhrzeigersinn durchläuft, wenn t von 0 auf 1 vergrößert wird. Maxima/Minima von $f(x, y) = x^2 - y^2$ auf dem Einheitskreis entsprechen Maxima/Minima der Verknüpfung

$$h(t) = (f \circ w)(t) = \cos(2\pi t)^2 - \sin(2\pi t)^2.$$

2.6 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen



(a) Maximiere/Minimiere $f(x, y) = x^2 - y^2$ auf dem Einheitskreis



(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

Abbildung 2.6

Es handelt sich um eine stetig differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Um lokale Maxima oder Minima zu finden, müssen wir lediglich ableiten. Es gilt

$$h'(t) = -4\pi \cos(2\pi t) \sin(2\pi t) - 4\pi \sin(2\pi t) \cos(2\pi t) = -8\pi \cos(2\pi t) \sin(2\pi t).$$

Die Nullstellen der Ableitung im Intervall $[0, 1)$ liegen bei $0, 1/4, 1/2, 3/4$. Diese Werte von t entsprechen den Punkten

$$(2.9) \quad w(0) = (1, 0), \quad w(1/4) = (0, 1), \quad w(1/2) = (-1, 0), \quad \text{und} \quad w(3/4) = (0, -1)$$

mit Werten

$$f(1, 0) = 1, \quad f(0, 1) = -1, \quad f(-1, 0) = 1, \quad \text{und} \quad f(0, -1) = -1.$$

Zieht man noch die zweite Ableitung hinzu, finden wir lokale Maxima bei $(1, 0), (-1, 0)$ und lokale Minima bei $(0, 1), (0, -1)$. Es handelt sich sogar um globale Maxima bzw. Minima.

Unser ad hoc-Ansatz hat so gut funktioniert, weil wir den Einheitskreis explizit parametrisieren konnten. Wir brauchen jedoch die Parametrisierung nicht! Sei $h'(t_0) = 0$ dann gilt wegen der Kettenregel, vgl. Rechenregel 2.4.6,

$$(2.10) \quad 0 = h'(t_0) = (f \circ w)'(t_0) = (\nabla f)(w(t_0)) \cdot D_{t_0}(w).$$

Da w den Kreis parameterisiert gilt $(g \circ w)(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Leiten wir diese Identität ab, so ergibt uns die Kettenregel

$$(2.11) \quad 0 = (g \circ w)'(t_0) = (\nabla g)(w(t_0)) \cdot D_{t_0}(w).$$

Die Bedingungen (2.10) und (2.11) implizieren, dass der Vektor $D_{t_0}(w) \in \mathbb{R}^2$ orthogonal zu $(\nabla f)(x_0)$ und zu $(\nabla g)(x_0)$ liegt, hier ist $x_0 = w(t_0)$. Wegen $(\nabla g)(x_0) \neq 0$ müssen

2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

$(\nabla f)(x_0)$ und $(\nabla g)(x_0)$ in die gleiche Richtung zeigen. In anderen Worten, es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(2.12) \quad (\nabla f)(x_0) = -\lambda(\nabla g)(x_0).$$

Gehen wir nun von (2.12) aus, wobei wir $x_0 = (x, y)$ und λ als unbekannte betrachten, so erhalten wir drei Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 && \text{(da } (x, y) \text{ auf dem Kreis liegt)} \\ 2x + 2\lambda x &= 0 && \text{(erste Koordinate von (2.12))} \\ 2y - 2\lambda y &= 0 && \text{(zweite Koordinate von (2.12)).} \end{aligned}$$

Aus der zweiten und dritten Gleichung folgt, dass $x = 0$ oder $y = 0$ gelten muss. Aber die einzigen Punkt $(0, ?)$ und $(?, 0)$ auf dem Kreis, sind die, die wir in (2.9) bereits gefunden haben. Wir haben damit einen Zugang zu den Extrema von f gefunden, der ohne explizite Parametrisierung auskommt.

Das Vorgehen im Beispiel oben lässt sich zu einem Satz verallgemeinern.

Satz 2.6.2 (Methode von LAGRANGE). Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Hat f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ ein Extremum im Punkt x_0 und gilt $\nabla g(x_0) \neq 0$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0.$$

Der Wert λ heißt **Lagrangemultiplikator**.

Beispiele 2.6.3. (i) Sei $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Wir betrachten einen Quader Q im Raum \mathbb{R}^3 , welcher auf der XY -Ebene liegt und Eckpunkte bei $(\pm x, \pm y, z)$ und $(\pm x, \pm y, 0)$ besitzt. Das Volumen von Q ist $4xyz$. Gesucht ist ein Quader dieser Form mit maximalem Volumen, welcher in der Einheitskugel liegt.

In anderen Worten, wir wollen die Funktion

$$f(x, y, z) = 4xyz$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$ maximieren, wobei

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Aus theoretischen Überlegungen, konkret Satz 2.2.12, muss ein Maximum existieren. Ist (x, y, z) ein solches Maximum, so liefert LAGRANGE' Methode ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(2.13) \quad 0 = (\nabla f)(x, y, z) + \lambda(\nabla g)(x, y, z) = (4yz + 2\lambda x, 4xz + 2\lambda y, 4xy + 2\lambda z).$$

Die Voraussetzung $(\nabla g)(x, y, z) \neq 0$ ist erfüllt. Weiterhin gilt $x \neq 0, y \neq 0$ und $z \neq 0$, da ein maximaler Quader nicht Volumen 0 haben kann.

2.6 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Die drei Gleichungen (2.13) implizieren nach Umformung

$$\frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z} = -\frac{\lambda}{2}.$$

Also gilt $x^2 = y^2 = z^2$. Aus der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ erhalten wir weiter $x^2 = y^2 = z^2 = 1/3$. Wegen $x > 0$, $y > 0$ und $z > 0$ gilt somit

$$x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Wir haben den gesuchten Eckpunkt gefunden.

- (ii) Schließlich versuchen wir das Beispiel vom Beginn dieses Abschnitts mit der Methode von LAGRANGE zu behandeln. D.h. wir wollen $f(x, y) = x^2 - y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ minimieren und maximieren.

Wie im letzten Beispiel muss ein solcher Extremwert (x, y) existieren. Sei λ der Multiplikator aus der Methode von LAGRANGE. Es gilt

$$\nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = 0$$

oder, was äquivalent ist,

$$(2x + \lambda 2x, -2y + \lambda 2y) = (0, 0).$$

Wir erhalten die zwei Gleichungen

$$(2.14) \quad x(1 + \lambda) = y(-1 + \lambda) = 0.$$

Wir erinnern uns daran, dass die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ erfüllt sein muss. Insbesondere muss $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ gelten (der Nullpunkt liegt nicht auf dem Einheitskreis!). Wir unterscheiden also zwei Fälle.

Fall 1 ($x \neq 0$). Aus (2.14) erhalten wir $\lambda = -1$. Aber es gilt auch $y(-1 + \lambda) = 0$ und damit $y = 0$. Ziehen wir die Nebenbedingung $1 = x^2 + y^2 = x^2 + 0^2 = x^2$ zu Rate, sehen wir

$$(x, y) = (\pm 1, 0).$$

An diesen Punkten nimmt f den Wert 0 an.

Fall 2 ($y \neq 0$). Wir benutzen wieder (2.14) und finden diesmal $\lambda = 1$ und weiterhin $x = 0$. Dieses mal ist unser Punkt

$$(x, y) = (0, \pm 1)$$

und $f(x, y) = x^2 - y^2 = -1$.

Wir stellen fest, dass f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ bei $(\pm 1, 0)$ ein Maximum und bei $(0, \pm 1)$ ein Minimum besitzt. Dies stimmt mit unserer ersten Rechnung überein.

3 Mehrdimensionale Integration

In der *Höheren Mathematik I* haben wir gelernt, wie man eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integriert. Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

lässt sich als Fläche unter dem Graphen von f interpretieren. In diesem Kapitel möchten wir den Integrationsbegriff auf Skalarfelder ausweiten. Dabei beschränken wir uns auf Funktionen, die auf Bereiche im \mathbb{R}^2 und im \mathbb{R}^3 definiert sind.

3.1 Zweidimensionale Integration

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein hinreichend gutartiges Skalarfeld. Wir möchten das Integral

$$\int_D f d(x, y)$$

so definieren, dass es sich als Volumen des Graphen

$$\{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R}; 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

interpretieren lässt, falls f keine negative Werte annimmt.

Der Hauptunterschied zum eindimensionalen Fall zeigt sich schnell: Die Menge D über die wir integrieren möchten, kann im zweidimensionalen Fall viel komplizierter sein.

Definition 3.1.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

(i) Wir nennen D **y -projizierbar**, falls Funktionen $\underline{y}, \bar{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, mit

$$(3.1) \quad D = \{(x, y); x \in [a, b] \text{ und } \underline{y}(x) \leq y \leq \bar{y}(x)\}.$$

(ii) Umgekehrt nennen wir D **x -projizierbar**, falls Funktionen $\underline{x}, \bar{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, mit

$$D = \{(x, y); y \in [a, b] \text{ und } \underline{x}(y) \leq x \leq \bar{x}(y)\}.$$

(iii) Wir nennen D eine **Standardmenge**, falls (i) und (ii) gelten.

Beispiele 3.1.2. (i) Die Menge

$$\{(x, y); x \in [2, 4] \text{ und } x^2 \leq y \leq x^3\}$$

ist y -projizierbar (hier ist $\underline{y}(x) = x^2$ und $\bar{y}(x) = x^3$).

3 Mehrdimensionale Integration

- (ii) Nicht jede Menge ist y -projizierbar, wie die Figur ?? suggeriert.
- (iii) Aus Symmetriegründen ist die Kreisscheibe

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

eine Standardmenge. Sie lässt sich durch

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [-1, 1] \text{ und } \underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{=\underline{y}(x)} \leq y \leq \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{=\bar{y}(x)}\}$$

und

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \in [-1, 1] \text{ und } \underbrace{-\sqrt{1-y^2}}_{=\underline{x}(y)} \leq x \leq \underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{=\bar{x}(y)}\}$$

beschreiben.

Definition 3.1.3. Wir nehmen nun an, dass D wie in (3.1) eine y -projizierbare Menge ist. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann integrieren wir wie folgt

$$\int_D f d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\underline{y}(x)}^{\bar{y}(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Ist D eine x -projizierbare Menge, so integrieren wir stattdessen zuerst über die x -Koordinate und dann über die y -Koordinate mit der Hilfe von $\underline{x}(y)$ und $\bar{x}(y)$.

Der Satz von FUBINI besagt, dass die Integrationsreihenfolge nicht relevant ist.

Satz 3.1.4 (Satz von FUBINI). Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Standardmenge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld. Dann hängt das Integral nicht von der Reihenfolge der Integration ab. Konkret: es gilt

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\underline{y}(x)}^{\bar{y}(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\underline{x}(y)}^{\bar{x}(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

falls

$$D = \{(x, y); x \in [a, b] \text{ und } \underline{y}(x) \leq y \leq \bar{y}(x)\} = \{(x, y); y \in [c, d] \text{ und } \underline{x}(y) \leq x \leq \bar{x}(y)\}.$$

Beispiele 3.1.5. (i) Das Quadrat $D = [0, 1] \times [0, 1]$ ist eine Standardmenge. Wir

möchten $f(x, y) = x^3 - y^3 - x^2y + 2$ auf D integrieren. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \int_D f(x, y) d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^1 (x^3 - y^3 - x^2y + 2) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left[x^3y - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}x^2y^2 + 2y \right]_{y=0}^{y=1} dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^3 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2 + 2 \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x}{4} - \frac{x^3}{6} + 2x \right]_{x=0}^{x=1} \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + 2 = \frac{11}{6}.
 \end{aligned}$$

(ii) Die Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 2] \text{ und } x^2 \leq y \leq 4\}$$

ist durch ihre Präsentation y -projizierbar. Wir integrieren $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned}
 \int_D f(x, y) d(x, y) &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 (x^2 + y^2) dy dx \\
 &= \int_0^2 \left[x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=4} dx \\
 &= \int_0^2 \left(4x^2 + \frac{64}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx \\
 &= \left[\frac{4}{3}x^3 + \frac{64}{3}x - \frac{1}{5}x^5 - \frac{x^7}{21} \right]_0^2 \\
 &= \frac{4288}{105}.
 \end{aligned}$$

Die Substitutionsregel für eindimensionale Integrale hat ein Analogon in zwei Dimensionen. Wie vorher betrachten wir eine Menge D die x - oder y -projizierbar ist. Wir nehmen an, dass E ebenfalls diese Eigenschaft besitzt und dass es eine bijektive Abbildung

$$\Phi : E \rightarrow D$$

gibt. Konkret muss Φ ein Vektorfeld sein, und es gilt

$$\Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v)) = (x, y).$$

3 Mehrdimensionale Integration

Ist Φ hinreichend gutartig,¹ so gilt die Substitutionsregel

Rechenregeln 3.1.6 (Substitutionsregel). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = \int_E f(\Phi(u, v)) |\det J_\Phi(u, v)| d(u, v)$$

wobei J_Φ die Jacobi-Matrix von Φ ist.

Die Rechenregel gilt sogar unter leicht geschwächten Bedingungen.

Beispiele 3.1.7. (i) Wir möchten die Funktion $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ auf der Kreisscheibe

$$D := \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$$

integrieren. Dazu transformieren wir in Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Die transformierte Menge ist

$$E = \{(r, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]\}.$$

Die Jacobi-Matrix von Φ ist

$$J_\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und damit

$$\det J_\Phi(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

Wegen $x^2 + y^2 = r^2$ liefert die Substitutionsregel

$$\int_D e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \int_E e^{-r^2} |\det J_\Phi(r, \varphi)| dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-r^2} r dr d\varphi.$$

Jetzt wenden wir die Substitutionsregel aus der *Höheren Mathematik I* an, um $e^{-r^2} r$ zu integrieren. Wir erhalten²

$$\int_D e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r} \right]_{r=0}^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} \right) d\varphi = (1 - e^{-1})\pi.$$

¹Das Vektorfeld Φ muss stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung von E sein

²Eine Bemerkung zur formalen Korrektheit: Die Voraussetzung für die Substitutionsregel, wie wir sie oben formuliert haben, ist in diesem Beispiel nicht erfüllt. (Z.B. ist Φ nicht injektiv auf $[0, 1] \times [0, 2\pi]$.) Trotzdem kann man die Argumentation mit leichtem Aufwand korrekt begründen und das Resultat ist richtig.

(ii) Hier berechnen wir das Integral von $f(x, y) = xy$ auf dem Kreisabschnitt

$$D = \left\{ (x, y) : x, y \in [0, 1]; \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\}.$$

Wie im ersten Beispiel benutzen wir Polarkoordinaten r und φ . In diesen Koordinaten ist D als

$$E = \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{2} \leq r \leq 1 \text{ und } \varphi \in [0, \pi/2] \right\}$$

gegeben.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_D xy d(x, y) &= \int_E (r \cos \varphi)(r \sin \varphi) \underbrace{|\det J_{\Phi}(r, \varphi)|}_{=r} dr d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{1/2}^1 r^3 \cos \varphi \sin \varphi dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \cos \varphi \sin \varphi \right]_{r=1/2}^{r=1} d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{15}{64} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion von $\cos \varphi \sin \varphi$ ist $(\sin^2 \varphi)/2$. Also gilt

$$\int_D xy d(x, y) = \frac{15}{64} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{15 \sin^2(\pi/2)}{64 \cdot 2} = \frac{15}{128}.$$

3.2 Dreidimensionale Integration

Beispiel 3.2.1. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Quader, eine Kugel, ein Zylinder, etc. Für jeden Punkt $(x, y, z) \in K$ bezeichne $\rho(x, y, z)$ die Dichte von K . Dann ist die **Masse** von K gleich

$$M = \int_K \rho(x, y, z) d(x, y, z).$$

Das **Volumen** ist

$$V = \int_K d(x, y, z).$$

3 Mehrdimensionale Integration

Ist die Masse $M > 0$, so ist der **Schwerpunkt** von K der Punkt $(x_s, y_s, z_s) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned}x_s &= \frac{1}{M} \int_K x \rho(x, y, z) d(x, y, z), \\y_s &= \frac{1}{M} \int_K y \rho(x, y, z) d(x, y, z), \\z_s &= \frac{1}{M} \int_K z \rho(x, y, z) d(x, y, z).\end{aligned}$$

□

Wir werden, ähnlich wie im zweidimensionalen Fall, über projizierbare Mengen integrieren können und somit die Größen oben präzise berechnen können. Die Definition des Integrals ist ähnlich wie im zweidimensionalen Fall, d.h. unsere Mengen lassen sich wie folgt beschreiben

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq z \leq b, \quad \underline{y}(z) \leq y \leq \bar{y}(z), \quad \underline{x}(y, z) \leq x \leq \bar{x}(y, z)\}$$

wobei $\underline{y}, \bar{y}, \underline{x}, \bar{x}$ geeignete Funktionen sind. Das Integral eines Skalarfelds über K lässt sich ähnlich definieren. Wir werden dies anhand eines Beispiels veranschaulichen.

Beispiel 3.2.2. Sei K der Quader

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq x \leq 3\}.$$

Wir setzen

$$\rho(x, y, z) = xyz,$$

dann ist

$$\begin{aligned}\int_K \rho(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 xyz dx \right) dy \right) dz \\&= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left[\frac{x^2 y z}{2} \right]_0^3 dy \right) dz \\&= \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{9yz}{2} dy \right) dz \\&= \int_0^1 \left[\frac{9y^2 z}{4} \right]_0^2 dz \\&= \int_0^1 9z dz = \left[\frac{9z^2}{2} \right]_0^1 = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Die Substitutionsregel (Rechenregel 3.1.6) gilt in entsprechender Form auch im \mathbb{R}^3 . Wir werden diese Regel mit Zylinder- und Kugelkoordinaten kennenlernen.

Beispiele 3.2.3. (i) Wir möchten die Funktion

$$\rho(x, y, z) = x^2 z^2$$

über den Zylinder

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -4 \leq z \leq 4, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$$

integrieren. Wir werden dabei in **Zylinderkoordinaten** (r, φ, z) arbeiten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Die ersten zwei Koordinaten entsprechen Polarkoordinaten, die letzte Koordinate misst die z -Achse. Auch hier muss man die Determinante der Jacobi-Matrix J_Φ bestimmen. Ganz ähnlich wie bei den Polarkoordinaten erhält man $\det J_\Phi = r$. In Zylinderkoordinaten nimmt die Menge K die Form

$$S = \{(r, \varphi, z); -4 \leq z \leq 4, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1\}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \int_K x^2 z^2 d(x, y, z) &= \int_S \underbrace{(r \cos \varphi)^2}_{=x^2} z^2 \underbrace{r}_{=|\det J_\Phi|} d(r, \varphi, z) \\ &= \int_{-4}^4 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 z^2 r^3 \cos^2 \varphi dr \right) d\varphi \right) dz \\ &= \int_{-4}^4 \left(\int_0^{2\pi} \left[z^2 \frac{r^4}{4} \cos^2 \varphi \right]_0^1 d\varphi \right) dz \\ &= \int_{-4}^4 \left(\int_0^{2\pi} \frac{z^2}{4} \cos^2 \varphi d\varphi \right) dz \\ &= \int_{-4}^4 \left(\frac{z^2}{8} [\varphi + \cos \varphi \sin \varphi]_0^{2\pi} \right) dz, \end{aligned}$$

da $d(\varphi + \cos \varphi \sin \varphi)/d\varphi = 2 \cos^2 \varphi$. Wir rechnen weiter und erhalten

$$\int_K x^2 z^2 d(x, y, z) = \int_{-4}^4 \frac{\pi z^2}{4} dz = \frac{\pi}{4} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-4}^4 = \frac{32}{3} \pi.$$

3 Mehrdimensionale Integration

(ii) Nun wenden wir uns der Integration über Kugeln zu. Sei also

$$(3.2) \quad K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

die Kugel um den Nullpunkt mit Radius 1. Wir möchten

$$\int_K \rho(x, y, z) d(x, y, z)$$

bestimmen, wobei

$$\rho(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Die Transformation in Kugelkoordinaten lautet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten liegen in den folgenden Bereichen

$$\begin{array}{ll} r \in (0, +\infty) & \text{Radius,} \\ \varphi \in (-\pi, \pi) & \text{geographische Länge,} \\ \theta \in (0, \pi) & \text{geographische Breite.} \end{array}$$

Die Jacobi-Matrix J_Φ und ihre Determinante lassen sich wie üblich berechnen. Nach einigen Umformungen findet man

$$\det J_\Phi = r^2 \sin \theta.$$

Die Kugel K transformiert in Kugelkoordinaten zu

$$S = \{(r, \varphi, \theta); \theta \in [0, \pi), \varphi \in (-\pi, \pi), r \in [0, 1]\}.$$

In diesen Koordinaten gilt

$$\rho(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = e^{r^3},$$

da $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r$. Also gilt

$$\int_K \rho(x, y, z) d(x, y, z) = \int_S e^{r^3} r^2 \sin \theta d(r, \varphi, \theta) = \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \left(\int_0^1 r^2 e^{r^3} \sin \theta dr \right) d\varphi \right) d\theta$$

Wir beobachten $d(e^{r^3})/dr = 3r^2 e^{r^3}$ wegen der Kettenregel. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_K \rho(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \left[\frac{e^{r^3}}{3} \right]_0^1 \sin \theta d\varphi \right) d\theta = \frac{e-1}{3} \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \sin \theta d\varphi \right) d\theta \\ &= \frac{e-1}{3} 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2\pi \frac{e-1}{3} [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi \frac{e-1}{3}. \end{aligned}$$

(iii) Das Volumen der Kugel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \leq R\}$$

mit Radius R lässt sich ebenfalls mit Kugelkoordinaten berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} V &= \int_K d(x, y, z) = \int_S r^2 \sin \theta d(r, \varphi, \theta) = \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \left(\int_0^R r^2 \sin \theta dr \right) d\varphi \right) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \sin \theta d\varphi \right) d\theta = \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \frac{R^3}{3} \sin \theta d\varphi \right) d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} R^3 \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{=2} = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

Das ist genau die aus der Schule bekannten Formel für das Volumen einer Kugel.

3.3 Kurvenintegrale

Im diesem Abschnitt untersuchen wir die zwei folgenden Fragestellungen:

- (i) Gegeben sei eine Kurve, z.B. ein Kreis, wie können wir seine Länge bestimmen?
- (ii) Liegt diese Kurve in einem Kraftfeld, z.B. dem Gravitationsfeld eines Planeten, welche Arbeit wird beim Transport einer Masse entlang des Weges verrichtet?

Definition 3.3.1. Sei $m = 2$ oder $m = 3$. Sei ferner $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Ein **Weg** ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Bildmenge von γ heißt **Kurve**.

Beispiel 3.3.2. Der Einheitskreis wird durch den Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Definition 3.3.3. Sei $m \in \{2, 3\}$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Weg und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Das **Wegintegral** von f entlang γ ist

$$\int_\gamma f dr := \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{\text{eukl. Norm}} dt.$$

Das Wegintegral wird auch **Kurvenintegral** genannt.

3 Mehrdimensionale Integration

Beispiel 3.3.4. Wir berechnen das Wegintegral der konstanten Funktion $f(\vec{x}) = 1$ entlang des Weges

$$\gamma(t) = R \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Dieser Weg beschreibt einen Kreis mit Radius $R > 0$. Wir leiten beide Komponenten ab und erhalten

$$\gamma'(t) = 2\pi R \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\int_{\gamma} 1 dr = \int_0^1 2\pi R \underbrace{((- \sin(2\pi t))^2 + (\cos(2\pi t))^2)^{1/2}}_{=1} dt = 2\pi R.$$

Es handelt sich um den Umfang eines Kreises mit Radius R . □

Das letzte Beispiel ist ein Spezialfall des folgenden Satzes.

Satz 3.3.5. Sei $m \in \{2, 3\}$. Die Länge eines Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist gegeben durch

$$\int_{\gamma} 1 dr = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Beispiel 3.3.6. Sei

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma(t) := (t, t^2)$$

ein Weg und $f(x, y) = x^2 + y$ eine Funktion. Dann gilt $\gamma'(t) = (1, 2t)$ und

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(\vec{x}) dr &= \int_0^1 f(t, t^2) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 2t^2(1 + 4t^2)^{1/2} dt = \dots = \frac{9}{16}\sqrt{5} - \frac{1}{32} \log(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Bestimmten Integrals kann auf eine Integraltabelle zurückgegriffen werden. □

Definition 3.3.7. Sei $m \in \{2, 3\}$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Weg. Ist $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld, so setzen wir

$$\int_{\gamma} F \cdot d\vec{r} := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Hier bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 . Dieses Integral heißt **Wegintegral des Vektorfelds** F entlang von γ oder einfach **Kurvenintegral des Vektorfelds** F .

Bemerkungen 3.3.8. Das Wegintegral eines Vektorfelds beschreibt die Arbeit, die vom Feld verrichtet wird, wenn ein Punkt entlang γ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ transportiert wird. Die Ableitung $\gamma'(t)$ entspricht der **Geschwindigkeit** des Weges γ . Die Arbeit ist betragsmäßig am größten, wenn das Kraftfeld parallel zur Geschwindigkeit des Weges wirkt.

Beispiel 3.3.9.

(i) Sei $F(x, y) = (y, -x)$. Wir berechnen $\int_{\gamma} F \cdot d\vec{r}$ wobei

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

den Einheitskreis umläuft. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \langle (\sin(2\pi t), -\cos(2\pi t)), (-2\pi \sin(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t)) \rangle dt \\ &= \int_0^1 (-2\pi \sin^2(2\pi t) - 2\pi \cos^2(2\pi t)) dt \\ &= -2\pi \int_0^1 \underbrace{(\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t))}_{=1} dt \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

Die Feldlinien laufen tangential zur Geschwindigkeit des Weges.

(ii) Sei $M > 0$ die Masse eines Planeten im Koordinatenursprung und $m > 0$ die Masse eines Punktes bei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dann wirkt das Gravitationsfeld von M auf m durch das Kraftfeld

$$F((x, y, z)) = -\frac{GMm}{\|(x, y, z)\|^3}(x, y, z)$$

hier bezeichnet G die Gravitationskonstante.

Ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein Weg, so ist

$$\int_{\gamma} F \cdot d\vec{r} = -GMm \int_{\gamma} \|\vec{x}\|^{-3} \langle \vec{x}, \gamma'(t) \rangle dt$$

die Arbeit, die das Gravitationsfeld an m verrichtet, wenn es den Weg γ entlang transportiert wird.

Definition 3.3.10 (Stammfunktion). Sei $m \in \{2, 3\}$. Sei ferner $D \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein stetiges Vektorfeld. Eine stetig differenzierbare Funktion $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** oder **Potential** von F , falls $\nabla\Phi = F$.

3 Mehrdimensionale Integration

Satz 3.3.11. Sei $m \in \{2, 3\}$ und $D \subset \mathbb{R}^m$ offen. Besitzt ein Vektorfeld $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Stammfunktion Φ , so gilt für jeden Weg

$$\gamma : [a, b] \rightarrow D,$$

dass

$$\int_{\gamma} F \cdot d\vec{r} = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a)).$$

Das Wegintegral hängt in diesem Fall also nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab. Ist der Weg geschlossen (Anfangspunkt=Endpunkt), so ist das Wegintegral 0.

Beweis. Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot d\vec{r} &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \nabla \Phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [\Phi(\gamma(t))] dt = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

Definition 3.3.12. Sei $m \in \{2, 3\}$. Eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^m$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jede in der Menge gelegene geschlossene Kurve auf einen Punkt „zusammenziehen“ lässt. Also wenn die Menge keine „Löcher“ hat.

Satz 3.3.13.

(i) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Gilt

$$(3.3) \quad \partial_y F_1(x, y) = \partial_x F_2(x, y),$$

so besitzt F eine Stammfunktion.

(ii) Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Gilt

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \partial_y F_1(x, y, z) &= \partial_x F_2(x, y, z), \\ \partial_z F_2(x, y, z) &= \partial_y F_3(x, y, z), \\ \partial_x F_3(x, y, z) &= \partial_z F_1(x, y, z), \end{aligned}$$

so besitzt F eine Stammfunktion.

3.4 Oberflächenintegrale

Eine Kurve (oder Weg) in \mathbb{R}^3 können wir als eindimensionales Objekt im dreidimensionalen Raum auffassen. Sie ist eindimensional, weil eine Kurve durch einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ vollständig beschrieben werden kann. Zweidimensionale Objekte im dreidimensionalen Raum sind Objekte, die wir durch zwei Parameter $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ beschreiben können. Solche Objekte heißen Flächen. Über Flächen, wie über Kurven kann man integrieren.

Definition 3.4.1. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $\Gamma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Die Bildmenge $\mathcal{F} := \Gamma(D)$ von Γ heißt **Fläche**. Die Funktion Γ heißt dann **Parametrisierung** der Fläche.

Beispiel 3.4.2. Die Kugel mit Radius $R > 0$

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

wird durch die Parametrisierung

$$\Gamma : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Gamma(\varphi, \nu) := \begin{pmatrix} R \sin \nu \cdot \cos \varphi \\ R \sin \nu \cdot \sin \varphi \\ R \cos \nu \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Definition 3.4.3 (Oberflächenintegral). Sei \mathcal{F} eine Fläche und $\Gamma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von \mathcal{F} über eine x - oder y -projizierbare Menge $D \subset \mathbb{R}^2$. Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist das **Oberflächenintegral** von f über \mathcal{F} definiert als

$$\int_{\mathcal{F}} f \, d\sigma := \int_D f(\Gamma(s, t)) \|\partial_s \Gamma(s, t) \times \partial_t \Gamma(s, t)\| \, d(s, t),$$

wobei $x \times y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$ für $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Bemerkung 3.4.4. Die Vektoren $\partial_s \Gamma(s, t) \in \mathbb{R}^3$ und $\partial_t \Gamma(s, t) \in \mathbb{R}^3$ sind Tangentialvektoren der Fläche in dem Punkt $\Gamma(s, t)$. Das Vektorprodukt

$$\partial_s \Gamma(s, t) \times \partial_t \Gamma(s, t) \in \mathbb{R}^3$$

ist bekanntlich orthogonal zu den beiden Vektoren $\partial_s \Gamma(s, t) \in \mathbb{R}^3$ und $\partial_t \Gamma(s, t) \in \mathbb{R}^3$. Der normierte Vektor

$$(3.5) \quad N(s, t) := \frac{\partial_s \Gamma(s, t) \times \partial_t \Gamma(s, t)}{\|\partial_s \Gamma(s, t) \times \partial_t \Gamma(s, t)\|} \in \mathbb{R}^3$$

heißt **Normaleneinheitsvektor** oder **Flächennormale** der Fläche in dem Punkt $\Gamma(s, t)$.

3 Mehrdimensionale Integration

Definition 3.4.5 (Oberflächenintegral eines Vektorfeldes). Sei \mathcal{F} eine Fläche und $\Gamma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von \mathcal{F} über eine x - oder y -projizierbare Menge $D \subset \mathbb{R}^2$. Für ein stetiges Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist das **Oberflächenintegral des Vektorfeldes F** über \mathcal{F} definiert als

$$\int_{\mathcal{F}} F \cdot d\vec{\sigma} := \int_{\mathcal{F}} F \cdot N \, d\sigma := \int_D F(\Gamma(s, t)) \cdot (\partial_s \Gamma(s, t) \times \partial_t \Gamma(s, t)) \, d(s, t).$$

Beispiel 3.4.6. Als Fläche betrachten wir die Mantelfläche der Halbkugel mit Radius 2:

$$\mathcal{F} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2^2, z \geq 0\}.$$

Wir wollen das Oberflächenintegral der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) := z \cdot (x^2 + y^2)$$

über \mathcal{F} berechnen. Dazu benötigen wir eine Parametrisierung von \mathcal{F} . Durch

$$\Gamma : (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Gamma(\varphi, \nu) := \begin{pmatrix} 2 \sin \nu \cdot \cos \varphi \\ 2 \sin \nu \cdot \sin \varphi \\ 2 \cos \nu \end{pmatrix}$$

ist eine Parametrisierung von \mathcal{F} über eine x -projizierbare Menge gegeben (der Definitionsbereich $(0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2})$ von Γ ist natürlich auch y -projizierbar). Wir können nun das Oberflächenintegral berechnen. Es gilt

$$\partial_\varphi \Gamma(\varphi, \nu) = \begin{pmatrix} 2 \sin \nu \cdot (-\sin \varphi) \\ 2 \sin \nu \cdot \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_\nu \Gamma(\varphi, \nu) = \begin{pmatrix} 2 \cos \nu \cdot \cos \varphi \\ 2 \cos \nu \cdot \sin \varphi \\ 2(-\sin \nu) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|\partial_\varphi \Gamma(\varphi, \nu) \times \partial_\nu \Gamma(\varphi, \nu)\| &= \left\| \begin{pmatrix} 2 \sin \nu \cdot (-\sin \varphi) \\ 2 \sin \nu \cdot \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \cos \nu \cdot \cos \varphi \\ 2 \cos \nu \cdot \sin \varphi \\ 2(-\sin \nu) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} -4 \sin^2 \nu \cdot \cos \varphi \\ -4 \sin^2 \nu \cdot \sin \varphi \\ -4 \sin \nu \cdot \cos \nu \end{pmatrix} \right\| = 4 \sin \nu. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{F}} f \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f(\Gamma(\varphi, \nu)) \|\partial_\varphi \Gamma(\varphi, \nu) \times \partial_\nu \Gamma(\varphi, \nu)\| \, d\nu d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f(2 \sin \nu \cdot \cos \varphi, 2 \sin \nu \cdot \sin \varphi, 2 \cos \nu) 4 \sin \nu \, d\nu d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2 \cos \nu \cdot (4 \sin^2 \nu \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \nu \sin^2 \varphi) 4 \sin \nu \, d\nu d\varphi \\
 &= 32 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \nu \cdot \sin^3 \nu \, d\nu d\varphi = 32 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} \sin^4 \nu \right]_0^{\pi/2} d\varphi = 32 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\varphi = \underline{\underline{16\pi}}.
 \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.4.7. Für die Parametrisierung

$$\Gamma : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Gamma(\varphi, \nu) := \begin{pmatrix} R \sin \nu \cdot \cos \varphi \\ R \sin \nu \cdot \sin \varphi \\ R \cos \nu \end{pmatrix}$$

der Kugel mit Radius $R > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 \partial_\varphi \Gamma(\varphi, \nu) \times \partial_\nu \Gamma(\varphi, \nu) &= R^2 \sin \nu \begin{pmatrix} \sin \nu \cdot \cos \varphi \\ \sin \nu \cdot \sin \varphi \\ \cos \nu \end{pmatrix}, \\
 \|\partial_\varphi \Gamma(\varphi, \nu) \times \partial_\nu \Gamma(\varphi, \nu)\| &= R^2 \sin \nu.
 \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.4.8. Die Mantelfläche eines Zylinders mit Radius $R > 0$ und Länge $L > 0$

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2, 0 < z < L\}$$

wird durch die Parametrisierung

$$\Gamma : (0, 2\pi) \times (0, L) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Gamma(\varphi, z) := \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

beschrieben. Für diese Parametrisierung gilt

$$\begin{aligned}
 \partial_\varphi \Gamma(\varphi, z) \times \partial_z \Gamma(\varphi, z) &= R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \|\partial_\varphi \Gamma(\varphi, z) \times \partial_z \Gamma(\varphi, z)\| &= R.
 \end{aligned}$$

□

3 Mehrdimensionale Integration

Beispiel 3.4.9. Wir wollen das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) := \begin{pmatrix} y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$$

über die Halbzylindermantelfläche

$$\mathcal{F} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4, 0 < z < 1, y > 0\}$$

integrieren. Aus Beispiel 3.4.8 erhalten wir die Parametrisierung

$$\Gamma : (0, \pi) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Gamma(\varphi, z) := \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Somit können wir das Oberflächenintegral des Vektorfeldes F berechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} F \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^\pi \int_0^1 F(\Gamma(\varphi, z)) \cdot (\partial_\varphi \Gamma(\varphi, z) \times \partial_z \Gamma(\varphi, z)) \, dz d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 \begin{pmatrix} 2 \sin \varphi \\ 2 \cos \varphi \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \, dz d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 8 \sin \varphi \cos \varphi \, dz d\varphi = \underline{\underline{0}}. \end{aligned}$$

□

3.5 Integralsätze von Gauß und Stokes

Definition 3.5.1 (Divergenz). Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dann heißt

$$\operatorname{div} F := \partial_x F_1 + \partial_y F_2$$

Divergenz von F . Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann heißt

$$\operatorname{div} F := \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3$$

Divergenz von F .

Satz 3.5.2 (Integralsatz von GAUSS). Sei $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve und $D \subset \mathbb{R}^2$ das von der Kurve γ eingeschlossene Gebiet. Sei ferner $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\gamma} F \cdot N \, dr = \int_D \operatorname{div} F \, d(x, y),$$

wobei N die nach außen gerichtete Kurvennormale bezeichnet (d.h. $N = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$ wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung der Kurve im positiven Umlaufsinne ist).

Satz 3.5.3 (Integralsatz von GAUSS). Sei $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene Fläche und $K \subset \mathbb{R}^3$ das von der Fläche \mathcal{F} eingeschlossene Volumen. Sei ferner $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{F}} F \cdot N \, d\sigma = \int_K \operatorname{div} F \, d(x, y, z),$$

wobei N die nach außen gerichtete Flächennormale bezeichnet (siehe (3.5)).

Definition 3.5.4 (Rotation). Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann heißt

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) := \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ -\partial_x F_3 + \partial_z F_1 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix}$$

Rotation von F .

Bemerkung 3.5.5. Zwecks Berechnung der Rotation eines Vektorfeldes ist die Schreibweise

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

hilfreich. Dabei ist das Vektorprodukt natürlich nur formal zu verstehen.

Satz 3.5.6 (Integralsatz von STOKES). Sei $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, die von einer Kurve γ berandet wird und $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\gamma} F \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} F \cdot N \, d\sigma,$$

wobei die Umlaufsrichtung von γ und die Flächennormale N von \mathcal{F} eine Rechtsschraube bilden müssen.

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

4.1 Erste Beispiele und Begriffe

Beispiel 4.1.1. Natürliches Wachstum. Eine Population bestehe zur Zeit t aus $N(t)$ Individuen. Die Population habe konstante Geburtsrate und Sterberate:

β = Anzahl Geburten pro Individuum und Zeiteinheit

δ = Anzahl Todesfälle pro Individuum und Zeiteinheit.

Also ist in einem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$

die Anzahl der Geburten = $\beta N(t) \Delta t$,

die Anzahl der Todesfälle = $\delta N(t) \Delta t$.

Damit folgt

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \beta N(t) \Delta t - \delta N(t) \Delta t$$

$$\Leftrightarrow \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (\beta - \delta) N(t)$$

Diese Gleichung ist nur näherungsweise gültig, weil bei der Berechnung der Anzahl von Geburten bzw. Todesfällen im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ für die Anzahl N der Individuen der konstante Wert $N(t)$ verwendet wurde. Tatsächlich wird N im Intervall $[t, t + \Delta t]$ variieren. Die Näherung wird umso genauer, je kleiner Δt ist. Wir lassen deshalb Δt gegen Null gehen und erhalten

$$N'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (\beta - \delta) N(t)$$

Bemerkung 4.1.2. Um den Grenzprozess $\Delta t \rightarrow 0$ durchführen zu können, muss die Funktion $N(t)$ differenzierbar, also insbesondere stetig sein. Dies erscheint zunächst eine unrealistische Idealisierung zu sein; da $N(t)$ nur diskrete Werte aus \mathbb{N}_0 annimmt und somit unstetig ist (außer im uninteressanten Fall $N(t) \equiv \text{const}$). Dennoch ist diese Idealisierung sinnvoll, wenn die Population aus sehr vielen Individuen besteht. In diesem Fall entspricht eine Änderung der Anzahl um Eins einer sehr kleinen relativen Änderung von $N(t)$. Betrachtet man z.B. die Population einer gewissen chemischen Spezies (Molekülsorte), so wird N typischerweise im Bereich $10^{20} \dots 10^{24}$ liegen.

Für große Populationen kann die Anzahl der Individuen also mit kleinem (relativem) Fehler durch eine stetige Funktion $N(t)$ beschrieben werden. Unter der zusätzlichen Annahme, dass $N(t)$ auch differenzierbar ist, ergibt sich das mathematische Modell

$$N'(t) = (\beta - \delta) N(t)$$

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

zur Beschreibung des Wachstums dieser Population. In dieser Gleichung tritt eine (unbekannte) Funktion und deren Ableitung auf. Solche Gleichungen heißen **Differentialgleichungen** (kurz DGLen), wobei auch höhere Ableitungen der „gesuchten“ Funktion auftreten können. Da in der Modellgleichung nur die erste Ableitung vorkommt, spricht man von einer DGL 1. Ordnung. Allgemein versteht man unter der **Ordnung einer DGL** den Grad der höchsten Ableitung. Zum Beispiel ist

$$y'''(t) - 2y'(t) + y(t)^4 = 0$$

eine DGL 3. Ordnung. Das Wachstumsmodell von oben ist eine DGL der Form

$$y'(t) = k y(t) \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Diese wird auch natürliche Wachstumsgleichung genannt. Aus der *Höheren Mathematik I* wissen wir, dass alle Lösungen dieser DGL durch die Funktionen

$$y(t) = c e^{kt} \quad \text{mit beliebigem } c \in \mathbb{R}$$

gegeben sind. Die Lösung ist also nur bis auf eine Konstante bestimmt; man spricht deshalb von der **allgemeinen Lösung** der DGL. Schreibt man zusätzlich den Wert der Lösung zu einem bestimmten (Zeit-)Punkt t_0 durch Vorgabe eines **Anfangswertes** y_0 vor, so ist die Lösung eindeutig bestimmt:

$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$ ist die einzige Lösung des **Anfangswertproblems** (kurz AWP)

$$y'(t) = k y(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Beispiele 4.1.3. i) eine Kräftebilanzrechnung am Federpendel (wobei x die Position, t die Zeit bezeichne) liefert¹:

$$\begin{array}{ll} m \ddot{x}(t) = -c x(t) & \text{mit zur Geschw. prop. Dämpfung} \\ m \ddot{x}(t) = -c x(t) - d \dot{x}(t) & \text{mit zusätzl. äußerer Kraft} \\ m \ddot{x}(t) = -c x(t) - d \dot{x}(t) + F_{ext}(t) & \end{array}$$

Man erhält eine DGL vom Typ

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = f(t).$$

Diese DGL ist von 2. Ordnung und ist **linear**, d.h. y, y' und y'' treten ausschließlich als Linearkombination auf (also keine Terme wie $y(t)^2, y(t)y'(t)$, etc.). Analog zu linearen Gleichungssystemen heißt eine solche lineare DGL **homogen**, falls $f(t) \equiv 0$ gilt, sonst **inhomogen**.

ii) Für das Fadenpendel (φ Auslenkung, t Zeit) liefert der gleiche Ansatz

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \sin \varphi(t) = 0.$$

Dies ist eine **nichtlineare** DGL 2. Ordnung. Man kann zeigen, dass die zugehörigen Anfangswertprobleme (mit Vorgaben $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \varphi_1$) eine eindeutige Lösung besitzen - eine formelmäßige Berechnung der Lösung ist aber nicht möglich.

¹Punkte symbolisieren gewöhnlich Ableitungen nach der Zeit t , also $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$.

iii) Chemische Reaktion 1. Ordnung

$$c'_A(t) = -k c_A(t)$$

Hier bezeichnet c_A die Konzentration einer chemischen Spezies A in Abhängigkeit von der Zeit t . Diese DGL beschreibt z.B. den Konzentrationsverlauf bei einer Zerfallsreaktion $A \xrightarrow{k} B + C$ oder einer Isomerisierung $A \xrightarrow{k} B$. Dabei ist $k > 0$ die Reaktionsgeschwindigkeitskonstante.

iv) Chemische Reaktion 2. Ordnung

$$c'_A(t) = -k c_A(t)^2$$

Tritt z.B. bei elementaren (also nicht aus weiteren Einzelreaktionen zusammengesetzten) Reaktionen der Form $2A \xrightarrow{k} B + C$ auf. In diesem Fall ist $k = 2k_1$, da in jedem Reaktionsschritt 2 Moleküle A abreagieren.

v) Differentialgleichungssysteme Oft hängt die Änderungsrate einer Konzentration auch von den Konzentrationen anderer beteiligter Spezies ab, so dass mehrere gekoppelte DGLen auftreten. Beispielsweise ergibt sich für die Elementarreaktion $A + B \xrightarrow{k} P$ das (nichtlineare!) Differentialgleichungssystem

$$c'_A(t) = -k c_A(t) c_B(t),$$

$$c'_B(t) = -k c_A(t) c_B(t),$$

$$c'_P(t) = k c_A(t) c_B(t).$$

Wir werden auf Systeme von DGLen in Kapitel 5 näher eingehen.

4.2 DGLen mit getrennten Variablen

Eine DGL 1. Ordnung der Form

$$y'(t) = g(t) h(y(t)) \quad \text{kurz } y' = g(t)h(y)$$

heißt **Differentialgleichung mit getrennten Variablen**.

Beispiel 4.2.1.

$$\begin{aligned} y' &= -ky^2 && \text{(hier: } g(t) = -k, h(y) = y^2) \\ y' &= e^y \sin(t) && \text{(hier: } g(t) = \sin(t), h(y) = e^y) \\ y' &= y^2 + t^2 && \text{hat keine getrennten Variablen.} \end{aligned}$$

Wie der Name andeutet, lassen sich die Variablen t und y trennen:

$$\frac{y'}{h(y)} = g(t) \quad \text{falls } h(y) \neq 0.$$

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Unbestimmte Integration bzgl. t und Anwendung der Substitutionsregel liefert:

$$\int \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt = \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t) dt$$

Berechnung dieser unbestimmten Integrale (mit Integrationskonstante) und Auflösen nach y ergibt alle Lösungen $y(t)$ für die $h(y(t)) \neq 0$ gilt. Der Spezialfall $h(y(t)) = 0$ muss gesondert behandelt werden.

Beispiele 4.2.2. i) $y'(t) = k y(t)$

$$\text{Für } y(t) \neq 0: \int \frac{dy}{y} = \int k dt \Rightarrow \ln |y| = kt + c_1$$

$$\Rightarrow |y| = e^{kt+c_1} \Rightarrow y(t) = e^{c_1} e^{kt} \text{ oder } y(t) = -e^{c_1} e^{kt}.$$

Beide Fälle lassen sich zusammenfassen: $y(t) = c e^{kt}$ mit $c \neq 0$.

Offensichtlich ist aber $y(t) \equiv 0$ auch eine Lösung.

Die Lösungen haben also die Form $y(t) = c e^{kt}$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

ii) AWP: $y'(t) = -k y(t)^2$, $y(0) = y_0$ mit Anfangswert $y_0 > 0$. Für $y(t) \neq 0$:

$$\int \frac{dy}{y^2} = - \int k dt \Rightarrow -\frac{1}{y} = -kt + c, \text{ mit } c \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{kt - c}.$$

Bestimmung von c aufgrund der Anfangsbedingung:

$$y(0) = \frac{1}{-c} \stackrel{!}{=} y_0 \Rightarrow c = -\frac{1}{y_0}$$

Damit ist $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + kt}$ die Lösung des AWP.

Bei der Lösung des AWP

$$y' = g(t)h(y), \quad y(t_0) = y_0$$

kann der Anfangswert sofort eingerechnet werden. Dazu integriert man von t_0 bis t :

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{t_0}^t g(s) ds$$

Ausrechnen und Auflösen nach $y(t)$ liefert die Lösung.

Beispiel 4.2.3.

$$y' = t y, \quad y(0) = y_0$$

$$\Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dx}{x} = \int_0^t s ds \Rightarrow \ln(x) \Big|_{x=y_0}^{y(t)} = \frac{1}{2} s^2 \Big|_0^t$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{y(t)}{y_0} \right| = \frac{1}{2} t^2 \Rightarrow \frac{y(t)}{y_0} = e^{t^2/2} \Rightarrow y(t) = y_0 e^{t^2/2}.$$

4.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Darunter versteht man die inhomogene, lineare DGL

$$(4.1) \quad y'(t) + a(t)y(t) = f(t).$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL ist die Summe aus einer speziellen Lösung y_s und der allgemeinen Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' = -a(t)y$ erhält man direkt: Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen. Sei $A(t)$ eine Stammfunktion von $a(t)$, also $A'(t) = a(t)$. Dann ist

$$(4.2) \quad y_h(t) = ce^{-A(t)} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

die allgemeine Lösung. Nun zur speziellen Lösung:

Methode 4.3.1 (Variation der Konstanten). Ansatz:

$$y_s(t) = c(t)e^{-A(t)}.$$

Einsetzen in $y' + a(t)y = f(t)$ liefert

$$\begin{aligned} c'(t)e^{-A(t)} + c(t)e^{-A(t)}(-a(t)) + a(t)c(t)e^{-A(t)} &= f(t) \\ \Rightarrow c'(t)e^{-A(t)} = f(t) &\Rightarrow c'(t) = e^{A(t)}f(t). \\ c(t) = \int e^{A(u)}f(u) du &\Rightarrow y_s(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(u)}f(u) du \end{aligned}$$

Es folgt also, dass

$$y(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(u)}f(u) du \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

die allgemeine Lösung der DGL $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$ ist.

Zur Lösung des AWP

$$y' + a(t)y = f(t), \quad y(t_0) = y_0$$

kann man bestimmte Integration verwenden, um den Anfangswert sofort einzurechnen. Die Lösung lautet

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(\tau) d\tau} f(s) ds$$

Beispiel 4.3.2. Wir betrachten das AWP

$$y' + y = \sin t, \quad y(0) = 1.$$

Hier ist also $a(t) \equiv 1$. Als Lösung ergibt sich

$$y(t) = e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-s)} \sin s \, ds,$$

mit $\int e^s \sin s \, ds = \frac{1}{2} e^s (\sin s - \cos s)$ folgt also

$$y(t) = e^{-t} + e^{-t} \left(\frac{1}{2} e^s (\sin s - \cos s) \right) \Big|_{s=0}^t = \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} (\sin t - \cos t).$$

4.4 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die allgemeine lineare DGL 2. Ordnung hat die Form

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t).$$

Die allgemeine Lösung hat wieder die folgende Struktur:

allg. Lsg. der inhom. DGL = spez. Lsg. der inh. DGL + allg. Lsg. der hom. DGL

Für diese DGL gibt es kein allgemeines Verfahren zur Berechnung der Lösungen, allerdings für den wichtigen Spezialfall **konstanter Koeffizienten**, d.h. für $a(t) \equiv a, b(t) \equiv b$.

Methode 4.4.1. 1. Schritt: Berechne die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.$$

Verwende dazu den Ansatz²

$$y(t) = e^{\lambda t} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Achtung! Im Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ sind komplexe $\lambda \in \mathbb{C}$ erlaubt!

Einsetzen von $y(t) = e^{\lambda t}$ in die homogene DGL ergibt

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

Die quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{D}, \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{D} \quad \text{mit } D = \frac{a^2}{4} - b.$$

Das Vorzeichen der Diskriminante D entscheidet über den Typ der allgemeinen Lösung.

²Die Motivation dazu ist die folgende: bis auf konstante Faktoren sollten $y(t), y'(t)$ und $y''(t)$ vom gleichen Typ sein, damit die Linearkombination $y'' + ay' + by$ Null ergeben kann.

4.4 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

1. Fall: $D > 0 \Rightarrow$ beide Lösungen λ_1, λ_2 sind reell und verschieden. Dann ist

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

die allgemeine Lösung.

2. Fall: $D = 0 \Rightarrow$ doppelte reelle Lösung $\lambda_1 = \lambda_2$. Dann ist

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

die allgemeine Lösung.

3. Fall: $D < 0 \Rightarrow$ Zwei konjugiert komplexe Lösungen

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + i\omega, \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - i\omega \quad \text{mit } \omega = \sqrt{-D}.$$

Dann gilt (mit der EULERSCHEN Formel)

$$e^{\lambda_1 t} = e^{-\frac{a}{2}t} e^{i\omega t} = e^{-\frac{a}{2}t} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{a}{2}t} e^{-i\omega t} = e^{-\frac{a}{2}t} (\cos \omega t - i \sin \omega t).$$

Dies sind zwei komplexe Lösungen!

Real- und Imaginärteil dieser Funktionen sind ebenfalls Lösungen der homogenen DGL. Daher ist

$$y(t) = e^{-\frac{a}{2}t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

die allgemeine Lösung. Zusammenfassung von Schritt 1: Die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y'' + ay' + by = 0$$

hat die Form

$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Dabei ist

$$\begin{array}{lll} y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, & y_2(t) = e^{\lambda_2 t} & \text{für } D > 0 \\ y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, & y_2(t) = t e^{\lambda_1 t} & \text{für } D = 0 \\ y_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \cos \omega t, & y_2(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \sin \omega t & \text{für } D < 0, \end{array}$$

mit den Abkürzungen $D = \frac{a^2}{4} - b$, $\omega = \sqrt{-D}$ und $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{D}$.

Bemerkung 4.4.2. Die Funktionen $y_1(t), y_2(t)$ sind in allen Fällen linear unabhängig (d.h. $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$; analog zu Vektoren); sie heißen **Fundamentallösungen** der DGL, da sie die allgemeine Lösung „aufspannen“.

2. Schritt: Finde eine spezielle Lösung von $y'' + ay' + by = f(t)$.

Ansatz I. Versuche für

die rechte Seite f	den Ansatz
$e^{\alpha t} (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t)$	$e^{\alpha t} (b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t)$
$a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$	$b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0$

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel 4.4.3. Für

$$y'' + \omega^2 y = \sin \omega_0 t \quad (\text{mit } \omega, \omega_0 > 0).$$

liefert der Ansatz

$$y_s(t) = b_1 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t.$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\begin{aligned} y_s'' + \omega^2 y_s &= b_1(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega_0 t + b_2(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \omega_0 t \stackrel{!}{=} \sin \omega_0 t. \\ \Rightarrow \quad b_1 &= 0, \quad b_2 = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad y_s(t) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega_0 t \quad \text{für } \underline{\omega \neq \omega_0}. \end{aligned}$$

Beachte: Die Amplitude von $y_s(t)$ ist $A = \frac{1}{|\omega^2 - \omega_0^2|}$ und $A \rightarrow \infty$ für $\omega_0 \rightarrow \omega$ („Resonanzkatastrophe“). Für $\omega = \omega_0$ funktioniert der Ansatz nicht!

Ansatz II. Variation der Konstanten. Verwende den Ansatz

$$y_s(t) = \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t),$$

wobei $y_1(t)$, $y_2(t)$ die Fundamentallösungen der homogenen DGL sind. Dann ist

$$y_s'(t) = \alpha'(t)y_1(t) + \alpha(t)y_1'(t) + \beta'(t)y_2(t) + \beta(t)y_2'(t).$$

Nun Verlange zusätzlich

$$(4.3) \quad \alpha'(t)y_1(t) + \beta'(t)y_2(t) = 0.$$

Dann gilt

$$y_s'(t) = \alpha(t)y_1'(t) + \beta(t)y_2'(t).$$

Ableiten ergibt

$$y_s''(t) = \alpha'(t)y_1'(t) + \alpha(t)y_1''(t) + \beta'(t)y_2'(t) + \beta(t)y_2''(t).$$

Jetzt setzen wir y_s , y_s' und y_s'' in die DGL ein:

$$\begin{aligned} y_s''(t) + ay_s'(t) + by_s(t) &= \alpha'(t)y_1'(t) + \alpha(t)y_1''(t) + \beta'(t)y_2'(t) + \beta(t)y_2''(t) \\ &\quad + a\alpha(t)y_1'(t) + a\beta(t)y_2'(t) + b\alpha(t)y_1(t) + b\beta(t)y_2(t) \\ &= \alpha'(t)y_1'(t) + \beta'(t)y_2'(t) + \alpha(t)[y_1''(t) + ay_1'(t) + by_1(t)] \\ &\quad + \beta(t)[y_2''(t) + ay_2'(t) + by_2(t)] \\ &\stackrel{!}{=} f(t), \end{aligned}$$

die Ausdrücke in den eckigen Klammern verschwinden, weil die Fundamentallösungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ die homogene DGL erfüllen, also:

$$(4.4) \quad \alpha'(t)y_1'(t) + \beta'(t)y_2'(t) \stackrel{!}{=} f(t).$$

4.4 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

(4.3) und (4.4) sind zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten $\alpha'(t)$ und $\beta'(t)$. Auflösen des Gleichungssystems ergibt:

$$\alpha'(t) = -\frac{y_2(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}, \quad \beta'(t) = \frac{y_1(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}.$$

Integration liefert $\alpha(t), \beta(t)$ und damit

$$y_s(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)f(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)} dt.$$

Beispiel 4.4.4.

$$y'' + \omega^2 y = \sin \omega t \quad (\text{mit } \omega > 0).$$

Hier ist $y_1(t) = \cos \omega t$ und $y_2(t) = \sin \omega t \Rightarrow y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) \equiv \omega$.

$$\Rightarrow \alpha'(t) = -\frac{1}{\omega} \sin^2 \omega t, \quad \beta'(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \frac{\sin \omega t \cos \omega t - \omega t}{2\omega^2}, \quad \beta(t) = \frac{\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t}{4\omega^2}.$$

$$\Rightarrow y_s(t) = -\frac{t}{2\omega} \cos \omega t + \frac{1}{4\omega^2} \sin \omega t.$$

Der zweite Summand $\frac{1}{4\omega^2} \sin \omega t$ ist eine Lösung der homogenen DGL. Daher ist

$$\tilde{y}_s(t) = -\frac{t}{2\omega} \cos \omega t$$

ebenfalls Lösung der inhomogenen DGL. Die allgemeine Lösung lautet also:

$$y(t) = -\frac{t}{2\omega} \cos \omega t + \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t, \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

5 Differentialgleichungssysteme

Ein Differentialgleichungssystem ist eine Anzahl von Gleichungen, in der eine Anzahl gesuchter Funktionen und deren Ableitungen vorkommen. Die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) + y_2'(t) + \sin(t) && \text{in } I, \\ y_2'(t) &= y_1(t) + t^2 \cdot y_2(t) && \text{in } I \end{aligned}$$

sind ein Differentialgleichungssystem mit zwei unbekanntem Funktionen $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei bezeichnet $I \subset \mathbb{R}$ stets ein Intervall.

5.1 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Die Arbeit mit linearen Systemen ist im Rahmen komplexwertiger Funktionen einfacher. Daher sind alle Funktionen in diesem Abschnitt komplexwertig. Sei $y : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine vektorwertige Funktion mit Koordinaten $y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]$. Mit y' bezeichnen wir die koordinatenweise Ableitung

$$y' : I \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad y'(t) := [y_1'(t), \dots, y_n'(t)].$$

Definition 5.1.1. Seien $a_{ij} \in \mathbb{C}$ für $i, j = 1, \dots, n$. Das System

$$(5.1) \quad \begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t) + \dots + a_{1n} y_n(t) \\ y_2'(t) &= a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t) + \dots + a_{2n} y_n(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1} y_1(t) + a_{n2} y_2(t) + \dots + a_{nn} y_n(t) \end{aligned} \quad \text{in } I$$

heißt **lineares System mit konstanten Koeffizienten**. Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

heißt **Koeffizientenmatrix**. Das System (5.1) kann auch als

$$(5.2) \quad y'(t) = A \cdot y(t) \quad \text{in } I$$

mit $y : I \rightarrow \mathbb{C}^n$, $y(t) := [y_1(t), \dots, y_n(t)]$ geschrieben werden.

5 Differentialgleichungssysteme

Definition 5.1.2. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix. Durch

$$(5.3) \quad e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

ist die **Exponentialfunktion** von A definiert. Dabei ist der Grenzwert komponentenweise zu verstehen.

Notation 5.1.3. Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $t \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$At = \begin{pmatrix} a_{11}t & a_{12}t & \dots & a_{1n}t \\ a_{21}t & a_{22}t & \dots & a_{2n}t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & \dots & a_{nn}t \end{pmatrix}.$$

Satz 5.1.4. *Es gilt*

$$\frac{d}{dt} [e^{At}] = A e^{At},$$

wobei die Ableitung der matrixwertigen Funktion $y(t) := e^{At}$ komponentenweise zu verstehen ist. Also ist für jeden Vektor $y_0 \in \mathbb{C}^n$ die Funktion $y(t) := e^{At} \cdot y_0$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems (5.2).

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [e^{At}] &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k (k t^{k-1}) \\ &= A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1} \\ &= A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \quad (\text{Indexverschiebung}) \\ &= A \cdot e^{At}. \end{aligned}$$

□

Satz 5.1.5. *Ist die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar, das heißt*

$$A = SDS^{-1} \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so ist

$$e^{At} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (SDS^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} SD^k S^{-1} \\ &= S \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1} \\ &= S \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1} \\ &= S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1}. \end{aligned}$$

□

Methode 5.1.6. Seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Koeffizientenmatrix und $y_0 \in \mathbb{C}^n$. Zu lösen:

$$(5.4) \quad \begin{cases} y'(t) = A \cdot y(t) & \text{in } (0, \infty), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Lösungsverfahren:

- (i) Die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_j \in \mathbb{C}$ als Nullstellen von $\det(A - \lambda I) = 0$ bestimmen.
- (ii) Für jeden Eigenwert λ_i die Gleichung $(A - \lambda_i I) \cdot \vec{x} = 0$ lösen und somit den zugehörigen Eigenraum $\text{span}\{\vec{x}_1^i, \dots, \vec{x}_{m_i}^i\}$ bestimmen.
- (iii) Ist $m_1 + \dots + m_j = n$, so ist A diagonalisierbar:

$$A = SDS^{-1} \text{ mit } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix} \text{ und } S = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ \vec{x}_1^1 & \vec{x}_2^1 & \dots & \vec{x}_{m_j}^j \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass λ_i genau m_i mal in der Diagonalmatrix D vorkommt!

5 Differentialgleichungssysteme

- (iv) Bestimme mit dem Gauss-Algorithmus eine Lösung $\vec{c} \in \mathbb{C}^n$ der Gleichung $S\vec{c} = y_0$.
 (v) Berechne die Lösung

$$\begin{aligned}
 y(t) = e^{At} y_0 &= S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1} y_0 \\
 &= \underline{\underline{c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{x}_1^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{x}_2^1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \vec{x}_n^j}}
 \end{aligned}$$

5.2 Lineare DGL höhere Ordnung als System

Eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann in ein System überführt und anschließend gelöst werden.

Methode 5.2.1. Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $u_0, u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{C}$.

Zu lösen:

$$(5.5) \quad \begin{cases} u^{(n)}(t) = a_{n-1} \cdot u^{(n-1)}(t) + a_{n-2} \cdot u^{(n-2)}(t) + \dots + a_0 \cdot u(t) & \text{in } (0, \infty), \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \dots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}. \end{cases}$$

Lösungsverfahren:

- (i) Setze $\vec{y}_0 := [u_0, u_1, \dots, u_{n-1}] \in \mathbb{C}^n$ und

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

- (ii) Löse mit Methode 5.1.6 für $y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$, $y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) & \text{in } (0, \infty), \\ y(0) = \vec{y}_0. \end{cases}$$

- (iii) Es folgt: $u(t) := y_1(t)$ ist eine Lösung von (5.5).

Literaturverzeichnis

- [1] H. Dallmann and K.-H. Elster. Einführung in die höhere Mathematik, Bd.1. Leipzig: UTB für Wissenschaft, 1999.
- [2] H. Dallmann and K.-H. Elster. Einführung in die höhere Mathematik, Bd.2. Leipzig: UTB für Wissenschaft, 1999.
- [3] H. Dallmann and K.-H. Elster. Einführung in die höhere Mathematik, Bd.3. Leipzig: UTB für Wissenschaft, 1999.
- [4] K. Finckenstein, J. Lehn, H. Schellhaas, and H. Wegmann. Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure, Band I: Analysis und Lineare Algebra. Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2006.
- [5] K. Finckenstein, J. Lehn, H. Schellhaas, and H. Wegmann. Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure: Band II: Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Numerik und Statistik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2013.
- [6] C. Karpfinger. Höhere Mathematik in Rezepten. Berlin: Springer Spektrum, 2014.
- [7] W. Merz and P. Knabner. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Berlin: Springer Spektrum, 2013.
- [8] L. Papula. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 3. Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.
- [9] L. Papula. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 1. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011.
- [10] L. Papula. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 2. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2012.
- [11] H. H. Storrer. Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I. Basel: Birkhäuser, 1992.
- [12] H. H. Storrer. Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften II. Basel: Birkhäuser, 1995.
- [13] W. Stramp. Höhere Mathematik 1: Lineare Algebra. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011.
- [14] W. Stramp. Höhere Mathematik 2: Analysis. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2012.

Index

- \sim , 6
- x -projizierbar, 51
- y -projizierbar, 51

- Abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^m , 29

- Beschränkte Folge, 27
- Beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^m , 29

- Charakteristisches Polynom, 13

- Determinante, 8
 - Gauß-Schritte, 11
 - Invertierbarkeit, 12
 - Matrixprodukt, 13
 - Skalarmultiplikation einer Zeile, 10
 - Zeilenaddition, 10
 - Regel von Sarrus, 8
 - Zeilenvertauschung, 9
- diagonalisierbar, 17
- Diagonalmatrix, 17
- Differentialgleichung, 70
- Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, 74
- Differentialgleichung mit getrennten Variablen, 71
- Differentialgleichungssystem, 79
 - konstante Koeffizienten, 79
- Divergenz, 66
- Divergenz eines Vektorfelds, 36

- Eigenraum, 14
- Eigenvektor, 13
- Eigenwert, 13
- Einfach zusammenhängend, 62
- Exponentialfunktion, 80

- Fläche, 63

- Flächennormale, 63
- Folge im \mathbb{R}^m , 26

- Gauß-Algorithmus, 6, 7
- Gaußscher Integralsatz im Raum, 67
- Gaußscher Integralsatz in der Ebene, 66
- Geschwindigkeit eines Weges, 61
- Globales Extremum, 41
- Globales Minimum/Maximum, 41
- Gradient eines Skalarfelds, 34
- Grenzwert einer Folge, 27

- Hesse-Matrix eines Skalarfelds, 42
- Homogene Differentialgleichung, 70

- Indefinite Matrix, 43
- Inhomogene Differentialgleichung, 70
- inverse Matrix, 7
 - Berechnung von, 7
- invertierbar, 7

- Jacobi-Matrix eines Vektorfelds, 34

- Koeffizientenmatrix, 1, 79
- Konvergente Folge, 27
- Koordinatenfolge, 26
- Kritischer Punkt eines Skalarfelds, 42
- Kugel, 30
- Kurve, 59
- Kurvenintegral, 59
- Kurvenintegral eines Vektorfeldes, 60

- Lagrangemultiplikator, 48
- Lineare Differentialgleichung, 70
- Lokales Extremum, 41
- Lokales Minimum/Maximum, 41

- Masse eines Körpers, 55

- Matrix, 1
 - diagonalisierbar, 17
 - Diagonalmatrix, 17
 - inverse, 7
 - symmetrisch, 42
 - ähnlich, 17
- Negativ definite Matrix, 43
- Negativ semidefinite Matrix, 43
- Nichtlineare Differentialgleichung, 70
- Normaleneinheitsvektor, 63
- Oberflächenintegral, 63
- Oberflächenintegral eines Vektorfeldes, 64
- Offene Teilmenge des \mathbb{R}^m , 30
- Parametrisierung, 63
- Partielle Ableitung, 31
- Partielle Ableitung höherer Ordnung, 34
- Partielle differenzierbar, 31
- Pivotelement, 2
- Positiv definite Matrix, 43
- Positiv semidefinite Matrix, 43
- Potential, 61
- Rechenregeln für total Ableitung, 40
- Sarrus
 - Regel von, 8
- Schwerpunkt, 56
- singulär, 7
- Skalarfeld, 26
- Spann, 16
- Stammfunktion, 61
- Standardmenge, 51
- Stetig in einem Punkt, 27
- Stetig partiell differenzierbar, 32
- Stetigkeit einer Funktion, 27
- Stetigkeit eines Vektorfeldes, 27
- Stokes'scher Integralsatz, 67
- Streichungsmatrix, 8
- Substitutionsregel im \mathbb{R}^2 , 54
- Total Differenzierbare Funktion, 37
- Totale Ableitung, 37
- Totales Differential, 37
- Vektorfeld, 26
- Volumen eines Körper, 55
- Weg, 59
- Wegintegral, 59
- Wegintegral eines Vektorfeldes, 60
- Zeilenstufenform, 2
- Zylinderkoordinaten, 57
- Zylindermantelfläche, 65