

Skript zur Vorlesung

**Mathematik I und II
für Maschinenbau und Bauingenieurwesen**

Ulrich Reif

in Zusammenarbeit mit

Robert Haller-Dintelmann

Christian Stinner

Torsten Wedhorn

Cornelia Wichelhaus

Winnifried Wollner

Version vom 01.10.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
2 Vektorrechnung	22
3 Komplexe Zahlen	38
4 Lineare Gleichungssysteme	44
5 Matrizenrechnung	56
6 Lineare Abbildungen	66
7 Eigenwerte und -vektoren	75
8 Folgen	87
9 Reihen	92
10 Funktionengrenzwert und Stetigkeit	97
11 Differenziation	100
12 Integration	107
13 Taylor-Reihen	121
14 Fourier-Reihen	134
15 Funktionen mehrerer Veränderlicher	141
16 Differenziation in mehreren Veränderlichen	150
17 Extrema	158
18 Integration in mehreren Veränderlichen	167
19 Arbeitsintegral und Fluss	184
20 Vektoranalysis	193

Vorwort

Das vorliegende Skript umfasst die Inhalte der Mathematik-Vorlesungen des ersten Studienjahres für die Studiengänge *Maschinenbau*, *Bauingenieurwesen*, *Wirtschaftsingenieurwesen* und andere an der TU Darmstadt. Die Darstellung des Stoffes ist stellenweise stark komprimiert und deshalb nur bedingt zum Selbststudium geeignet. Es versteht sich als Begleitmaterial und kann den regelmäßigen Besuch der Vorlesung nicht ersetzen. Ebenso ist das selbständige Lösen von Aufgaben in Haus- und Gruppenübungen entscheidend für den Studienerfolg.

Ziel der Vorlesung ist die Vermittlung grundlegender mathematischer Begriffe und Methoden. Deren sichere Beherrschung ist kein Selbstzweck, sondern eine Kernkompetenz, die im weiteren Studienverlauf von zentraler Bedeutung sein wird – auch wenn die Verbindungen zu den Anwendungen zum Zeitpunkt des Hörens der Vorlesung noch nicht immer erkennbar sein können. Die Inhalte werden durch Beispiele illustriert und, soweit es der knappe Zeitrahmen der Vorlesung zulässt, auch begründet, wobei aber keine streng formalen Beweise geführt werden.

Die Abschnitte 7.12 bis 7.17, die von Robert Haller–Dintelmann verfasst wurden, sind für den Studiengang *Bauingenieurwesen* verbindlicher Teil des Lehrplans und können in anderen Studiengängen gegebenenfalls entfallen.

Teile des Skripts sind in blauer Farbe gesetzt. Dies zeigt an, dass die betreffenden Passagen ergänzenden Charakter haben, also beispielsweise Hintergründe beleuchten oder weiterführende Fakten ohne nähere Begründung bereitstellen. Sie sind deshalb nicht weniger interessant oder unwichtig, im Gegenteil! Wie bei allen anderen Inhalten auch entscheidet der Dozent oder die Dozentin über die Klausurrelevanz.

Bei meinen Kollegen Robert Haller–Dintelmann, Christian Stinner, Torsten Wedhorn, Cornelia Wichelhaus und Winnifried Wollner möchte ich mich dafür bedanken, dass sie durch vielfältige Anregungen und Kommentare einen wertvollen Beitrag zur stetigen Weiterentwicklung des Skripts leisten.

September 2021

Ulrich Reif

Dieses Skript unterliegt dem Urheberrecht. Es ist ausschließlich zum persönlichen Gebrauch bestimmt. Der Verkauf gedruckter Exemplare sowie jegliche anderweitige Veröffentlichung, auch von Teilen oder Abbildungen, bedarf der Zustimmung des Autors.

Copyright © Ulrich Reif, 2021

1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden einige mathematische Konzepte und Grundbegriffe eingeführt, die für alles Weitere von zentraler Bedeutung sind und später als bekannt vorausgesetzt werden. Vieles davon ist Schulstoff, wird aber hier der Vollständigkeit halber nochmals in aller Kürze dargestellt.

1.1 Gleichheit: Das Gleichheitszeichen wird in der Mathematik in zwei grundsätzlich verschiedenen Weisen verwendet, nämlich für *Vergleich* und *Zuweisung*. Im Falle des Vergleichs stehen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens bekannte Größen und diese stimmen typischerweise überein. Wir erkennen also beispielsweise im Ausdruck

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

durch einfaches Nachrechnen eine wahre Aussage. Mathematik betreiben heißt häufig, eine derartige Gleichheit zwischen verschiedenen Ausdrücken herzuleiten oder festzustellen und daraus gegebenenfalls Schlussfolgerungen zu ziehen. Es ist aber keineswegs grundsätzlich verboten, eine Zeile wie

$$1 + 1 = 3$$

aufzuschreiben. Sie ist formal korrekt und sinnvoll, sie stellt eben nur eine falsche Aussage dar. Das ist kein Problem, sofern dies erkannt und kenntlich gemacht wird.

Im Falle der Zuweisung steht auf der einen Seite (typischerweise rechts) des Gleichheitszeichens eine bekannte Größe, während auf der anderen Seite (typischerweise links) ein bis dahin unbekannter Ausdruck steht. Dieser hat von nun an *definitonsgemäß* den Wert der anderen Seite. Der Ausdruck

$$a = 3987^{12} + 4365^{12}$$

bedeutet in diesem Sinne, dass der Buchstabe a ab sofort für den auf der rechten Seite angegebenen Zahlenwert steht.

Meist wird aus dem Zusammenhang unmittelbar klar, in welcher Bedeutung das Gleichheitszeichen zu verstehen ist. Um Missverständnisse zu vermeiden, wird aber gelegentlich auch das Zeichen $:=$ für die Zuweisung verwendet. Man schreibt also

$$a := 3987^{12} + 4365^{12},$$

um das Symbol a zu definieren und kann anschließend die Aussage

$$a = 4472^{12}$$

auf ihren Wahrheitsgehalt hin überprüfen. Was meinen Sie?

Wir verwenden das Symbol $:=$ nur gelegentlich zur Verdeutlichung. In den meisten Programmiersprachen ist dagegen eine penible Unterscheidung der beiden Fälle stets erforderlich. Leider sind die Bezeichnungen nicht einheitlich. So verwenden Sprachen wie C oder MATLAB das einfache Gleichheitszeichen $=$ für die Zuweisung und das doppelte Gleichheitszeichen $==$ für den Vergleich. Im Gegensatz zur Zuweisung liefert der Vergleich eine Rückgabe, nämlich den booleschen Wert `true` oder `false`.

1.2 Mengen: Die mathematisch korrekte Definition des Mengenbegriffs ist eine überraschend komplizierte Angelegenheit. Für unsere Zwecke genügt aber eine „naive“ Beschreibung, die auf Cantor¹ zurückgeht. Demnach ist eine *Menge* eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte der Menge heißen *Elemente* der Menge. Wenn m ein Element der Menge M ist, dann schreiben wir $m \in M$ und anderenfalls $m \notin M$. Mengen können auf unterschiedliche Weise angegeben werden:

- Vollständige Aufzählung, z.B. $P := \{\text{Hund, Biene, Spinne}\}$. Das gelingt natürlich nur für Mengen mit endlich vielen Elementen.
- Unvollständige Aufzählung, z.B. $Q := \{2, 4, 6, 8, \dots\}$. *Achtung:* Das ist manchmal zweckmäßig, aber natürlich nicht eindeutig!
- Charakterisierung durch Eigenschaften, z.B. $R := \{x \in \mathbb{N} : |x - 5| < 3\}$. Das ist also die Menge aller natürlichen Zahlen x mit der Eigenschaft, dass sie sich von der Zahl 5 um weniger als 3 unterscheiden. Die aufzählende Form dieser Menge ist $R = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt *leere Menge* und wird mit \emptyset oder $\{\}$ bezeichnet.

1.3 Mengen von Zahlen:² Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen mit 0
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R} = \text{Menge aller Dezimalzahlen}$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$	positive reelle Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$	nichtnegative reelle Zahlen
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$	komplexe Zahlen

¹Georg Cantor, 1845–1918

²Die grundlegenden Zahlbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und \mathbb{R} sind aus der Schule in einer intuitiven Form bekannt, ebenso die darin geltenden Rechenregeln. Mehr wird auch in dieser Vorlesung nicht vorausgesetzt, doch stellt sich natürlich die Frage, was diese Mengen denn *eigentlich* sind. Die präzisen Definitionen, insbesondere von \mathbb{N} und \mathbb{R} , sind ausgesprochen subtile Angelegenheiten, auf die wir hier nicht näher eingehen können.

1.4 Beziehungen zwischen Mengen:

- *Gleichheit:* Zwei Mengen stimmen genau dann überein, wenn Sie dieselben Elemente haben. Dabei ist die Reihenfolge unerheblich. Beispielsweise gilt im Beispiel oben $R = \{7, 4, 3, 6, 5\} = \{3, 4, 5, 7, 6\}$.
- *Teilmenge:* Wenn jedes Element einer Menge A auch in der Menge B enthalten ist, dann heißt A *Teilmenge von B* und B heißt *Obermenge von A* . Wir schreiben dann

$$A \subset B \quad \text{oder auch} \quad B \supset A.$$

1.5 Mengenoperationen: Seien A und B zwei Mengen, dann definieren wir:

- *Vereinigung:* Die Vereinigung von A und B enthält alle Elemente, die in A oder B enthalten sind,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

- *Schnitt:* Der Schnitt von A und B enthält alle Elemente, die in A und B enthalten sind,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

- *Differenz:* Die Differenz von A und B enthält alle Elemente, die in A , aber nicht in B enthalten sind,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

- *Kartesisches Produkt:* Das kartesische Produkt³ von A und B ist die Menge aller geordneten Paare, deren erstes Element in A und deren zweites Element in B liegt,

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ und } y \in B\}.$$

Für das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst schreibt man auch $A^2 = A \times A$.

1.6 Beispiel: Sei $A = [-2, 4]$ und $B = (1, 5]$. Dann gilt

$$A \cup B = [-2, 5], \quad A \cap B = (1, 4], \quad A \setminus B = [-2, 1].$$

Das kartesische Produkt $A \times B$ bildet ein Rechteck in der Ebene.

1.7 Regeln: Für den Umgang mit Mengen gibt es eine Vielzahl von Regeln (siehe beispielsweise die Wikipedia-Seite zum Thema *Mengenlehre*). Beispielsweise gelten die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

³nach René Descartes, 1596–1650

1.8 Funktionen: Eine Vorschrift f , die jedem Element x einer Menge D genau ein Element y einer anderen Menge Z zuordnet, heißt *Funktion*⁴. Wir schreiben dann

$$f : D \rightarrow Z, \quad f(x) = y.$$

Die Menge D heißt *Definitionsmenge* (oder auch Definitionsgebiet) von f , die Menge Z heißt *Zielmenge* von f . In der Beziehung $f(x) = y$ nennt man x das *Argument* von f und y das *Bild* von x . Umgekehrt nennt man x das *Urbild* von y . Man beachte, dass das Bild von x stets eindeutig bestimmt ist, während es zu einem gegebenen $y \in Z$ auch mehrere oder gar keine Urbilder geben kann. Die Menge aller Bilder

$$B := \{f(x) : x \in D\}$$

ist eine Teilmenge von Z und wird als *Bildmenge* oder kurz als *Bild* von f bezeichnet. Die Menge aller Urbilder zu einer gegebenen Teilmenge $Y \subset Z$ ist eine Teilmenge von D und wird in der Form $f^{-1}(Y) = \{x \in D : f(x) \in Y\}$ geschrieben.

Um auszudrücken, dass die Mengen D, Z, B zu einer gegebenen Funktion f gehören, schreiben wir gelegentlich auch D_f, Z_f, B_f .

1.9 Beispiel: Sei $D = [-1, 2), Z = \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow Z, f(x) = x^2 - 1$. Dann ist $B = [-1, 3), f(1) = 0$ und $f^{-1}(\{0\}) = \{-1, 1\}$.

1.10 Beispiel:

- Seien P und Q die Mengen aus Abschnitt 1.2 und $f : P \rightarrow Q^2$ die Funktion, die jedem Tier die Zahl seiner Beine und die Zahl seiner Augen zuordnet. Dann ist

$$f(\text{Hund}) = (4, 2), \quad f(\text{Biene}) = (6, 2), \quad f(\text{Spinne}) = (8, 8),$$

und die Bildmenge ist $B = \{(4, 2), (6, 2), (8, 8)\}$.

- Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion, die jedem Punkt der Ebene seinen Abstand zum Ursprung zuordnet, dann ist

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und die Bildmenge ist $B = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

- Die Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl ihre Teiler zuweist, ist keine Funktion von \mathbb{N} nach \mathbb{N} , da es Argumente gibt, denen mehr als ein Element der Zielmenge zugewiesen wird.
- Die Vorschrift, die jeder reellen Zahl ihren Kehrwert zuweist, ist keine Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} , da der Kehrwert von 0 nicht definiert ist.

1.11 Eigenschaften von Funktionen: Eine Funktion $f : D \rightarrow Z$ heißt

- injektiv*, wenn voneinander verschiedene Argumente auch voneinander verschiedene Bilder besitzen,

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2),$$

- bijektiv*, wenn sie injektiv ist und die Bildmenge mit der Zielmenge übereinstimmt.

⁴Diese ist eine intuitive Erklärung des Funktionsbegriffs. Formal definiert man eine Funktion als Teilmenge des kartesischen Produkts $D \times Z$ mit gewissen speziellen Eigenschaften.

1.12 Beispiel:

- Die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^2$ ist weder injektiv noch bijektiv (nicht injektiv, da z.B. $f_1(1) = f_1(-1)$).
- Die Funktion $f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$ ist injektiv, aber nicht bijektiv (Bildmenge ist $B = \mathbb{R}_{\geq 0}$, Zielmenge ist \mathbb{R}).
- Die Funktion $f_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f_3(x) = x^2$ ist bijektiv.

Man beachte, dass alle drei Funktionen trotz der übereinstimmenden Funktionsvorschrift voneinander verschieden sind, da die Definitions- und Zielmengen nicht gleich sind.

1.13 Umkehrfunktion: Sei $f : D_f \rightarrow Z_f$ eine bijektive Funktion, dann gibt es zu jedem Element der Zielmenge Z_f genau ein Urbild in D_f . Die Vorschrift, die jedem $y \in Z_f$ das Urbild $x \in D_f$ zuweist, ist eine Funktion von Z nach D und wird *Umkehrfunktion* genannt und mit f^{-1} bezeichnet:

$$f^{-1} : Z_f \rightarrow D_f, \quad f^{-1}(y) = x \text{ f\"ur dasjenige } x \in D_f \text{ mit } f(x) = y.$$

Es gilt dann

- f^{-1} ist bijektiv.
- $D_{f^{-1}} = Z_f = B_f$ und $Z_{f^{-1}} = B_{f^{-1}} = D_f$.
- $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in D_f$.
- $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in Z_f$.
- $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Sind sowohl Definitionsmenge als auch Zielmenge eine Teilmenge von \mathbb{R} , dann erhält man das Schaubild von f^{-1} aus dem Schaubild von f durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.

1.14 Beispiel [→ 1.12]: Die Funktion f_3 ist bijektiv und ihre Umkehrfunktion hat die Form

$$f_3^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f_3^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

1.15 Verkettung: Seien $f : D_f \rightarrow Z_f$ und $g : D_g \rightarrow Z_g$ zwei Funktionen. Wenn $B_f \subset D_g$ gilt, dann ist die *Verkettung* $h = g \circ f$ (lies „g nach f“) definiert durch

$$h : D_f \rightarrow Z_g, \quad h(x) = g(f(x)).$$

1.16 Beispiel [→ 1.10]: Die Verkettung $h = g \circ f$ ist definiert, da die Bildmenge Q^2 von f eine Teilmenge der Definitionsmenge \mathbb{R}^2 von g ist. h ist eine Funktion von P nach \mathbb{R} mit

$$h(\text{Hund}) = 2\sqrt{5}, \quad h(\text{Biene}) = 2\sqrt{10}, \quad h(\text{Spinne}) = 8\sqrt{2}.$$

1.17 Beispiel: Sei $f(x) := \frac{1}{1-x}$, $D_f := (-\infty, 1)$ und $g(x) := \cos x$.

- Für $D_g = \mathbb{R}$ ist $B_g = [-1, 1] \not\subset D_f$. Die Verkettung $f \circ g$ ist also nicht definiert.
- Für $D_g = (0, 6)$ ist $B_g = [-1, 1] \subset D_f$ und damit

$$h(x) = f(g(x)) = \frac{1}{1 - \cos x}, \quad x \in (0, 6).$$

1.18 Eigenschaften reeller Funktionen: Eine Funktion $f : D \rightarrow Z$ mit $D, Z \subseteq \mathbb{R}$ wird auch *reelle Funktion* genannt. Zusätzlich zu den oben schon genannten spielen hier noch die folgenden Eigenschaften eine wichtige Rolle: Eine reelle Funktion f heißt

- *monoton wachsend/fallend*, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$.
- *streng monoton wachsend/fallend*, wenn $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$.
- *beschränkt*, wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|f(x)| \leq c$ für alle $x \in D$.
- *gerade/ungerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ bzw. $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in D$.

1.19 Beispiel: Sei $f(x) := 1/(1+x^2)$, $x \in D$.

- Für $D = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist f injektiv und $B = (0, 1]$.
- Für $D = [-1, 2)$ ist f nicht injektiv und $B = (1/5, 1]$.

1.20 Beispiel: Sei $f(x) := x + |x|$, $x \in D$.

- Für $D = \mathbb{R}$ ist f monoton wachsend und unbeschränkt.
- Für $D = [0, 3]$ ist f streng monoton wachsend und beschränkt.
- Das Monom x^n ist eine gerade Funktion, wenn n gerade ist und eine ungerade Funktion, wenn n ungerade ist.

1.21 Regeln:

- Die Verkettung zweier injektiver Funktionen ist injektiv.
- Die Verkettung $f \circ g$ zweier bijektiver Funktionen f und g mit $B_g = D_f$ ist bijektiv und für die Umkehrfunktion gilt die Formel

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

- Aus strenger Monotonie folgt Injektivität.
- Summe und Produkt zweier gerader Funktionen sind gerade.
- Die Summe zweier ungerader Funktionen ist ungerade, aber ihr Produkt ist gerade.

1.22 Summe, Produkt und Fakultät: Für die Summe der reellen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n schreibt man kurz

$$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Allgemeiner kann die Summenbildung auch bei einem beliebigen Index starten,

$$\sum_{j=m}^n a_j = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

Analog schreibt man für das Produkt

$$\prod_{j=m}^n a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n.$$

Wenn der Startindex m größer ist als der Schlussindex n , dann ist vereinbarungsgemäß der Wert der Summe gleich 0 und der Wert des Produkts gleich 1.

Mithilfe des Produktzeichens definiert man für $n \in \mathbb{N}_0$ die *Fakultät*

$$n! = \prod_{k=1}^n k.$$

1.23 Beispiel:

- $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{j=-2}^4 (j^2 + j) = 2 + 0 + 0 + 2 + 6 + 12 + 20 = 42$
- $\sum_{k=5}^2 \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$
- $\prod_{\ell=1}^6 \frac{50 - \ell}{\ell} = \frac{49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} = 13983816$. Kennen Sie diese Zahl?⁵
- $2 \cdot \prod_{m=1}^{50000} \frac{4m^2}{4m^2 - 1} = 2 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \dots \cdot \frac{10000000000}{9999999999} \right) \approx 3.14157$. Was vermuten Sie?⁶
- $0! = 1$
- Es gilt $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ und $10! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10 = 3628800$. Die Fakultät wächst also sehr schnell⁷.

⁵Sie wird uns später nochmals begegnen [→ 1.26].

⁶Wenn man die Obergrenze für den Index m immer weiter vergrößert, strebt der Wert des Produkts tatsächlich gegen die Zahl π . Dieses sogenannte *Wallis-Produkt* ist aber keine besonders effiziente Methode, um π zu berechnen.

⁷Mit $60! \approx 8.3 \times 10^{81}$ befindet man sich bereits jenseits der geschätzten Anzahl der Atome im Universum.

1.24 Potenz und Wurzel: *Potenzen* sind Ausdrücke der Form x^α , wobei man x als *Basis* und α als *Exponent* bezeichnet. Der zulässige Definitionsbereich für x hängt vom Wert des Exponenten ab:

- Für Exponenten $n \in \mathbb{N}_0$ kann man $x \in \mathbb{R}$ wählen und definiert

$$x^n := \prod_{k=1}^n x = \begin{cases} \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ Faktoren}} & \text{falls } n \geq 1 \\ 1 & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

Insbesondere ist⁸

$$0^0 = 1.$$

- Für negativ ganzzahlige Exponenten und $x \neq 0$ setzt man

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}.$$

Es ist also beispielsweise $x^{-1} = 1/x$ und $x^{-3} = 1/x^3$.

- Für $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man die n -te *Wurzel* als diejenige Zahl $w \geq 0$, für die $w^n = x$ gilt⁹. Man schreibt dafür

$$w = \sqrt[n]{x} \quad \text{und im Fall } n = 2 \text{ auch einfach } w = \sqrt{x}.$$

Achtung: Auch wenn die Gleichung $w^n = x$ mehrere Lösungen besitzt, so ist die Wurzel doch stets eindeutig durch die Bedingung $w \geq 0$ definiert. Es ist also beispielsweise $\sqrt{25} = 5$ und nicht etwa $\sqrt{25} = \pm 5$ oder Ähnliches. Die Lösungsmenge der Gleichung $w^2 = 25$ besteht dagegen aus zwei Elementen, also $w \in \{-\sqrt{25}, \sqrt{25}\} = \{-5, 5\}$.

- Für rationale Exponenten $\alpha = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ definiert man für $x > 0$

$$x^\alpha := (\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$$

und für $\alpha > 0$ auch noch

$$0^\alpha = 0.$$

Es gilt beispielsweise

$$9^{1/2} = \sqrt{9} = 3, \quad 27^{4/3} = (\sqrt[3]{27})^4 = \sqrt[3]{27^4} = 81, \quad 16^{-3/4} = (\sqrt[4]{16})^{-3} = \frac{1}{8}.$$

⁸Aus mathematischer Sicht gibt es gute Gründe dafür, 0^0 undefiniert zu lassen. Dieser Linie folgen verschiedene Lehrbücher und auch frühere Versionen dieses Skripts. Aus praktischer Sicht ist es aber in vielen Fällen sehr sinnvoll, $0^0 = 1$ zu setzen. Deshalb verwenden wir hier diese Konvention, ebenso wie viele Programmiersprachen und insbesondere auch MATLAB. Welches Ergebnis liefert Ihr Taschenrechner?

⁹Gelegentlich werden Wurzeln zu ungeraden Werten von n auch für negative Zahlen definiert, da die Gleichung $w^n = x$ dann ja lösbar ist. Man setzt also beispielsweise $(-8)^{1/3} = -2$. Wir verfolgen diesen Weg hier aber nicht.

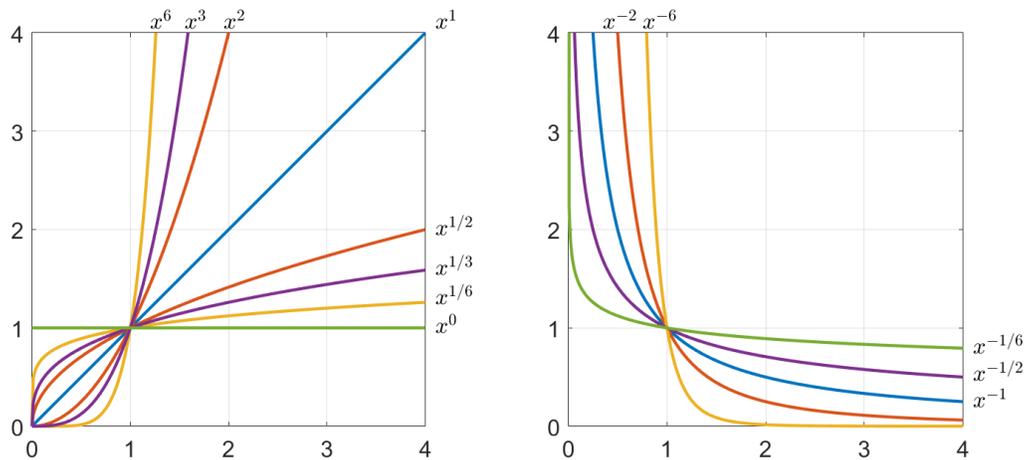


Abbildung 1: Die Funktion x^α für einige positive und negative Werte des Exponenten.

- Potenzen mit irrationalen Exponenten wie $x^{\sqrt{2}}$ oder x^π lassen sich ebenfalls definieren. Allerdings sind dazu Methoden notwendig, die erst in Kapitel 8 besprochen werden. Im Vorgriff darauf notieren wir ohne weitere Erklärung lediglich die Definition

$$x^\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\alpha_n},$$

wobei $\alpha_n = p_n/q_n$ eine beliebige Folge rationaler Zahlen ist, die gegen $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Damit gelten für beliebige Exponenten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Rechenregeln

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta, \quad (x^\alpha)^\beta = (x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad (xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha,$$

wobei x und y so zu wählen sind, dass jeweils alle auftretenden Terme gemäß den obigen Festlegungen definiert sind. Speziell bei der mittleren Gleichung muss also sowohl x^α als auch x^β definiert sein¹⁰.

Abbildung 1 zeigt die Funktion x^α für einige positive und negative Exponenten im Bereich $x \geq 0$ bzw. $x > 0$.

1.25 Polynome: Eine Funktion, die sich in der Form

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

darstellen lässt, heißt *Polynom*. Sie ist bestimmt durch den höchsten Exponenten $n \in \mathbb{N}_0$ und die Koeffizienten a_0, \dots, a_n . Sofern a_n nicht verschwindet, nennt man n den *Grad* des Polynoms. Die Variable x ist für die Zwecke der Vorlesung meist eine reelle Zahl, kann

¹⁰Betrachten Sie die naheliegende, aber offensichtlich widersprüchliche Umformung

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{(2 \cdot \frac{1}{2})} = ((-1)^2)^{1/2} = 1^{1/2} = 1.$$

Der Fehler entsteht beim fettgedruckten Gleichheitszeichen in der Mitte. Dieses gilt nicht, da $(-1)^{1/2}$ nicht definiert ist, obwohl dieser Ausdruck gar nicht explizit auftaucht.

gegebenenfalls aber auch komplex¹¹ sein. Die Potenzen x^k nennt man Monome, weshalb die oben angegebene Darstellung von p auch *Monomform* heißt.

Eine effiziente Methode, Polynome in Monomform auszuwerten, ist das *Horner-Schema*¹². Zur Berechnung von $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ schreibt man die Koeffizienten a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 in dieser Reihenfolge in die erste Zeile und berechnet dann von links nach rechts voranschreitend abwechselnd die Einträge der zweiten und dritten Zeile wie folgt:

$$\begin{array}{cccccc} & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ \downarrow + & & 0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 \\ \nearrow \cdot x & & c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_0 \end{array}$$

Konkret trägt man am Anfang der zweiten Zeile den Wert $b_n = 0$ ein und setzt dann Schritt für Schritt $c_k = a_k + b_k$ sowie $b_{k-1} = x \cdot c_k$. Der gesuchte Funktionswert steht schließlich am Ende der dritten Zeile, also $p(x) = c_0$. Beispielsweise erhält man für das Polynom $p(x) = 4 + 5x - 7x^3 + 3x^4$ und $x = 2$

$$\begin{array}{cccccc} & & 3 & -7 & 0 & 5 & 4 \\ \downarrow + & & 0 & 6 & -2 & -4 & 2 \\ \nearrow \cdot 2 & & 3 & -1 & -2 & 1 & \mathbf{6} \end{array}$$

und damit $p(2) = 6$.

Häufig ist man an den Nullstellen eines Polynoms interessiert. Der *Fundamentalsatz der Algebra* sagt, dass ein Polynom vom Grad n genau n Nullstellen im Komplexen hat, sofern man Vielfachheiten richtig berücksichtigt. Es gibt also höchstens n reelle Nullstellen.

- Für Grad $n = 1$ und $p(x) = ax + b$ erhält man die Nullstelle, $x_1 = -b/a$.
- Für Grad $n = 2$ und $p(x) = ax^2 + bx + c$ erhält man zwei Nullstellen mithilfe der *abc-Formel*¹³,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Je nach Vorzeichen der sogenannten *Diskriminante* $b^2 - 4ac$ sind diese reell oder komplex¹⁴.

- Für Grad $n = 3$ und $n = 4$ kann man die Lösungen ebenfalls explizit mithilfe der *cardanischen Formeln*¹⁵ angeben. Diese sind recht kompliziert und können bei Bedarf in Formelsammlungen oder im Internet gefunden werden.
- Für Grad $n \geq 5$ gibt es keine vergleichbaren Formeln für die Nullstellen. Dies liegt nicht daran, dass man noch nicht intensiv genug danach gesucht hätte. Man kann vielmehr beweisen, dass solche Formeln nicht existieren und behilft sich mit numerischen Verfahren.

¹¹Das Rechnen mit komplexen Zahlen wird in Kapitel 3 besprochen.

¹²William George Horner, 1786–1837. Das nach ihm benannte Schema war aber bereits 500 Jahre zuvor dem chinesischen Mathematiker *Zhu Shijie* bekannt. Nicht nur in der Mathematik sind Namenszuschreibungen gelegentlich ungerecht.

¹³Nach Division der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ durch a kann auch die *pq-Formel* verwendet werden.

¹⁴Im Komplexen lassen sich Wurzeln auch aus negativen Zahlen ziehen.

¹⁵Gerolamo Cardano, 1501–1576

Kennt man eine Nullstelle x_1 des Polynoms p vom Grad n , dann lässt es sich als Produkt des *Linearfaktors* $x - x_1$ und eines Polynoms q vom Grad $n - 1$ darstellen, d.h.,

$$p(x) = (x - x_1) \cdot q(x).$$

Dieser Faktorisierung sieht man zum einen direkt an, dass $p(x_1) = 0$ gilt. Zum anderen erkennt man, dass alle weiteren Nullstellen von p auch Nullstellen von q sind, was die Suche danach vereinfacht, da q niedrigeren Grad hat. Hat man eine Nullstelle x_2 von q gefunden, kann man auch hier wieder faktorisieren. Dieser Prozess lässt sich (zumindest bei komplexer Rechnung) so lange fortsetzen, bis man schließlich bei der vollständige Zerlegung von p in Linearfaktoren angelangt,

$$p(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Zur Berechnung der Polynomdivision $q(x) = p(x)/(x - x_1)$ bietet sich wieder das Horner-Schema an: Man wählt als Auswertungsstelle $x = x_1$ und findet die Koeffizienten von q in der dritten Zeile, wobei der Funktionswert $p(x_1) = c_0 = 0$ in der letzten Spalte einfach weggelassen wird. Betrachten wir beispielsweise das Polynom $p(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$. Dieses hat, wie man leicht nachrechnet, die Nullstelle $x_1 = 3$. Das Horner-Schema für diesen Wert ist

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 5 & 12 \\ \downarrow + & 0 & 3 & -9 & -12 \\ \nearrow \cdot 3 & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-4} & \mathbf{0} \end{array}$$

Dies bestätigt zum einen $p(3) = 0$ und liefert zum anderen $q(x) = x^2 - 3x - 4$, d.h.,

$$p(x) = (x - 3) \cdot (x^2 - 3x - 4).$$

Die Nullstellen von q ergeben sich mit der *abc-Formel* zu $x_2 = -1$ und $x_3 = 4$. Dies sind ebenfalls Nullstellen von p und wir erhalten als vollständige Zerlegung von p in Linearfaktoren das Ergebnis

$$p(x) = (x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (x - 4).$$

Neben der eingangs angegebenen Monomform und der Produktdarstellung mit Linearfaktoren gibt es zahlreiche weitere gängige und nützliche Formen, Polynome darzustellen. Man verwendet dann anstelle der Monome für den jeweiligen Zweck maßgeschneiderte Polynome als Basis, wie z.B. Lagrange-, Legendre-, Chebyshev- oder Bernstein-Polynome. Außerdem existiert eine Fülle von Verallgemeinerungen, wie z.B. Polynome mit Matrizen oder mehreren reellen Zahlen als Variable, Potenzreihen (in gewissem Sinne Polynome mit unendlich hohem Grad), Laurent-Polynome (negative Potenzen von x sind erlaubt) oder Splines (stückweise polynomielle Funktionen). Einige dieser Varianten werden wir im Verlauf der Vorlesung kennenlernen.

1.26 Binomialkoeffizienten: Für Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)}{k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

Beispielsweise ist

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10, \quad \binom{7/2}{3} = \frac{7/2 \cdot 5/2 \cdot 3/2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{35}{16}, \quad \binom{-2}{5} = \frac{(-2) \cdot (-3) \cdots (-6)}{1 \cdot 2 \cdots 5} = -6.$$

Meist betrachtet man speziell Binomialkoeffizienten der Form $\binom{n}{k}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$. In diesem Fall gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

und man erhält auch auf diesem Weg beispielsweise wieder $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$. Weiterhin gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Eine effiziente Möglichkeit zur Berechnung ist hier die Rekursionsformel

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{sonst,} \end{cases}$$

die sich gut mithilfe des *Pascal'schen Dreiecks*¹⁶ veranschaulichen lässt:

$$\begin{array}{rcccccc} n = 0 : & & & & & & 1 \\ n = 1 : & & & & 1 & & 1 \\ n = 2 : & & & 1 & 2 & & 1 \\ n = 3 : & & 1 & 3 & 3 & & 1 \\ n = 4 : & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ n = 5 : & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Die Einträge ergeben sich jeweils durch Addition der beiden darüberstehenden Zahlen. So ist beispielsweise wie zuvor $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$.

Binomialkoeffizienten besitzen zahlreiche Anwendungen. So ist in der Kombinatorik die Anzahl der Möglichkeiten, k Objekte aus einer Gesamtheit von n Objekten auszuwählen, gerade $\binom{n}{k}$. Konkret gibt es beim Lotto genau $\binom{49}{6} = 13983816$ verschiedene Möglichkeiten, sechs Zahlen aus dem Bereich von 1 bis 49 zu ziehen.

Weiterhin erscheinen Binomialkoeffizienten als Vorfaktoren in der Verallgemeinerung der bekannten binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ auf Potenzen beliebiger Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Es gilt der *binomische Lehrsatz*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Für $n = 4$ erhalten wir beispielsweise $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ und finden die Vorfaktoren gerade in der vierten Zeile des Pascal'schen Dreiecks wieder.

¹⁶Blaise Pascal, 1623–1662

1.27 Trigonometrische Funktionen: Im vertrauten Gradmaß hat ein rechter Winkel den Wert 90° und dementsprechend ein Vollwinkel den Wert 360° . Diese Wahl ist historisch durch die Tatsache bedingt, dass die Zahl 360 viele natürliche Teiler hat und sich somit gut zum Kopfrechnen eignet. Ansonsten ist sie vollkommen willkürlich. Dagegen ist es in der Mathematik üblich, Winkel im *Bogenmaß* mit der Maßeinheit *Radian* anzugeben. Kurz gesagt ist das Bogenmaß so gewählt, dass ein Vollwinkel den Wert 2π rad hat, wobei die Maßzahl 2π dem Umfang eines Kreises mit Radius 1 entspricht. Es lohnt sich aber dennoch, die Definition etwas genauer zu betrachten:

Der *Einheitskreis* ist der Kreis mit Radius $r = 1$ um den Ursprung. Sein Umfang ist $U = 2\pi$. Zur Konstruktion eines Winkels mit dem Bogenmaß $t \in \mathbb{R}$ bewegt man sich beginnend ab dem Punkt $P_0 = (1, 0)$ auf dem Kreis entlang, bis man einen Weg der Länge $|t|$ zurückgelegt hat. Dabei läuft man für $t > 0$ in mathematisch positiver Richtung, also *gegen* den Uhrzeigersinn, und für $t < 0$ *im* Uhrzeigersinn. Den Endpunkt, den man dabei erreicht, bezeichnen wir mit P_t . Der Strahl vom Ursprung durch den Punkt P_t bildet mit der positiven x -Achse einen Winkel, dessen Größe im Bogenmaß gerade t ist. Für $t = \pi/2$ erreichen wir beispielsweise den Punkt $(0, 1)$ auf der positiven y -Achse und erhalten damit einen rechten Winkel. Dieser ist im Gradmaß 90° und im Bogenmaß $\pi/2$ rad, wobei rad als Abkürzung von „Radian“ die Maßeinheit ist. In Abbildung 2 ist die Konstruktion für die Winkel mit Bogenmaß $t = \pi/3$ rad und $t = -2$ rad zu sehen. Die dick eingezeichneten Kreisbögen haben die Länge $|t| = \pi/3$ bzw. $|t| = 2$.

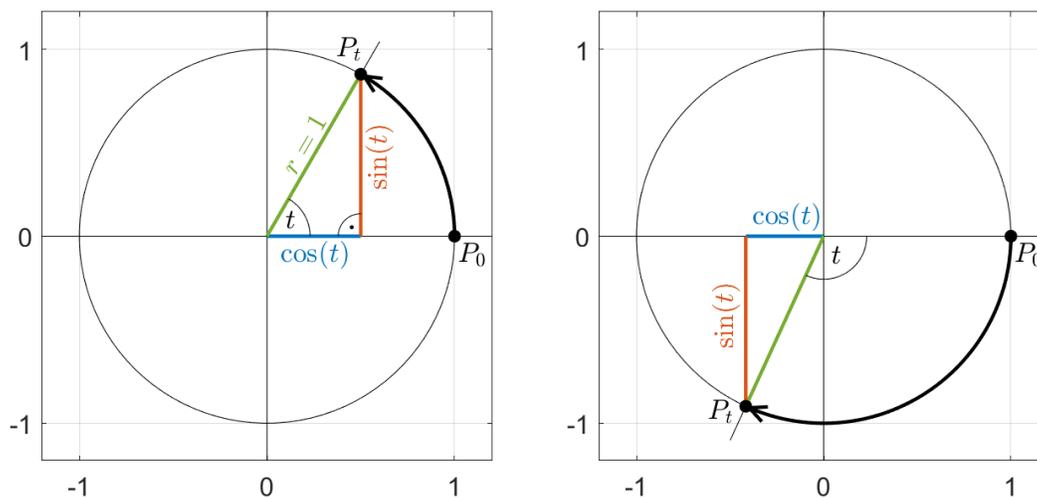


Abbildung 2: Winkel mit Bogenmaß $t = \pi/3$ und $t = -2$ sowie zugehörige Winkelfunktionen.

In den meisten mathematischen Anwendungen ist die Winkelmessung in Bogenmaß die einzig sinnvolle Wahl. Sofern nichts anderes gesagt wird, ist bei der Spezifikation von Winkeln also stets davon auszugehen, dass es sich um eine Angabe in Radian handelt. Insbesondere wird die Maßeinheit rad in der Regel weggelassen. Man schreibt also beispielsweise

$$30^\circ = \pi/6, \quad 45^\circ = \pi/4, \quad 60^\circ = \pi/3, \quad 180^\circ = \pi, \quad 360^\circ = 2\pi.$$

Man bezeichnet die y -Koordinate des Punktes P_t als *Sinus* von t und die x -Koordinate als

Cosinus von t und schreibt¹⁷

$$P_t = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}.$$

Für die Winkel $t = \pi/3$ und $t = -2$ in Abbildung 2 ergibt sich beispielsweise

$$P_{\pi/3} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad P_{-2} = \begin{bmatrix} \cos(-2) \\ \sin(-2) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.4161 \\ -0.9093 \end{bmatrix}.$$

Wie ebenfalls zu sehen ist, steht die Konstruktion im Einklang mit den geometrischen Relationen

$$\sin t = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \text{und} \quad \cos t = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

sofern der Punkt P_t im ersten Quadranten liegt. Die Definition von Sinus und Cosinus als Koordinaten des Punkts P_t ist aber für beliebige Winkel $t \in \mathbb{R}$ gültig, also auch dann, wenn der direkte Bezug zu einem rechtwinkligen Dreieck fehlt. Definitions- und Bildmengen sind somit

$$D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad B_{\sin} = B_{\cos} = [-1, 1].$$

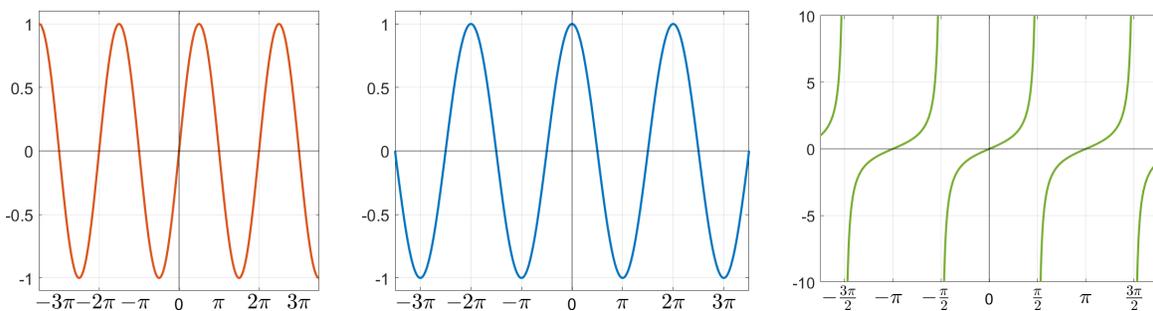


Abbildung 3: Die Winkelfunktionen $\sin t$, $\cos t$ und $\tan t$.

Der Quotient von Sinus und Cosinus heißt *Tangens*,

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Die Nullstellen der Cosinusfunktion führen auf Definitionslücken, d.h., der Definitionsbereich ist $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{(k + 1/2)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ und der Bildbereich $B_{\tan} = \mathbb{R}$ ist die gesamte reelle Achse. Die *Cotangensfunktion* $\cot t = \cos t / \sin t$ findet ebenfalls gelegentlich Anwendung.

1.28 Eigenschaften:

- Sinus und Tangens sind ungerade Funktionen, der Cosinus ist eine gerade Funktion.

¹⁷Die Klammer um das Argument kann auch weggelassen werden, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, also z.B. $\sin t$.

- Wenn man den Wert von t um 2π vergrößert, ändert sich die Position des Punktes P_t nicht. Man hat lediglich einen vollen Kreisumlauf zusätzlich durchgeführt, um ihn zu erreichen. Es gilt also $P_t = P_{t+2\pi}$. Dementsprechend sind Sinus und Cosinus 2π -periodische Funktionen, d.h., es gilt

$$\sin(t) = \sin(t + 2\pi) \quad \text{und} \quad \cos(t) = \cos(t + 2\pi)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Der Tangens ist sogar π -periodisch, d.h., es gilt

$$\tan(t) = \tan(t + \pi).$$

- Es gilt

$$\sin(k\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \cos(k\pi) = (-1)^k$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Weiterhin sind die folgenden speziellen Werte zu merken:

t	$\sin t$	$\cos t$
0	0	1
$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2
$\pi/2$	1	0

- Nach dem Satz des Pythagoras¹⁸ gilt für alle Winkel $t \in \mathbb{R}$ die wichtige Formel

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1.$$

Es gibt darüber hinaus eine Fülle weiterer nützlicher Identitäten, wie zum Beispiel

$$\begin{aligned} \sin(t) &= \sin(\pi - t) = \cos(\pi/2 - t) \\ \cos(t) &= -\cos(\pi - t) = \sin(\pi/2 + t) \\ \sin(2t) &= 2 \sin(t) \cos(t) \end{aligned}$$

Formeln für $\sin(t/2)$, $\cos(t/2)$, $\sin(s \pm t)$, $\cos(s \pm t)$, $\sin^2 t$, $\cos^2 t$ usw. können bei Bedarf im Internet¹⁹ oder in Formelsammlungen gefunden werden.

1.29 Arcusfunktionen: Da die trigonometrischen Funktionen nicht injektiv sind, kann man nicht unmittelbar eine Umkehrfunktion angeben. Dazu muss man Definitions- und Zielmengen jeweils geeignet einschränken.

- Für die Sinus-Funktion $f(x) = \sin(x)$ verwendet man $D_f = [-\pi/2, \pi/2]$ und $Z_f = [-1, 1]$. Die nun definierte Umkehrfunktion wird als *Arcussinus* bezeichnet und man schreibt dafür

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2].$$

¹⁸Pythagoras, ca. 570–510 v. Chr.

¹⁹Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie.

Der Arcussinus ordnet also jeder Zahl zwischen -1 und 1 einen Winkel aus dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ zu, dessen Sinus dem gegebenen Argument entspricht, vgl. Abbildung 4. Es gilt beispielsweise

$$\arcsin(0) = 0, \quad \arcsin(1/2) = \pi/6, \quad \arcsin(-1) = -\pi/2,$$

denn

$$\sin(0) = 0, \quad \sin(\pi/6) = 1/2, \quad \sin(-\pi/2) = -1.$$

- Für die Cosinus-Funktion $f(x) = \cos(x)$ verwendet man $D_f = [0, \pi]$ und $Z_f = [-1, 1]$. Die nun definierte Umkehrfunktion wird als *Arcuscosinus* bezeichnet und man schreibt dafür

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Der Arcuscosinus ordnet also jeder Zahl zwischen -1 und 1 einen Winkel aus dem Intervall $[0, \pi]$ zu, dessen Cosinus dem gegebenen Argument entspricht, vgl. Abbildung 4. Es gilt beispielsweise

$$\arccos(1) = 0, \quad \arccos(1/2) = \pi/3, \quad \arccos(-1) = \pi,$$

denn

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi/3) = 1/2, \quad \cos(\pi) = -1.$$

- Für die Tangens-Funktion $f(x) = \tan(x)$ verwendet man $D_f = (-\pi/2, \pi/2)$ und $Z_f = \mathbb{R}$. Die nun definierte Umkehrfunktion wird als *Arcustangens* bezeichnet und man schreibt dafür

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2).$$

Der Arcustangens ordnet also jeder reellen Zahl einen Winkel aus dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ zu, dessen Tangens dem gegebenen Argument entspricht, vgl. Abbildung 4. Es gilt beispielsweise

$$\arctan(0) = 0, \quad \arctan(1) = \pi/4, \quad \arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3,$$

denn

$$\tan(0) = 0, \quad \tan(\pi/4) = 1, \quad \tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}.$$

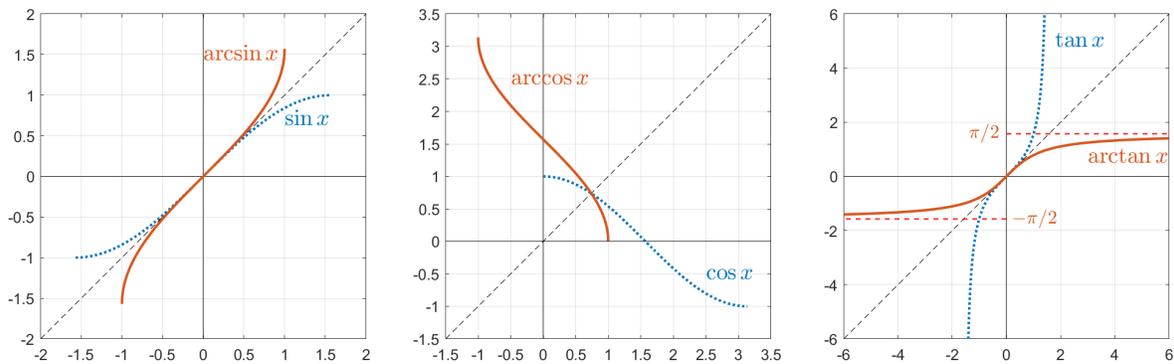
Da die trigonometrischen Funktionen periodisch und damit nicht injektiv sind, gibt es natürlich zu jedem Wert einer Arcusfunktion jeweils unendlich viele weitere Winkel, die auf dasselbe Ergebnis führen. Beispielsweise ist $\arccos(1) = 0$, aber $\cos(2k\pi) = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Beim Rückschluss von dem Wert einer Winkelfunktion auf den Winkel ist also stets Vorsicht geboten.

1.30 Exponentialfunktion und Logarithmus: Für eine beliebige positive Zahl $b > 0$ definiert man die *Exponentialfunktion zur Basis b* durch

$$\exp_b(x) = b^x, \quad D_{\exp} = \mathbb{R}, \quad Z_{\exp} = \mathbb{R}_{>0}.$$

Die Exponentialfunktion ist bijektiv und ihre Umkehrfunktion der *Logarithmus zur Basis b* ,

$$\log_b : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Abbildung 4: Die Arcusfunktionen $\arcsin x$, $\arccos x$ und $\arctan x$.

Von besonderem Interesse ist die Exponentialfunktion zur Basis e , wobei $e \approx 2.71828$ die sogenannte *Euler'sche Zahl*²⁰ ist. Sie spielt in der Mathematik eine außerordentlich wichtige Rolle. Genauso wie die Kreiszahl π lässt sich e weder durch Brüche noch durch Wurzeln exakt ausdrücken. Auf eine genaue Definition kommen wir später zurück²¹. Wählen wir e als Basis, ergibt sich die *e-Funktion* (oder auch natürliche Exponentialfunktion),

$$\exp(x) = e^x, \quad D_{\exp} = \mathbb{R}, \quad Z_{\exp} = \mathbb{R}_{>0}.$$

Die Umkehrfunktion ist der *natürliche Logarithmus*,

$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Es gilt beispielsweise

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1, \quad \ln(1/e^2) = -2,$$

denn

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad e^{-2} = 1/e^2.$$

Abbildung 5 zeigt die Exponentialfunktion für einige Werte der Basis b sowie die *e-Funktion*²² und den natürlichen Logarithmus.

²⁰Leonhard Euler, 1707–1783

²¹Soviel vorab: Man kann die Zahl e durch die Formel $e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ exakt definieren, wobei der Begriff des Grenzwerts erst später eingeführt wird.

²²Die Abbildung zeigt nur einen kleinen Ausschnitt des Verlaufs der *e-Funktion* in der Nähe der Ursprungs und vermittelt somit keinen Eindruck des exponentiellen Wachstumsverhaltens. Verwendet man die Längeneinheit 1cm für das Zeichnen des Grafen, dann ergibt sich – zumindest gedanklich – das folgende Bild: An der Stelle $x = 10$ erscheint der Funktionswert oberhalb der Höhe des Kölner Doms und an der Stelle $x = 25$ befindet er sich bereits jenseits der Umlaufbahn des Mondes. Für $x = 70$, also weniger als einen dreiviertel Meter vom Ursprung entfernt, erreicht der Funktionswert die Größenordnung von zwei Billionen Lichtjahren und liegt damit weit außerhalb der Grenzen des beobachtbaren Universums. Umgekehrt ist der Abstand des Funktionswerts von der x -Achse an der Stelle $x = -10$ etwa zehnmal kleiner als der Durchmesser eine Haares und an der Stelle $x = -20$ kleiner als ein Wasserstoffatom.

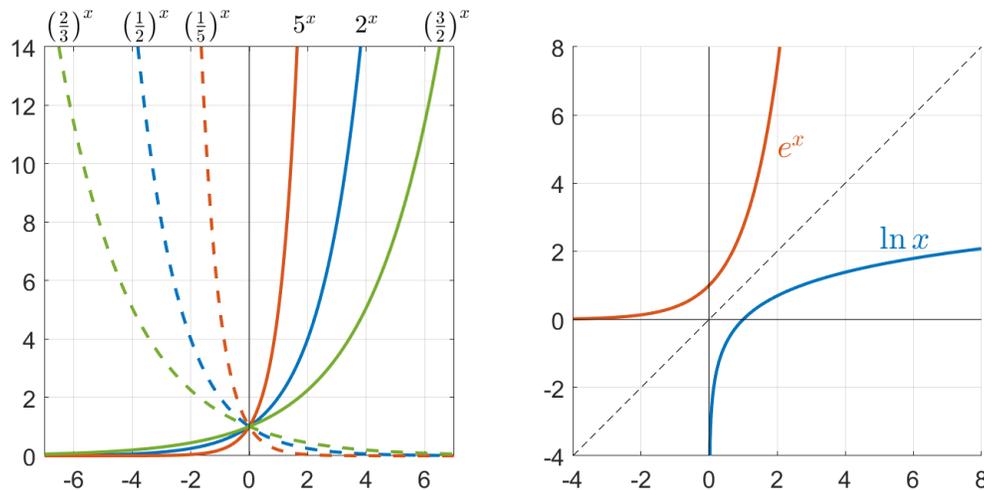


Abbildung 5: Exponentialfunktion und Logarithmus.

1.31 Regeln: Die wichtigsten Rechenregeln für Exponentialfunktion und Logarithmus sind

$$\begin{array}{ll}
 e^{a+b} = e^a e^b & \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \\
 (e^a)^b = e^{ab} & \ln(a^b) = b \ln(a) \\
 e^{-a} = 1/e^a & \ln(1/a) = -\ln(a) \\
 \exp_b a = e^{a \ln(b)} & \log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)} \\
 e^{\ln x} = x, \quad x \in \mathbb{R}_{>0} & \ln(e^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

1.32 Hyperbelfunktionen: Verschiedentlich sind auch die *Hyperbelfunktionen* von Interesse. Die wichtigsten sind

$$\begin{array}{ll}
 \text{Sinus hyperbolicus:} & \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
 \text{Cosinus hyperbolicus:} & \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
 \text{Tangens hyperbolicus:} & \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}
 \end{array}$$

Definiert sind alle drei Funktionen für $x \in \mathbb{R}$. Die zugehörigen Umkehrfunktionen heißen *Areafunktionen* und werden mit arsinh , arcosh und artanh bezeichnet (lies „Areasinus hyperbolicus“ etc.). Abbildung 6 zeigt die Hyperbelfunktionen sowie die zugehörigen Umkehrfunktionen.

Auch für Hyperbelfunktionen gibt es zahlreiche nützliche Formeln, darunter beispielsweise²³

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

²³Man beachte die Ähnlichkeit zur Gleichung $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Die enge Verwandtschaft zwischen trigonometrischen Funktionen und Hyperbelfunktionen wird ersichtlich, wenn man den Definitionsbereich auf die komplexen Zahlen erweitert. Es gilt dann z.B. $\cosh(ix) = \cos(x)$ und $\sinh(ix) = i \sin(ix)$.

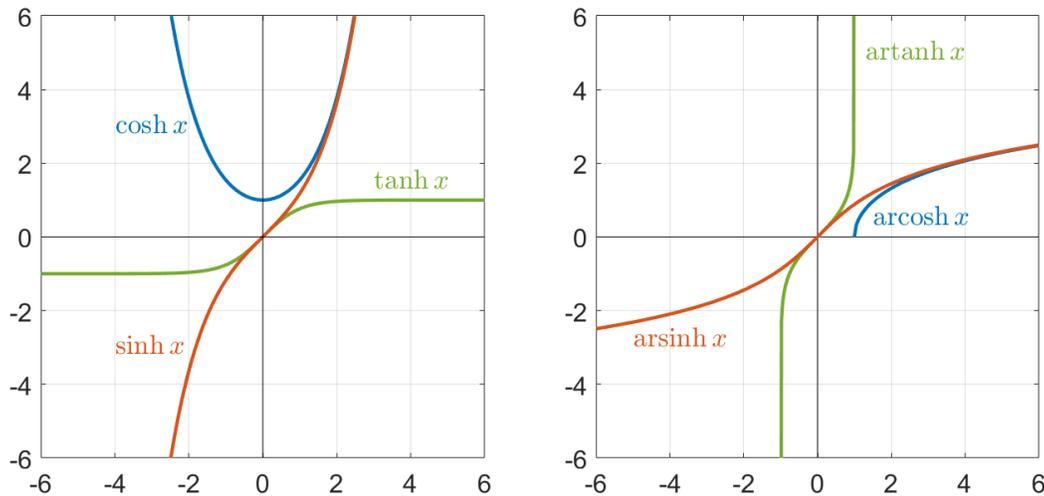


Abbildung 6: Hyperbel- und Areafunktionen.

1.33 Betrag: Der *Betrag* einer reellen Zahl a ist definiert durch²⁴

$$|a| := \sqrt{a^2}.$$

Offensichtlich ist der Betrag niemals negativ und es gilt

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Beträge werden häufig zur Messung von Abweichungen verwendet. So ist der Ausdruck $|x - y|$ zu interpretieren als der Abstand zwischen x und y . Beispielsweise sagt die Ungleichung

$$|\pi - 355/113| \leq 10^{-6},$$

dass der angegebene Bruch recht nahe bei π liegt. Konkret wird die Zahl π auf sechs Nachkommastellen genau angenähert. Man kann der Abschätzung nicht entnehmen, ob der Bruch etwas zu groß oder zu klein ist, das spielt für die Beurteilung der Genauigkeit aber auch häufig keine Rolle.

Rechenregeln für den Betrag sind unter anderem

$$|-a| = |a|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad |a/b| = |a|/|b| \quad \text{und} \quad |a^k| = |a|^k.$$

Ebenso wichtig ist die *Dreiecksungleichung*

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

oder allgemeiner

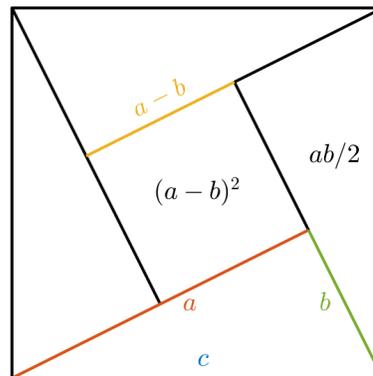
$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Merke: Der Betrag einer Summe ist höchstens so groß wie die Summe der Beträge.

²⁴Die angegebene Definition des Betrags mag zunächst im Vergleich zur Gleichung darunter unnötig kompliziert erscheinen, doch es ist genau dieser Ansatz über die Wurzel eines Produkts, der sich konzeptionell auf andere Fälle übertragen lässt. So definieren wir später den Betrag einer komplexen Zahl durch $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ und die euklidische Norm eines Vektors durch $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$.

1.34 Beweise: Da die Vorlesung stark anwendungsorientiert ist, liegt der Schwerpunkt auf der Behandlung mathematischer Methoden. Wir werden diese so weit wie möglich begründen, aber keine formalen Beweise führen. Dennoch wollen wir hier kurz verschiedene Strategien vorstellen, wie man mathematische Aussagen beweisen kann.

- Beim *direkten Beweis* leitet man die betrachtete Aussage aus bekannten Tatsachen her. Beispielsweise lässt sich der *Satz des Pythagoras* mithilfe der folgenden Figur auf direktem Weg beweisen:



Offensichtlich gilt $(a - b)^2 + 4 \times (ab/2) = c^2$ und damit $a^2 + b^2 = c^2$.

- Beim *indirekten Beweis* nimmt man zunächst an, dass das Gegenteil der behaupteten Aussage richtig ist und leitet dann daraus einen Widerspruch ab. Damit kann das Gegenteil nicht stimmen und die Aussage selbst ist bewiesen. Betrachten wir beispielsweise folgende, seit mehr als 2000 Jahren bekannte Aussage:

$\sqrt{2}$ ist irrational.

Um diese zu beweisen, nehmen wir an, dass das Gegenteil richtig ist, d.h., dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und sich demnach in der Form $\sqrt{2} = p/q$ mit natürlichen Zahlen p und q darstellen lässt. Dabei können wir davon ausgehen, dass der Bruch p/q vollständig gekürzt ist. Es gilt nun $2 = p^2/q^2$ und damit $p^2 = 2q^2$. Also ist p^2 gerade, also ist p gerade, also ist p^2 durch 4 teilbar, also ist $q^2 = p^2/2$ gerade, also ist q gerade. Damit ist gezeigt, dass sowohl p als auch q gerade Zahlen sind und der Bruch p/q gekürzt werden kann. Da p/q aber bereits vollständig gekürzt ist, ergibt sich ein Widerspruch. Also muss die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, falsch sein. Der Aussage selbst ist somit richtig.

- Die *vollständige Induktion* ist ein Prinzip, das sich speziell dazu eignet, um Aussagen zu beweisen, die für alle natürlichen Zahlen gelten. Man zeigt zunächst, dass die Aussage für $n = 1$ (oder analog auch für $n = 0$ oder einen anderen Startwert) gültig ist. Dann nimmt man an, dass die Aussage für einen konkreten, aber beliebig gewählten Wert von n richtig sei und schließt daraus, dass die Aussage auch für $n + 1$ richtig ist. Aus der bereits bekannten Richtigkeit für $n = 1$ folgt also die für $n = 2$ und damit die für $n = 3$ und damit die für $n = 4$ usw. Es kann also kein n geben, für das die Aussage falsch ist. Als Beispiel betrachten wir die *Bernoulli'sche Ungleichung*²⁵:

²⁵Jakob Bernoulli, 1654–1705

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$ gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Der Induktionsbeweis erfolgt in drei Schritten:

- *Induktionsanfang*: Für $n = 1$ lautet die Aussage $1+x \geq 1+x$, was offensichtlich richtig ist.
- *Induktionsannahme*: Wir nehmen an, die Aussage sei für einen konkreten, aber beliebig gewählten Wert n richtig. Für diesen Wert gilt also $(1+x)^n \geq 1+nx$, sofern $x \geq -1$.
- *Induktionsschluss*: Nun betrachten wir die linke Seite der Ungleichung für den nächstgrößeren Wert $n+1$, also

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x).$$

Für den ersten Faktor gilt unter der Voraussetzung, dass die Induktionsannahme richtig ist, $(1+x)^n \geq 1+nx$ und es folgt

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx) \cdot (1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

Dies ist genau die Aussage der Bernoulli'schen Ungleichung für $n+1$.

An welcher Stelle des Beweises wurde die Voraussetzung $x \geq -1$ verwendet?

- *Empirische Evidenz* ist die gängige Methode zur Bestätigung naturwissenschaftlicher Gesetze. Das heißt, dass das Vertrauen in diese umso größer ist, je mehr Beobachtungen oder Experimente gemacht werden, die mit ihnen im Einklang stehen. Dieses Vorgehen wird in der Mathematik *nicht* akzeptiert. Betrachten wir beispielsweise folgende (falsche!) Aussage:

Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $p(n) = n^2 - n + 41$ eine Primzahl.

Einfaches Nachrechnen zeigt, dass $p(1) = 41, p(2) = 43, p(3) = 47, \dots, p(40) = 1601$ alles Primzahlen sind. Auch wenn dies den Satz zu bestätigen scheint, rechtfertigt es aber keineswegs, ihn als wahr anzunehmen. Können Sie ein Gegenbeispiel angeben, das zeigt, dass der Satz falsch ist oder können Sie sogar begründen, warum es kein Polynom vom Grad ≥ 1 geben kann, dessen Werte an den natürlichen Zahlen stets Primzahlen sind²⁶? Generell genügt in der Mathematik die Angabe eines einzigen Gegenbeispiels, um zu zeigen, dass eine Aussage wie die Obige falsch ist, während für einen Beweis keine noch so lange Liste positiver Ergebnisse ausreicht²⁷.

²⁶Tatsächlich sind generell keine Funktionen bekannt, die zuverlässig und effizient Primzahlen liefern, ohne sich dabei zu wiederholen. Bei der Jagd nach immer größeren Primzahlen ist man deshalb darauf angewiesen, mit immensem Aufwand gewisse interessant erscheinende Kandidaten rechnerisch zu überprüfen. Auf der Seite www.mersenne.org kann man sich an der Suche beteiligen – Stichwort *Crowd Computing*.

²⁷Die berühmte *Goldbach'sche Vermutung* besagt, dass sich jede gerade Zahl größer als 2 als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt, so ist z.B. $100 = 47 + 53$. Man hat diese Aussage bereits für alle Zahlen bis 4×10^{18} – das sind immerhin vier Trillionen – rechnerisch bestätigt, was einen dem Beweis aber wie gesagt keinen Schritt näherbringt. So ist es bis heute völlig offen, ob die Vermutung richtig oder falsch ist.

2 Vektorrechnung

Vektoren sind abstrakte mathematische Objekte, die gewissen Rechenregeln gehorchen. In den geometrischen Anwendungen, die wir hier zunächst im Auge haben, lassen sich Vektoren rechnerisch durch eine endliche Zahl von Koordinaten und geometrisch durch Pfeile darstellen. Es lassen sich aber auch ganz andere Objekte (z.B. Polynome, reelle Funktionen oder Zahlenfolgen) als Vektoren verstehen.

2.1 Vektorraum: Eine Menge V nennt man *Vektorraum*, wenn unter anderem²⁸

- zwischen je zwei Elementen von V eine Addition sinnvoll definiert ist, d.h.

$$\text{für } v, w \in V \text{ ist } v + w \in V,$$

- Elemente von V mit Zahlen multipliziert werden können, d.h.

$$\text{für } v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \text{ ist } \alpha v \in V,$$

- zwei Distributivgesetze gelten,

$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w, \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $v, w \in V$.

Die Elemente eines Vektorraums nennt man *Vektoren*. Beispielsweise bildet die Menge aller Polynome einen Vektorraum, denn Summen und Vielfache von Polynomen sind wieder Polynome; außerdem gelten die genannten Rechenregeln. In diesem Sinne stellen Polynome also eine spezielle Form von Vektoren dar.

2.2 Vektoren in \mathbb{R}^n : Das n -fache kartesische Produkt von \mathbb{R} mit sich selbst wird mit \mathbb{R}^n bezeichnet. Speziell erhält man für $n = 1$ die Zahlengerade \mathbb{R} , für $n = 2$ die Ebene \mathbb{R}^2 und für $n = 3$ den Raum \mathbb{R}^3 . Die Elemente von \mathbb{R}^n sind also Objekte, die aus n reellen Zahlen bestehen. Wir schreiben sie in der Form²⁹

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

mit *Koordinaten* $x_i \in \mathbb{R}$. Für zwei beliebige Elemente $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ und $\vec{y} = [y_1, \dots, y_n]^T$ von \mathbb{R}^n definieren wir in naheliegender Weise die Rechenoperationen

²⁸Es fehlen hier streng genommen einige weitere technische Eigenschaften.

²⁹Wir ordnen die Einträge von Vektoren aus guten Gründen immer untereinander an – man spricht hier auch von *Spaltenvektoren*. Die Darstellung in Zeilenform, die aus Platzgründen oft sehr zweckmäßig ist, ist deshalb mit einem hochgestellten T , dem sogenannten *Transpositionszeichen*, versehen. Es bedeutet, dass die nebeneinander notierten Zahlen in Spaltenform umzuwandeln sind.

- *Addition:*

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

- *Skalarmultiplikation:*

$$\alpha \vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

Insbesondere ist $1\vec{x} = \vec{x}$, $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$ und $0\vec{x} = \vec{0}$. Weiterhin rechnet man leicht nach, dass die Distributivgesetze

$$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}, \quad \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

gelten. Somit ist \mathbb{R}^n ein Vektorraum und seine Elemente sind Vektoren. Für Vektoren in \mathbb{R}^n gibt es (mindestens) zwei verschiedene geometrische Interpretationen:

- Wenn ein Koordinatensystem gegeben ist, kann man durch den Vektor \vec{x} die Position eines *Punktes* beschreiben. Die Koordinaten geben dann an, wie weit man ausgehend vom Ursprung in Richtung der Koordinatenachsen jeweils gehen muss, um zu diesem Punkt zu gelangen. Da sich \vec{x} hier auf einen festen Bezugsrahmen bezieht, spricht man auch von einem *gebundenen* Vektor.
- Ebenso kann man den Vektor \vec{x} als Angabe verstehen, die die relative Lage zweier Punkte zueinander beschreibt. Der Vektor charakterisiert also hier die *Differenz* zweier Punkte. Typischerweise veranschaulicht man solch einen *freien* Vektor durch einen Pfeil, der von einem beliebig gewählten Anfangspunkt ausgehend zu einem Endpunkt zeigt. Die Addition zweier Vektoren lässt sich in diesem Modell so veranschaulichen, dass man den Endpunkt des ersten Vektors als Anfangspunkt des zweiten Vektors verwendet.

2.3 Beispiel: Die Unterscheidung zwischen freien und gebundenen Vektoren ist etwas subtil, wird aber im folgenden Beispiel ganz deutlich. Zur Angabe von *Zeitpunkten* verwenden wir die Maßeinheit *Uhr*, wir sagen also z.B. *Der Film beginnt um 20 Uhr*, wobei sich diese Angabe vereinbarungsgemäß auf den Ursprung *Mitternacht = 0 Uhr* der Zeitachse bezieht. Wenn der Film um *23 Uhr* endet, ergibt die Differenz der beiden Zeitpunkte die Dauer des Films, also $23 \text{ Uhr} - 20 \text{ Uhr} = 3 \text{ Stunden}$. Interessanterweise werden Dauern, also *Zeitdifferenzen*, mit einer anderen Maßeinheit, nämlich *Stunden* gemessen. Wenn wir wissen, dass ein Film *3 Stunden* dauert, so stellt diese Information einen Zusammenhang zwischen Anfangs- und Endzeitpunkt her, unabhängig davon, wann diese konkret sind. In unserem Beispiel entsprechen also Zeitpunkte den gebundenen Vektoren und Dauern den freien Vektoren der Zeit. Zu unterscheiden sind sie an der verwendeten Maßeinheit.

2.4 Norm eines Vektors: Die *euklidische Norm*³⁰ des Vektors $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ ist durch

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

definiert³¹. Sie gibt die Länge des Vektors im geometrischen Sinne an und hat folgende Eigenschaften:

- *Positive Definitheit:*

$$\|\vec{x}\| > 0 \quad \text{für } \vec{x} \neq \vec{0}$$

$$\|\vec{x}\| = 0 \quad \text{für } \vec{x} = \vec{0}$$

- *Homogenität:*

$$\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- *Dreiecksungleichung:*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq \left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right|$$

2.5 Normierung: Sei $\vec{x} \neq \vec{0}$ ein Vektor, dann erhält man durch die *Normierung*

$$\vec{x}_0 := \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

einen Vektor \vec{x}_0 der Länge 1, der dieselbe Richtung wie \vec{x} besitzt.

2.6 Skalarprodukt: Das euklidische *Skalarprodukt* zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Die Vektoren \vec{x}, \vec{y} heißen *orthogonal*, wenn

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

Die Vektoren \vec{x} und \vec{y} stehen dann im geometrischen Sinne senkrecht aufeinander. Der Nullvektor ist orthogonal zu allen anderen Vektoren. Skalarprodukt und Norm sind durch die Formeln

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \right)$$

verknüpft.

³⁰Euklid von Alexandria, ca. 300 v. Chr.

³¹Andere gebräuchliche Bezeichnungen für die euklidische Norm sind $|\vec{x}|$ und $\|\vec{x}\|_2$. Bei der zweiten Bezeichnung weist das Subskript 2 darauf hin, dass in der Definition die Quadrate der Koordinaten aufsummiert werden. Man kann ganz allgemein für beliebige Zahlen $p \geq 1$ die Normen $\|\vec{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p}$ definieren.

2.7 Eigenschaften:

- *Symmetrie:*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$$

- *Linearität*

$$\begin{aligned} \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \alpha \vec{y} \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle &= \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle \end{aligned}$$

- *Binomische Formel:*

$$\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

- *Satz des Pythagoras:*

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{c}\|^2, \quad \text{falls } \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \text{ und } \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

oder allgemeiner

$$\sum_{k=1}^m \|\vec{a}_k\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^m \vec{a}_k \right\|^2, \quad \text{falls } \langle \vec{a}_i, \vec{a}_k \rangle = 0 \text{ für } i \neq k.$$

- Sei φ der Winkel zwischen \vec{x} und \vec{y} , dann gilt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \varphi.$$

- *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*³²:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

2.8 Verallgemeinerung: Die euklidische Norm und das euklidische Skalarprodukt sind lediglich Spezialfälle sehr viel allgemeiner gefasster Begriffe.

- Eine Funktion, die jedem Element \vec{x} eines Vektorraums V eine reelle Zahl $\|\vec{x}\|$ zuweist, heißt *Norm*, wenn allgemein gilt:

$$\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|, \quad \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \|\vec{x}\| > 0 \text{ für } \vec{x} \neq \vec{0}$$

- Eine Funktion, die jedem Paar $\vec{x}, \vec{y} \in V$ eine reelle Zahl $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ zuweist, heißt *Skalarprodukt*, wenn allgemein gilt:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle, \quad \langle \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \alpha_1 \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \alpha_2 \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle, \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0 \text{ für } \vec{x} \neq \vec{0}$$

³²Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857, und Hermann Schwarz, 1843–1921

Zu jedem gegebenen Skalarprodukt lässt sich durch $\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ eine passende Norm erklären. Umgekehrt gibt es aber nicht zu jeder Norm ein passendes Skalarprodukt.

Alle oben genannten Formeln bleiben gültig. Sofern in einer Formel sowohl Norm als auch Skalarprodukt auftauchen, ist dabei aber vorauszusetzen, dass diese zueinander passen.

Beispielsweise ist im Vektorraum der Polynome ein Skalarprodukt und die dazu passende Norm gegeben durch

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x) dx, \quad \|p\| := \left(\int_0^1 p(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Eine andere Norm wäre beispielsweise

$$\|p\| := \int_0^1 |p(x)| dx,$$

hierzu gibt es aber kein passendes Skalarprodukt.

2.9 Vektorprodukt: Das *Vektorprodukt* (auch *Kreuzprodukt* genannt) zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}.$$

Das Ergebnis $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ ist also wieder ein Vektor in \mathbb{R}^3 .

2.10 Eigenschaften:

- *Antisymmetrie:*

$$\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$$

Daraus folgt insbesondere

$$\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}.$$

- *Linearität:*

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) &= (\alpha\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (\alpha\vec{y}), \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \times \vec{y} &= \vec{x}_1 \times \vec{y} + \vec{x}_2 \times \vec{y} \\ \vec{x} \times (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) &= \vec{x} \times \vec{y}_1 + \vec{x} \times \vec{y}_2 \end{aligned}$$

- *Orthogonalität:*

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$$

- Sei φ der Winkel zwischen \vec{x} und \vec{y} , dann gilt

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot |\sin \varphi|.$$

$\vec{x} \times \vec{y}$ ist also ein Vektor, der senkrecht auf \vec{x} und \vec{y} steht und als Länge den Flächeninhalt des von \vec{x} und \vec{y} aufgespannten Parallelogramms besitzt.

- Die drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$ bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*. Das heißt anschaulich gesprochen folgendes: Wenn der Daumen und der Zeigefinger der rechten Hand in Richtung \vec{x} und \vec{y} zeigen, dann zeigt der Mittelfinger in Richtung $\vec{x} \times \vec{y}$.
- *Spatprodukt*: Ist \vec{w} noch ein weiterer Vektor im \mathbb{R}^3 , so beschreibt der Betrag von $\langle \vec{w}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle$ das Volumen des durch $\vec{w}, \vec{x}, \vec{y}$ aufgespannten *Parallelepipeds* (oder *Spat*), vgl. Abbildung 7.

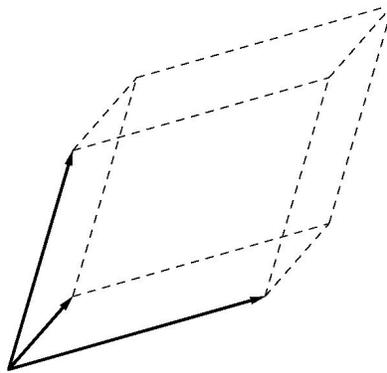


Abbildung 7: Ein Parallelepiped oder Spat

Das Vorzeichen von $\langle \vec{w}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle$ gibt an, ob $\vec{w}, \vec{x}, \vec{y}$ ein Rechtssystem (positiv) oder ein Linkssystem (negativ) ist. Es gilt:

$$\langle \vec{w}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{w} \times \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{w} \rangle.$$

2.11 Geraden in \mathbb{R}^n : Seien \vec{p} und \vec{r} Vektoren in \mathbb{R}^n und $\vec{r} \neq \vec{0}$. Die Gleichung

$$g : \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

beschreibt eine *Gerade in \mathbb{R}^n in parametrisierter Form*. Man bezeichnet \vec{p} als *Aufpunkt*, \vec{r} als *Richtungsvektor* und λ als *Parameter* der Geraden g .

2.12 Beispiel: In Abbildung 8 ist $\vec{p} = [5, 1]^T$ und $\vec{r} = [-2, 1]^T$, also

$$g : \vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

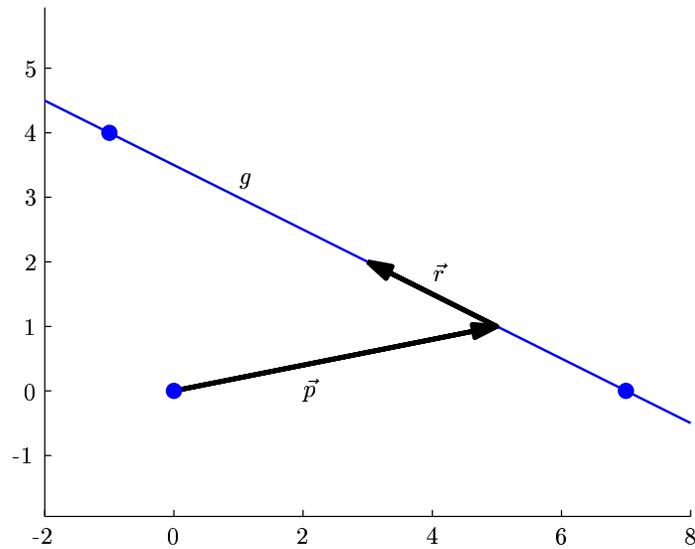
Für $\lambda = 3$ erhält man den Punkt $\vec{x} = [-1, 4]^T$ und für $\lambda = -1$ den Punkt $\vec{x} = [7, 0]^T$.

2.13 Abstand Punkt-Gerade: Der *Abstand* $d(\vec{q}, g)$ eines Punktes \vec{q} von der Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}$ ist definiert als

$$d(\vec{q}, g) := \min_{\vec{x} \in g} \|\vec{x} - \vec{q}\|.$$

Dies ist also der kleinste Abstand, den ein Punkt auf der Geraden von \vec{q} haben kann. Der Punkt $\vec{x}^* = \vec{p} + \lambda^* \vec{r}$, für den dieses Minimum angenommen wird, ist dadurch gekennzeichnet, dass der Verbindungsvektor zum Punkt \vec{q} senkrecht zum Richtungsvektor \vec{r} der Geraden ist,

$$\langle \vec{x}^* - \vec{q}, \vec{r} \rangle = \langle \vec{p} - \vec{q} + \lambda^* \vec{r}, \vec{r} \rangle = 0.$$

Abbildung 8: Die Gerade mit Aufpunkt \vec{p} und Richtungsvektor \vec{r}

Löst man diese Gleichung nach λ^* auf, so erhält man

$$\lambda^* = \frac{\langle \vec{q} - \vec{p}, \vec{r} \rangle}{\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle}$$

und damit \vec{x}^* . Schließlich ist

$$d(\vec{q}, g) = \|\vec{x}^* - \vec{q}\|.$$

2.14 Beispiel [\rightarrow 2.12]: Für $g : \vec{x} = [5, 1]^T + \lambda[-2, 1]^T$ und $\vec{q} = [2, 5]^T$ ist

$$\lambda^* = 2 \quad \text{und} \quad \vec{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

vgl. Abbildung 9. Damit erhält man

$$d(\vec{q}, g) = \|\vec{x}^* - \vec{q}\| = \sqrt{5}.$$

2.15 Implizite Form von Geraden in \mathbb{R}^2 : Sei

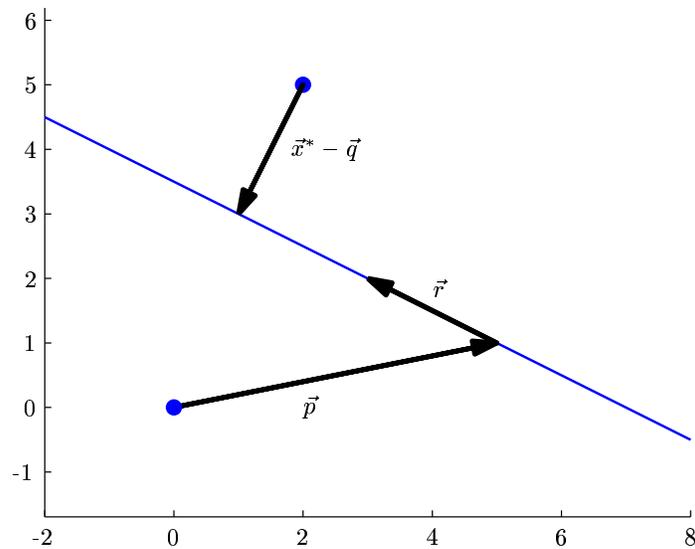
$$g : \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

eine Gerade in \mathbb{R}^2 mit Richtungsvektor $\vec{r} \neq \vec{0}$ und zugehörigem *Normalenvektor* \vec{n} . Dies ist ein Vektor $\neq \vec{0}$, der senkrecht auf \vec{r} steht, also $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = 0$. Multipliziert man die Darstellung der Geraden skalar mit \vec{n} , dann erhält man die Gleichung

$$\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle,$$

die jeder Punkt \vec{x} auf der Geraden erfüllt. Betrachten wir umgekehrt einen beliebigen Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, der diese Gleichung erfüllt. Dann gilt

$$\langle \vec{x} - \vec{p}, \vec{n} \rangle = 0.$$

Abbildung 9: Bestimmung des Abstands von \vec{q} zur Geraden g in Beispiel 2.14

Da jeder Vektor, der senkrecht auf \vec{n} steht, parallel zu \vec{r} ist, gibt es eine Zahl λ mit $\vec{x} - \vec{p} = \lambda \vec{r}$. Daraus folgt, dass \vec{x} tatsächlich auf der Geraden liegt. Wir haben damit gezeigt, dass die Gerade g genau aus denjenigen Punkten der Ebene besteht, welche die Gleichung $\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle$ erfüllen. Wir nennen dies die *implizite Form* der Geraden und schreiben

$$g : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle.$$

Auf der linken Seite steht eine Linearkombination der Komponenten von \vec{x} , und auf der rechten Seite steht die Konstante $d := \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \in \mathbb{R}$. Einen Normalenvektor \vec{n} erhält man beispielsweise gemäß

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{n} := \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}.$$

Damit lautet die implizite Form

$$g : bx - ay = d.$$

2.16 Hesse-Normalform: Normiert man speziell einen Normalenvektor \vec{n} auf Länge 1 [\rightarrow 2.5], das heißt

$$\vec{n}_0 := \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|},$$

dann lautet die implizite Form einer Geraden g in \mathbb{R}^2

$$g : \langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = d_0, \quad \text{wobei} \quad d_0 := \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{d}{\|\vec{n}\|}.$$

Diese bezeichnet man als die *Hesse-Normalform*³³ der Geraden g . Sie ist dadurch ausgezeichnet, dass der Betrag der Konstanten d_0 den Abstand der Geraden vom Ursprung angibt, also

$$d(\vec{0}, g) = |d_0|.$$

³³Otto Hesse, 1811–1874

Der Abstand eines beliebigen Punktes $\vec{q} \in \mathbb{R}^2$ von der Geraden ist durch

$$d(\vec{q}, g) = |d_0 - \langle \vec{q}, \vec{n}_0 \rangle|$$

gegeben.

2.17 Beispiel [\rightarrow 2.14]: Sei $g : \vec{x} = [5, 1]^T + \lambda[-2, 1]^T$ und $\vec{q} = [2, 5]^T$. Man erhält

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow d = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = 7$$

und damit die implizite Form

$$g : x + 2y = 7.$$

Beispielsweise erfüllen die Punkte $x = 7, y = 0$ und $x = -1, y = 4$ diese Gleichung [\rightarrow 2.12]. Die Normierung

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow d_0 = \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

liefert die Hesse-Normalform

$$g : \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Der Abstand der Geraden vom Ursprung ist also $d_0 = 7/\sqrt{5}$. Der Abstand des Punktes $\vec{q} = [2, 5]^T$ ist wie zuvor

$$d(\vec{q}, g) = |7/\sqrt{5} - \langle [2, 5]^T, [1, 2]^T \rangle / \sqrt{5}| = \sqrt{5}.$$

2.18 Ebenen in \mathbb{R}^3 : Seien $\vec{p}, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ Vektoren in \mathbb{R}^3 und $\vec{n} := \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \neq \vec{0}$. Die Gleichung

$$E : \vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

beschreibt eine Ebene in \mathbb{R}^3 in parametrisierter Form. Man bezeichnet \vec{p} als *Aufpunkt*, \vec{r}_1, \vec{r}_2 als *Richtungsvektoren*, \vec{n} als *Normalenvektor* und λ_1, λ_2 als *Parameter* der Ebene.

2.19 Abstand Punkt-Ebene: Der Abstand $d(\vec{q}, E)$ eines Punktes \vec{q} von der Ebene $\vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2$ ist definiert als

$$d(\vec{q}, E) := \min_{\vec{x} \in E} \|\vec{x} - \vec{q}\|.$$

Dies ist also der kleinste Abstand, den ein Punkt auf der Ebene von \vec{q} haben kann. Der Punkt $\vec{x}^* = \vec{p} + \lambda_1^* \vec{r}_1 + \lambda_2^* \vec{r}_2$, für den dieses Minimum angenommen wird, ist dadurch gekennzeichnet, dass der Verbindungsvektor zum Punkt \vec{q} senkrecht zu beiden Richtungsvektoren \vec{r}_1, \vec{r}_2 der Ebene ist, d.h.,

$$\vec{x}^* - \vec{q} = \mu \vec{n}.$$

Multipliziert man diese Gleichung skalar mit \vec{n} , dann erhält man

$$\langle \vec{p} - \vec{q}, \vec{n} \rangle = \mu \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle \Rightarrow \mu = \frac{\langle \vec{p} - \vec{q}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2},$$

da $\langle \vec{r}_1, \vec{n} \rangle = \langle \vec{r}_2, \vec{n} \rangle = 0$. Der Abstand ist also

$$d(\vec{q}, E) = \|\mu \vec{n}\| = |\mu| \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{p} - \vec{q}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}.$$

2.20 Beispiel: Sei $\vec{p} = [1, 1, 5]^T$, $\vec{r}_1 = [3, 0, 1]^T$ und $\vec{r}_2 = [1, 2, -1]^T$, also

$$E : \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist ein Normalenvektor gegeben durch

$$\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \|\vec{n}\| = \sqrt{56}.$$

Der Abstand des Punktes $\vec{q} = [1, 0, 7]^T$ von der Ebene ist

$$d(\vec{q}, E) = \frac{|-8|}{\sqrt{56}} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Dabei ist $\mu = -1/7$ und $\vec{x}^* = [9/7, -4/7, 43/7]^T$.

2.21 Implizite Form von Ebenen in \mathbb{R}^3 : Sei

$$E : \vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

eine Ebene in \mathbb{R}^3 mit Normalenvektor $\vec{n} \neq \vec{0}$. Multipliziert man die Gleichung der Ebene skalar mit \vec{n} , dann erhält man analog zum Fall von Geraden in der Ebene die *implizite Form*

$$E : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle.$$

Die Ebene E ist also die Menge aller Punkte $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, die diese Gleichung erfüllen. Auf der linken Seite steht eine Linearkombination der Komponenten von \vec{x} , und auf der rechten Seite steht die Konstante $d := \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \in \mathbb{R}$.

2.22 Hesse-Normalform: Normiert man speziell den Normalenvektor \vec{n} auf Länge 1, d.h.,

$$\vec{n}_0 := \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|},$$

dann lautet die implizite Form

$$E : \langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = d_0, \quad \text{wobei} \quad d_0 := \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{d}{\|\vec{n}\|}.$$

Diese bezeichnet man als die *Hesse-Normalform* der Ebene E . Sie ist dadurch ausgezeichnet, dass der Betrag der Konstanten d_0 den Abstand der Ebene vom Ursprung angibt, also

$$d(\vec{0}, E) = |d_0|.$$

Der Abstand eines beliebigen Punktes $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene ist durch

$$d(\vec{q}, E) = |d_0 - \langle \vec{q}, \vec{n}_0 \rangle|$$

gegeben.

2.23 Beispiel [→ 2.20]: Mit $\vec{p} = [1, 1, 5]^T$, $\vec{n} = [-2, 4, 6]^T$ und $\vec{x} = [x, y, z]^T$ erhält man $d = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = 32$ und damit die implizite Form

$$E : -2x + 4y + 6z = 32.$$

Die Normierung

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \Rightarrow \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow d_0 = \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

liefert die Hesse-Normalform

$$E : \frac{-1}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z = \frac{16}{\sqrt{14}}.$$

Der Abstand der Ebene vom Ursprung ist also $d_0 = 16/\sqrt{14}$, und der Abstand des Punktes $\vec{q} = [1, 0, 7]^T$ von der Ebene ist wie zuvor

$$d(\vec{q}, E) = \left| 16/\sqrt{14} - 20/\sqrt{14} \right| = 4/\sqrt{14}.$$

2.24 Schnitt Ebene-Gerade: Zur Berechnung des Schnittpunkts \vec{x}^* einer Ebene E mit einer Geraden g in \mathbb{R}^3 verwendet man zweckmäßigerweise für die Ebene die implizite und für die Gerade die parametrische Form,

$$\begin{aligned} E &: \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = d \\ g &: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Setzt man die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein, so erhält man die Bedingung

$$\langle \vec{p}, \vec{n} \rangle + \lambda^* \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = d \tag{2.1}$$

für den Parameter λ^* des Schnittpunkts. Nun sind folgende Fälle zu unterscheiden:

- Falls $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \neq 0$, dann ist der Schnittpunkt eindeutig bestimmt und durch

$$\vec{x}^* = \vec{p} + \frac{d - \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle} \vec{r}$$

gegeben.

- Falls $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = 0$ und $\langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = d$, dann ist Gleichung (2.1) für alle $\lambda^* \in \mathbb{R}$ erfüllt; es gibt also unendlich viele Lösungen. Dies bedeutet, dass die Gerade parallel zur Ebene ist und vollständig in dieser liegt.
- Falls $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = 0$ und $\langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \neq d$, dann ist Gleichung (2.1) für kein $\lambda^* \in \mathbb{R}$ erfüllt; es gibt also keinen Schnittpunkt. Dies bedeutet, dass die Gerade parallel zur Ebene ist und nicht in dieser liegt.

2.25 Lineare Teilräume: Eine nichtleere Teilmenge $L \subset \mathbb{R}^n$ heißt *linearer Teilraum*, wenn für $\vec{x}, \vec{y} \in L$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ stets auch

$$\vec{x} + \vec{y} \in L \quad \text{und} \quad \alpha\vec{x} \in L.$$

Ein linearer Teilraum muss also mit zwei Vektoren stets deren Summe und mit jedem Vektor dessen Vielfache enthalten. Wegen $L \neq \emptyset$ gilt $\vec{0} = 0\vec{x} \in L$. Ein Teilraum heißt *trivial*, wenn er nur den Nullvektor enthält und andernfalls *nichttrivial*.

2.26 Beispiel:

- \mathbb{R}^n und $\{\vec{0}\}$ sind lineare Teilräume von \mathbb{R}^n .
- $L_1 = \{[x_1, x_2]^T : x_1 + 3x_2 = 0\}$ ist ein linearer Teilraum von \mathbb{R}^2 .
- $L_2 = \{[x_1, x_2]^T : x_2 \geq 0\}$ ist kein linearer Teilraum von \mathbb{R}^2 , da zum Beispiel $[-1, 2]^T \in L$, aber $(-1) \cdot [-1, 2]^T = [1, -2]^T \notin L_2$.
- Die linearen Teilräume der Ebene \mathbb{R}^2 sind die Ursprungsgeraden sowie \mathbb{R}^2 und $\{\vec{0}\}$.
- Die linearen Teilräume von \mathbb{R}^3 sind die Ursprungsgeraden, die Ursprungsebenen sowie \mathbb{R}^3 und $\{\vec{0}\}$.

2.27 Linearkombination und lineare Hülle: Seien $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ Vektoren in \mathbb{R}^n und $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ reelle Zahlen. Dann nennt man den Vektor

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{p}_1 + \dots + \lambda_m\vec{p}_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i\vec{p}_i$$

eine *Linearkombination* der Vektoren \vec{p}_i mit Koeffizienten λ_i . Betrachtet man die Menge aller möglichen Linearkombinationen von $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$, so erhält man einen linearen Teilraum von \mathbb{R}^n . Dieser wird *lineare Hülle* der Vektoren genannt und mit $\text{Lin}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m)$ bezeichnet:

$$\text{Lin}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m) = \{\lambda_1\vec{p}_1 + \dots + \lambda_m\vec{p}_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

Ist $\vec{p}_1 \neq \vec{0}$, so ist $\text{Lin}(\vec{p}_1)$ die Gerade in Richtung \vec{p}_1 durch den Ursprung. Sind \vec{p}_1, \vec{p}_2 keine Vielfachen voneinander, insbesondere also keiner $= \vec{0}$, so ist $\text{Lin}(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ die durch \vec{p}_1, \vec{p}_2 aufgespannte Ebene durch den Ursprung.

2.28 Lineare Unabhängigkeit: Die Vektoren $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m \in \mathbb{R}^n$ heißen *linear unabhängig*, wenn man den Nullvektor nur dann als Linearkombination erhält, wenn alle Koeffizienten Null sind. Es muss also gelten:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i\vec{p}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Kann der Nullvektor auch anders gebildet werden, also mit mindestens einem $\lambda_i \neq 0$, so heißen die Vektoren $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ *linear abhängig*.

2.29 Beispiel:

- Die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

sind linear unabhängig, denn aus

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \vec{0}$$

folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

- Ebenfalls linear unabhängig sind

$$\vec{p}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{p}_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dagegen sind

$$\vec{q}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{q}_2 := \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

linear abhängig, denn $2\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{0}$.

2.30 Basis und Dimension: Sei $L \subset \mathbb{R}^n$ ein nichttrivialer linearer Teilraum. Wenn die Vektoren $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m \in L$ linear unabhängig sind und $L = \text{Lin}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m)$ gilt, so bilden $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ eine *Basis von L*. Die Anzahl m dieser linear unabhängigen Vektoren heißt *Dimension von L*, wir schreiben dafür kurz $\dim L = m$. Die Vektoren $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ können zu einem neuen Objekt zusammengefasst werden, das wir mit dem entsprechenden Großbuchstaben bezeichnen; wir schreiben

$$P = [\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_m].$$

Für den trivialen Teilraum $L = \{\vec{0}\}$, der natürlich keine Basis besitzt, legt man die Dimension $\dim\{\vec{0}\} = 0$ fest.

2.31 Beispiel [→ 2.29]:

- Die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ bilden eine Basis des \mathbb{R}^n . Insbesondere ist

$$\dim \mathbb{R}^n = n.$$

Dagegen ist $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ keine Basis des \mathbb{R}^n , denn $\vec{e}_1 \notin \text{Lin}(\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

- $P = [\vec{p}_1, \vec{p}_2]$ ist eine Basis von \mathbb{R}^2 , aber $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2]$ nicht.

2.32 Eigenschaften: Ist L ein nichttrivialer linearer Teilraum von \mathbb{R}^n , so gilt:

- Es gibt eine Basis von L .
- Alle Basen von L bestehen aus gleich vielen Vektoren.
- $\dim L \leq n$.

2.33 Koordinaten bezüglich einer Basis: Sei $P = [\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n]$ eine Basis von \mathbb{R}^n , dann gibt es zu jedem $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmte reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, genannt *P-Koordinaten von \vec{x}* oder auch *Koordinaten von \vec{x} bezüglich P* , sodass

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{p}_1 + \dots + \alpha_n \vec{p}_n.$$

Der Vektor $\vec{x}_P = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$ heißt *P-Koordinatenvektor von \vec{x}* .

2.34 Beispiel [→ 2.29]:

- Die Koordinaten von $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ bzgl. der Basis $E = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$ des \mathbb{R}^n sind x_1, x_2, \dots, x_n , und der zugehörige E -Koordinatenvektor ist $\vec{x}_E = \vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.
- Die Koordinaten von $\vec{x} = [5, -1]^T$ bzgl. der Basis $P = [\vec{p}_1, \vec{p}_2]$ von \mathbb{R}^2 sind $\alpha_1 = 3$ und $\alpha_2 = -2$, denn

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\vec{p}_1 - 2\vec{p}_2.$$

Der P -Koordinatenvektor von \vec{x} ist also $\vec{x}_P = [3, -2]^T$.

- Q -Koordinaten machen keine Sinn, da die Vektoren \vec{q}_1, \vec{q}_2 keine Basis bilden.

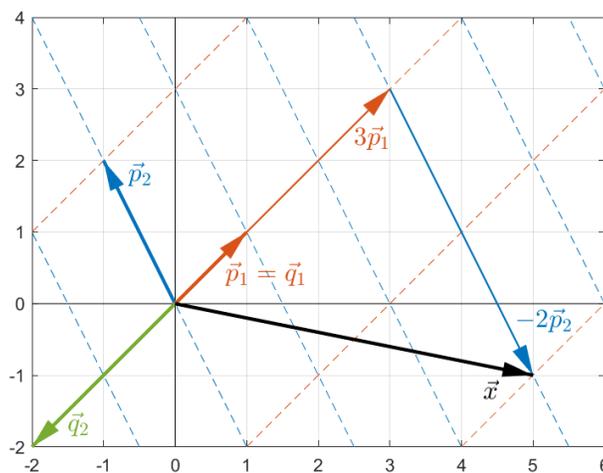


Abbildung 10: P -Koordinaten $\vec{x}_P = [3, -2]^T$ des Vektors $\vec{x} = [5, -1]^T$.

2.35 Orthogonalbasis und Orthonormalbasis: Die Basis $P = [\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n]$ von \mathbb{R}^n heißt

- *Orthogonalbasis (OB)*, falls $\langle \vec{p}_i, \vec{p}_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$.
- *Orthonormalbasis (ONB)*, falls $\langle \vec{p}_i, \vec{p}_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$ gilt und zusätzlich $\langle \vec{p}_i, \vec{p}_i \rangle = 1$ für alle i . Diese Bedingungen kann man auch kurz wie folgt schreiben:

$$\langle \vec{p}_i, \vec{p}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \neq j, \\ 1 & \text{wenn } i = j. \end{cases}$$

Der Ausdruck δ_{ij} wird *Kronecker-Delta* genannt.

Jede OB kann durch Normierung [\rightarrow 2.5] in eine ONB umgewandelt werden.

Orthogonal- und Orthonormalbasen sind unter anderem deshalb besonders wichtig, weil sich hier die zugehörigen Koordinaten sehr einfach berechnen lassen. Wenn P eine OB ist, dann sind die P -Koordinaten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des Vektors \vec{x} gegeben durch

$$\alpha_j = \frac{\langle \vec{x}, \vec{p}_j \rangle}{\langle \vec{p}_j, \vec{p}_j \rangle}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Es gilt also

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\langle \vec{x}, \vec{p}_j \rangle}{\langle \vec{p}_j, \vec{p}_j \rangle} \vec{p}_j.$$

Wenn P sogar eine ONB ist, vereinfachen sich die Ausdrücke weiter zu

$$\alpha_j = \langle \vec{x}, \vec{p}_j \rangle \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \sum_{j=1}^n \langle \vec{x}, \vec{p}_j \rangle \vec{p}_j.$$

Wenn die orthogonalen Vektoren $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ nicht den ganzen \mathbb{R}^n , sondern nur einen linearen Teilraum $L := \text{Lin}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m)$ der Dimension m aufspannen, kann ein gegebener Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ in der Regel nicht mehr exakt durch eine Linearkombination dargestellt werden. Definiert man analog zu oben aber

$$\vec{x}_* := \sum_{j=1}^m \frac{\langle \vec{x}, \vec{p}_j \rangle}{\langle \vec{p}_j, \vec{p}_j \rangle} \vec{p}_j,$$

dann ist \vec{x}_* derjenige Punkt in L , der \vec{x} am nächsten liegt, also die Abweichung $\|\vec{x} - \vec{x}_*\|$ minimiert. Man nennt \vec{x}_* deshalb auch die *beste Approximation* von \vec{x} in L . Man erhält so also eine verallgemeinerte Lösung des weiter oben beschriebenen Abstandsproblems für Geraden und Ebenen. Charakteristisch ist auch hier die Tatsache, dass $\vec{x} - \vec{x}_*$ orthogonal zu allen Vektoren $\vec{p}_k, k = 1, \dots, m$, ist,

$$\langle \vec{x} - \vec{x}_*, \vec{p}_k \rangle = \langle \vec{x}, \vec{p}_k \rangle - \sum_{j=1}^m \frac{\langle \vec{x}, \vec{p}_j \rangle}{\langle \vec{p}_j, \vec{p}_j \rangle} \langle \vec{p}_j, \vec{p}_k \rangle = \langle \vec{x}, \vec{p}_k \rangle - \frac{\langle \vec{x}, \vec{p}_k \rangle}{\langle \vec{p}_k, \vec{p}_k \rangle} \langle \vec{p}_k, \vec{p}_k \rangle = 0.$$

2.36 Beispiel [→ 2.29]:

- Die Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ des \mathbb{R}^n ist eine Orthonormalbasis.
- Die Basis \vec{p}_1, \vec{p}_2 des \mathbb{R}^2 ist keine Orthogonalbasis, da $\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle \neq 0$.
- Die Vektoren $\vec{u}_1 = [1, 1, 1]^T$, $\vec{u}_2 = [1, -1, 0]^T$, $\vec{u}_3 = [1, 1, -2]^T$ bilden eine OB des \mathbb{R}^3 . Sie bilden aber keine ONB, da z.B. $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle = 3$. Die U -Koordinaten des Vektors $\vec{x} = [2, 0, -1]^T$ sind gegeben durch $\vec{x}_U = [1/3, 1, 2/3]^T$.
- Durch Normierung der Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ erhalten wir die ONB

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Die V -Koordinaten des Vektors $\vec{x} = [2, 0, -1]^T$ sind $\vec{x}_V = [1/\sqrt{3}, \sqrt{2}, 4/\sqrt{6}]^T$.

3 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen sind etwas sehr Einfaches, nämlich Vektoren in \mathbb{R}^2 versehen mit einer speziellen Form der Multiplikation. Anstelle der bekannten Zahlengeraden erhält man also eine *Zahlenebene*. Für die Grundrechenarten gelten alle bekannten Rechenregeln unverändert. Allerdings gelten Aussagen wie „das Quadrat einer Zahl ist niemals negativ“ nicht mehr. Insbesondere gibt es eine komplexe Zahl i , deren Quadrat gleich -1 ist. Beim Umgang mit elementaren Funktionen gelten viele Regeln ebenfalls unverändert, es werden aber auch interessante neue Zusammenhänge sichtbar, beispielsweise zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen.

3.1 Komplexe Multiplikation: Für zwei Vektoren

$$\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

in \mathbb{R}^2 wird neben der üblichen Addition die *komplexe Multiplikation*

$$\vec{z}_1 * \vec{z}_2 := \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 \end{bmatrix}$$

definiert. Sie hat folgende Eigenschaften:

- *Kommutativgesetz:*

$$\vec{z}_1 * \vec{z}_2 = \vec{z}_2 * \vec{z}_1$$

- *Assoziativgesetz:*

$$\vec{z}_1 * (\vec{z}_2 * \vec{z}_3) = (\vec{z}_1 * \vec{z}_2) * \vec{z}_3$$

- *Distributivgesetz:*

$$\vec{z}_1 * (\vec{z}_2 + \vec{z}_3) = \vec{z}_1 * \vec{z}_2 + \vec{z}_1 * \vec{z}_3$$

Der Raum \mathbb{R}^2 versehen mit der komplexen Multiplikation wird *komplexe Zahlenebene* genannt und mit \mathbb{C} bezeichnet. Die Elemente von \mathbb{C} heißen *komplexe Zahlen*.

3.2 Beispiel:

$$\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{z}_1 * \vec{z}_2 = \vec{z}_2 * \vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

3.3 Einheiten: Die Einheitsvektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 in der komplexen Zahlenebene werden mit

$$\vec{1} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{i} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bezeichnet und *reelle Einheit* bzw. *imaginäre Einheit* genannt. Es gilt also

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\vec{1} + b\vec{i}.$$

Man bezeichnet a als *Realteil* und b als *Imaginärteil* der komplexen Zahl \vec{z} und schreibt dafür

$$a = \operatorname{Re} \vec{z}, \quad b = \operatorname{Im} \vec{z}.$$

Merke: Real- und Imaginärteil sind reelle Zahlen.

Für eine beliebige komplexe Zahl $\vec{z} = [a, b]^T$ gilt

$$\vec{1} * \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \vec{i} * \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}.$$

$\vec{1}$ ist also das *neutrale Element* der komplexen Multiplikation, während Multiplikation mit \vec{i} den gegebenen Vektor \vec{z} um den Winkel $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn dreht. Insbesondere gilt

$$\vec{i} * \vec{i} = -\vec{1}.$$

Damit erhält die Multiplikationsregel nach dem Distributivgesetz die Form

$$\begin{aligned} (a_1 \vec{1} + b_1 \vec{i}) * (a_2 \vec{1} + b_2 \vec{i}) &= a_1 a_2 (\vec{1} * \vec{1}) + a_1 b_2 (\vec{1} * \vec{i}) + b_1 a_2 (\vec{i} * \vec{1}) + b_1 b_2 (\vec{i} * \vec{i}) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) \vec{1} + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \vec{i}. \end{aligned}$$

3.4 Notation: Beim Rechnen mit komplexen Zahlen ist es üblich, die Vektorpfeile wegzulassen. Man schreibt also

$$z = a1 + bi \quad \text{für} \quad \vec{z} = a\vec{1} + b\vec{i}.$$

Weiterhin wird die Notation der reellen Einheit weggelassen. Man schreibt also

$$z = a + bi \quad \text{für} \quad z = a1 + bi.$$

Schließlich wird auch der Mal-Punkt nicht mit einem speziellen Symbol notiert. Man schreibt also

$$z_1 z_2 \quad \text{oder} \quad z_1 \cdot z_2 \quad \text{für} \quad z_1 * z_2.$$

Die Rechenregeln lauten nun

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \\ (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i. \end{aligned}$$

Das Rechnen mit komplexen Zahlen folgt also denselben Gesetzen wie das Rechnen mit reellen Zahlen. Es ist lediglich die Regel

$$i \cdot i = i^2 = -1$$

zu beachten.

3.5 Beispiel [\rightarrow 3.2]:

$$(2 + i) + (4 + 3i) = 6 + 4i, \quad (2 + i) \cdot (4 + 3i) = 5 + 10i$$

3.6 Polarkoordinaten: Der Punkt $z = a + bi$ kann entweder durch seine kartesischen Koordinaten (a, b) oder durch seine *Polarkoordinaten* (r, φ) definiert werden. Dabei ist r der Abstand vom Ursprung und φ der Winkel zur reellen Einheit 1,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Man nennt r den *Betrag* und φ das *Argument* von z und schreibt

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Das Argument φ wird von der positiven reellen Achse aus im *mathematisch positiven Sinn*, also gegen den Uhrzeigersinn, gemessen. Weiterhin ist zu beachten, dass φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist. Typischerweise wählt man $\varphi \in (-\pi, \pi]$ und genau davon gehen wir im Folgenden aus. Es wäre aber auch möglich, φ in $[0, 2\pi)$ oder in jedem beliebigen anderen halboffenen Intervall der Länge 2π zu wählen.

- Umrechnung von Polarkoordinaten (r, φ) in kartesische Koordinaten (a, b) :

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

- Umrechnung von kartesischen Koordinaten $(a, b) \neq (0, 0)$ in Polarkoordinaten (r, φ) :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \begin{cases} + \arccos(a/r), & b \geq 0 \\ - \arccos(a/r), & b < 0. \end{cases}$$

für $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

3.7 Beispiel: Für $z = 1 - \sqrt{3}i$ ist

$$|z| = r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\cos \varphi = a/r = 1/2, \quad b < 0 \Rightarrow \arg z = \varphi = -\pi/3.$$

Es gilt also

$$1 - i\sqrt{3} = 2(\cos \pi/3 - i \sin \pi/3).$$

Man könnte anstelle von $\arg z = -\pi/3$ auch $\arg z = 5\pi/3$ oder $\arg z = 11\pi/3$ wählen.

3.8 Konjugation: Die Spiegelung einer komplexen Zahl an der reellen Achse bezeichnet man als *Konjugation* und schreibt dafür

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

\bar{z} wird die zu z *konjugiert komplexe Zahl* genannt. Es gilt

-

$$\overline{\bar{z}} = z$$

-

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

-

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

-

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

3.9 Division: Man berechnet den Quotienten zweier komplexer Zahlen, indem man mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitert,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0.$$

Damit ist der Nenner reell und die Division problemlos möglich. Division durch Null ist wie üblich ausgeschlossen.

3.10 Beispiel:

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{5+14i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i$$

3.11 Geometrische Deutung der Multiplikation: Gegeben seien zwei komplexe Zahlen mit Polarkoordinaten (r_1, φ_1) und (r_2, φ_2) , also

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \end{aligned}$$

Berechnet man das Produkt, so erhält man

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \right)$$

Gemäß der Additionstheoreme für Winkelfunktionen lässt sich dies einfacher schreiben als

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right).$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen entspricht also einer *Multiplikation der Beträge* und einer *Addition der Argumente*. Genauso entspricht die Division zweier komplexer Zahlen einer *Division der Beträge* und einer *Subtraktion der Argumente*,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right).$$

3.12 Komplexe e-Funktion: Man definiert für rein imaginäre Argumente die *e-Funktion* durch

$$e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Dieser Zusammenhang wird auch *Euler-Formel* genannt. Es gilt $|e^{i\varphi}| = 1$. Das heißt, $e^{i\varphi}$ ist eine Zahl auf dem komplexen Einheitskreis, die durch den Winkel φ bestimmt ist. Damit hat eine komplexe Zahl mit Polarkoordinaten (r, φ) die Darstellung

$$z = r e^{i\varphi}$$

und die Multiplikation bekommt die einfache Form

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 e^{i\varphi_1} \right) \cdot \left(r_2 e^{i\varphi_2} \right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Definiert man die *e-Funktion* für beliebige komplexe Argumente $z = a + ib$ durch

$$e^{a+ib} := e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b),$$

dann gilt allgemein

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \quad e^{z_1} / e^{z_2} = e^{z_1 - z_2}.$$

Die Bildmenge umfasst alle komplexen Zahlen mit Ausnahme der 0.

3.13 Beispiel:

$$e^0 = e^{2\pi i} = 1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{-i\pi/2} = -i, \quad e^{2+i\pi} = -e^2$$

3.14 Komplexer Logarithmus: Die Umkehrfunktion der e -Funktion wird als *natürlicher Logarithmus* bezeichnet. Sei $w \neq 0$ gegeben, dann muss für $\ln w = z = a + bi$ gelten

$$e^z = e^a e^{ib} = w.$$

Hieraus folgt

$$|w| = e^a, \quad \arg w = b$$

und

$$\ln w = \ln |w| + i \arg w.$$

Man beachte, dass der Logarithmus der Zahl 0 nicht definiert ist und dass sich die Mehrdeutigkeit des Arguments auf die Logarithmusfunktion überträgt. Für $w = -3$ ist also jede Zahl der Form $\ln 3 + i\pi(1 + 2k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ein möglicher Logarithmus, also beispielsweise $\ln(-3) = \ln 3 + i\pi$ oder $\ln(-3) = \ln 3 - i\pi$. Um Eindeutigkeit herzustellen, wählt man wieder Winkel aus dem Intervall $\arg w \in (-\pi, \pi]$ und spricht dann vom *Hauptzweig* des Logarithmus. Wenn nichts anderes gesagt wird, gehen wir im Folgenden genau davon aus. Man beachte aber, dass die Rechenregeln

$$\ln(w_1 \cdot w_2) = \ln(w_1) + \ln(w_2), \quad \ln(w_1/w_2) = \ln(w_1) - \ln(w_2)$$

dann nur noch bis auf Vielfache von $2\pi i$ gelten. Beispielsweise ist

$$\ln 9 = \ln((-3) \cdot (-3)) \neq \ln(-3) + \ln(-3) = 2(\ln 3 + i\pi) = \ln 9 + 2\pi i.$$

3.15 Beispiel:

$$\ln 1 = 0, \quad \ln(-1) = i\pi, \quad \ln(i) = i\pi/2, \quad \ln(3 - 4i) = \ln 5 - i \arccos(3/5)$$

3.16 Komplexe Potenzfunktion: Für komplexe Zahlen $x \neq 0$ und y definiert man die *Potenz* x^y durch

$$x^y := e^{y \ln x}.$$

Die komplexe *Wurzelfunktion* ist definiert durch

$$\sqrt[n]{z} := z^{1/n} = e^{(\ln z)/n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dabei ist \ln jeweils wieder der Hauptzweig des Logarithmus.

3.17 Beispiel:

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{-\pi/2}, \quad \sqrt{-1} = e^{(\ln(-1))/2} = e^{i\pi/2} = i, \quad \sqrt{-16} = 4i$$

3.18 Nullstellen von Polynomen: Die Nullstellen eines quadratischen Polynoms

$$p(z) = az^2 + bz + c, \quad a \neq 0,$$

sind durch die Formel

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gegeben. Dabei ist die Wurzel im komplexen Sinn zu verstehen und deshalb stets definiert. Es gibt also immer zwei (unter Umständen zusammenfallende) Lösungen einer quadratischen Gleichung im Komplexen.

Allgemein gilt der *Fundamentalsatz der Algebra*: Das Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

hat stets n komplexe Nullstellen.

3.19 Beispiel:

$$z^2 - 6z + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

3.20 Beispiel: Zur Lösung der Gleichung

$$z^3 - 8i = 0$$

setzt man $z = re^{i\varphi}$ und erhält

$$r^3 e^{3i\varphi} = 8e^{i\pi/2}.$$

Ein Vergleich der Beträge liefert $r = 2$, und für das Argument erhält man

$$3\varphi = \pi/2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dabei wurde verwendet, dass die e -Funktionen übereinstimmen, wenn sich die Argumente um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden. Man erhält eine Folge von Argumenten

$$\varphi_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

aber nur drei davon führen auf verschiedene Lösungen,

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi_1 = \frac{5\pi}{6}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Alle anderen Werte unterscheiden sich von den gegebenen drei um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π und liefern deshalb keine weiteren Lösungen. Man erhält schließlich

$$z_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i, \quad z_1 = 2e^{5i\pi/6} = -\sqrt{3} + i, \quad z_2 = 2e^{3i\pi/2} = -2i.$$

4 Lineare Gleichungssysteme

Das Lösen linearer Gleichungssysteme ist eine der wichtigsten Aufgaben der angewandten Mathematik. Während hier nur sehr kleine Beispiele betrachtet werden, die sich von Hand lösen lassen, treten in der Praxis auch Systeme mit Tausenden oder sogar Millionen von Gleichungen für entsprechend viele Unbekannte auf. Wir besprechen hier nur den Gauß-Algorithmus, weisen aber darauf hin, dass es noch eine Reihe anderer Lösungsverfahren gibt (z.B. QR-Zerlegung, Cholesky-Zerlegung, iterative Verfahren), die abhängig von der Größe und Struktur des Problems gegebenenfalls besser geeignet sind.

4.1 Beispiel: Man berechne den Schnittpunkt der drei Ebenen

$$E_1 : 2x + y + z = 1$$

$$E_2 : 3x + y + z = 2$$

$$E_3 : 4x + 2y + 3z = 0,$$

vgl. Abbildung 11 (links).

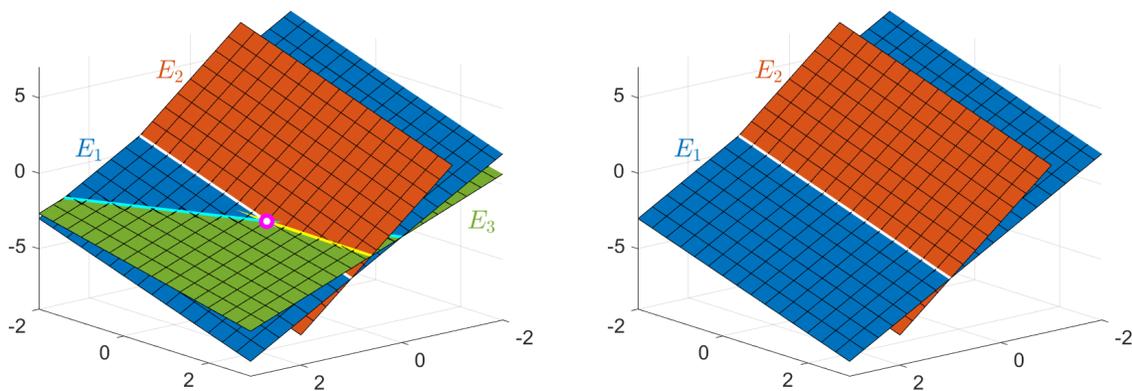


Abbildung 11: Schnittpunkt von drei Ebenen und Schnittgerade von zwei Ebenen.

Subtrahiert man das Dreifache der ersten Zeile vom Doppelten der zweiten Zeile, so erhält man die Bedingung

$$-y - z = 1.$$

Subtrahiert man das Doppelte der ersten Zeile von der dritten Zeile, so erhält man die Bedingung

$$z = -2.$$

Setzt man dies in die vorherige Gleichung ein, so erhält man die Bedingung

$$-y + 2 = 1$$

und damit den Wert $y = 1$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so erhält man die Bedingung

$$2x + 1 - 2 = 1$$

und damit den Wert $x = 1$. Der Schnittpunkt ist also $\vec{x} = [1, 1, -2]^T$.

4.2 Beispiel [→ 4.1]: Es soll die Schnittmenge der Ebenen E_1 und E_2 berechnet werden, siehe Abbildung 11 (rechts). Wie zuvor erhält man aus E_1 und E_2 die Bedingung

$$-y - z = 1.$$

Da keine weiteren Bedingungen vorhanden sind, kann man beispielweise der Variablen z einen beliebigen Wert zuordnen, sagen wir

$$z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Damit ergibt sich

$$-y - t = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -1 - t.$$

Setzt man dies in die Gleichung von E_1 ein, so erhält man die Bedingung

$$2x + (-t - 1) + t = 1$$

und damit $x = 1$. Die Menge aller Schnittpunkte ist also gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -t - 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungsmenge ist also eine Gerade.

4.3 Beispiel [→ 4.1]: Gesucht ist der Schnittpunkt der Ebenen E_1 , E_2 und E_4 , wobei

$$E_4 : x + y + z = 3.$$

Subtrahiert man vom Doppelten dieser Gleichung die Gleichung von E_1 , so erhält man die Bedingung

$$y + z = 5.$$

Außerdem folgt aus den Gleichungen für E_1 und E_2 wie zuvor

$$-y - z = 1.$$

Addiert man die beiden letzten Gleichungen, so erhält man den Widerspruch

$$0 = 6.$$

Es gibt also keinen Schnittpunkt.

4.4 Lineares Gleichungssystem: Ein *lineares Gleichungssystem (LGS)* mit m Gleichungen für den Vektor $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ der Unbekannten hat die Form

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $a_{i,j}$ und die Werte b_i vorgegebene reelle Zahlen sind. Gesucht ist die Menge aller Vektoren \vec{x} , für die alle Gleichungen erfüllt sind. Die Koeffizienten $a_{i,j}$ auf der linken Seite kann man zu einem Zahlenschema der Form

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

zusammenfassen. Man nennt A die *Matrix* des Gleichungssystems. Die Werte auf der rechten Seite b_1, b_2, \dots, b_m kann man zu einem Vektor $\vec{b} = [b_1, \dots, b_m]^T$ zusammenfassen und man schreibt für das LGS dann auch kurz

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

4.5 Typisches Lösungsverhalten: Das Verhältnis zwischen der Anzahl n der Unbekannten und der Anzahl m der Bedingungen ist ein wichtiger Indikator für die Lösbarkeit des Systems. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- Im Fall $m = n$ nennt man das LGS *quadratisch*. Es gibt also genauso viele Unbekannte wie Bedingungen und somit typischerweise eine eindeutige Lösung [→ 4.1].
- Im Fall $m < n$ ist das LGS strukturell *unterbestimmt*, da es weniger Bedingungen als Unbekannte gibt. Hier gibt es typischerweise unendlich viele Lösungen [→ 4.2].
- Im Fall $m > n$ ist das LGS strukturell *überbestimmt*, da es mehr Bedingungen als Unbekannte gibt. Hier gibt es typischerweise keine Lösung. In der Praxis ist dieser Fall dennoch relevant – man sucht dann nach einem Vektor \vec{x} , der das LGS näherungsweise erfüllt, also beispielsweise die Norm des Fehlers $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$ minimiert.

Mit dem Wort „typischerweise“ ist hier folgendes gemeint: Wenn man bei gegebenem n und m eine große Zahl von Gleichungssystemen betrachtet und dabei die Einträge der Matrix A und der rechten Seite \vec{b} zufällig wählt, dann wird in der ganz überwiegenden Zahl der Fälle das genannte Lösungsverhalten zu beobachten sein. *Aber Achtung:* Ausnahmen mit einem abweichenden Verhalten sind im Einzelfall natürlich jeweils möglich, statistisch gesehen aber eben unwahrscheinlich. Beispielsweise ist das System in Beispiel 4.3 quadratisch mit $n = m = 3$, es gibt aber keine Lösung. Ändert man aber nur einen der neun Einträge der Matrix um einen beliebig kleinen Wert, dann ist das LGS wieder eindeutig lösbar. Nach diesen qualitativen Überlegungen wenden wir uns nun einer exakten Lösungsstrategie zu.

4.6 Beispiel:

- In Beispiel 4.1 ergibt sich ein quadratisches Gleichungssystem mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- In Beispiel 4.2 ergibt sich ein unterbestimmtes Gleichungssystem mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4.7 Elementare Umformungen: Es ist zweckmäßig, das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ in folgendem Schema zu notieren:

$$\begin{array}{l} \boxed{1} : \\ \boxed{2} : \\ \vdots \\ \boxed{m} : \end{array} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \vec{b} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}$$

Die Zahlen in den Kästchen enthalten fortlaufende Zeilennummern, die nur der Kennzeichnung dienen. In dem Schema sind die folgenden *elementaren Umformungen* erlaubt:

- *Zeilenvertauschung:* Zwei Zeilen

$$\boxed{i} \leftrightarrow \boxed{j}$$

dürfen vertauscht werden.

- *Spaltenvertauschung:* Zwei Spalten

$$x_i \leftrightarrow x_j$$

dürfen vertauscht werden. Dabei ist zu beachten, dass auch die Einträge in der Kopfzeile vertauscht werden.

- *Linearkombination:* Die i -te Zeile darf durch die Linearkombination

$$\boxed{i} \leftarrow p \times \boxed{i} - q \times \boxed{j}$$

ersetzt werden, sofern $p \neq 0$. Insbesondere kann man $q = 0$ wählen und so eine Skalierung der i -ten Zeile erreichen.

Durch geeignete elementare Umformungen kann man ein gegebenes LGS in eine einfachere Form überführen, deren Lösung sich unmittelbar ablesen lässt.

4.8 Beispiel [→ 4.1]: Das Schema zu dem angegebenen LGS hat die Form

$$\begin{array}{l} \boxed{1} : \\ \boxed{2} : \\ \boxed{3} : \end{array} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \vec{b} \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

Durch Linearkombination können die jeweils ersten Koeffizienten der zweiten und der dritten Zeile zu Null gemacht werden:

$$\begin{array}{l} \boxed{1} : \\ 2 \times \boxed{2} - 3 \times \boxed{1} = \boxed{4} : \\ 1 \times \boxed{3} - 2 \times \boxed{1} = \boxed{5} : \end{array} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \vec{b} \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Das Schema hat nun gestaffelte Form und kann schrittweise aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \boxed{5} &: z = -2 \\ \boxed{4} &: -y - z = 1 \Rightarrow -y + 2 = 1 \Rightarrow y = 1 \\ \boxed{1} &: 2x + y + z = 1 \Rightarrow 2x + 1 - 2 = 1 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Die Lösung ist also $\vec{x} = [1, 1, -2]^T$.

4.9 Beispiel [\rightarrow 4.2]: Das Schema zu dem angegebenen LGS hat die Form

$$\begin{array}{l} \boxed{1}: \\ \boxed{2}: \end{array} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \vec{b} \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

Durch Linearkombination kann der erste Koeffizient der zweiten Zeile zu Null gemacht werden:

$$2 \times \boxed{2} - 3 \times \boxed{1} = \boxed{3}: \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \vec{b} \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

In der letzten Zeile kann entweder der Wert von y oder der Wert von z frei gewählt werden. Wir setzen z.B. $z = t$ für eine beliebige Zahl $t \in \mathbb{R}$ und erhalten damit

$$\begin{aligned} \boxed{3} &: -y - z = 1 \Rightarrow -y - t = 1 \Rightarrow y = -1 - t \\ \boxed{1} &: 2x + y + z = 1 \Rightarrow 2x + (-1 - t) + t = 1 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also die Gerade

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.10 Beispiel [\rightarrow 4.3]: Das LGS hat hier die Form

$$\begin{array}{l} \boxed{1}: \\ \boxed{2}: \\ \boxed{3}: \end{array} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \vec{b} \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

Elimination der Einträge in der ersten Spalte mittels Linearkombination ergibt

$$\begin{array}{l} 2 \times \boxed{2} - 3 \times \boxed{1} = \boxed{4}: \\ 2 \times \boxed{3} - 1 \times \boxed{1} = \boxed{5}: \end{array} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \vec{b} \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

Elimination in der zweiten Spalte ergibt die gestaffelte Form

$$\begin{array}{r|l} & x \quad y \quad z \quad | \quad \vec{b} \\ \hline \boxed{1} & : \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad | \quad 1 \\ \boxed{4} & : \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad | \quad 1 \\ \boxed{5} + \boxed{4} = \boxed{6} & : \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 6 \end{array}$$

Aus der letzten Zeile ergibt sich der Widerspruch

$$0x + 0y + 0z = 6.$$

Es existiert also keine Lösung.

4.11 Gestaffelte Form: Wie in den Beispielen zuvor gesehen, lässt sich die Lösung eines LGS einfach bestimmen, indem man es durch elementare Umformungen auf *gestaffelte Form*³⁴ bringt:

$$\begin{array}{cccccccc|c} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_r & \tilde{x}_{r+1} & \cdots & \tilde{x}_n & \vec{b} \\ \hline \bullet & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \bullet & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bullet & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \times \end{array}$$

Dabei sind

- $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ eine Umordnung der gesuchten Komponenten x_1, \dots, x_n , die durch Spaltenvertauschungen entstanden ist,
- alle mit \bullet markierten Einträge von Null verschieden,
- alle mit $*$ markierten Einträge beliebig,
- alle mit \times markierten Einträge beliebig.

Die Existenz von Lösungen hängt von den mit \times markierten Einträgen ab:

- Wenn ein einziger dieser Einträge von Null verschieden ist, dann besitzt das LGS keine Lösung.
- Wenn es keine Nullzeilen und damit keine derartigen Einträge gibt oder wenn alle diese Einträge gleich Null sind, dann existieren Lösungen. Diese sind wie folgt gegeben: Die Werte von $\tilde{x}_{r+1}, \dots, \tilde{x}_n$ können beliebig vorgegeben werden,

$$\tilde{x}_{r+1} = t_1, \quad \dots, \quad \tilde{x}_n = t_{n-r}, \quad t_1, \dots, t_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

Davon ausgehend können der Reihe nach die Werte von $\tilde{x}_r, \tilde{x}_{r-1}, \dots, \tilde{x}_1$ bestimmt werden.

³⁴Die gestaffelte Form wird auch *Zeilenstufenform* genannt.

4.12 Gauß-Algorithmus: Der *Gauß-Algorithmus*³⁵ gibt Regeln an, mit denen ein LGS auf gestaffelte Form gebracht werden kann:

1. Suche ein Element $a_{i,j} \neq 0$. Vertausche die erste mit der j -ten Spalte und vertausche die erste mit der i -ten Zeile.
2. Ersetze alle Zeilen mit Index $i \geq 2$ durch die Linearkombination

$$a_{1,1} \times \boxed{i} - a_{i,1} \times \boxed{1}.$$

Damit haben die erste Zeile und die erste Spalte die gewünschte Form. Die erste Spalte wird im weiteren Verlauf des Algorithmus nicht mehr verändert. Auch die erste Zeile ist im Wesentlichen fertig, hier wird höchstens durch spätere Spaltenvertauschungen noch die Reihenfolge der Einträge verändert. Nun wendet man das Verfahren analog auf die zweite Zeile und die zweite Spalte an, wobei zu beachten ist, dass die erste Zeile nicht mehr für Zeilenvertauschungen verwendet werden darf. So verfährt man weiter, bis die gestaffelte Form erreicht ist.

4.13 Beispiel: Für einen reellen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das folgende LGS gegeben:

$$\begin{array}{l} \boxed{1} : \\ \boxed{2} : \\ \boxed{3} : \\ \boxed{4} : \end{array} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \vec{b} \\ \hline 1 & 1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & -4 & \alpha \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -6 \end{array}$$

Elimination der Einträge in der ersten Spalte mittels Linearkombination ergibt

$$\begin{array}{l} \boxed{1} : \\ \boxed{5} : \\ \boxed{3} : \\ \boxed{4} : \end{array} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \vec{b} \\ \hline 1 & 1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -6 \end{array}$$

Um die zweite Zeile in die gewünschte Form zu bringen, wird in den Zeilen $\boxed{5}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ ein von Null verschiedener Eintrag gesucht. Wir wählen z.B. den Eintrag $a_{3,4} = 1$. Vertauschung der zweiten und der vierten Spalte sowie der Zeilen $\boxed{5}$ und $\boxed{3}$ ergibt

$$\begin{array}{l} \boxed{1} : \\ \boxed{3} : \\ \boxed{5} : \\ \boxed{4} : \end{array} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 & \vec{b} \\ \hline 1 & -2 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -6 \end{array}$$

³⁵Carl Friedrich Gauß, 1777-1855

Nun werden die Einträge der Zeilen $\boxed{5}$, $\boxed{4}$ in der zweiten Spalte zu Null gemacht:

$$\begin{array}{l} \boxed{1} : \\ \boxed{3} : \\ \boxed{5} : \\ \boxed{6} : \end{array} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 & \vec{b} \\ \hline 1 & -2 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Damit ist die gestaffelte Form erreicht. Es ist $r = 2$, und die Umordnung der Lösungskomponenten ist hier

$$\tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_4, \quad \tilde{x}_3 = x_3, \quad \tilde{x}_4 = x_2, \quad \tilde{x}_5 = x_5.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn $\alpha \neq 1$, dann gibt es keine Lösung.
- Wenn $\alpha = 1$, dann gibt es einen Lösungsraum mit $n - r = 3$ freien Parametern,

$$x_3 = t_1, \quad x_2 = t_2, \quad x_5 = t_3.$$

Durch Einsetzen in die Zeilen $\boxed{3}$ und $\boxed{1}$ erhält man schließlich die Lösung

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}.$$

4.14 Homogenes LGS: Ein LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ heißt *homogen*, wenn die rechte Seite \vec{b} der Nullvektor ist und anderenfalls *inhomogen*. Ein homogenes LGS besitzt stets mindestens eine Lösung, nämlich den Nullvektor. Betrachtet man die gestaffelte Form für ein homogenes System, dann sind alle mit \times markierten Einträge Null. Man kann also die Werte

$$\tilde{x}_{r+1} = t_1, \quad \dots, \quad \tilde{x}_n = t_{n-r}, \quad t_1, \dots, t_{n-r} \in \mathbb{R}$$

beliebig vorgeben und erhält somit eine Lösungsmenge mit $(n - r)$ freien Parametern. Diese entsprechen genau $(n - r)$ linear unabhängigen Lösungen. Die Lösungsmenge bezeichnet man als *Kern von A* und schreibt dafür

$$\ker A := \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Der Kern von A ist ein linearer Teilraum des \mathbb{R}^n mit $\dim \ker A := n - r$ (vgl. 5.11 im nächsten Kapitel). Die Zahl r , also die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen in der gestaffelten Form wird als *Rang* von A bezeichnet und man schreibt $\text{rang } A := r$. Es gilt also die *Dimensionsformel*

$$\dim \ker A + \text{rang } A = n,$$

d.h., die Dimension des Kerns und der Rang der Matrix ergeben zusammen die Spaltenzahl.

4.15 Beispiel [→ 4.13]: Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

dann erhält man für das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ die gestaffelte Form

$$\begin{array}{l} \boxed{1} : \\ \boxed{3} : \\ \boxed{5} : \\ \boxed{6} : \end{array} \begin{array}{c} x_1 \quad x_4 \quad x_3 \quad x_2 \quad x_5 \quad \vec{b} \\ \hline 1 \quad -2 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} .$$

Hier ist wie zuvor $r = 2$ und damit

$$\text{rang } A = 2 \quad \text{und} \quad \dim \ker A = 3.$$

Mit

$$\vec{x}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_3 := \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ist der Kern von A gegeben durch

$$\ker A = \{t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + t_3\vec{x}_3, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\} = \text{Lin}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3).$$

Es ist also $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ eine Basis von $\ker A$.

4.16 Superpositionsprinzip: Sei \vec{x}_s eine Lösung des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ und $\vec{x}_h \in \ker A$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems, dann ist auch $\vec{x} := \vec{x}_s + \vec{x}_h$ eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$. Sind umgekehrt \vec{x} und \vec{x}_s Lösungen von $A\vec{x} = \vec{b}$, dann ist $\vec{x}_h := \vec{x} - \vec{x}_s \in \ker A$ eine Lösung des homogenen Systems. Man kann also jede Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ in der Form

$$\vec{x} = \vec{x}_s + \vec{x}_h, \quad \vec{x}_h \in \ker A,$$

darstellen. Mit anderen Worten gilt: Die allgemeine Lösung eines inhomogenen Systems erhält man als Summe einer speziellen Lösung dieses Systems und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Dieser grundlegende Sachverhalt wird als *Superpositionsprinzip* bezeichnet.

Beachte: Für $\vec{b} \neq \vec{0}$ ist der Lösungsraum des inhomogenen Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ kein linearer Teilraum, da der Nullvektor keine Lösung liefert.

4.17 Beispiel [→ 4.13]: Sei speziell $\alpha = 1$. Man rechnet leicht nach, dass z.B.

$$\vec{x}_s := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

das gegebene inhomogene LGS

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

löst. Zusammen mit dem in Beispiel 4.15 bestimmten Kern von A erhält man somit die Lösungsmenge

$$\vec{x} = \vec{x}_s + t_1 \vec{x}_1 + t_2 \vec{x}_2 + t_3 \vec{x}_3, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}.$$

Diese Darstellung unterscheidet sich von der in Beispiel 4.13 angegebenen Form. Die Gesamtheit der Lösungen ist aber in beiden Fällen genau dieselbe. Dies sieht man, indem man in der hier angegebenen Lösung den freien Parameter t_1 durch $t_1 + 5$ ersetzt.

4.18 Determinante: Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix. Dann kann man die eindeutige Lösbarkeit des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe der *Determinante* von A entscheiden. Die Determinante ist eine reelle Zahl, die wie folgt definiert ist: Wenn A eine (1×1) -Matrix ist, dann ist $\det A := a_{1,1}$. Anderenfalls gilt

$$\det A := \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}.$$

Dabei ist i ein beliebiger Zeilenindex und $A_{i,j}$ eine $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte aus A entsteht. Damit ist die Berechnung der Determinante auf ein Problem niedrigerer Dimension zurückgeführt und wiederholte Anwendung führt schließlich auf Determinanten von Matrizen der Dimension (1×1) . Anstelle der oben angegebenen Formel, die man auch *Entwicklung nach der i -ten Zeile* nennt, kann man auch nach der j -ten Spalte entwickeln,

$$\det A := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}.$$

Es gilt: Das quadratische LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$. Äquivalent hierzu sind die Aussagen

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim \ker A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A = n.$$

4.19 Spezialfälle:

- $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det A = ad - bc.$$

- $n = 3$: Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt³⁶

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad \det A = a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge).$$

- Wenn A eine obere oder untere *Dreiecksmatrix* ist, also

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

dann ist $\det A$ das Produkt der Diagonalelemente,

$$\det A = a_{1,1}a_{2,2} \cdots a_{n,n}.$$

4.20 Beispiel:

-

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2$$

-

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 9$$

-

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

4.21 Geometrische Bedeutung:

- Für $n = 2$ ist der Betrag von $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms, vgl. Abbildung 12.
- Für $n = 3$ gilt:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle.$$

Der Betrag ist nach 2.10 das Volumen des Spats, der von den Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} aufgespannt wird.

³⁶Für die ausmultiplizierte Form $\det A = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$ gibt es eine praktische Merkhilfe, die als *Regel von Sarrus* bekannt ist, aber Achtung: Diese Regel lässt sich nicht auf höherdimensionale Matrizen übertragen.

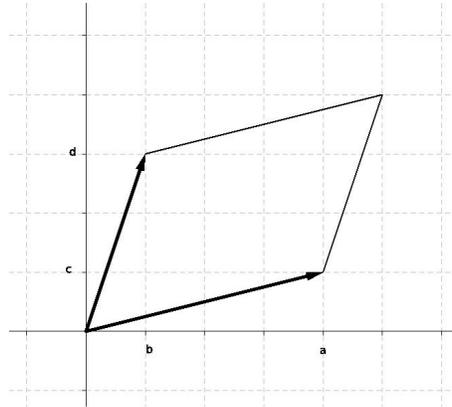


Abbildung 12: Das von den Vektoren $[a, c]^T$ und $[b, d]^T$ aufgespannte Parallelogramm

4.22 Determinante und elementare Umformungen: Die Definition der Determinante [→ 4.18] eignet sich nur für sehr kleine Dimensionen oder in Spezialfällen für die praktische Berechnung. Zweckmäßig ist es im Allgemeinen vielmehr, die Matrix durch elementare Umformungen [→ 4.7] auf gestaffelte Form zu bringen und dann die einfache Regel für obere Dreiecksmatrizen anzuwenden. Dabei ist zu beachten, dass sich durch elementare Umformungen der Wert der Determinante ändert:

- Zeilen- und Spaltenvertauschung: Entsteht die Matrix \tilde{A} durch Vertauschung von zwei Zeilen oder zwei Spalten aus der Matrix A , dann wechselt das Vorzeichen,

$$\det \tilde{A} = -\det A.$$

- Linearkombination: Entsteht die Matrix \tilde{A} aus der Matrix A , indem die i -te Zeile ersetzt wird durch die Linearkombination

$$\boxed{i} \leftarrow p \times \boxed{i} - q \times \boxed{j},$$

dann gilt

$$\det \tilde{A} = p \det A.$$

Wurde also die Matrix A durch eine Reihe elementarer Umformungen auf die gestaffelte Form B gebracht, dann berechnet man zunächst $\det B$ als Produkt der Diagonalelemente. Der gesuchte Wert $\det A$ ergibt sich, indem man $\det B$ durch alle Faktoren teilt, die für die einzelnen elementaren Umformungsschritte gelten.

5 Matrizenrechnung

Die im letzten Kapitel als rechteckige Zahlenschemata eingeführten Matrizen besitzen verschiedene Bedeutungen, die weit über die von Koeffizienten in einem LGS hinausgehen. Beispielsweise lassen sich mithilfe von Matrizen lineare Abbildungen wie Drehungen oder Spiegelungen beschreiben, genauso aber auch die Stromflüsse in einer elektrischen Schaltung oder die Lastverhältnisse in einem mechanischen Tragwerk. In diesem Kapitel werden wir verschiedene Rechenoperationen für Matrizen einführen und genauer untersuchen.

5.1 Transponierter Vektor: Die Notation $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ bezieht sich per Definition³⁷ immer auf einen stehenden Vektor,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Der *transponierte Vektor* \vec{x}^T ist das zugehörige liegende Zahlenschema

$$\vec{x}^T := [x_1, x_2, \dots, x_n],$$

das man auch als *liegenden Vektor* bezeichnet. Die Transposition eines liegenden Vektors ergibt wieder einen stehenden Vektor,

$$\vec{x} = (\vec{x}^T)^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T.$$

5.2 Matrix: Ein Zahlenschema der Form

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

heißt $(m \times n)$ -*Matrix* oder auch *Matrix der Dimension* $m \times n$. Im Fall $n = m$ heißt die Matrix *quadratisch*. Die Einträge $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ heißen *Elemente* der Matrix. Analog zur Schreibweise $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ für Vektoren schreiben wir $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ für $(m \times n)$ -Matrizen. Die *Spalten* $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ der Matrix A sind Vektoren in \mathbb{R}^m ,

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n], \quad \vec{a}_j := \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}.$$

Die *Zeilen* a^1, \dots, a^m der Matrix A sind liegende Vektoren in \mathbb{R}^n ,

$$A = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}, \quad a^i := [a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}].$$

³⁷Diese Definition bezieht sich auf das vorliegende Skript und ist keineswegs allgemeingültig.

Aus den liegenden Vektoren a^i erhalten wir durch Transposition Vektoren im eigentlichen Sinne, zu unterscheiden am Vektorpfeil,

$$\vec{a}^i := (a^i)^T = \begin{bmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{bmatrix}.$$

5.3 Beispiel: Für die (3×4) -Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ist

$$a_{3,2} = 7, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a^2 = [1, 5, 2, 0], \quad \vec{a}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.4 Addition und Skalarmultiplikation: Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zwei Matrizen gleicher Dimension. Dann gilt Folgendes:

- *Addition, Subtraktion:* $C := A \pm B$ ist eine $(m \times n)$ -Matrix mit Elementen

$$c_{i,j} = a_{i,j} \pm b_{i,j}.$$

- *Skalarmultiplikation:* Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $C := \alpha A$ eine $(m \times n)$ -Matrix mit Elementen

$$c_{i,j} = \alpha a_{i,j}.$$

Insbesondere ist $1A = A$, $(-1)A = -A$ und

$$0A = 0_{m,n} := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

die $(m \times n)$ -Nullmatrix. Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Dimension die Nullmatrix hat, schreiben wir anstelle von $0_{m,n}$ auch einfach 0.

- *Distributivgesetz:* Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

Die Matrizen einer gegebenen Dimension bilden also einen Vektorraum [→ 2.1].

5.5 Matrizenprodukt: Sei A eine $(m \times n)$ -Matrix und B eine $(n \times k)$ -Matrix. Dann ist das *Matrizenprodukt* $C := A \cdot B$ eine $(m \times k)$ -Matrix, die durch

$$c_{i,j} = \langle \vec{a}^i, \vec{b}_j \rangle = \sum_{s=1}^n a_{i,s} b_{s,j}$$

definiert ist. Das Element $c_{i,j}$ ist also das Skalarprodukt der i -ten Zeile von A mit der j -ten Spalte von B . Insbesondere macht das Matrizenprodukt nur dann Sinn, wenn die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt, da anderenfalls das Skalarprodukt nicht erklärt ist. Der Mal-Punkt wird meist weggelassen, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, also $AB = A \cdot B$.

5.6 Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ist

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 14 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B \cdot B = B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -10 & 4 & 7 \\ -15 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die Produkte $A \cdot A$ und $B \cdot A$ sind nicht definiert.

5.7 Vektoren als spezielle Matrizen: Ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kann als $(n \times 1)$ -Matrix aufgefasst werden, also als Matrix mit nur einer Spalte. Genauso kann der liegende Vektor \vec{x}^T als $(1 \times n)$ -Matrix aufgefasst werden, also als Matrix mit nur einer Zeile. In diesem Sinne ist für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ das Matrizenprodukt $\vec{b} = A \cdot \vec{x}$ ein Vektor in \mathbb{R}^m mit Komponenten

$$b_i = \langle \vec{a}^i, \vec{x} \rangle = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

Man kann den Vektor \vec{b} auch als Linearkombination der Spalten von A deuten,

$$\vec{b} = A\vec{x} = \sum_{j=1}^n \vec{a}_j x_j.$$

Analog ist für $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ das Matrizenprodukt $\vec{c}^T = \vec{y}^T A$ ein liegender Vektor mit Komponenten

$$c_j = \langle \vec{y}, \vec{a}_j \rangle,$$

der auch als Linearkombination der Zeilen von A gedeutet werden kann,

$$\vec{c}^T = \vec{y}^T A = \sum_{i=1}^m y_i \vec{a}^i.$$

Sind $\vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren gleicher Dimension, dann ist das Matrizenprodukt

$$\vec{x}^T \cdot \vec{z} = \sum_{j=1}^n x_j z_j = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$$

gerade das Skalarprodukt der beiden Vektoren. Für beliebige Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ ist aber auch das Produkt

$$B = \vec{x} \cdot \vec{y}^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_m \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_m \end{bmatrix}$$

definiert. *Merke:*

- Liegender Vektor mal stehender Vektor ergibt eine reelle Zahl.
- Stehender Vektor mal liegender Vektor ergibt eine Matrix.

5.8 Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ist

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}^T A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}^T \vec{z} = 5, \quad \vec{x} \vec{y}^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Meist werden die Komponenten liegender Vektoren durch Kommata und Matrizenelemente durch Zwischenraum getrennt. Da einzeilige Matrizen aber liegenden Vektoren entsprechen, werden hier beide Varianten verwendet. Man schreibt also auch $\vec{y}^T A = [2, 4, 5]$. Dies entspricht im Übrigen den Konventionen der Programmiersprache MATLAB, bei der Matrizenelemente einer Zeile entweder durch ein Leerzeichen oder durch ein Komma getrennt werden können.

5.9 Rechenregeln:

- Für die Matrizenmultiplikation und -addition gilt das *Distributivgesetz*, d.h.,

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Insbesondere gilt $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$.

- Es gilt das *Assoziativgesetz*, d.h.,

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Nachdem die Reihenfolge der Berechnung beliebig ist, schreibt man für das Produkt auch kurz ABC . Speziell für die Multiplikation mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$.

- Das *Kommutativgesetz* gilt dagegen *nicht*, d.h., im Allgemeinen ist

$$AB \neq BA$$

und genauso

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

- Aus $AB = 0$ folgt *nicht* $A = 0$ oder $B = 0$.

5.10 Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ist

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

5.11 LGS in Matrizenschreibweise: Die Definition der Matrizenmultiplikation erklärt nun insbesondere die im vorigen Kapitel eingeführte Schreibweise für lineare Gleichungssysteme: Der i -te Eintrag von $A\vec{x} = \vec{b}$ liefert

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

und somit gerade die i -te Zeile des in 4.4 angegebenen linearen Gleichungssystems. Es lässt sich nun mit Hilfe der Rechenregeln für Matrizen leicht überprüfen, dass der Lösungsraum $\ker A$ des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ tatsächlich ein linearer Teilraum von \mathbb{R}^n ist: Für $\vec{x}, \vec{y} \in \ker A$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $A\vec{x} = A\vec{y} = \vec{0}$, also $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ und $A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) = \vec{0}$. Also sind $\vec{x} + \vec{y}$ und $\lambda\vec{x}$ ebenfalls in $\ker A$ enthalten. Genauso lässt sich das Superpositionsprinzip [\rightarrow 4.16] leicht nachrechnen.

5.12 Transposition: Die *Transponierte* einer $(m \times n)$ -Matrix A ist eine $(n \times m)$ -Matrix, die mit A^T bezeichnet wird. Die Zeilen von A^T sind die transponierten Spalten von A ,

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n] \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{bmatrix}.$$

Es gilt

- $(A^T)^T = A$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ und $(AB)^T = B^T A^T$.
- $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = (A\vec{x})^T \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \cdot (A^T \vec{y}) = \langle \vec{x}, A^T \vec{y} \rangle$.

5.13 Symmetrische Matrix: Eine quadratische Matrix A heißt *symmetrisch*, wenn $A^T = A$. Es gilt

- Die Summe symmetrischer Matrizen ist symmetrisch.
- Das Produkt symmetrischer Matrizen ist im Allgemeinen *nicht* symmetrisch.
- Für beliebiges A ist $A^T A$ und AA^T symmetrisch.
- Für beliebiges quadratisches A ist $A^T + A$ symmetrisch, .

5.14 Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T + A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Insbesondere sind $A^T + A$ und $A^T A$ symmetrisch.**5.15 Determinante** [→ 4.18]: Seien A und B zwei $(n \times n)$ -Matrizen, dann gilt:

- *Vielfaches:*

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Achtung: Man beachte den Exponenten von α .

- *Produkt:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

- *Transponierte:*

$$\det(A^T) = \det A$$

5.16 Matrix-Gleichungssystem: Ein LGS der Form

$$AX = B$$

heißt auch *Matrix-Gleichungssystem*. Dabei sind $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ gegeben und $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ gesucht. Die Bestimmung der Lösung X erfolgt vollkommen analog zum Lösen linearer Gleichungssystem gemäß Kapitel 4, indem A auf gestaffelte Form gebracht wird. Nun sind auf der rechten Seite aber alle Spalten von B umzuformen, und die Kopfzeile des Lösungsschemas enthält die Zeilenvektoren von X . Die Kriterien für die Lösbarkeit sind vollkommen analog. Insbesondere ist auch ein Matrix-Gleichungssystem mit einer quadratischen Matrix A genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$.

5.17 Beispiel: Gegeben sei das Matrix-Gleichungssystem $AX = B$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung X ist also eine (3×2) -Matrix. Für das Schema

	x^1	x^2	x^3	\vec{b}_1	\vec{b}_2
1	2	0	1	2	7
2	1	2	1	3	1
3	2	1	2	3	5

liefert der Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{c|ccc|cc}
 & x^1 & x^2 & x^3 & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \\
 \hline
 \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 2 & 7 \\
 \boxed{4} & 0 & 4 & 1 & 4 & -5 \\
 \boxed{5} & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
 \hline
 \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 2 & 7 \\
 \boxed{4} & 0 & 4 & 1 & 4 & -5 \\
 \boxed{6} & 0 & 0 & 3 & 0 & -3
 \end{array}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{array}{l}
 \boxed{6} : 3x^3 = [0, -3] \Rightarrow x^3 = [0, -1] \\
 \boxed{4} : x^2 + x^3 = [4, -5] \Rightarrow x^2 = [1, -1] \\
 \boxed{1} : 2x^1 + x^3 = [2, 7] \Rightarrow x^1 = [1, 4]
 \end{array}$$

und schließlich die Lösung

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5.18 Einheitsmatrix: Die aus den Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ [\rightarrow 2.29] gebildete $(n \times n)$ -Matrix

$$E_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$$

heißt *Einheitsmatrix*. Wenn die Dimension der Einheitsmatrix aus dem Zusammenhang klar ist, schreiben wir für E_n auch kurz E . Für eine beliebige $(m \times n)$ -Matrix A gilt

$$AE_n = E_m A = A.$$

Für die Determinante gilt [\rightarrow 4.19] $\det E = 1$.

5.19 Inverse Matrix: Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix mit $\det A \neq 0$. Dann ist die Lösung des Matrix-Gleichungssystems

$$AX = E$$

eindeutig bestimmt. Sie wird *inverse Matrix* oder auch kurz *Inverse* von A genannt und mit A^{-1} bezeichnet. Matrizen mit $\det A = 0$ oder nicht-quadratische Matrizen besitzen keine Inverse. Es gilt

- $AA^{-1} = A^{-1}A = E$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

- $A^{-T} := (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, da $1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$ [\rightarrow 5.15].

Sei $AX = B$ ein beliebiges Gleichungssystem, dann erhält man nach Multiplikation von links mit A^{-1} die Lösung X ,

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Die Berechnung der Inversen lohnt sich immer dann, wenn wiederholt Gleichungssysteme mit derselben Matrix A und verschiedenen rechten Seiten gelöst werden müssen.

5.20 Beispiel: Für $n = 2$ gilt

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Im Nenner steht gerade $\det A = ad - bc$, sodass die angegebene Inverse für $\det A \neq 0$ definiert ist. Es lohnt sich übrigens, diese Formel auswendig zu lernen, da sie häufig gebraucht wird.

5.21 Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

liefert der Gauß-Algorithmus

	x^1	x^2	x^3	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
1	1	2	1	1	0	0
2	1	1	2	0	1	0
3	2	1	1	0	0	1
4	0	-1	1	-1	1	0
5	0	-3	-1	-2	0	1
6	0	0	-4	1	-3	1

und damit

$$A^{-1} = X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

5.22 Matrix-Potenz und -Polynom: Analog zu reellen Potenzen [\rightarrow 1.24] definiert man für $m \in \mathbb{N}_0$ die *Matrix-Potenz*

$$A^m := \prod_{k=1}^m A = \begin{cases} \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ Faktoren}} & \text{falls } m \geq 1 \\ E & \text{falls } m = 0. \end{cases}$$

Falls A invertierbar ist, setzt man weiterhin

$$A^{-m} := (A^{-1})^m.$$

Analog zu reellen Polynomen [→ 1.25] ist ein *Matrix-Polynom* ein Ausdruck der Form

$$p(A) = \sum_{k=0}^m a_k A^k.$$

5.23 Orthogonale Matrix: Eine $(n \times n)$ -Matrix A heißt *orthogonal*, wenn

$$A^T A = E.$$

Für orthogonale Matrizen A und B gilt:

- $A^{-1} = A^T$.
- $AA^T = E$.
- A^T ist orthogonal.
- AB ist orthogonal.
- $\det A = \pm 1$, da $1 = \det E = \det(AA^T) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2$.

Eine Matrix ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spaltenvektoren eine *Orthonormalbasis (ONB)* [→ 2.35] bilden, d.h., wenn $\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = \delta_{i,j}$. Die Spaltenvektoren bilden genau dann eine ONB, wenn auch die Zeilenvektoren eine ONB bilden, d.h., wenn $\langle \vec{a}^i, \vec{a}^j \rangle = \delta_{i,j}$.

5.24 Beispiel: Für beliebige Winkel φ ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

orthogonal, denn [→ 1.28]

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.25 Beispiel: Die Matrix

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ist orthogonal.

5.26 Cramer'sche Regel: Die *Cramer'sche Regel*³⁸ ist eine spezielle Methode zur Berechnung von Lösungskomponenten quadratischer linearer Gleichungssysteme mittels des Quotienten zweier Determinanten. Sie ist gelegentlich nützlich, insbesondere dann, wenn es sich um kleine parameterabhängige Systeme handelt und man an expliziten Formeln für einzelne Lösungskomponenten interessiert ist. Für größere Matrizen ist sie meist ineffizient.

³⁸Gabriel Cramer, 1704–1752

Wir betrachten also nochmals das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit einer $(n \times n)$ -Matrix A . Es gilt stets $A\vec{e}_2 = \vec{a}^2, \dots, A\vec{e}_n = \vec{a}^n$. Also können wir schreiben

$$A[\vec{x}, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n] = A_1 \quad \text{wobei} \quad A_1 := [\vec{b}, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^n].$$

Die $(n \times n)$ -Matrix A_1 auf der rechten Seite entsteht also dadurch, dass man die erste Spalte von A durch \vec{b} ersetzt. Der zweite Faktor auf der linken Seite ist ebenfalls eine $(n \times n)$ -Matrix, die untere Dreiecksform hat, siehe 4.19. Ihre Determinante ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente, also x_1 . Man erhält schließlich für die erste Lösungskomponente mit Hilfe der Produktregel die Formel

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},$$

sofern $\det A \neq 0$. Bezeichne allgemein A_k die $(n \times n)$ -Matrix, die entsteht, wenn man die k -te Spalte von A durch \vec{b} ersetzt, dann gilt analog

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}.$$

6 Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen sind spezielle Funktionen zwischen Vektorräumen, die besonders einfache Eigenschaften haben und sich deshalb sehr gut untersuchen lassen. Viele geometrische Prozesse, wie Drehungen, Spiegelungen oder Streckungen, sind lineare Abbildungen. Dasselbe gilt aber beispielsweise auch für die Abbildung, die einem Polynom p seine Ableitung p' zuweist. Auch viele Prozesse in den Anwendungen werden durch lineare Abbildungen beschrieben, auch wenn die Realität tatsächlich meist komplizierter ist und es sich dabei also nur um Näherungen handelt. Beispielsweise beschreibt das Hookesche Gesetz einen linearen Zusammenhang zwischen einwirkender Kraft und Federdehnung. Dies ist sehr einfach, aber speziell bei großen Kräften offensichtlich falsch (man denke an eine Bowlingkugel, die an einer Kugelschreiberfeder hängt). Dennoch sind lineare Abbildungen von fundamentaler Bedeutung für Theorie und Anwendungen. Wir werden diese nun eingehend untersuchen und uns dabei der soeben gewonnenen Methoden der Matrizenrechnung bedienen.

6.1 Lineare Abbildung: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *lineare Abbildung* von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m , wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\alpha\vec{x}) &= \alpha f(\vec{x}) \\ f(\vec{x} + \vec{y}) &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}). \end{aligned}$$

Im Fall $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nennen wir f auch eine lineare Abbildung *in* \mathbb{R}^n .

6.2 Beispiel: Für einen gegebenen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$$

linear.

6.3 Beispiel: Für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

linear.

6.4 Matrixform: Seien $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ die Einheitsvektoren in \mathbb{R}^n dann kann jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ in der Form

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$$

dargestellt werden [\rightarrow 2.34]. Für den Funktionswert der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ an der Stelle \vec{x} gilt dann

$$f(\vec{x}) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(\vec{e}_j).$$

Er ist also durch die Funktionswerte $f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)$ der Einheitsvektoren vollständig bestimmt. Verwenden wir diese Funktionswerte als Spaltenvektoren einer $(m \times n)$ -Matrix A , d.h.,

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n], \quad \vec{a}_j := f(\vec{e}_j),$$

dann gilt

$$A\vec{x} = A \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^n x_j A\vec{e}_j = \sum_{j=1}^n x_j \vec{a}_j = \sum_{j=1}^n x_j f(\vec{e}_j) = f(\vec{x}).$$

Eine lineare Abbildung f kann also stets in der Matrixform $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ geschrieben werden. Die Matrix-Abbildungen gemäß Beispiel 6.3 umfassen also tatsächlich die Menge *aller* linearen Abbildungen.

6.5 Beispiel [→ 6.2]: Sei $\vec{a} = [a_1, \dots, a_n]^T$, dann ist $\langle \vec{a}, \vec{e}_j \rangle = a_j$. Die Matrix A ist also durch den Zeilenvektor

$$A = [f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)] = [a_1, \dots, a_n] = \vec{a}^T$$

gegeben, $f(\vec{x}) = \vec{a}^T \vec{x}$.

6.6 Summe und Verkettung:

- Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sowie $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ und $g(\vec{y}) = B\vec{y}$ die zugehörigen linearen Abbildungen. Dann ist die *Summenabbildung* $h := f + g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben durch

$$h(\vec{y}) = (f + g)(\vec{y}) = f(\vec{y}) + g(\vec{y}) = A\vec{y} + B\vec{y} = (A + B)\vec{y}.$$

Die Matrizenaddition entspricht also der Summe der zugehörigen linearen Abbildungen.

- Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ sowie $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ und $g(\vec{y}) = B\vec{y}$. Dann ist die *verkettete Abbildung* $h := f \circ g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben durch

$$h(\vec{y}) = f(g(\vec{y})) = f(B\vec{y}) = AB\vec{y}.$$

Die Matrizenmultiplikation entspricht also der Verkettung der zugehörigen linearen Abbildungen.

6.7 Fixpunkt: Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix. Ein Punkt $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Fixpunkt* von A , wenn $A\vec{v} = \vec{v}$. Die Menge aller Fixpunkte ist ein linearer Teilraum von \mathbb{R}^n . Er wird mit

$$\text{fix } A := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : A\vec{v} = \vec{v}\}$$

bezeichnet. Zur Bestimmung von Fixpunkten schreibt man

$$A\vec{v} = \vec{v} \quad \Rightarrow \quad A\vec{v} = E\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (A - E)\vec{v} = \vec{0}.$$

Es gilt also

$$\text{fix } A = \ker(A - E).$$

6.8 Beispiel [\rightarrow 5.25]: Es gilt

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A - E = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

und die Lösung der Fixpunktgleichung $(A - E)\vec{v} = \vec{0}$ ist die Fixpunktgerade

$$\text{fix } A = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

6.9 Spezielle lineare Abbildungen in \mathbb{R}^n :

- Die *Streckung* $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ mit Streckfaktor $\lambda \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch $A = \lambda E$. Insbesondere erhält man für $\lambda = 1$ die identische Abbildung $f(\vec{x}) = \vec{x}$, für $\lambda = 0$ die Nullabbildung $f(\vec{x}) = \vec{0}$ und für $\lambda = -1$ die Punktspiegelung $f(\vec{x}) = -\vec{x}$.
- Eine lineare Abbildung $f(\vec{x}) = R\vec{x}$ heißt *Drehung*, wenn R orthogonal ist und $\det R = 1$ gilt. Drehungen sind *normerhaltend*, d.h., $\|R\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$, denn

$$\|R\vec{x}\|^2 = (R\vec{x})^T \cdot (R\vec{x}) = \vec{x}^T (R^T R) \vec{x} = \vec{x}^T E \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} = \|\vec{x}\|^2.$$

- In \mathbb{R}^2 ist eine Drehung um den Ursprung um den Winkel φ gegeben durch [\rightarrow 5.24]

$$R_\varphi := \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

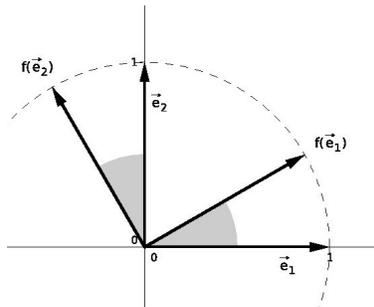


Abbildung 13: Eine Drehung um den Winkel φ (grau schattiert) in \mathbb{R}^2

- In \mathbb{R}^3 ist eine Drehung um die z -Achse um den Winkel φ gegeben durch

$$R_\varphi^z := \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für allgemeine Drehmatrizen in \mathbb{R}^3 ist die Drehachse durch die Fixpunktgerade gegeben. Der Drehwinkel φ bestimmt sich gemäß der Formel

$$2 \cos \varphi + 1 = \text{spur } R,$$

wobei $\text{spur } R := r_{1,1} + r_{2,2} + r_{3,3}$ die Summe der Diagonalelemente von R ist.

- Eine lineare Abbildung $f(\vec{x}) = P\vec{x}$ heißt *Projektion*, wenn

$$P^2 = P$$

gilt. In diesem Fall ist jeder Bildpunkt $\vec{v} = P\vec{x}$ ein Fixpunkt von P , denn

$$P\vec{v} = P(P\vec{x}) = P^2\vec{x} = P\vec{x} = \vec{v}.$$

Das heißt, jeder Punkt \vec{x} wird durch einmalige Anwendung der Abbildung f auf die Menge $\text{fix } P$ abgebildet und bleibt bei weiteren Anwendungen der Abbildung dann unverändert. Die Projektion heißt *senkrecht*, wenn

$$\langle P\vec{x} - \vec{x}, P\vec{x} \rangle = 0$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Eine Projektion ist genau dann senkrecht, wenn P symmetrisch ist.

- Die senkrechte Projektion auf die Ursprungsgerade $g : \vec{x} = t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, ist durch

$$P_g := \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}^T}{\|\vec{v}\|^2}$$

gegeben. Insbesondere ist $d(\vec{x}, g) = \|P_g\vec{x} - \vec{x}\|$ der Abstand des Punktes \vec{x} von der Geraden g [→ 2.13].

- Sei $M : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = 0$ eine implizit gegebene Menge, also z.B. eine Ursprungsgerade in \mathbb{R}^2 oder eine Ursprungsebene in \mathbb{R}^3 . Die senkrechte Projektion auf M ist durch

$$P_M := E - \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2}$$

gegeben. Insbesondere ist $d(\vec{x}, M) = \|P_M\vec{x} - \vec{x}\|$ der Abstand des Punktes \vec{x} von der Menge M [→ 2.16], [→ 2.22].

- Eine lineare Abbildung $g(\vec{x}) = S\vec{x}$ heißt *Spiegelung*, wenn

$$S^2 = E$$

gilt. Zweimaliges Spiegeln führt also auf den Ausgangspunkt zurück. Wenn P eine Projektion ist, dann ist

$$S := 2P - E$$

eine Spiegelung an der Menge $\text{fix } P = \text{fix } S$, denn

$$S^2 = (2P - E) \cdot (2P - E) = 4P^2 - 2PE - 2EP + E^2 = E$$

und

$$S\vec{v} = \vec{v} \Leftrightarrow 2P\vec{v} - \vec{v} = \vec{v} \Leftrightarrow P\vec{v} = \vec{v}.$$

Umgekehrt ist für eine Spiegelung S die Matrix

$$P := \frac{1}{2}(S + E)$$

eine Projektion, denn

$$P^2 = \frac{1}{4}(S + E) \cdot (S + E) = \frac{1}{4}(S^2 + SE + ES + E^2) = \frac{1}{4}(2S + 2E) = P.$$

- Die senkrechte Spiegelung an der Geraden $g : \vec{x} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$, ist gegeben durch

$$S_g := 2P_g - E = 2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}^T}{\|\vec{v}\|^2} - E.$$

- Die senkrechte Spiegelung an der Menge $M : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = 0$ ist gegeben durch

$$S_M := 2P_M - E = E - 2 \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}^T}{\|\vec{n}\|^2}.$$

Diese Abbildung wird auch *Householder-Transformation*³⁹ genannt.

6.10 Beispiel [\rightarrow 5.25]: Die Matrix

$$R = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ist orthogonal und es gilt $\det R = 1$. Also ist R eine Drehung. Gemäß Beispiel 6.8 ist die Drehgerade gegeben durch $g : \vec{x} = t[1, 1, 1]^T, t \in \mathbb{R}$, und für den Drehwinkel gilt

$$2 \cos \varphi + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm\pi/3.$$

Das Vorzeichen des Drehwinkels hängt davon ab, aus welcher Richtung man auf die Drehachse schaut.

6.11 Beispiel: Sei $\vec{v} = [3, 1]^T$. Die senkrechte Projektion auf die Gerade $g : \vec{x} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$, ist

$$P_g = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

und die senkrechte Spiegelung an der Geraden ist

$$S_g = 2P_g - E = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

6.12 Beispiel: Sei $\vec{n} = [1, 2, -1]^T$. Die senkrechte Projektion auf die Ebene $M : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = 0$ ist

$$P_M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

und die senkrechte Spiegelung an der Ebene ist

$$S_M = 2P_M - E = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

³⁹Alston Scott Householder, 1904–1993

6.13 Abbildungsmatrix bezüglich beliebiger Basis: Sei $V = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ eine Basis von \mathbb{R}^n und $\vec{x}_V = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$ der V -Koordinatenvektor von \vec{x} , d.h. $[\rightarrow 2.33]$

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n.$$

Für eine lineare Abbildung f in \mathbb{R}^n schreiben wir die V -Koordinatenvektoren der Funktionswerte $f(\vec{v}_j)$ als Spalten in eine Matrix und erhalten

$$A_V = [f(\vec{v}_1)_V, f(\vec{v}_2)_V, \dots, f(\vec{v}_n)_V] \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Die Matrix A_V heißt *Abbildungsmatrix* von f bezüglich V . Im Fall der Basis aus Einheitsvektoren $\vec{v}_i = \vec{e}_i$ ist $V = E$ und $A_E = A$ die bekannte Matrix aus $[\rightarrow 6.4]$.

Die Abbildungsmatrix A_V und f stehen in folgendem Zusammenhang:

$$f(\vec{x})_V = A_V \vec{x}_V.$$

Wenn also \vec{x}_V der Koordinatenvektor von \vec{x} bezüglich V ist, so ist $A_V \vec{x}_V$ der Koordinatenvektor von $f(\vec{x})$ bezüglich V .

Ebenso wie die Matrix A beschreibt auch die Matrix A_V die Abbildung f eindeutig. Durch geeignete Wahl der Basis $V = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ kann man erreichen, dass die Matrix A_V leicht berechnet werden kann oder eine besonders einfache Gestalt besitzt.

6.14 Beispiel: Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibe die Drehung um $\varphi = \frac{\pi}{3}$ um die Achse $t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$, wobei $\vec{a} = [-1, 1, 1]^T$. Die Matrix zu f bezüglich der Standardbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des \mathbb{R}^3 ist $A = [f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)]$. Allerdings sind die Vektoren $f(\vec{e}_i)$ nicht leicht zu berechnen.

Eine passendere Basis findet sich wie folgt: Wähle \vec{v}_1 auf der Drehachse, wähle \vec{v}_2 orthogonal zu \vec{v}_1 und bestimme schließlich \vec{v}_3 als Kreuzprodukt von \vec{v}_1 und \vec{v}_2 . Normiert man diese Vektoren, dann erhält man die ONB $V = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$. Konkret liefert dieses Vorgehen

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

wobei der Vektor \vec{v}_2 natürlich nicht eindeutig festgelegt ist. Es gilt $f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$ und $[\rightarrow 6.9]$

$$f(\vec{v}_2) = \cos(\varphi)\vec{v}_2 + \sin(\varphi)\vec{v}_3 = \frac{1}{2}\vec{v}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v}_3$$

$$f(\vec{v}_3) = -\sin(\varphi)\vec{v}_2 + \cos(\varphi)\vec{v}_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3.$$

Die Koordinaten von $f(\vec{v}_j)$ bezüglich der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ können hier abgelesen werden. Sie ergeben die Spalten von A_V :

$$A_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Für einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ lässt sich $f(\vec{x})$ nun in folgenden Schritten berechnen: Berechne zuerst die V -Koordinaten \vec{x}_V von \vec{x} . Berechne dann den Bildvektor $\vec{y}_V = A_V \vec{x}_V$. Dies ist der V -Koordinatenvektor von $\vec{y} = f(\vec{x})$, aus dem dann \vec{y} berechnet werden kann. Dieses Vorgehen wollen wir im nächsten Abschnitt genauer untersuchen.

6.15 Basiswechsel: Sei $V = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ eine Basis von \mathbb{R}^n . Wir haben diese Schreibweise schon in 2.33 verwendet, erkennen nun aber V als die $(n \times n)$ -Matrix, deren Spalten durch die Vektoren \vec{v}_j gegeben sind. Es gilt mit eindeutig bestimmten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = V \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = V \vec{x}_V.$$

Die Matrix V rechnet also V -Koordinaten in Standardkoordinaten um. Da V aufgrund der Basiseigenschaft invertierbar ist, kann man diesen Prozess auch umkehren: Man erhält die V -Koordinaten aus den Standardkoordinaten durch Multiplikation mit der Inversen,

$$\vec{x} = V \vec{x}_V \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}_V = V^{-1} \vec{x}.$$

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, die in Standardkoordinaten durch die Matrix A gegeben ist, also $\vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x}$. Dann gilt für die V -Koordinaten des Bildpunkts

$$\vec{y}_V = V^{-1} \vec{y} = V^{-1} A \vec{x} = V^{-1} A V \vec{x}_V.$$

In V -Koordinaten wird die Abbildung f deshalb beschrieben durch

$$\vec{y}_V = A_V \vec{x}_V, \quad A_V = V^{-1} A V.$$

Kennt man umgekehrt die Matrix A_V , so erhält man die Darstellung von f bezüglich der Standardbasis gemäß

$$\vec{y} = A \vec{x}, \quad A = V A_V V^{-1}.$$

Einfacher wird die Umrechnung im Fall einer Orthonormalbasis [\rightarrow 5.23]: Bilden $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ eine ONB, dann ist die Matrix V orthogonal und somit $V^{-1} = V^T$. Es gilt dann

$$A = V A_V V^T \quad \text{bzw.} \quad A_V = V^T A V.$$

6.16 Beispiel [\rightarrow 6.14]: Es gilt

$$V = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Da $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine ONB-Basis bilden, ist V orthogonal. Also

$$\begin{aligned} A = V A_V V^T &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6.17 Beispiel [\rightarrow 6.11]: Sei $\vec{v}_1 = [3, 1]^T$ und $\vec{v}_2 = [-2, 1]^T$, dann ist

$$V = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die V -Koordinaten des Vektors $\vec{x} = [4, 3]^T$ sind gegeben durch

$$\vec{x}_V = V^{-1}\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Man könnte auch schreiben $[4, 3]_V^T = [2, 1]^T$. Die Projektion P_g und die Spiegelung S_g haben in V -Koordinaten die Form

$$(P_g)_V = V^{-1}P_gV = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (S_g)_V = V^{-1}S_gV = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Für die Bildpunkte $\vec{y} = P_g\vec{x}$ und $\vec{z} = S_g\vec{x}$ erhält man die V -Koordinaten $\vec{y}_V = (P_g)_V\vec{x}_V = [3/2, 0]^T$ und $\vec{z}_V = (S_g)_V\vec{x}_V = [1, -1]^T$.

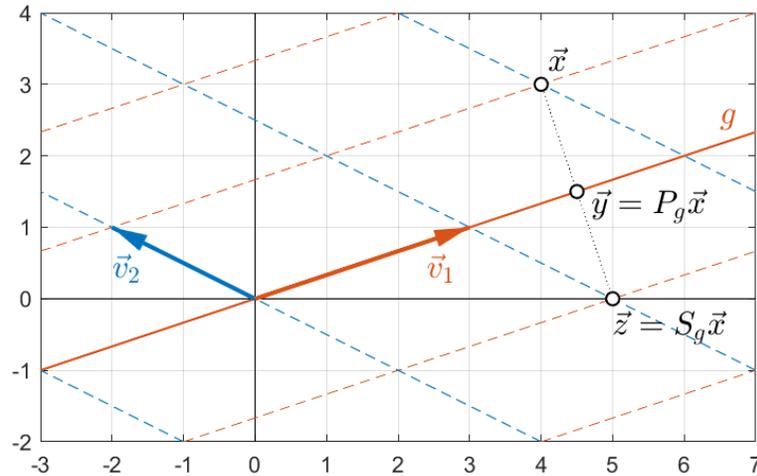


Abbildung 14: Projektion P_g und Spiegelung S_g im V -Koordinatensystem.

6.18 Beispiel [\rightarrow 6.10]: Die Matrix

$$V = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ist orthogonal, $VV^T = E$. Die Drehmatrix R geht durch Basiswechsel über in

$$R_V = V^T R V = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit $\varphi = -\pi/3$ ist dies gerade die in 6.9 angegebene Form einer Drehung um die dritte Koordinatenachse. Diese ist hier durch den dritten Basisvektor $\vec{v}_3 = \sqrt{3}/3 [1, 1, 1]^T$ gegeben und stimmt also mit der zuvor bestimmten Drehachse überein.

6.19 Beispiel [\rightarrow 6.18]: Sei V wie zuvor und

$$f(\vec{x}) := \vec{x} \times [1, 1, 1]^T.$$

Die Matrixform von f ist

$$f(\vec{x}) = [f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)]\vec{x} = A\vec{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

und man erhält

$$A_V = V^T A V = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix lässt sich in der Form $A_V = A_3 \cdot A_2 \cdot A_1$ in Faktoren zerlegen, wobei

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 := \sqrt{3}E.$$

Die Abbildung A_1 ist eine Projektion in die $\vec{v}_1\vec{v}_2$ -Ebene, A_2 ist eine Drehung um die \vec{v}_3 -Achse um den Winkel $\pm\pi/2$, und A_3 ist eine Streckung um den Faktor $\sqrt{3}$. Die Abbildung f lässt sich also als Verkettung einer Projektion, einer Drehung und einer Streckung deuten.

7 Eigenwerte und -vektoren

Eigenwerte und -vektoren sind charakteristische Größen, die man quadratischen Matrizen zuweisen kann, um sie besser zu verstehen. Sie verallgemeinern das Prinzip der Fixpunkte in dem Sinne, dass Eigenvektoren durch die gegebene Matrix nicht notwendig auf sich selbst, sondern auf Vielfache von sich abgebildet werden. Eigenvektoren lassen sich beispielsweise dazu verwenden, um Koordinatensysteme zu definieren, bezüglich derer lineare Abbildungen eine besonders einfache Gestalt haben oder um Potenzen von Matrizen effizient zu berechnen. In technischen Anwendungen entsprechen Eigenwerte zum Beispiel Resonanzfrequenzen von elektrischen Schaltungen oder schwingenden mechanischen Systemen.

7.1 Fixgeraden: Eine Ursprungsgerade $g : \vec{x} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$, heißt *Fixgerade* der linearen Abbildung $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, wenn jeder Punkt auf g wieder auf einen Punkt auf g abgebildet wird. Man beachte, dass anders als bei einer *Fixpunktgeraden* hier Punkte auf der Geraden nicht auf sich selbst abgebildet werden müssen. Betrachten wir das Bild $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ des Richtungsvektors. Da es wieder auf der Geraden g liegt, muss es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, sodass

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Wenn dies der Fall ist, dann gilt natürlich für jeden anderen Punkt auf der Geraden die analoge Beziehung $A(t\vec{v}) = \lambda(t\vec{v})$. Der Faktor λ gibt also das Streckverhältnis zwischen Bild und Urbild für Punkte auf der Fixgeraden an. Insbesondere handelt es sich um eine Fixpunktgerade, wenn $\lambda = 1$.

7.2 Eigenwert und -vektor: Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix. Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heißt *Eigenvektor* von A zum *Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Man beachte, dass der Fall $\vec{v} = \vec{0}$ explizit ausgeschlossen ist, da die Gleichung $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$ trivialerweise für jede Zahl λ erfüllt ist und damit keine brauchbare Information liefert. Wenn \vec{v} ein Eigenvektor von A ist, dann ist auch jedes Vielfache $t\vec{v}$ ein Eigenvektor, sofern $t \neq 0$. Zur Bestimmung von Eigenwerten und -vektoren betrachtet man analog zur Bestimmung von Fixpunkten [→ 6.7] die Gleichung

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}. \quad (7.1)$$

Die Lösbarkeit dieses LGS hängt von der Determinante

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda E)$$

ab. Die Funktion p ist ein Polynom vom Grad n in der Variablen λ und wird als *charakteristische Polynom* von A bezeichnet. Betrachten wir nun einen festen Wert λ .

- Falls $p(\lambda) \neq 0$, dann ist das LGS (7.1) eindeutig lösbar und es folgt $\vec{v} = \vec{0}$. Folglich ist \vec{v} kein Eigenvektor und λ auch kein Eigenwert.
- Falls $p(\lambda) = 0$, dann besitzt (7.1) nichttriviale Lösungen. Es gibt also einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ mit $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$ und dies ist gerade ein Eigenvektor zum Eigenwert λ .

Die Eigenwerte der Matrix A sind also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Die zugehörigen Eigenvektoren bestimmen sich aus dem LGS $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$.

7.3 Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -3 \\ 4 & -9 & -4 \\ -6 & 15 & 8 \end{bmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} (5 - \lambda) & -9 & -3 \\ 4 & (-9 - \lambda) & -4 \\ -6 & 15 & (8 - \lambda) \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6.$$

Wenn es ganzzahlige Nullstellen gibt, so müssen sie Teiler des konstanten Terms -6 sein. Deshalb überprüft man zunächst die Teiler von -6 : Es ist $\lambda = 1$ beispielsweise keine Nullstelle, aber $\lambda_1 = 2$ liefert $p(\lambda_1) = 0$. Nun teilt man beispielsweise mithilfe des Horner-Schemas [\rightarrow 1.25] das Polynom p durch den Linearfaktor $\lambda - 2$ und erhält

$$q(\lambda) := p(\lambda) : (\lambda - 2) = -\lambda^2 + 2\lambda + 3.$$

Die beiden restlichen Eigenwerte von A sind Nullstellen von q ,

$$q(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -1.$$

Insgesamt erhält man also die Faktorisierung

$$p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

Ein Eigenvektor zu λ_1 ergibt sich aus

$$(A - \lambda_1 E)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -3 \\ 4 & -11 & -4 \\ -6 & 15 & 6 \end{bmatrix} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Analog erhält man

$$\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Natürlich können auch beliebige Vielfache der angegebenen Eigenvektoren verwendet werden, z.B. $\vec{v}_2 = [0, -1, 3]^T$ oder $\vec{v}_3 = [7, 7, -7]^T$.

7.4 Regeln:

- *Anzahl:* Es gibt höchstens n verschiedene reelle Eigenwerte einer $(n \times n)$ -Matrix A ; mit Vielfachheiten gezählt gibt es genau n komplexe Eigenwerte von A .
- *Eigenraum:* Wenn \vec{v}_1 und \vec{v}_2 Eigenvektoren von A zum *selben* Eigenwert λ sind, dann ist auch $t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , sofern $t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 \neq \vec{0}$. Die Menge aller Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ bildet zusammen mit dem Nullvektor einen linearen Teilraum von \mathbb{R}^n . Man nennt ihn *Eigenraum*, kurz $\text{eig}(A, \lambda)$, und es gilt $\text{eig}(A, \lambda) = \ker(A - \lambda E)$.

- *Mehrfache Nullstelle:* Wenn ein Eigenwert λ eine k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann gibt es hierzu mindestens einen und höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren, d.h., $1 \leq \dim \operatorname{eig}(A, \lambda) \leq k$.
- *Vielfaches:* Wenn \vec{v} ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist \vec{v} ein Eigenvektor von tA zum Eigenwert $t\lambda$, $t \in \mathbb{R}$.
- *Potenz:* Wenn \vec{v} ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist \vec{v} ein Eigenvektor von A^k zum Eigenwert λ^k . Falls A invertierbar ist, darf dabei auch $k = -1$ gewählt werden, d.h., die Eigenwerte der Inversen sind die Kehrwerte der Eigenwerte der gegebenen Matrix.
- *Polynom:* Sei $q(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ ein Polynom. Wenn \vec{v} ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist \vec{v} ein Eigenvektor von $q(A)$ [\rightarrow 5.22] zum Eigenwert $q(\lambda)$. Im Beispiel ist $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A , also hat die Matrix $q(A) = A^2 - 2A + E$ den Eigenwert $q(3) = 3^2 - 6 + 1 = 4$.
- *Summe:* Die Summe aller (auch der komplexen) Eigenwerte ist gleich der Summe der Diagonalelemente von A ,

$$\operatorname{spur} A := a_{1,1} + \dots + a_{n,n} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

Im Beispiel ist $\operatorname{spur} A = 5 - 9 + 8 = 4$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 3 - 1 = 4$.

- *Produkt:* Das Produkt aller Eigenwerte (auch der komplexen) ist gleich der Determinante von A ,

$$\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Das heißt, eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn alle Eigenwerte von Null verschieden sind. Im Beispiel ist $\det A = -6$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -6$.

- *Transposition:* Die Eigenwerte (aber nicht die Eigenvektoren!) von A und A^T stimmen überein.

7.5 Spezialfälle:

- Wenn A eine obere oder untere Dreiecksmatrix ist [\rightarrow 4.19], dann stimmen die Eigenwerte mit den Diagonalelementen überein,

$$p(\lambda) = (a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{n,n} - \lambda), \quad \lambda_1 = a_{1,1}, \lambda_2 = a_{2,2}, \dots, \lambda_n = a_{n,n}.$$

Insbesondere sind die Eigenwerte der Einheitsmatrix $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$.

- Wenn A symmetrisch ist, dann sind alle Eigenwerte reell und die zugehörigen Eigenvektoren können durch geeignete Normierung so gewählt werden, dass sie eine Orthonormalbasis bilden.
- Für eine Projektion P ist $P^2 = P$. Somit gilt für die Eigenwerte $\lambda^2 = \lambda$ und es folgt $\lambda \in \{0, 1\}$.
- Für eine Spiegelung S ist $S^2 = E$. Somit gilt für die Eigenwerte $\lambda^2 = 1$ und es folgt $\lambda \in \{-1, 1\}$.

7.6 Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = (3 - \lambda)(7 - \lambda)(-5 - \lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = -5.$$

7.7 Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$ ist $\vec{v}_1 = [0, 1, 1]^T$. Zu der doppelten Nullstelle $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dieses hat zwei linear unabhängige Lösungen, z.B. $\vec{v}_2 = [-1, 0, 1]^T$ und $\vec{v}_3 = [0, 1, 0]^T$.

7.8 Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = (1 - \lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Zu der dreifachen Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dieses hat nur eine linear unabhängige Lösung, $\vec{v} = [1, 0, 0]^T$. In Fällen wie diesem können anstelle der fehlenden Eigenvektoren sogenannte *Hauptvektoren* bestimmt werden (in der Literatur zu finden unter dem Stichwort *Jordan-Form*).

7.9 Diagonalisierung: Wenn es zu einer $(n \times n)$ -Matrix A genau n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ gibt, dann kann man diese zu einer $(n \times n)$ -Matrix V zusammenfassen. Mit der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

erhält man dann

$$AV = VD \quad \text{bzw.} \quad D = V^{-1}AV \quad \text{bzw.} \quad A = VDV^{-1}.$$

Man sagt dann, dass A *diagonalisierbar* ist. Bezüglich der Basis aus Eigenvektoren [\rightarrow 6.15] ist A also ähnlich zu einer Diagonalmatrix, $A_V = D$.

Eine weitere Anwendung der Diagonalisierung ergibt sich bei dem Problem, Potenzen von Matrizen effizient zu berechnen. Man erhält

$$A^k = A \cdots A = (VDV^{-1}) \cdots (VDV^{-1}) = VD^kV^{-1},$$

wobei $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$ die Diagonalmatrix aus den Potenzen der Eigenwerte ist.

7.10 Beispiel [→ 7.3]: Für

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -3 \\ 4 & -9 & -4 \\ -6 & 15 & 8 \end{bmatrix}$$

erhält man

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} A^5 = VD^5V^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3^5 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 65 & -99 & -33 \\ 244 & -489 & -244 \\ -666 & 1365 & 698 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7.11 Komplexe Eigenwerte: Als Nullstellen von Polynomen können Eigenwerte komplex sein. Aus rechnerischer Sicht ergeben sich keine Besonderheiten, aber die geometrische Anschauung muss angepasst werden. Etwas vereinfacht gesagt entsprechen komplexe Eigenwerte Drehbewegungen. Wir diskutieren diesen Sachverhalt nur kurz anhand zweier Beispiele:

- Die Rotationsmatrix [→ 6.9]

$$R_\varphi := \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1$. Für die Nullstellen erhält man $\lambda_{1,2} = \cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi - 1}$ und mithilfe von $\cos^2 \varphi - 1 = -\sin^2 \varphi$ und der Euler-Formel [→ 3.12] schließlich

$$\lambda_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = e^{\pm i\varphi}.$$

Der geometrische Zusammenhang erklärt sich wie folgt: Für einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ bewirkt die Multiplikation mit R_φ eine Drehung um den Winkel φ . Analog bewirkt für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ die Multiplikation mit dem Eigenwert $\lambda_1 = e^{i\varphi}$ die Drehung um den Winkel φ . Der konjugiert komplexe Eigenwert $\lambda_2 = e^{-i\varphi}$ entzieht sich ebenso einer einfachen anschaulichen Interpretation wie die Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- [→ 6.19] Für die lineare Abbildung $f(\vec{x}) = \vec{x} \times [1, 1, 1]^T$ ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 3).$$

Zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ gehört der Eigenvektor $\vec{v}_1 = [1, 1, 1]^T$, denn $f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_1 = \vec{0}$. Die beiden anderen Eigenwerte sind konjugiert komplex,

$$\lambda_2 = i\sqrt{3}, \quad \lambda_3 = -i\sqrt{3}.$$

In der komplexen Ebene bewirkt eine Multiplikation mit $\lambda_1 = i\sqrt{3}$ eine Drehung um $\pi/2$ gefolgt von einer Streckung um den Faktor $\sqrt{3}$. Dies entspricht genau die Wirkung der Abbildung f auf einen Vektor in der Ebene senkrecht zu \vec{v}_1 .

7.12 Quadratische Gleichungen in \mathbb{R}^n : Wir wollen nun geometrische Figuren beschreiben wie z.B. Kreise, Kugeln, Ellipsen, Ellipsoide, Paraboloiden und Hyperboloiden. Diese ergeben sich als Lösungsmengen von *quadratischen* Gleichungen, wohingegen die bisher betrachteten Geraden und Ebenen Lösungsmengen von *linearen* Gleichungen waren.

Die allgemeine quadratische Gleichung in n Variablen lautet

$$\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{a}^T \cdot \vec{x} + \alpha = 0, \quad (\text{Q})$$

und hierbei haben wir die folgenden gegebenen Koeffizienten: eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, einen Spaltenvektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, und eine reelle Zahl α . Gesucht sind alle Spaltenvektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, die (Q) lösen. Diese Lösungsmenge nennt man dann *Quadrik* oder im ebenen Fall $n = 2$ auch *Kegelschnitt*.

7.13 Beispiel: Im \mathbb{R}^2 betrachten wir

$$Q(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy + \sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y - \frac{3}{4} = 0.$$

Wir führen die Schreibweise $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ein und können dann die Gleichung $Q(x, y) = 0$ auf folgende Form bringen:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{3}{4} = 0,$$

also bekommen wir die Gleichung (Q) mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad \alpha = -\frac{3}{4}.$$

Die uns interessierende Frage ist jetzt: was beschreibt diese Gleichung geometrisch?

Um die geometrische Gestalt einer Quadrik besser verstehen zu können, werden wir zu einem besser geeigneten Koordinatensystem übergehen. Das Verfahren dazu besteht aus mehreren Schritten und verläuft wie folgt:

7.14 Transformation auf Normalform:

Schritt 1: diagonalisiere A (Hauptachsentransformation). Nach Voraussetzung ist die Matrix A symmetrisch. Gemäß 7.5 existiert eine ONB $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ aus Eigenvektoren von A . Stellt man diese zur Matrix $V = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ zusammen, so ergibt dieses eine orthogonale Matrix und es gilt [→ 7.9]

$$V^T A V = V^{-1} A V = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} =: A',$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind.

Schritt 2: substituiere in (Q). Wir führen neue Koordinaten \vec{x}' ein gemäß $\vec{x} = V \vec{x}'$. Wenn wir dies in (Q) einsetzen, dann folgt

$$\begin{aligned} & (V \vec{x}')^T A V \vec{x}' + \vec{a}^T (V \vec{x}') + \alpha = 0 \\ \iff & \vec{x}'^T V^T A V \vec{x}' + (V^T \vec{a})^T \vec{x}' + \alpha = 0 \\ \iff & \vec{x}'^T A' \vec{x}' + \vec{a}'^T \vec{x}' + \alpha = 0, \end{aligned}$$

wobei wir $\vec{a}' := V^T \vec{a}$ gesetzt haben. Der Nutzen dieses Schrittes besteht darin, dass in dieser quadratischen Gleichung jetzt keine gemischten Produkte mehr enthalten sind, denn A' ist eine Diagonalmatrix.

Schritt 3: verschiebe den Ursprung. Durch quadratische Ergänzung kann nun für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_i \neq 0$ der Summand $a'_i x'_i$ zum Verschwinden gebracht werden. Das liefert einen erneuten Koordinatenwechsel von \vec{x}' zu \vec{x}'' . Hierbei wird der Ursprung des Koordinatensystems verschoben. Das Ergebnis ist dann die *Normalform*

$$\vec{x}''^T A' \vec{x}'' + \vec{a}''^T \vec{x}'' + \alpha' = 0, \quad \text{wobei } a''_i = 0 \quad \text{wann immer } \lambda_i \neq 0.$$

7.15 Beispiel [→ 7.13]: Wir setzen Beispiel 7.13 fort und führen die Transformation auf Normalform durch. Die zu untersuchende Quadrik ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$Q(x, y) := \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{3}{4} = 0.$$

Schritt 1: Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3),$$

und es ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$. Die zugehörigen Eigenvektoren (auf Länge Eins normiert) sind dann

$$\begin{aligned} \text{zu } \lambda_1 = 2: & \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \text{zu } \lambda_2 = -3: & \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist \vec{v}_1, \vec{v}_2 eine ONB. Also ist

$$V := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

und diese Matrix beschreibt eine Drehung um $26.56\dots^\circ$ im Gegenuhrzeigersinn. Mit dieser Matrix V gilt

$$V^T A V = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} =: A'.$$

Schritt 2: Es ist

$$\vec{a}' = V^T \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

und deshalb gilt: ein Koordinatenvektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ löst die Gleichung $Q(x, y) = 0$ genau dann, wenn der neue Koordinatenvektor $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} := V^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ folgende Gleichung erfüllt:

$$Q'(x', y') = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \frac{3}{4} = 0.$$

Schritt 3: Wir führen die quadratische Ergänzung durch:

$$\begin{aligned} Q'(x', y') &= 0 \\ \iff 2x'^2 - 3y'^2 + 4x' + 3y' - \frac{3}{4} &= 0 \\ \iff 2(x' + 1)^2 - 2 - 3(y'^2 - y') - \frac{3}{4} &= 0 \\ \iff 2(x' + 1)^2 - 3\left(\left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{11}{4} &= 0 \\ \iff 2(x' + 1)^2 - 3\left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} - \frac{11}{4} &= 0 \\ \iff 2(x' + 1)^2 - 3\left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 &= 0 \\ \iff (x' + 1)^2 - \frac{(y' - 1/2)^2}{2/3} - 1 &= 0 \\ \iff x''^2 - \frac{y''^2}{2/3} - 1 &= 0, \end{aligned}$$

und dies ist die Normalform. Wir fassen die Umrechnungen zusammen:

$$\begin{aligned} x'' &= x' + 1, & y'' &= y' - \frac{1}{2}, \\ x' &= \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y, & y' &= -\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y. \end{aligned}$$

7.16 Normalformen für $n = 2$: Im Falle $n = 2$ haben wir folgende Normalformen:

Fall A: beide Eigenwerte von A sind $\neq 0$:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	Ellipse (evtl. ein Kreis)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	leere Menge
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	Hyperbel
$x^2 + a^2y^2 = 0$	der Punkt $[0, 0]^T$
$x^2 - a^2y^2 = 0$	ein Geradenpaar

Fall B: ein Eigenwert von A ist Null:

$x^2 - 2py = 0$	Parabel
$x^2 - a^2 = 0$	ein Paar paralleler Geraden
$x^2 + a^2 = 0$ (mit $a \neq 0$)	leere Menge
$x^2 = 0$	eine Gerade.

Unter Umständen müssen zum Erreichen einer dieser Normalformen noch die x - und y -Variable vertauscht werden. Im Falle $n = 3$ gibt es bereits 17 verschiedene Normalformen, auf deren Auflistung wir hier verzichten wollen.

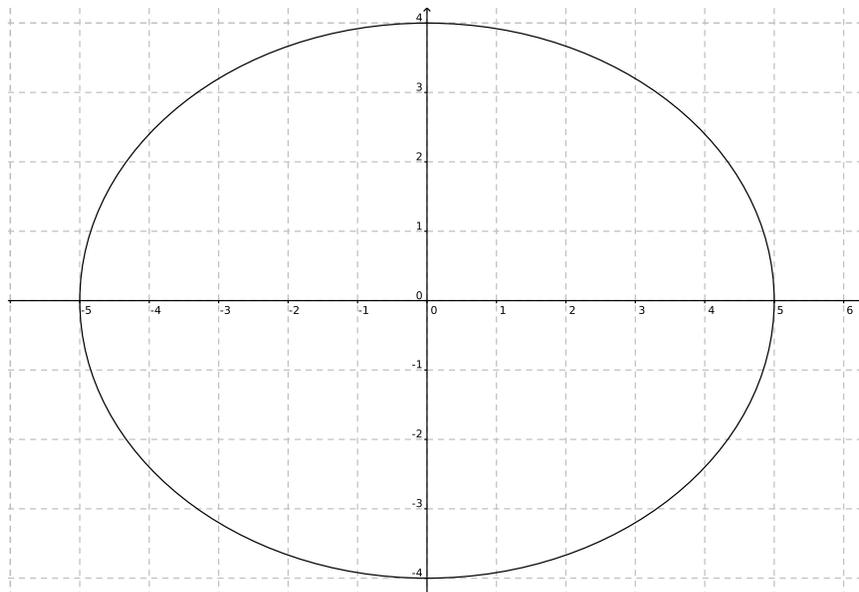


Abbildung 15: Eine Normalform-Ellipse mit Parametern $a = 5$ und $b = 4$.

7.17 Beispiel [→ 7.15]: Wir vollenden Beispiel 7.13 und 7.15. Die erhaltene Normalform ist

$$x''^2 - \frac{y''^2}{\frac{2}{3}} - 1 = 0,$$

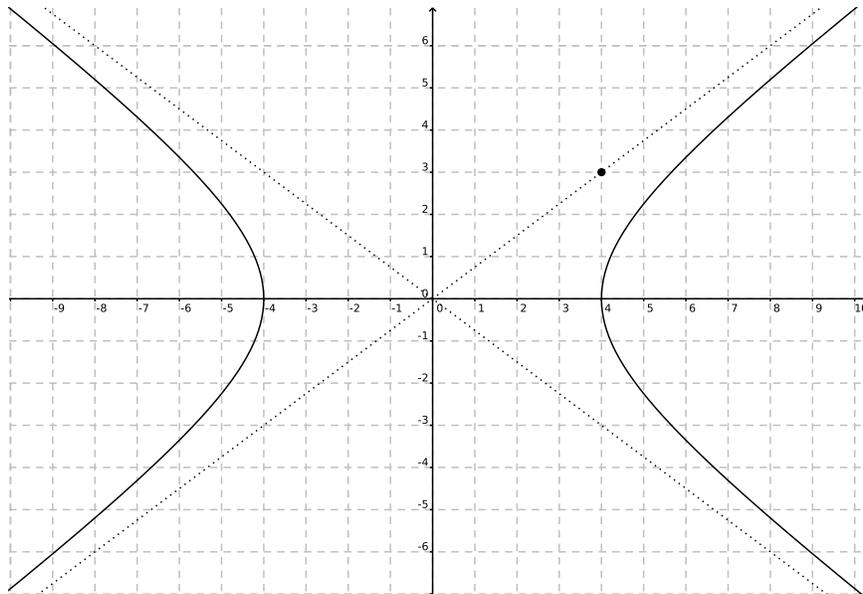


Abbildung 16: Eine Normalform-Hyperbel mit Parametern $a = 4$ und $b = 3$.

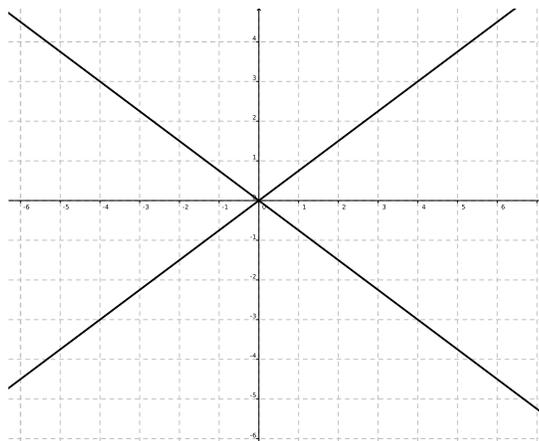


Abbildung 17: Ein Geradenpaar als Lösung der Gleichung $x^2 - a^2 y^2 = 0$ mit $a = \frac{4}{3}$.

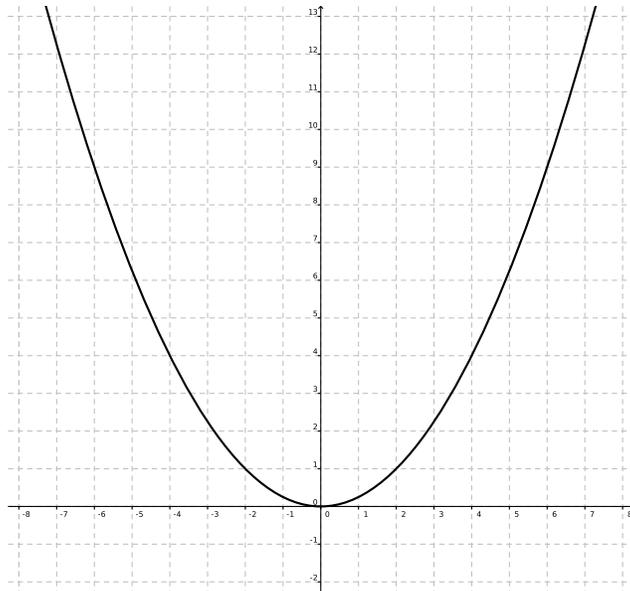


Abbildung 18: Eine Normalform-Parabel als Lösung der Gleichung $x^2 - 2py = 0$ mit $p = 2$.

also liegt eine Hyperbel vor. Für diese können wir weitere geometrische Informationen angeben: die Halbachsenparameter a und b erfüllen $a^2 = 1$ und $b^2 = \frac{2}{3}$, also ist $a = 1$ und $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Die Lage des *Mittelpunkts* der Hyperbel ergibt sich durch die Bedingung $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Wir hatten die Umrechnungen $x'' = x' + 1$ und $y'' = y' - \frac{1}{2}$, also gilt für den Mittelpunkt $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$. Im x - y -System bekommen wir wegen $V^{-1} = V^T$ dann für die Koordinaten des Zentrums:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -5/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix V beschreibt eine Drehung um 26.56° , also ist die x'' -Achse gegen die x -Achse um 26.56° gedreht.

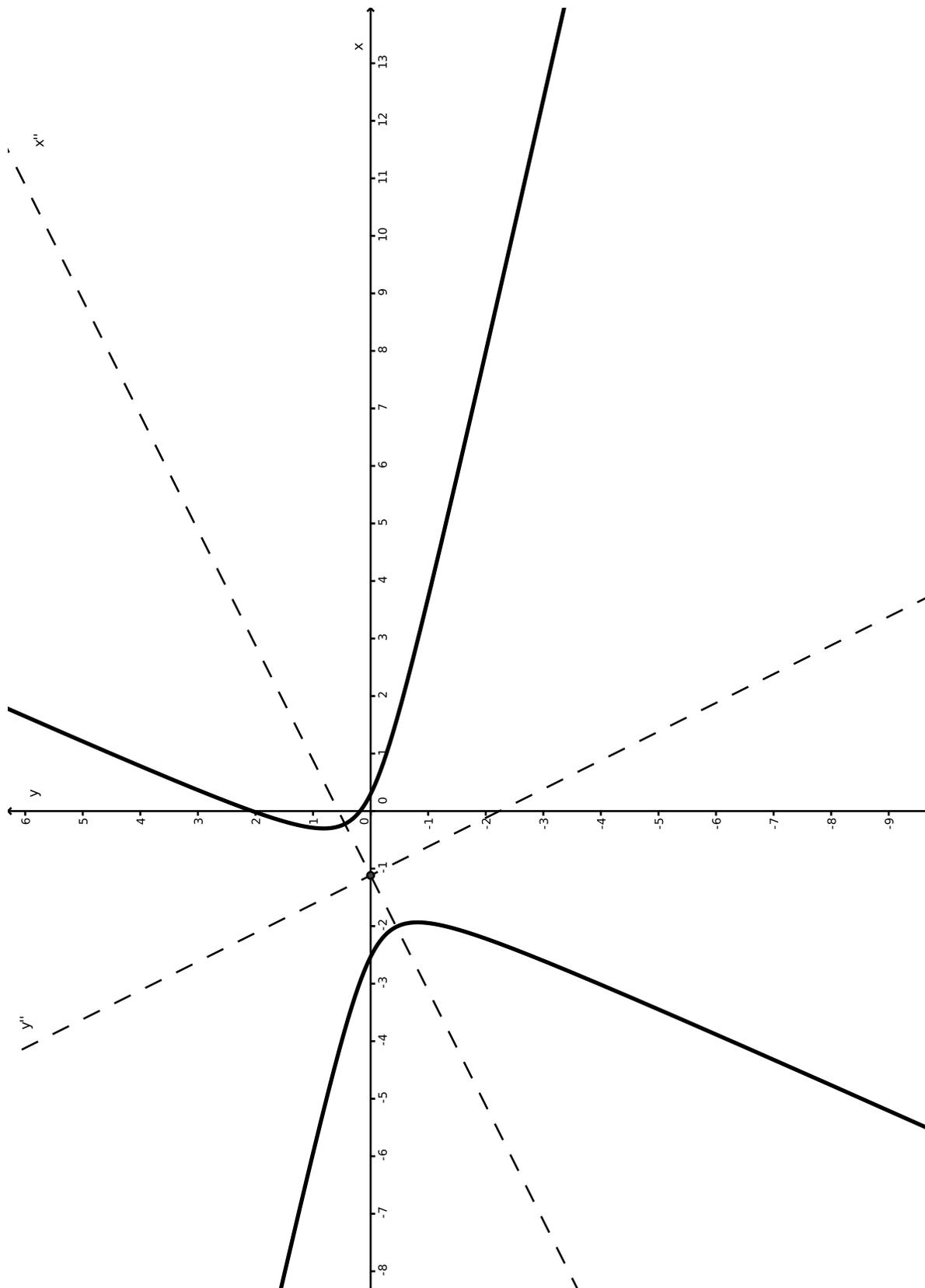


Abbildung 19: Die Quadrik aus Beispiel 7.13 und Beispiel 7.15 (aus Papierformatsgründen ist das Bild um 90° gedreht worden).

8 Folgen

Wir verlassen nun das Gebiet der Linearen Algebra und wenden uns der Analysis zu, die die Untersuchung beliebiger reeller Funktionen zum Gegenstand hat. Zur Vorbereitung beschäftigen wir uns mit Zahlenfolgen und deren Grenzwerten.

8.1 Folge: Wir beschäftigen uns nun mit unendlichen Abfolgen reeller Zahlen, also beispielsweise

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

Man kann diese Zahlen als Funktionswerte einer Funktion a verstehen, die jeder natürlichen Zahl n , dem sogenannten *Index*, eine reelle Zahl zuweist, im Beispiel ist also $a(1) = 1/2$, $a(2) = 1/4$, $a(5) = 1/32$, usw. In anderen Fällen kann es zweckmäßig sein, den Bereich der Indizes nicht bei 1, sondern bei einer anderen ganzen Zahl $k \in \mathbb{Z}$ beginnen zu lassen. Das Definitionsgebiet der Funktion ist dann also nicht \mathbb{N} , sondern $\mathbb{Z}_{\geq k} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$. Dies führt auf die folgende Definition:

Eine Funktion $a : \mathbb{Z}_{\geq k} \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder ganzen Zahl $n \geq k$ eine reelle Zahl zuweist, nennt man *reelle Zahlenfolge* oder kurz *Folge*.

Abweichend von der üblichen Notation bezeichnet man den Funktionswert von a an der Stelle n meist nicht mit $a(n)$ sondern mit a_n . Man nennt a_n das *n -te Folgenglied* oder das *Folgenglied zum Index n* . Ebenfalls abweichend von der Standardnotation für Funktionen gibt es für die Angabe von Folgen verschiedene Schreibweisen: Üblich sind Bezeichnungen wie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n \geq k}$ oder $a_n, n \in \mathbb{Z}_{\geq k}$. Wenn es nicht relevant ist, wo die Indizierung beginnt, schreibt man auch vereinfachend $(a_n)_n$ oder schlicht a_n . Auch die Folgenglieder können in verschiedener Form angegeben werden:

- *Aufzählung:* Durch Angabe einiger Folgenglieder wird das zugrunde liegende Prinzip verdeutlicht, z.B. im Fall $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{array}{ll} 1, 2, 3, 4, 5, \dots, & \text{also } a_n = n. \\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, & \text{also } a_n = \frac{1}{n}. \\ -1, 1, -1, 1, -1, \dots, & \text{also } a_n = (-1)^n. \\ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, & \text{also } a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n-1}}. \\ 1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, \dots, & \text{also } a_n = \begin{cases} n, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases} \end{array}$$

Dieses Vorgehen ist intuitiv und deshalb gelegentlich zweckmäßig, aber dennoch unpräzise.

- *Explizite Form:* Hier wird eine Formel zur Berechnung von a_n angegeben, z.B.

$$a_n = \sqrt[n]{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- *Rekursion:* Bei dieser Form sind einige Folgenglieder a_1, a_2, \dots, a_m explizit gegeben. Alle weiteren Folgenglieder werden dann mittels einer Formel aus den vorhergehenden berechnet. Beispielsweise ist die *Fibonacci-Folge*⁴⁰ definiert durch

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n > 2.$$

⁴⁰Leonardo Fibonacci, 1170–1240

Das Folgenglied zu einem gegebenen Index lässt sich mittels der Rekursionsformel meist einfach bestimmen (insbesondere mit Hilfe eines Computerprogramms), die Herleitung allgemeingültiger Aussagen oder die Angabe einer expliziten Form kann dagegen beliebig schwierig sein.⁴¹

8.2 Eigenschaften: Eine Folge $a_n, n \geq k$, heißt

- *konstant*, wenn alle Folgenglieder denselben Wert haben.
- *positiv/negativ*, wenn alle Folgenglieder positiv bzw. negativ sind.
- *alternierend*, wenn aufeinanderfolgende Folgenglieder verschiedenes Vorzeichen haben, d.h.,

$$a_{n+1}a_n < 0, \quad \text{für alle } n \geq k.$$

- *monoton wachsend/fallend*, wenn

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} \leq a_n, \quad \text{für alle } n \geq k.$$

- *streng monoton wachsend/fallend*, wenn

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} < a_n, \quad \text{für alle } n \geq k.$$

- *beschränkt*, wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$|a_n| \leq c, \quad \text{für alle } n \geq k.$$

Alle Eigenschaften einer Folge können mit dem Zusatz „fast überall (f.ü.)“ versehen werden. Dies bedeutet, dass diese Eigenschaft erst ab einem gewissen Index n_0 durchgängig erfüllt ist und für die endlich vielen Indizes unterhalb von n_0 verletzt sein darf. Offensichtlich spielt für Eigenschaften, die f.ü. gelten, der Startindex k keine Rolle.

8.3 Beispiel:

- Die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = n^2 - 15$ ist streng monoton wachsend und f.ü. positiv.
- Die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = (-1)^n/n^2$ ist alternierend und beschränkt, da $|a_n| \leq 1$.
- Eine konstante Folge ist monoton wachsend, monoton fallend und beschränkt.

8.4 Nullfolge: Eine Folge $(a_n)_{n \geq k}$ heißt *Nullfolge*, wenn für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$ gilt:

$$|a_n| < \varepsilon \quad \text{fast überall.}$$

Es darf also jeweils nur endlich viele Indizes geben, für die $|a_n| \geq \varepsilon$ gilt. Die Eigenschaft, eine Nullfolge zu sein, ist vom Startindex k unabhängig.

⁴¹Im Beispiel ist, wie man zeigen kann,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

8.5 Beispiel:

- Gegeben sei die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = 1/n$. Die Bedingung $|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ ist äquivalent zu $n > 1/\varepsilon$. Unabhängig davon, wie klein man ε nun wählt, ist $1/\varepsilon$ eine feste Zahl. Es gibt folglich immer nur endlich viele Werte von n , die kleiner oder gleich sind und somit die Bedingung $|a_n| < \varepsilon$ verletzen. Also ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge.
- Gegeben sei die Folge $(b_n)_n$ mit $b_n = \cos(n\pi) + 1$. Für gerades n ist hier $b_n = 2$, während sich für ungerades n der Wert $b_n = 0$ ergibt. Wählen wir nun $\varepsilon = 1/2$, dann gibt es zwar unendlich viele Folgenglieder mit $|b_n| = 0 < 1/2$, es gibt aber auch unendlich viele Folgenglieder mit $|b_n| = 2 > 1/2$. Also ist $(b_n)_n$ keine Nullfolge.

8.6 Regeln: Sei $(a_n)_n$ eine Nullfolge, dann gilt:

- $(a_n)_n$ ist beschränkt.
- Sei $(b_n)_n$ eine Nullfolge, dann ist auch $(a_n \pm b_n)_n$ eine Nullfolge.
- Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, dann ist $(a_n \cdot c)_n$ eine Nullfolge.
- Sei $(c_n)_n$ eine beschränkte Folge, dann ist $(a_n \cdot c_n)_n$ eine Nullfolge.
- Sei $(d_n)_n$ eine Folge mit $|d_n| \leq |a_n|$ f.ü., dann ist $(d_n)_n$ eine Nullfolge.

8.7 Beispiel: Gegeben sei die Nullfolge $(a_n)_n$ mit $a_n = 1/n$.

- $(6/n)_n$ ist eine Nullfolge.
- Die Folge $(c_n)_n$ mit $c_n = \sin n - \pi$ ist beschränkt durch $|c_n| \leq 5$. Also ist

$$\left(\frac{\sin n - \pi}{n} \right)_n$$

eine Nullfolge.

- Sei

$$d_n = \frac{(-1)^n 5n}{n^2 - 3},$$

dann ist $|d_n| < 6/n$ für $n \geq 5$. Also ist $(d_n)_n$ eine Nullfolge.

- Seien p und q zwei Polynome, dann ist die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = p(n)/q(n)$ genau dann eine Nullfolge, wenn $\text{grad}(p) < \text{grad}(q)$.

8.8 Grenzwert: Eine Folge $(a_n)_n$ heißt *konvergent mit Grenzwert (oder Limes) a* , wenn $(a_n - a)_n$ eine Nullfolge ist. Man schreibt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

und liest: „Der Grenzwert von a_n für n gegen Unendlich ist a “. Man beachte, dass das ∞ -Symbol hier nur eine Schreibweise ist. In der Definition des Grenzwerts kommen nur *endliche* Werte von n vor. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

8.9 Regeln: Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b , dann gilt:

- Die Folge der Beträge $(|a_n|)_n$ konvergiert gegen $|a|$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$.
- Die Folge $(a_n)_n$ ist beschränkt, denn $|a_n - a| \leq c$ [→ 8.6] und

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq c + |a|.$$

- Die Folge $(\alpha a_n + \beta b_n)_n$ ist konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Die Folge $(a_n \cdot b_n)_n$ ist konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

- Die Folge $(a_n/b_n)_n$ ist konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b,$$

sofern $b \neq 0$. Die Folge ist divergent, falls $a \neq 0$ und $b = 0$.

8.10 Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_0 + p_1 n + \dots + p_k n^k}{q_0 + q_1 n + \dots + q_k n^k} = \frac{p_k}{q_k}, \quad q_k \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha q^n = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.718$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

8.11 Konvergenzkriterien:

- *Cauchy:* Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn es für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$ eine Zahl n_0 gibt, sodass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

- **Intervallschachtelung:** Sei $(a_n)_n$ monoton wachsend, $(b_n)_n$ monoton fallend und $(b_n - a_n)_n$ eine Nullfolge. Dann konvergieren beide Folgen gegen denselben Grenzwert und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in [a_k, b_k], \quad k \in \mathbb{N}.$$

- **Einschließung:** Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente Folgen mit demselben Grenzwert a und $(c_n)_n$ eine weitere Folge. Wenn $a_n \leq c_n \leq b_n$ f.ü. gilt, dann ist die Folge $(c_n)_n$ ebenfalls konvergent gegen a .
- Wenn die Folge $(a_n)_n$ beschränkt und monoton f.ü. ist, dann ist sie konvergent.

8.12 Bestimmte Divergenz: Eine Folge $(a_n)_n$ heißt *bestimmt divergent*, wenn sie f.ü. positiv oder f.ü. negativ ist und $(1/a_n)_n$ eine Nullfolge ist. Wir schreiben dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

8.13 Beispiel:

- Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^n/n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1/n) = -\infty.$$

- Die Folge $(1 + n + (-1)^n n)_n$ ist positiv und nicht beschränkt. Dennoch ist sie nicht bestimmt divergent, da alle ungeraden Folgenglieder den Wert 1 haben.

8.14 Vektorfolge: Eine Funktion, die jeder ganzen Zahl $n \geq k$ einen Vektor $\vec{a}_n \in \mathbb{R}^d$ zuweist, nennt man *Vektorfolge*. Man schreibt dafür $(\vec{a}_n)_{n \geq k}$ oder auch kurz $(\vec{a}_n)_n$. Die Komponenten $a_{i,n}$ von \vec{a}_n bilden die reellen Zahlenfolgen $(a_{i,n})_n$,

$$\vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{d,n} \end{bmatrix}, \quad (\vec{a}_n)_n = \begin{bmatrix} (a_{1,n})_n \\ (a_{2,n})_n \\ \vdots \\ (a_{d,n})_n \end{bmatrix}.$$

Die Vektorfolge $(\vec{a}_n)_n$ heißt *konvergent mit Grenzwert \vec{a}* genau dann, wenn alle Komponentenfolgen konvergieren. Wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix}, \quad a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{i,n}.$$

8.15 Beispiel:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt[n]{n}, 2 \arctan n]^T = [1, \pi]^T$.
- Die Folge $(\vec{a}_n)_n$ mit $\vec{a}_n = [n^{-2}, 2^{-n}, \ln n]^T$ ist nicht konvergent, da die dritte Komponentenfolge divergiert.

9 Reihen

Reihen sind spezielle Folgen, die durch das schrittweise Aufsummieren von Folgengliedern einer gegebenen Folge $(a_n)_n$ entstehen. Bildet man den Grenzwert dieser sogenannten Partialsummen, dann erhält man in gewisser Weise eine „unendliche Summe“, dies ist aber nichts anderes als ein Grenzwert im zuvor beschriebenen Sinne. Betrachten wir als Beispiel die Ziffernfolge der Dezimalzahl π , also $3, 1, 4, 1, \dots$. Hierzu bilden wir im Sinne des dekadischen Stellenwertsystems die Folge

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 1/10, \quad a_2 = 4/100, \quad a_3 = 1/1000, \quad \dots$$

Schrittweises Aufsummieren ergibt die Werte

$$s_0 = a_0 = 3, \quad s_1 = a_0 + a_1 = 3.1, \quad s_2 = 3.14, \quad s_3 = 3.141, \quad \dots$$

Diese Folge ist monoton wachsend und beschränkt. Also ist sie konvergent und der Grenzwert ist gerade die Zahl π . Übrigens ergibt sich für die Zahl $0.\bar{9} = 0.9999\dots$ die Folge

$$s_0 = 0, \quad s_1 = .9 = 1 - 1/10, \quad s_2 = .99 = 1 - 1/100, \quad \dots, \quad s_m = 1 - 1/10^m, \quad \dots$$

mit dem Grenzwert

$$0.\bar{9} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{10^m} = 1.$$

9.1 Reihe: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Dann definiert man die zugehörige Folge $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gemäß

$$\begin{aligned} s_1 &:= a_1 \\ s_2 &:= a_1 + a_2 \\ s_3 &:= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_m &:= a_1 + a_2 + \dots + a_m = \sum_{n=1}^m a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man bezeichnet die Folge $(s_m)_m$ als die *Reihe* und die Folgenglieder s_m als die *Partialsummen* zur Folge $(a_n)_n$. Wenn die Reihe, also die Folge der Partialsummen, konvergiert, dann schreibt man für den Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{m \rightarrow \infty} s_m.$$

Vollkommen analog definiert man zur Folge $(a_n)_{n \geq k}$ die Reihe $(s_m)_{m \geq k}$ durch die Partialsummen

$$s_m := a_k + a_{k+1} + \dots + a_m = \sum_{n=k}^m a_n, \quad m \geq k,$$

und schreibt im Falle der Konvergenz

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n := \lim_{m \rightarrow \infty} s_m.$$

Gemäß den Regeln für Grenzwerte von Folgen gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

sofern die Reihen zu den Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergieren.

9.2 Beispiel: Für einen festen Wert $q \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ gegeben durch $a_n := q^n$. Die zugehörige Folge der Partialsummen

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 1 + q, \quad s_2 = 1 + q + q^2, \dots$$

wird als *geometrische Reihe* bezeichnet. In diesem Fall lassen sich die Partialsummen explizit angeben. Es ist

$$s_m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1$$

und $s_m = m + 1$ für $q = 1$. Die geometrische Reihe konvergiert also genau dann mit Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q},$$

wenn $|q| < 1$. Anderenfalls ist die geometrische Reihe divergent.

9.3 Notwendige Bedingung: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit Grenzwert s . Dann gilt

$$a_n = s_n - s_{n-1} = (s_n - s) - (s_{n-1} - s).$$

Beide Klammern auf der rechten Seite sind Nullfolgen, also muss auch $(a_n)_n$ eine Nullfolge sein [→ 8.6]. Für die Konvergenz einer Reihe ist es also notwendig, dass $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist. Diese Bedingung ist aber keineswegs hinreichend, d.h., selbst wenn $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist, kann die zugehörige Reihe divergent sein. Ein Beispiel hierfür ist die sogenannte harmonische Reihe.

9.4 Harmonische Reihe und Zeta-Funktion:

- Sei $a_n := 1/n$. Die zugehörige Folge der Partialsummen

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + 1/2, \quad s_3 = 1 + 1/2 + 1/3, \dots$$

wird als *harmonische Reihe* bezeichnet. Diese ist bestimmt divergent,

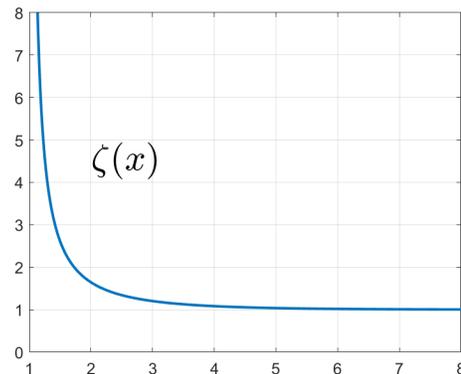
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

- Die Reihe zur Folge $a_n = 1/n^x$ konvergiert genau dann, wenn $x > 1$. Der Grenzwert definiert die *Riemann'sche Zeta-Funktion*⁴²

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x > 1.$$

Es ist z.B.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$



⁴²Bernhard Riemann, 1826–1866

9.5 Leibniz-Kriterium:⁴³ Sei $(a_n)_n$ eine alternierende Nullfolge [\rightarrow 8.2] mit der Eigenschaft, dass die Folge der Beträge $(|a_n|)_n$ monoton fällt, dann konvergiert die zugehörige Reihe.

9.6 Beispiel: Sei $a_n := (-1)^{n+1}/n$. Die zugehörige Folge der Partialsummen

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 - 1/2, \quad s_3 = 1 - 1/2 + 1/3, \dots$$

wird als *alternierende harmonische Reihe* bezeichnet. Sie konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium und hat den Grenzwert [\rightarrow 13.5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

9.7 Sprachgebrauch: In der Praxis wird das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, das eigentlich nur für den Grenzwert einer Reihe steht, häufig auch für die Reihe selbst verwendet. Man sagt also:

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \dots$

und meint damit eigentlich

Die Reihe zur Folge $(a_n)_n \dots$

Außerdem wird der Grenzwert einer Reihe gelegentlich auch nur als *Wert* der Reihe bezeichnet. Der Satz

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / (2n + 1)$ hat den Wert $\pi/4$.

ist also zu interpretieren als

Die zur Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = (-1)^n / (2n + 1)$ gehörende Reihe hat den Grenzwert $\pi/4$.

9.8 Vergleichskriterien: Gegeben seien die Folgen $(a_n)_n, (b_n)_n$.

- *Konvergente Majorante:* Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und

$$|b_n| \leq a_n \quad \text{f.ü.},$$

dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

- *Divergente Minorante:* Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert und

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{f.ü.},$$

dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

9.9 Absolute Konvergenz: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Eine absolut konvergente Reihe ist nach dem Majorantenkriterium konvergent. Eine Reihe, die konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, heißt *bedingt konvergent*. Bei absolut konvergenten Reihen können die Folgenglieder a_n beliebig umgeordnet werden, ohne dass sich der Wert der Reihe ändert. Hier gilt also in einem gewissen Sinne das Kommutativgesetz. Bei bedingt konvergenten Reihen bewirkt eine Umordnung der Folgenglieder a_n hingegen in der Regel eine Änderung des Reihenwertes oder sogar einen Verlust der Konvergenz.

⁴³Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716

9.10 Beispiel:

- [→ 9.4] Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^2$ ist absolut konvergent.
- [→ 9.6] Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ ist bedingt konvergent.

9.11 Quotientenkriterium: Sei

$$q_n := \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{und, falls konvergent,} \quad q := \lim_{n \rightarrow \infty} q_n.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn $q < 1$ und divergent, wenn $q > 1$. Im Fall $q = 1$ ist keine Entscheidung möglich.

Wenn die Folge q_n nicht konvergiert, dann gilt immer noch:

- Wenn es eine Zahl $q < 1$ gibt, sodass $q_n \leq q$ fast überall (d.h. für alle bis auf endlich viele Werte von n), dann ist die Reihe absolut konvergent.
- Wenn $q_n \geq 1$ fast überall, dann ist die Reihe divergent.

9.12 Wurzelkriterium: Sei

$$w_n := \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{und, falls konvergent,} \quad w := \lim_{n \rightarrow \infty} w_n.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn $w < 1$ und divergent, wenn $w > 1$. Im Fall $w = 1$ ist keine Entscheidung möglich.

Wenn die Folge w_n nicht konvergiert, dann gilt immer noch:

- Wenn es eine Zahl $w < 1$ gibt, sodass $w_n \leq w$ fast überall, dann ist die Reihe absolut konvergent.
- Wenn $w_n \geq 1$ für unendlich viele n , dann ist die Reihe divergent.

Das Wurzelkriterium ist im folgenden Sinne stärker als das Quotientenkriterium: Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ existiert, dann existiert auch $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ und es gilt

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w.$$

9.13 Beispiel: Sei $a_n = (-1)^n n^3 2^{-n}$. Das Quotientenkriterium liefert

$$q_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^3 2^{-n-1}}{n^3 2^{-n}} = \frac{(1+1/n)^3}{2}, \quad q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1}{2}.$$

Genauso liefert das Wurzelkriterium

$$w_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n^3}}{2}, \quad w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \frac{1}{2}.$$

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2^n}$$

ist also absolut konvergent.

9.14 Beispiel: Sei

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2^{-n+2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Es ist also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \dots$$

Das Quotientenkriterium liefert die divergente Folge

$$q_n = \begin{cases} 2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 1/8 & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

während das Wurzelkriterium mit

$$w_n = \begin{cases} 1/2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ \sqrt[n]{4}/2 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \Rightarrow w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1/2$$

zeigt, dass die Reihe absolut konvergent ist.

9.15 Beispiel: Für $a_n = n^n/n!$ ist

$$q_n = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{n^n (n+1)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad w_n = n/\sqrt[n]{n!}.$$

Zum einen folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = e$ die Divergenz der zugehörigen Reihe. Zum anderen liefert die Gleichheit der Grenzwerte $w = q$ die *Stirlingsche Formel*⁴⁴ [\rightarrow 8.10]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

9.16 Beispiel: Für $a_n = x^n/n!$ ist

$$q_n = \left| \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1}, \quad q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0.$$

Die zugehörige Reihe ist also für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent und definiert die *e-Funktion*,

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

⁴⁴James Stirling, 1692–1770

10 Funktionengrenzwert und Stetigkeit

Mithilfe des Konvergenzbegriffs für Folgen lässt sich auch ein solcher für Funktionen definieren. Dies erlaubt Aussagen der Form

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Weiterhin wird der Begriff der Stetigkeit über eine Vertauschungseigenschaft erklärt: Eine Funktion ist stetig, wenn sich die Bildung eines Grenzwerts mit der Funktionsauswertung vertauschen lässt.

10.1 Häufungspunkt: $x_* \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Menge $M \subset \mathbb{R}$, wenn es eine Folge $(x_n)_n$ gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*, \quad x_n \in M \setminus \{x_*\}.$$

10.2 Beispiel:

- $x_* = 1$ ist ein Häufungspunkt der Menge $(0, 1)$.
- $x_* = 1$ ist kein Häufungspunkt der Menge \mathbb{N} .
- $x_* = \pi$ ist ein Häufungspunkt der Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen.

10.3 Reelle Funktion [\rightarrow 1.8], [\rightarrow 1.18]: Eine *reelle Funktion* $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jedem Element $x \in D_f$ der Menge $D_f \subset \mathbb{R}$ eine reelle Zahl $y \in \mathbb{R}$ zu, und man schreibt

$$y = f(x), \quad x \in D_f.$$

- Die Menge D_f heißt *Definitionsmenge* oder auch *Definitionsgebiet* von f .
- x heißt *Urbild* von y und y heißt *Bild* von x .
- Die *Bildmenge* von f ist die Menge aller Bilder,

$$B_f := \{y = f(x) : x \in D_f\}.$$

Im Folgenden nehmen wir stets an, dass die Definitionsmenge D_f keine isolierten Punkte enthält. Das heißt, dass jedes Element von D_f auch Häufungspunkt von D_f ist. Damit sind Definitionsmengen wie $D_f = \mathbb{Z}$ ausgeschlossen.

10.4 Grenzwert: Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Man sagt, dass f an der Stelle x_* den *Grenzwert* f_* hat, wenn für jede gegen x_* konvergente Folge $(x_n)_n$ gemäß Abschnitt 10.1 gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f_*.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \rightarrow x_*} f(x) = f_*.$$

Wenn die Folge $(f(x_n))_n$ stets bestimmt divergent ist, dann schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow x_*} f(x) = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow x_*} f(x) = -\infty.$$

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f_*$ für jede bestimmt divergente Folge $(x_n)_n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, dann schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f_*$$

Analog sind die Ausdrücke

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f_*, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$$

erklärt.

10.5 Beispiel:

▪

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \pi/2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = -\infty.$$

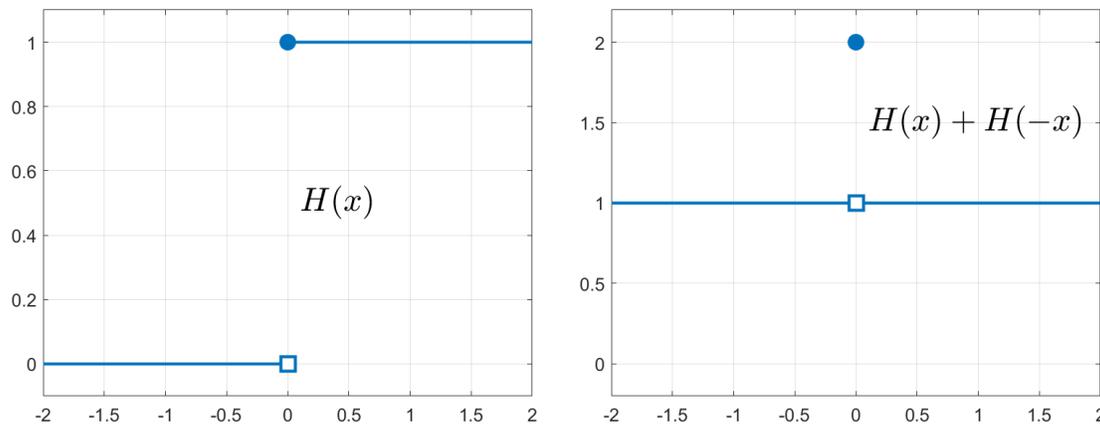
- Die Funktion $f(x) = \sin(1/x)$, $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, hat an der Stelle $x_* = 0$ keinen Grenzwert.
- Die *Heaviside-Funktion*⁴⁵ $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Sie hat an der Stelle $x_* = 0$ keinen Grenzwert. Sei $f(x) := H(x) + H(-x)$, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1,$$

aber $f(0) = 2$.



10.6 Einseitiger Grenzwert: Man sagt, dass f an der Stelle x_* den *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen* Grenzwert f_* hat, wenn für jede Folge $(x_n)_n$ gemäß Abschnitt 10.1 mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$x_n > x_* \quad \text{bzw.} \quad x_n < x_*, \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f_*.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{x \downarrow x_*} f(x) = f_* \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \uparrow x_*} f(x) = f_*.$$

⁴⁵Oliver Heaviside, 1850–1925

10.7 Beispiel: Für die Heaviside-Funktion [\rightarrow 10.5] gilt

$$\lim_{x \uparrow 0} H(x) = 0, \quad \lim_{x \downarrow 0} H(x) = 1.$$

10.8 Stetigkeit: Eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig an der Stelle* $x_* \in D_f$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_*} f(x) = f(x_*).$$

f heißt *stetig*, wenn f an allen Stellen $x \in D_f$ stetig ist.

10.9 Regeln:

- Alle elementaren Funktionen (Polynome, exp, sin, cos, tan und deren Umkehrfunktionen) sowie Betrag-, Potenz- und Wurzelfunktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsgebiet.
- Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Verkettung stetiger Funktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsgebiet.
- Die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion ist stetig, sofern das Definitionsgebiet ein Intervall ist.
- *Zwischenwertsatz:* Sei $f := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist B_f ein Intervall. Das heißt insbesondere, dass die Funktion alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt.
- *Satz von Weierstraß.*⁴⁶ Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es Stellen $\underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$ mit

$$f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x}), \quad x \in [a, b].$$

Eine derartige Aussage gilt in der Regel nicht, wenn das Definitionsgebiet kein abgeschlossenes Intervall ist.

10.10 Bemerkungen:

- f ist stetig an der Stelle x_* genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D_f \text{ mit } |x - x_*| < \delta.$$

- Bei einer stetigen Funktion bewirken kleine Änderungen des Arguments kleine Änderungen des Funktionswerts.
- Das Schaubild einer stetigen Funktion besitzt keine Sprünge, sofern das Definitionsgebiet ein Intervall ist.

Nur die erste Aussage ist streng mathematischer Natur. Die beiden anderen sind unpräzise, aber gelegentlich hilfreich.

⁴⁶Karl Weierstraß, 1815–1897

11 Differenziation

Das Differenzieren einer reellen Funktion, auch Ableiten genannt, ist eine mathematische Technik mit einer herausragenden Bedeutung für Theorie und Anwendungen. Konzeptionell bedeutet das Differenzieren die Bestimmung eines Grenzwerts von Differenzenquotienten. Aus praktischer Sicht läuft es auf die systematische Anwendung einer Reihe von Regeln hinaus, deren sichere Beherrschung für den Umgang mit mathematisch-technischen Problemstellungen von grundlegender Bedeutung ist.

11.1 Differenzierbarkeit: Im Folgenden sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stets eine reelle Funktion, deren Definitionsgebiet $D_f = I$ ein offenes Intervall ist. Für zwei Stellen $x \neq x_0$ in I definieren wir den *Differenzenquotienten*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Er gibt die Steigung der Sekante an, die durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$ gegeben ist. Die Funktion f heißt *differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

- Der Grenzwert heißt *Ableitung* von f an der Stelle x_0 und man schreibt dafür

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Andere gebräuchliche Bezeichnungen sind

$$f'(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

- Setzt man $h := x - x_0$, dann erhält man die äquivalente Darstellung

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Die Funktion f heißt *differenzierbar*, wenn sie an allen Stellen $x_0 \in I$ differenzierbar ist. Die Funktion $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Punkt $x_0 \in I$ den Wert der Ableitung zuweist, heißt *Ableitungsfunktion*.
- Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie das Beispiel der Betragsfunktion zeigt.
- Die Ableitung kann verwendet werden, um *lokale Extremstellen*, also Maxima oder Minima, und Wendepunkte von f zu bestimmen.

11.2 Beispiel:

- Für die lineare Funktion $f(x) = ax + b$ ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = a.$$

Also ist f differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = a$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Für die quadratische Funktion $f(x) = x^2$ ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0.$$

Der Grenzwert für x gegen x_0 ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0.$$

Also ist f differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = 2x_0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Für die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ und $x_0 = 0$ ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Es existiert also kein Grenzwert für $x \rightarrow 0$ und die Betragsfunktion ist deshalb nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$ (aber stetig).

11.3 Wichtige Ableitungen:

f	f'
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\arctan x$	$1/(1 + x^2)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

11.4 Regeln: Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen, dann gilt Folgendes:

- *Linearität:* Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $af + bg$ differenzierbar,

$$(af + bg)' = af' + bg'.$$

- *Produktregel:* Die Funktion $f \cdot g$ ist differenzierbar,

$$(f \cdot g)' = fg' + f'g.$$

- *Quotientenregel:* Die Funktion f/g ist differenzierbar, sofern $g \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

- *Kettenregel:* Die Funktion $f \circ g$ ist differenzierbar,

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

- *Umkehrfunktion:* Ist f umkehrbar und $f' \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $g := f^{-1}$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{wobei } f(x) = y, \quad g(y) = x.$$

11.5 Beispiel:

- Linearität:

$$(3 \sin x - 2x^3)' = 3 \cos x - 6x^2$$

- Produktregel:

$$(x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x$$

- Quotientenregel:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

- Kettenregel:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

$$(\exp(x^2))' = \exp(x^2) \cdot (2x)$$

$$(\arctan(1/x))' = \frac{-1/x^2}{1 + (1/x)^2} = \frac{-1}{1 + x^2}$$

- Umkehrfunktion:

$$y = f(x) = \tan x, \quad f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$$

$$x = g(y) = \arctan y, \quad g'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

11.6 Tangente: Sei f an der Stelle x_0 differenzierbar. Die Funktion

$$t(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

beschreibt eine Gerade, die man als *Tangente* von f an der Stelle x_0 bezeichnet. Sei $r(x) := f(x) - t(x)$ die Abweichung zwischen Funktion und Tangente, dann gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{|x - x_0|} = 0,$$

vgl. Abbildung 20. Ersetzt man die Ableitung $f'(x_0)$ durch eine beliebige andere reelle Zahl, so ist der Grenzwert des Quotienten $r(x)/|x - x_0|$ von Null verschieden. In diesem Sinne liefert die Ableitung $f'(x_0)$ die beste lineare Approximation der Funktion f in der Nähe des Punktes x_0 .

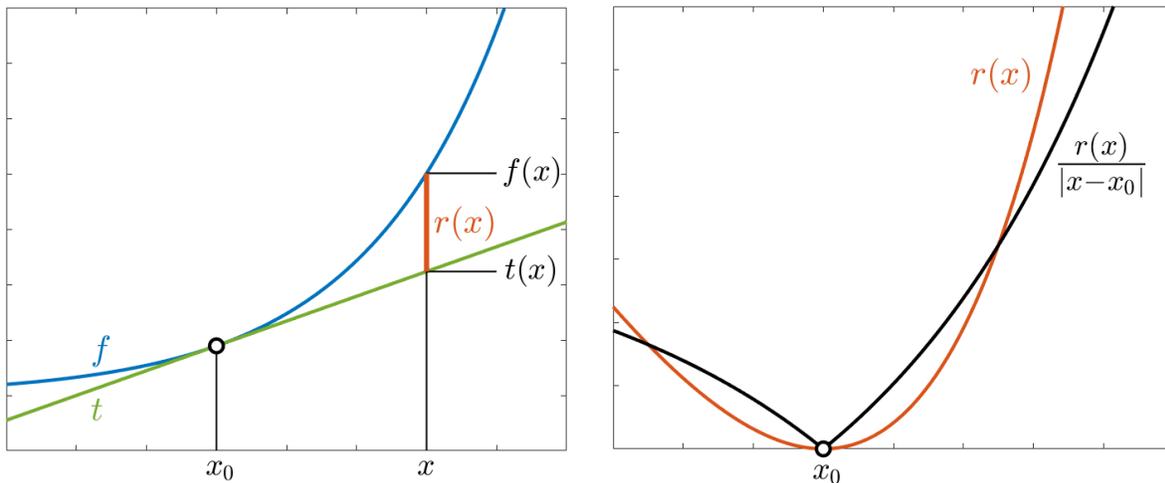


Abbildung 20: Tangente t im Punkt x_0 und Abweichung r .

11.7 Mittelwertsatz: Sei f differenzierbar auf dem Intervall I , dann gibt es eine Zahl $\vartheta \in (0, 1)$, sodass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \vartheta h),$$

sofern $x_0, x_0 + h \in I$. Setzt man $a = x_0, b = x_0 + h$ und $\xi = x_0 + \vartheta h$ für $h > 0$, dann erhält man

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Es gibt also an einer Zwischenstelle ξ eine Tangente, die parallel zur Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

11.8 Folgerungen: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

- Wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, dann gilt

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot 0 = f(x_0)$$

für alle h . Die Funktion f ist also konstant.

- Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann gilt

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \vartheta h) > f(x_0)$$

für alle $h > 0$. Die Funktion f ist also streng monoton wachsend. Genauso ist f streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$.

- Für die Abweichung r zwischen Funktion und Tangente [\rightarrow 11.6] gilt

$$r(h) = h(f'(x_0 + \vartheta h) - f'(x_0)) \text{ für ein } \vartheta \in (0, 1).$$

11.9 Beispiel: Sei $f(x) = \sin x$. Mit $f'(x) = \cos x$ erhält man im Punkt $x_0 = 0$ die Tangente

$$t(h) = h \quad \text{und damit} \quad r(h) = \sin h - h = h(\cos(\vartheta h) - 1) \text{ mit } \vartheta \in (0, 1).$$

Für $|h| \leq 1/10$ gilt dann die Abschätzung

$$|\sin h - h| \leq |h| \cdot (1 - \cos h) \leq |h| \cdot (1 - \cos \frac{1}{10}) < \frac{|h|}{200}.$$

11.10 Regel von l'Hospital:⁴⁷ Wenn f und g stetige Funktionen sind, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, \quad \text{falls } g(x_0) \neq 0.$$

Im Fall $f(x_0) \neq 0, g(x_0) = 0$ existiert kein Grenzwert. Wenn aber f und g an der Stelle x_0 differenzierbar sind, dann erhält man für $f(x_0) = g(x_0) = 0$ gemäß 11.6 mit $x = x_0 + h$

$$\begin{aligned} f(x) &= hf'(x_0) + r_1(h) \\ g(x) &= hg'(x_0) + r_2(h) \end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf'(x_0) + r_1(h)/h}{hg'(x_0) + r_2(h)/h} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}, \quad \text{falls } g'(x_0) \neq 0.$$

Allgemeiner gilt: Wenn f und g differenzierbare Funktionen sind und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Diese Regeln gelten auch vollkommen analog für Grenzwerte der Form $x \rightarrow \infty$.

⁴⁷Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital, 1661–1704

11.11 Beispiel:

▪

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

▪

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

▪

$$\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \downarrow 0} (-x) = 0$$

▪

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{\cos(2 - 2x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x - 1}{2 \sin(2 - 2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1/x^2}{-4 \cos(2 - 2x)} = \frac{1}{4}$$

11.12 Stetige Differenzierbarkeit: Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig differenzierbar*, wenn sie differenzierbar ist und die Ableitungsfunktion f' zudem stetig ist.

11.13 Beispiel:

- Die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|^3}$, $x \in \mathbb{R}$, ist stetig differenzierbar, denn die Ableitungsfunktion

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist stetig.

- Die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar mit

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Sie ist aber nicht stetig differenzierbar, da der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ nicht existiert.

Das hier zu beobachtende Verhalten ist typisch. Ableitungsfunktionen differenzierbarer Funktionen weisen niemals Sprungstellen auf. Unstetigkeiten sind vielmehr stets durch ein oszillierendes Verhalten der Ableitungsfunktionen bedingt, das zu einer Nichtexistenz von Grenzwerten führt.

11.14 Höhere Ableitungen: Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *k-mal differenzierbar*, wenn die Ableitungen in der Rekursion

$$\begin{aligned} f^{(0)} &:= f \\ f^{(n)} &:= \left(f^{(n-1)} \right)' \end{aligned}$$

für alle $n = 1, \dots, k$ existieren. Die Funktion f heißt *unendlich oft differenzierbar*, wenn diese Ableitungen für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren. Man nennt $f^{(k)}$ die *k-te Ableitung* von f und schreibt auch

$$f' = f^{(1)}, \quad f'' = f^{(2)}, \quad f''' = f^{(3)}$$

für Ableitungen niedriger Ordnung. Andere gebräuchliche Schreibweisen sind

$$f^{(k)} = D^k f = \frac{d^k f}{dx^k}.$$

Die Funktion f heißt *k-mal stetig differenzierbar*, wenn die Funktion $f^{(k)}$ stetig ist. Die Menge aller dieser Funktionen wird mit $C^k(I)$ bezeichnet. Insbesondere ist $C^0(I)$ die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall I . Die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen wird mit $C^\infty(I)$ bezeichnet.

11.15 Beispiel [→ 11.13]:

- Polynome, rationale Funktionen und die Funktionen $\exp, \ln, \sin, \cos, \tan$ sind auf ihrem Definitionsgebiet unendlich oft differenzierbar. Es gilt z.B.

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für } k > n \end{cases}$$

$$f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$$

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x$$

- Für die *Stutzfunktion*

$$H_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

vom Grad n gilt $H_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$. Insbesondere erhält man für $n = 0$ die Heaviside-Funktion [→ 10.5]. Diese ist unstetig.

- Die Funktion f gemäß Beispiel 11.13 ist stetig differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar, $f \in C^1(\mathbb{R})$.
- Die Funktion g gemäß Beispiel 11.13 ist stetig, aber nicht stetig differenzierbar, $g \in C^0(\mathbb{R})$.

12 Integration

Das Differenzieren, also die Bestimmung der Ableitung einer gegebenen Funktion, gestaltet sich mit den bekannten Regeln meist recht einfach. Der umgekehrte Prozess, das sogenannte *Integrieren*, bedeutet technisch gesehen, eine sogenannte *Stammfunktion* zu finden, deren Ableitung mit der gegebenen Funktion übereinstimmt. Diese Aufgabe ist in der Regel sehr viel schwieriger. Es gibt zwar einige grundlegende Methoden und umfangreiche Formelsammlungen, doch ist es in vielen Fällen gar nicht möglich, eine Stammfunktion explizit anzugeben, obwohl sie theoretisch gesehen immer existiert, wenn die gegebene Funktion stetig ist.

Integrale lassen sich anschaulich gut als Flächeninhalte verstehen. In den Anwendungen berechnet man damit aber auch eine Vielzahl anderer Dinge, wie beispielsweise die zurückgelegte Wegstrecke bei gegebener Geschwindigkeit oder die Energie bei gegebener Kraft. Der hier beschriebene Zugang zum Integralbegriff weicht von den in Lehrbüchern üblichen Darstellungen ab, hat aber den Vorteil, dass er ohne komplizierte Grenzwerte von Unter- und Obersummen auskommt, die in der Praxis ohnehin wenig relevant sind.

12.1 Stammfunktion: Eine stetige Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion von f* auf dem Intervall I , wenn

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für fast alle } x \in I.$$

Dabei heißt „fast alle“, dass es endlich viele Stellen $x_1, \dots, x_n \in I$ geben darf, an denen F nicht differenzierbar ist oder an denen F' nicht mit f übereinstimmt. Insbesondere muss die Funktion f an diesen Stellen noch nicht einmal definiert sein.

12.2 Beispiel:

▪

$$f(x) = 2x, \quad F(x) = x^2$$

▪

$$f(x) = 2x, \quad F(x) = (x - 1)(x + 1)$$

▪

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 7 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}, \quad F(x) = |x|$$

▪

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}, \quad F(x) = 2\sqrt{|x|} \tag{12.1}$$

Man beachte, dass die Funktion F auf ganz \mathbb{R} definiert ist, während f an der Stelle $x = 0$ eine Definitionslücke hat.

12.3 Mehrdeutigkeit: Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann ist auch $\tilde{F} := F + c$ eine Stammfunktion, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Umgekehrt gilt: Wenn F und \tilde{F} Stammfunktionen von f sind, dann ist $\tilde{F}' - F' = 0$ und damit $\tilde{F} - F$ nach dem Mittelwertsatz konstant.

12.4 Unbestimmtes Integral: Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f wird als das *unbestimmte Integral* von f bezeichnet,

$$\int f := \{F : F \text{ ist Stammfunktion von } f\}.$$

Wenn F eine beliebige Stammfunktion von f ist, dann gilt gemäß 12.3

$$\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Meist wird das unbestimmte Integral nicht als Menge, sondern in der Form

$$\int f = F + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

geschrieben. Gelegentlich wird in Formelsammlungen oder in Computeralgebra-Systemen (z.B. Maple) auf die Angabe der Integrationskonstanten c sogar ganz verzichtet. Wenn die unabhängige Veränderliche notiert werden soll, schreibt man

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Man bezeichnet dann x auch als *Integrationsvariable* und dx als *Differenzial*.

12.5 Beispiel:

- $$\int e^{2x} dx = e^{2x}/2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- $$\int \cos = \sin + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

12.6 Regeln:

- *Linearität:* Für reelle Zahlen α, β gilt

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

- *Partielle Integration:* (vgl. Produktregel)

$$\int f g' = f g - \int f' g$$

- *Substitution:* (vgl. Kettenregel)

$$\int (f \circ g) g' = F \circ g \quad \text{mit} \quad F = \int f$$

12.7 Beispiel:

- Linearität:

$$\int (\sin x + 2/x) dx = -\cos x + 2 \ln x + c, \quad x > 0$$

- Partielle Integration: Mit $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = 1$ gilt für $x > 0$

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x/x dx = x \ln x - x + c.$$

- Substitution: Mit $u = g(x) = x^2$ gilt

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{u + 1} du = \ln(u + 1) + c = \ln(x^2 + 1) + c.$$

12.8 Wichtige Stammfunktionen:

f	F
x^α	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
e^x	e^x
$\ln x$	$x \ln x - x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

Es ist darauf zu achten, dass die Funktion F auf dem betrachteten Intervall definiert und stetig ist. Beispielsweise ist die Funktion $F(x) = -1/x$ eine Stammfunktion von $f(x) = 1/x^2$ auf dem Intervall $I = [1, 5]$, nicht aber auf Intervall $I = [-1, 1]$.

12.9 Lineare Transformation: Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann ist $\frac{1}{a}F(ax + b)$ eine Stammfunktion von $f(ax + b)$, sofern $a \neq 0$ und b reelle Zahlen sind. Dies bestätigt man entweder direkt durch Differenzieren nach der Kettenregel oder durch Anwendung der Substitution $g(x) = ax + b$. Beispielsweise ist

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x/2)^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan(x/2) + c.$$

Achtung: Das Teilen durch die innere Ableitung funktioniert nur bei Argumenten vom Typ $ax + b$.

12.10 Partialbruchzerlegung: Integrale der Form

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

mit Polynomen

$$p(x) = p_0 + p_1x + \cdots + p_mx^m, \quad q(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n, \quad q_n \neq 0,$$

lassen sich durch Partialbruchzerlegung bestimmen. Wir betrachten zunächst den Fall $m < n$.

1. Man bestimmt alle Nullstellen x_1, \dots, x_n von q und erhält damit die Faktorisierung

$$q(x) = q_n(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

2. Wenn alle Nullstellen verschieden sind, macht man den Ansatz

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}.$$

3. Man multipliziert den Ansatz mit $q(x)$ und erhält dann die unbekanntenen Koeffizienten A_1, \dots, A_n einfach durch Einsetzen der Nullstellen.
4. Für das Integral ergibt sich damit im Fall reeller Nullstellen

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = A_1 \ln |x - x_1| + \cdots + A_n \ln |x - x_n| + c.$$

Das Verfahren besitzt die folgenden Modifikationen:

- Im Fall $m \geq n$ liefert eine Polynomdivision

$$\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)},$$

wobei r ein Polynom vom Grad $m - n$ und der Grad \tilde{m} von \tilde{p} kleiner als n ist.

- Wenn z.B. $x_1 = \cdots = x_\ell$ eine mehrfache Nullstelle ist, dann sind die zugehörigen Summanden im Ansatz zu ersetzen durch

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_\ell}{(x - x_1)^\ell}.$$

In diesem Fall ist die Koeffizientenbestimmung durch Einsetzen der Nullstellen nur für A_ℓ möglich. Die übrigen Koeffizienten können beispielsweise durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

- Wenn es komplexe Nullstellen gibt, dann ist das Verfahren im Prinzip ebenfalls anwendbar. Es ist dann lediglich bei der Bildung der Stammfunktion der Partialbrüche der *komplexe Logarithmus*

$$\ln_{\mathbb{C}}(x - x_k) := \ln |x - x_k| + i \arg(x - x_k)$$

zu verwenden. Da komplexe Nullstellen und damit auch die zugehörigen Partialbrüche immer in konjugiert komplexen Paaren auftreten, heben sich die Imaginärteile stets weg. Alternativ zur Verwendung komplexer Logarithmen kann man im Ansatz auch konjugiert komplexe Terme in der Form

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - \bar{x}_1} \longrightarrow \frac{B_1 + B_2x}{x^2 - 2x \operatorname{Re} x_1 + |x_1|^2}$$

zu einem reellen Summanden mit quadratischem Nenner zusammenfassen. Dessen Integral lässt sich dann mit Hilfe der reellen Logarithmus- und der Arcustangens-Funktion angeben.

12.11 Beispiel:

- Für

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 - x + 3}{x^2 - x - 2}$$

liefert Polynomdivision zunächst

$$\frac{p(x)}{q(x)} = x + 1 + \frac{2x + 5}{x^2 - x - 2}.$$

Wir betrachten nun nur den letzten Summanden. Die Nullstellen des Nenners sind $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$, also $q(x) = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Der Ansatz

$$\frac{2x + 5}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{x + 1}$$

liefert nach Multiplikation mit $q(x)$ die Gleichung

$$2x + 5 = (x + 1)A_1 + (x - 2)A_2.$$

Einsetzen der Nullstelle $x_1 = 2$ liefert $A_1 = 3$, und $x_2 = -1$ liefert $A_2 = -1$. Also ist

$$\frac{p(x)}{q(x)} = x + 1 + \frac{3}{x - 2} - \frac{1}{x + 1}$$

und

$$\int \frac{x^3 - x + 3}{x^2 - x - 2} dx = \frac{x^2}{2} + x + 3 \ln |x - 2| - \ln |x + 1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- Für

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2 + 4}{x^3 - 2x^2}$$

erhält man die Nullstellen $x_1 = x_2 = 0$ und $x_3 = 2$, also $q(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2)$.
Der Ansatz

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x - 2}$$

liefert nach Multiplikation mit $q(x)$ die Gleichung

$$x^2 + 4 = x(x - 2)A_1 + (x - 2)A_2 + x^2A_3.$$

Einsetzen der Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_3 = 2$ liefert $A_2 = -2$ und $A_3 = 2$. Damit erhält der x^2 -Term auf der rechten Seite den Koeffizienten $A_1 + 2$ und auf der linken Seite den Koeffizienten 1. Also ist $A_1 = -1$. Wir erhalten

$$\frac{p(x)}{q(x)} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x - 2}$$

und

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^3 - 2x^2} dx = -\ln|x| + \frac{2}{x} + 2\ln|x - 2| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

12.12 Bestimmtes Integral: Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann bezeichnet man die Zahl

$$\int_a^b f(x) dx := F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a)$$

als das *bestimmte Integral* der Funktion f mit Integrationsgrenzen a, b . Sei $\tilde{F} = F + c$ eine andere Stammfunktion von f , dann erhält man ebenfalls

$$\int_a^b f(x) dx = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = (F(b) - c) - (F(a) - c) = F(b) - F(a).$$

Der Wert des bestimmten Integrals ist also nicht von der Wahl der Stammfunktion abhängig.

12.13 Regeln:

- *Linearität:* Für reelle Zahlen α, β gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- *Partielle Integration:*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

- *Substitution vom Typ $u = g(x)$:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Hier gilt also formal $du = g'(x) dx$.

- *Substitution vom Typ $x = h(u)$:*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f(h(u))h'(u) du.$$

Hier gilt also formal $dx = h'(u) du$. **Achtung:** Diese Regel gilt nur, wenn h eine auf dem Intervall $[a, b]$ invertierbare Funktion ist.

12.14 Beispiel:

- Linearität:

$$\int_0^\pi (\sin x + 2x) dx = \int_0^\pi \sin x dx + 2 \int_0^\pi x dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi + x^2 \Big|_0^\pi = 2 + \pi^2$$

- Partielle Integration:

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

- Substitution vom Typ $g(x) = u$: Zur Berechnung von $\int_0^2 x \cos(x^2) dx$ setzt man

$$g(x) = x^2 = u, \quad g'(x) = 2x, \quad 2x dx = du.$$

Die Integrationsgrenzen transformieren sich gemäß

$$x = 0 \Rightarrow u = 0^2 = 0, \quad x = 2 \Rightarrow u = 2^2 = 4.$$

Damit erhält man

$$\int_{x=0}^2 x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{u=0}^4 \cos(u) du = \frac{1}{2} \sin(u) \Big|_{u=0}^4 = \frac{1}{2} \sin(4).$$

- Substitution vom Typ $x = h(u)$: Zur Berechnung von $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ setzt man

$$x = h(u) = \sin(u), \quad h'(u) = \cos(u), \quad dx = \cos(u) du.$$

Dabei verwendet man das Definitionsgebiet $u \in [0, \pi/2]$, sodass die Funktion h injektiv ist. Die Integrationsgrenzen transformieren sich gemäß

$$x = 0 \Rightarrow u = \arcsin(0) = 0, \quad x = 1 \Rightarrow u = \arcsin(1) = \pi/2.$$

Damit erhält man

$$\int_{x=0}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{u=0}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(u)} \cos(u) du = \int_{u=0}^{\pi/2} \cos^2(u) du = \pi/4.$$

Merke: Sofern die Intervalllänge $b - a$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi/2$ ist, gilt

$$\int_a^b \sin^2 x dx = \int_a^b \cos^2 x dx = \frac{b-a}{2}, \quad b-a = k\pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dies liegt daran, dass beide Integranden harmonische Schwingungen um den Mittelwert $1/2$ sind.

12.15 Variable obere Integrationsgrenze: Definiert man die Funktion $F_a : I \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß

$$F_a(t) := \int_a^t f(x) dx, \quad t \in I,$$

und ist F eine Stammfunktion von f , dann gilt $F_a(t) = F(t) - F(a)$. Folglich ist auch F_a eine Stammfunktion von f , die durch $F_a(a) = 0$ charakterisiert ist. Für die Ableitung von F_a erhält man

$$F'_a(t) = F'(t) = f(t).$$

Merke: Die Ableitung des bestimmten Integrals nach der Obergrenze ist der Integrand.

12.16 Additivität: Es gilt

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

und insbesondere

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0.$$

12.17 Monotonie: Sei $a \leq b$ und

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b],$$

dann gilt aufgrund des Mittelwertsatzes

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Ein wichtiger Spezialfall hiervon ist die *Dreiecksungleichung*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

12.18 Flächeninhalt: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir betrachten die Punktmenge, die in x -Richtung durch die Abszissen a und b und in y -Richtung durch die x -Achse und den Graphen von f begrenzt ist. Wenn wir dieser Menge in sinnvoller Weise einen (orientierten) Flächeninhalt $S_a^b f$ zuweisen wollen, dann muss dieser offensichtlich folgende Eigenschaften haben:

- *Additivität:* $S_a^b f + S_b^c f = S_a^c f$
- *Monotonie:* Aus $f \leq g$ und $a \leq b$ folgt $S_a^b f \leq S_a^b g$.
- *Konstante:* Wenn $f(x) = f_0$ eine konstante Funktion ist, dann gilt $S_a^b f = f_0(b - a)$.

Tatsächlich ist allein durch diese drei Vorgaben der Ausdruck $S_a^b f$ eindeutig bestimmt:

Sei $F_a(t) := S_a^t f$, dann gilt aufgrund der Additivität

$$F_a(t+h) - F_a(t) = S_a^{t+h} f - S_a^t f = S_t^{t+h} f.$$

Sei nun $h > 0$ beliebig gewählt (für $h \leq 0$ verlaufen die Überlegungen vollkommen analog). Dann definieren wir die konstanten Funktionen f_{\min}^h und f_{\max}^h durch das Minimum bzw. das Maximum der Funktion f auf dem Intervall $[t, t+h]$,

$$f_{\min}^h := \min\{f(x) : t \leq x \leq t+h\}, \quad f_{\max}^h := \max\{f(x) : t \leq x \leq t+h\}.$$

Es ist also

$$f_{\min}^h \leq f(x) \leq f_{\max}^h \quad \text{für alle } x \in [t, t+h]$$

und damit folgt aufgrund der Monotonie

$$S_t^{t+h} f_{\min}^h \leq F_a(t+h) - F_a(t) \leq S_t^{t+h} f_{\max}^h.$$

Da es sich auf der linken und rechten Seite der Ungleichung um konstante Funktionen handelt, erhalten wir

$$hf_{\min}^h \leq F_a(t+h) - F_a(t) \leq hf_{\max}^h.$$

Wenn nun h gegen 0 geht, folgt aus der Stetigkeit von f

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_{\min}^h = \lim_{h \rightarrow 0} f_{\max}^h = f(t)$$

und damit

$$F_a'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(t+h) - F_a(t)}{h} = f(t).$$

F_a muss also eine Stammfunktion von f sein. Da außerdem $F_a(a) = S_a^a f = 0$ gilt, folgt

$$S_a^t f = F_a(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

Diesen Zusammenhang nennt man auch den *Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung*. Insbesondere ergibt sich für den Flächeninhalt zwischen den Abszissen a und b

$$S_a^b f = \int_a^b f(x) dx.$$

12.19 Andere Interpretationen des Integrals: In der vorangegangenen Herleitung des Flächeninhalts als bestimmtes Integral wurden nur die Additivität und die Monotonie sowie die Information über konstante Funktionen ausgenutzt. Diese drei Eigenschaften sind bei der Betrachtung des Flächeninhalts besonders offensichtlich, doch charakterisieren sie in vollkommen analoger Weise zahlreiche andere Phänomene:

- Sei $f(x)$ die Geschwindigkeit eines Teilchens zum Zeitpunkt x und $S_a^b f$ der zwischen den Zeitpunkten a und b zurückgelegte Weg, dann gilt:
 - *Additivität*, zurückgelegte Wegstrecken addieren sich.
 - *Monotonie*, wer schneller fährt, kommt weiter.
 - *Konstante Geschwindigkeit* $f(x) = f_0$ liefert $S_a^b f = f_0(b-a)$, das ist die Definition der Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung.
- Sei $f(x)$ die spezifische Dichte eines Drahtes mit Querschnitt 1 an der Stelle x und $S_a^b f$ die Masse des Drahtstücks zwischen den Punkten a und b , dann gilt:
 - *Additivität*, Teilmassen addieren sich.
 - *Monotonie*, was überall dichter ist, ist insgesamt schwerer.
 - *Konstante Dichte* $f(x) = f_0$ liefert $S_a^b f = f_0(b-a)$, das ist die Definition der Dichte eines homogenen Materials.
- Sei $f(x)$ die Kraft, die auf ein Teilchen der Masse 1 an der Stelle x wirkt und $S_a^b f$ die Energie des Teilchens, nachdem es die Strecke von a nach b zurückgelegt hat, dann gilt:

- *Additivität*, Teilenergien addieren sich.
- *Monotonie*, größere Kraft ergibt höhere Energie.
- *Konstante Kraft* $f(x) = f_0$ liefert $S_a^b f = f_0(b - a)$, das ist die Definition der Energie bei konstanter Krafteinwirkung.

In allen drei Fällen ergibt sich der Zusammenhang

$$S_a^b f = \int_a^b f(x) dx.$$

12.20 Existenz einer Stammfunktion: Wir wollen nun zeigen, dass jede stetige Funktion tatsächlich eine Stammfunktion besitzt. Sei also $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine Funktion u , die stückweise konstant und überall kleiner oder gleich f ist, heißt *untere Treppenfunktion* von f . Sind genauer die Abszissen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ sowie die Funktionswerte u_0, \dots, u_n gegeben, dann hat die zugehörige Treppenfunktion die Form

$$u(x) = u_i \leq f(x) \quad \text{für} \quad x_i \leq x < x_{i+1}.$$

Wir definieren nun in naheliegender Weise die *Untersumme*

$$S_a^b u := \int_a^b u(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x_{i+1} - x_i).$$

Die Menge aller unteren Treppenfunktionen bezeichnen wir mit U_f . Sei M das Maximum von f auf dem Intervall $[a, b]$, dann gilt sicher $S_a^b u \leq M(b - a)$ für alle $u \in U_f$. Also ist die Menge aller Werte $S_a^b u$ mit $u \in U_f$ nach oben beschränkt und damit ein Intervall der Form

$$\{S_a^b u : u \in U_f\} = (-\infty, s) \quad \text{oder} \quad \{S_a^b u : u \in U_f\} = (-\infty, s].$$

Wenn f eine konstante Funktion $f(x) = f_0$ ist, dann erhalten wir den Wert $s = S_a^b f = f_0(b - a)$. Wir bezeichnen nun ganz allgemein für eine stetige Funktion f die Obergrenze des Intervalls der Untersummen mit

$$S_a^b f := s.$$

Man überzeugt sich leicht, dass $S_a^b f$ sowohl die Eigenschaft der Additivität als auch der Monotonie hat. Somit ist $F_a(t) := S_a^t f$ eine Stammfunktion von f . Vollkommen analoge Überlegungen lassen sich für obere Treppenfunktionen und die daraus resultierenden Obersummen anstellen. Insbesondere sieht man leicht, dass die Obergrenze der Untersummen mit der Untergrenze der Obersummen übereinstimmt, da beide Größen auf dieselbe Stammfunktion von f führen.

12.21 Uneigentliches Integral: Man bezeichnet Integrale als *uneigentlich*, wenn entweder der Integrand oder das Integrationsgebiet unbeschränkt sind. Der Fall unbeschränkter Integranden erfordert nach dem hier gewählten Zugang im Prinzip keine gesonderte Behandlung. Beispielsweise ist gemäß (12.1)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2.$$

Dagegen existiert das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

nicht, da sich die Stammfunktion $\ln x$ nicht stetig in den Ursprung fortsetzen lässt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass der Grenzwert

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \downarrow 0} \ln x \Big|_a^1 = - \lim_{a \downarrow 0} \ln a$$

nicht existiert. Für

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

erhält man zunächst die Stammfunktion $-1/\ln x$, die an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist. Allerdings existiert der Grenzwert $\lim_{x \downarrow 0} 1/\ln x = 0$, sodass die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} -1/\ln x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig und damit eine Stammfunktion von f ist. Damit erhält man

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x} = F(x) \Big|_0^{1/2} = -\frac{1}{\ln(1/2)} - 0 = \frac{1}{\ln 2}.$$

Die Grenzwertbildung kann auch direkt in die Integration einbezogen werden,

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{a \downarrow 0} \left(\frac{-1}{\ln x} \Big|_a^{1/2} \right) = -\frac{1}{\ln(1/2)} - \lim_{a \downarrow 0} \frac{-1}{\ln a} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Achtung: Die Rechnung

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$$

ist falsch, da die vermeintliche Stammfunktion $F(x) = -1/x$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ nicht durchgängig definiert ist und sich auch nicht stetig ergänzen lässt.

Im Fall unbeschränkter Integrationsgebiete erklärt man die zugehörigen uneigentlichen Integrale mit Hilfe von Grenzwerten, sofern diese existieren:

- Sei $F : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f , dann ist

$$\int_a^\infty f(x) dx := F(x) \Big|_a^\infty := \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(a).$$

- Sei $F : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f , dann ist

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := F(x) \Big|_{-\infty}^b := F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a).$$

- Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f , dann ist

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := F(x) \Big|_{-\infty}^\infty := \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a).$$

12.22 Beispiel:

- Für $\alpha > 1$ ist

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Für $\alpha \leq 1$ existiert das uneigentliche Integral nicht. Man beachte die Ähnlichkeit zur Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ [→ 9.4].

- Für $\alpha < 1$ ist

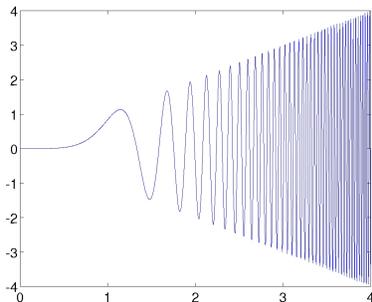
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \Big|_0^1 = \frac{1}{1-\alpha} (1 - 0) = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Für $\alpha \geq 1$ existiert das uneigentliche Integral nicht.

▪

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b - \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan a \\ &= \pi/2 - (-\pi/2) = \pi \end{aligned}$$

12.23 Existenzkriterien: Anders als bei der Existenz von Grenzwerten von Reihen können uneigentliche Integrale vom Typ $\int_a^{\infty} f(x) dx$ selbst dann existieren, wenn der Integrand unbeschränkt anwächst. Es ist beispielsweise (ohne dass wir das hier nachrechnen könnten)



$$\int_0^{\infty} x \sin(x^4) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{8}.$$

Vollkommen analog zur Untersuchung von Reihen sind aber die folgenden Vergleichskriterien:

- *Konvergente Majorante:* Wenn $\int_a^{\infty} f(x) dx$ konvergiert und

$$|g(x)| \leq f(x) \quad \text{für alle } x \geq x_0$$

für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dann konvergiert auch $\int_a^{\infty} g(x) dx$.

- *Divergente Minorante:* Wenn $\int_a^{\infty} f(x) dx$ divergiert und

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \geq x_0$$

für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dann divergiert auch $\int_a^{\infty} g(x) dx$.

Vollkommen analoge Kriterien gelten auch für uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden.

12.24 Beispiel:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

existiert, da

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

und $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ nach Beispiel 12.22 existiert.

12.25 L^2 -Skalarprodukt und L^2 -Norm: Das Skalarprodukt für Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als Summe der Produkte entsprechender Komponenten, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_i x_i y_i$. In ähnlicher Weise definiert man für reelle Funktionen f, g und das Intervall $I \subset \mathbb{R}$ das L^2 -Skalarprodukt als Integral der Produkte entsprechender Funktionswerte,

$$\langle f, g \rangle := \int_I f(x)g(x) dx.$$

Genauso, wie die euklidische Norm in \mathbb{R}^n durch $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ gegeben ist, definiert man die L^2 -Norm einer reellen Funktion f auf dem Intervall I durch

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Die Menge aller Funktionen f , für die das Integral $\langle f, f \rangle = \int_I f^2$ und damit $\|f\|$ existiert bildet den *Lebesgue-Raum*⁴⁸ $L^2(I)$. Wie man zeigen kann, ist dies ein Vektorraum [→ 2.1]. Das heißt, man kann Funktionen aus $L^2(I)$ addieren und skalar multiplizieren, ohne den Raum zu verlassen. Analog zu den bekannten Formeln für Vektoren in \mathbb{R}^n [→ 2.4, 2.7] gilt für $f, g, h \in L^2(I)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ unter anderem

$$\begin{array}{ll} \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle & \|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\| \\ \langle f, g+h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle & |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| \\ \langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle & \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \end{array}$$

Zwei Funktionen f, g heißen *orthogonal* auf I , wenn $\langle f, g \rangle = 0$. Auch wenn der Begriff der Orthogonalität hier keine anschauliche Bedeutung hat, ist er für verschiedene Anwendungen doch ebenso wichtig, wie seine Entsprechung für Vektoren in \mathbb{R}^n . Insbesondere ist man daran interessiert, orthogonale oder orthonormale Basen für gewisse lineare Teilräume zu konstruieren, beispielsweise für den Raum der Polynome vom Grad $\leq n$.

12.26 Beispiel:

- Für das Intervall $I = [0, 2\pi]$ und die Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \cos x$ gilt

$$\langle f, g \rangle = 0, \quad \|f\| = \|g\| = \sqrt{\pi}.$$

Sinus und Cosinus sind also orthogonal auf $[0, 2\pi]$. Wählt man ein anderes Intervall, gilt dies natürlich nicht unbedingt.

⁴⁸Henri Léon Lebesgue, 1875-1941

- Für das Intervall $I = (0, 1]$ und die Funktion $f_\alpha(x) = 1/x^\alpha$ erhält man $\|f_\alpha\|^2 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{2\alpha}}$. Es ist also $f_\alpha \in L^2(I)$ genau dann, wenn $\alpha < 1/2$. In diesem Fall gilt $\|f_\alpha\| = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}}$.
- Die *Legendre-Polynome*⁴⁹

$$\ell_0(x) = 1, \quad \ell_1(x) = x, \quad \ell_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad \ell_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2},$$

siehe Abbildung 21, bilden eine orthogonale Basis des Raums der Polynome vom Grad ≤ 3 auf dem Intervall $I = [-1, 1]$, d.h., es gilt

$$\langle \ell_j, \ell_k \rangle = 0 \quad \text{für } j \neq k.$$

Mithilfe einer einfachen Rekursionsformel kann man die Folge der Legendre-Polynome fortsetzen und damit auch orthogonale Basen für Polynomräume höheren Grades konstruieren. Sucht man die beste Approximation einer Funktion f auf dem Intervall $[-1, 1]$ durch ein kubisches Polynom p in dem Sinne, dass der L^2 -Fehler $\|f - p\|$ minimal wird, dann ist, wie man zeigen kann [\rightarrow 2.35], die Lösung durch die Formel

$$p(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{\langle f, \ell_k \rangle}{\langle \ell_k, \ell_k \rangle} \ell_k(x)$$

gegeben⁵⁰. Konkret erhält man z.B. für $f(x) = \sin(\pi x/2)$ das Ergebnis

$$p(x) = \frac{12}{\pi^2} \ell_1(x) + \frac{168(\pi^2 - 10)}{\pi^4} \ell_3(x) \approx 1.5532x - 0.5622x^3.$$

Wie in Abbildung 21 in der Mitte zu sehen, sind die Graphen von f und p visuell kaum zu unterscheiden. Tatsächlich ist der Fehler $f - p$ betragsmäßig nirgends größer als 0.01. Seine L^2 -Norm ist $\|f - p\| \approx 0.004$ und damit so klein wie möglich.

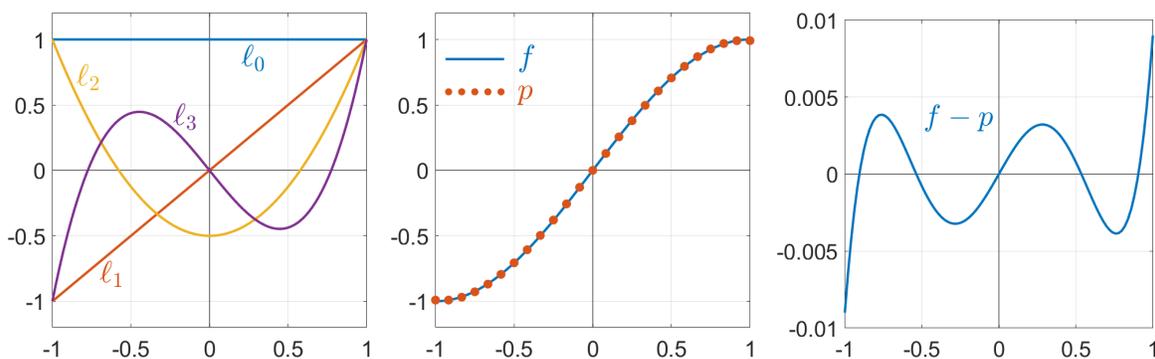


Abbildung 21: Legendre-Polynome, Approximation p der Funktion f und Fehler $f - p$.

⁴⁹Adrien-Marie Legendre, 1752–1833

⁵⁰Würde man stattdessen die Monomform $p(x) = a_0 + \dots + a_3x^3$ verwenden, dann müsste anstelle der Auswertung dieser expliziten Formel ein lineares Gleichungssystem der Größe 4×4 zur Bestimmung der Koeffizienten gelöst werden.

13 Taylor-Reihen

Reihen, deren Partialsummen Polynome sind, nennt man Potenzreihen. Anschaulich gesprochen handelt es sich dabei also um Polynome mit unendlich hohem Grad. Potenzreihen bilden einen einheitlichen Rahmen, um Funktionen aller Art (\exp, \sin, \cos, \dots) zu definieren. Elementare Operationen wie Addieren, Differenzieren und Integrieren sind für Potenzreihen ebenso einfach wie für Polynome.

Umgekehrt kann man die Frage stellen, ob sich eine gegebene Funktion f in Form einer Potenzreihe darstellen lässt. Die Antwort darauf liefert die sogenannte *Taylor-Reihe*⁵¹ Tf . Diese stimmt in der Regel zumindest lokal mit f überein. Betrachtet man endliche Partialsummen, also Taylor-Polynome, dann stellen diese auf einem Teilbereich des Definitionsgebiets eine Approximation der gegebenen Funktion dar, die um so genauer ist, je höher der gewählte Grad ist. Die Abweichung lässt sich mithilfe eines Restglieds abschätzen. Interessiert man sich beispielsweise für das Verhalten der recht komplizierten Funktion

$$f(x) = e^{\sin(\ln x)}$$

für x -Werte in der Nähe des Punktes $x_0 = 1$, dann ist das zugehörige kubische Taylor-Polynom

$$T_3 f(x) = 1 + (x - 1) - \frac{1}{6}(x - 1)^3.$$

Dieser einfache Ausdruck liefert Funktionswerte, die im Bereich $x \in [0.8, 1.2]$ um weniger als $2e-4$ vom exakten Wert abweichen. Der Fehler macht sich also erst in der vierten Nachkommastelle bemerkbar, was für viele Anwendungen ausreichen dürfte. Nimmt man noch zwei weitere Terme hinzu, so liefert das quintische Taylor-Polynom

$$T_5 f(x) = 1 + (x - 1) - \frac{1}{6}(x - 1)^3 + \frac{1}{12}(x - 1)^4 - \frac{1}{30}(x - 1)^5$$

bereits eine Genauigkeit von $2e-6$.

13.1 Polynom in Monomform: Die Funktion

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_d(x - x_0)^d = \sum_{n=0}^d a_n(x - x_0)^n$$

heißt *Polynom in Monomform* mit *Koeffizienten* a_n und *Entwicklungspunkt* x_0 . Falls $a_d \neq 0$, ist d der *Grad* von p . Für die k -te Ableitung von p erhalten wir

$$p^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^d \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x - x_0)^{n-k}. \quad (13.1)$$

Insbesondere ist $p^{(k)}(x) = 0$ für $k > d$. Weiterhin liefert diese Formel den einfachen Zusammenhang

$$p^{(k)}(x_0) = k! a_k \quad (13.2)$$

zwischen den Koeffizienten und den Ableitungen im Entwicklungspunkt x_0 .

⁵¹Brook Taylor, 1685–1731

13.2 Potenzreihe: Wir betrachten nun Reihen, deren Partialsummen Polynome in Monomform sind. Eine Reihe der Form

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

heißt *Potenzreihe* mit *Entwicklungspunkt* x_0 und *Koeffizienten* a_n . Für das Konvergenzverhalten gilt Folgendes: Es gibt eine reelle Zahl $R \geq 0$, genannt *Konvergenzradius*⁵², sodass

- $p(x)$ konvergiert für alle x mit $|x - x_0| < R$,
- $p(x)$ divergiert für alle x mit $|x - x_0| > R$.

Falls die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann setzen wir formal $R = \infty$. Aus dem Wurzel- bzw. Quotientenkriterium für Reihen folgt: Wenn einer der beiden Grenzwerte

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right)^{-1}$$

existiert, so ist er gleich dem Konvergenzradius. Wenn der Grenzwert in der Klammer 0 ist, ist $R = \infty$. Falls die Folge in der Klammer unbeschränkt wächst, dann ist $R = 0$. Das Verhalten für $|x - x_0| = R$, also die Randpunkte $x = x_0 \pm R$, muss gesondert untersucht werden. Die Menge aller x , für die die Potenzreihe p konvergiert, heißt *Konvergenzbereich* und wird mit I_p bezeichnet.

13.3 Beispiel:

- Für $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ erhält man $R = \infty$ und $I_p = \mathbb{R}$.
- Für $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ erhält man $R = 1$ und $I_p = (-1, 1)$ (vgl. 9.2).
- Für $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (x - 2)^n$ kann man den Konvergenzradius nach beiden Formeln berechnen,

$$R = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} \right)^{-1} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^n} \right)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Im rechten Randpunkt $x = 2 + R = 5/2$ erhält man eine divergente und im linken Randpunkt $x = 2 - R = 3/2$ eine nach dem Leibniz-Kriterium konvergente Reihe. Die Potenzreihe konvergiert also für $x \in I_p = [3/2, 5/2)$.

- Für $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ erhält man $R = 0$ und somit $I_p = \{0\}$.
- Für $p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^{3k}$, also

$$p(x) = 2x^3 + 2x^6 + \frac{8}{3}x^9 + 4x^{12} + \cdots,$$

⁵²Man kann Potenzreihen auch für komplexe Argumente und Entwicklungspunkte betrachten. In diesem Fall konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$. Diese liegen also in einem Kreis um den Mittelpunkt z_0 mit Radius R . Dies erklärt den Begriff *Konvergenzradius*.

kann man den Konvergenzradius nach keiner der beiden Formeln berechnen, denn hier ist die Koeffizientenfolge der Potenzen von x

$$0, 0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 0, \frac{8}{3}, 0, 0, 4, 0, 0, \frac{32}{5}, 0, 0, \dots$$

und somit existiert keiner der beiden Grenzwerte. Man kann sich hier behelfen, indem man $y = x^3$ substituiert. Man erhält $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} y^k$ mit der Koeffizientenfolge

$$0, 2, 2, \frac{8}{3}, 4, \frac{32}{5}, \dots$$

für die Potenzen von y . Wie im dritten Beispiel ergeben die Formeln, dass die Reihe in y den Konvergenzradius $R_y = \frac{1}{2}$ besitzt. Wegen $y = x^3$ ist der Konvergenzradius der ursprünglichen Reihe damit $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

13.4 Eigenschaften:

- Jede Potenzreihe konvergiert für $x = x_0$ gegen den Wert $p(x_0) = a_0$.
- Für $|x - x_0| < R$ ist die Funktion $p(x)$ beliebig oft stetig differenzierbar. Die Ableitungen können durch gliedweises Differenzieren bestimmt werden und man erhält analog zu (13.1) und (13.2)

$$p^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x - x_0)^{n-k}.$$

sowie

$$p^{(k)}(x_0) = k! a_k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (13.3)$$

- Unbestimmte und bestimmte Integrale können durch gliedweise Integration bestimmt werden. Für $a, b, x \in I_p$ gilt also

$$\int p(x) dx = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1},$$

$$\int_a^b p(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left((b - x_0)^{n+1} - (a - x_0)^{n+1} \right).$$

- Die Konvergenzradien der integrierten oder differenzierten Potenzreihen stimmen mit dem der ursprünglichen Potenzreihe überein, d.h., $R_p = R_{p'} = R_{\int p}$. Die Konvergenz in den Randpunkten kann aber verschieden sein.
- *Abelscher Grenzwertsatz*.⁵³ Ist eine Potenzreihe in einem Randpunkt konvergent, so ist sie auch dort (einseitig) stetig.
- *Eindeutigkeitssatz*: Seien p_1 und p_2 zwei Potenzreihen mit demselben Entwicklungspunkt. Wenn es ein beliebig kleines offenes Intervall (a, b) gibt, das in beiden Konvergenzbereichen enthalten ist und auf dem p_1 und p_2 dieselben Funktionswerte haben, dann haben p_1 und p_2 dieselben Koeffizienten und sind folglich identisch.

⁵³Nils Henrik Abel, 1802–1829

- Eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ stellt genau dann eine *gerade* Funktion dar, d.h. $p(x) = p(-x)$, wenn alle Koeffizienten der Monome mit ungeradem Exponenten verschwinden. Sie stellt genau dann eine *ungerade* Funktion dar, d.h. $p(x) = -p(-x)$, wenn alle Koeffizienten der Monome mit geradem Exponenten verschwinden.

$$\text{gerade: } p(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k}$$

$$\text{ungerade: } p(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$$

13.5 Wichtige Potenzreihen: Wie eingangs erwähnt, lassen sich viele wichtige Funktionen mithilfe von Potenzreihen darstellen. Wir wollen die entsprechenden Formeln nun für einige Funktionen bereitstellen. Sie sind von großer theoretischer Bedeutung, tauchen aber auch regelmäßig in den verschiedensten Anwendungen auf. Alle **fett gedruckten** Reihen sind auswendig zu lernen und dauerhaft zu merken.

- Die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ [\rightarrow 1.30] hat die Eigenschaft, dass sie mit ihrer Ableitung übereinstimmt, also $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem hat sie an der Stelle $x_0 = 0$ den Wert $f(0) = e^0 = 1$. Macht man den Ansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dann folgt zunächst $\exp(0) = a_0 = 1$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \\ &= f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots \end{aligned}$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz stimmen die beiden Reihen genau dann überein, wenn die Koeffizienten aller Monome gleich sind. Man vergleicht diese nun der Reihe nach in aufsteigender Folge und erhält zuerst $a_1 = 1$, dann $a_2 = 1/2$, dann $a_3 = 1/6$ und so weiter. Die allgemeine Formel $a_n = 1/n!$ ist leicht nachzuprüfen. Die gesuchte Funktion wird also durch die sogenannte *Exponentialreihe*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

dargestellt. Diese hat den Konvergenzradius $R = \infty$, siehe erstes Beispiel in 13.3.

- Trennt man in der Exponentialreihe die geraden und ungeraden Terme, so erhält man die Reihen der Hyperbelfunktionen [\rightarrow 1.32],

$$\begin{aligned} \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Beide Reihen konvergieren auf ganz \mathbb{R} . Die Koeffizienten der Reihe für den Tangens hyperbolicus besitzen keine einfache explizite Darstellung und müssen rekursiv berechnet werden. Wir geben hier nur die ersten Summanden an,

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} \pm \dots$$

- Zur Bestimmung der Reihen für Sinus und Cosinus [→ 1.27] betrachtet man die Exponentialreihe für das komplexe Argument ix und beachtet, dass der darin auftauchende Term i^n wiederkehrend die Werte $1, i, -1, -i$ annimmt. Man erhält

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots\right). \end{aligned}$$

Nach der Euler-Formel [→ 3.12] gilt $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Somit sind die *Cosinus-* und die *Sinusreihe* gegeben durch

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Beide Reihen konvergieren auf ganz \mathbb{R} . Wie man sieht, unterscheiden sich die Reihen für Sinus und Cosinus von ihren hyperbolischen Pendanten nur durch die Vorzeichen der Koeffizienten. Gleiches gilt für die *Tangensreihe*,

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

- Wir kennen bereits die *geometrische Reihe* [→ 9.2]

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

die für $x \in (-1, 1)$ konvergiert. Ersetzen wir x durch $-x$, so erhalten wir $1/(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$. Die Integration dieser Gleichung liefert die *Logarithmusreihe*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

wobei die Integrationskonstante durch die Bedingung $\ln(1) = 0$ festgelegt ist. Diese Reihe konvergiert für $x \in (-1, 1]$ und speziell für den rechten Randpunkt $x = 1$ ergibt sich der Wert der *alternierenden harmonischen Reihe* [→ 9.6],

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

Ersetzen wir in der geometrischen Reihe x durch $-x^2$, so erhalten wir $1/(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. Die Integration dieser Gleichung liefert die *Arcustangensreihe*

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

wobei die Integrationskonstante durch die Bedingung $\arctan(0) = 0$ festgelegt ist. Diese Reihe konvergiert für $x \in (-1, 1]$ und speziell für den rechten Randpunkt $x = 1$ ergibt sich die sogenannte *Leibniz-Reihe*

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

13.6 Taylor-Reihe einer differenzierbaren Funktion: Sei f eine im Punkt x_0 beliebig oft differenzierbare Funktion. Wenn $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ist, die mit f auf I_p übereinstimmt, so muss gemäß (13.3) gelten

$$f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0) = n! a_n \quad \Rightarrow \quad a_n := \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Die Potenzreihe

$$Tf(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (13.4)$$

heißt *Taylor-Reihe* der Funktion f im *Entwicklungspunkt* x_0 . Wenn man nur endlich viele Summanden berücksichtigt, dann erhält man das *Taylor-Polynom*

$$T_m f(x) := \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

vom Grad m in x_0 . Insbesondere ist $T_1 f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ die Tangente von f im Punkt x_0 [\rightarrow 11.6].

Beachte: Wir bezeichnen $T_m f(x)$ als Taylor-Polynom vom Grad m , auch wenn im Fall $f^{(m)}(x_0) = 0$ der Koeffizient vor x^m gleich Null und somit der Grad des Polynoms im Sinne der Algebra kleiner als m ist.

13.7 Beispiel:

- $f(x) = e^x$, Entwicklungspunkt $x_0 = 0$,

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad T_3 f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

- $f(x) = e^x$, Entwicklungspunkt $x_0 = 1$,

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^n}{n!}, \quad T_1 f(x) = e + e(x-1).$$

- $f(x) = \frac{1}{1-x}$, Entwicklungspunkt $x_0 = 0$,

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad T_4 f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

13.8 Regeln:

$$T(f+g) = Tf + Tg$$

$$T(f \cdot g) = Tf \cdot Tg$$

$$T(f') = (Tf)'$$

$$T(f \circ g) = f(Tg)$$

13.9 Restglied: Für die Abweichung zwischen Funktionswert $f(x)$ und dem Wert des Taylor-Polynoms m -ten Grades $T_m f(x)$ gilt: Es gibt eine Zahl ξ zwischen x_0 und x , so dass

$$f(x) = T_m f(x) + R_{m+1} f(x), \quad R_{m+1} f(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1}.$$

$R_{m+1} f(x)$ heißt *Restglied in Lagrange-Form*⁵⁴. Für festes x gilt $f(x) = T_m f(x)$ genau dann, wenn $(R_m f(x))_{m \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Der exakte Wert des Restglieds lässt sich im Allgemeinen nicht angeben, da man die Stelle ξ nicht genau kennt. In den Anwendungen ist man aber ohnehin meist nur an einer Abschätzung für den Betrag des Fehlers in einer Umgebung des Entwicklungspunkts interessiert. Man betrachtet also nur x -Werte aus einem Intervall der Form $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ für ein vorgegebenes $h > 0$. Dafür ergibt sich die Ungleichung

$$|f(x) - T_m f(x)| \leq \frac{h^{m+1} \max_{t \in I} |f^{(m+1)}(t)|}{(m+1)!}, \quad x \in I.$$

13.10 Beispiel: Wir betrachten den natürlichen Logarithmus $f(x) = \ln x$ und den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Die Ableitungen sind gegeben durch

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dies liefert die Taylor-Reihe

$$T \ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \mp \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Die Abweichung für das Taylor-Polynom $T_m \ln$ auf dem Intervall $I = [1-h, 1+h]$ lässt sich mithilfe der obigen Formel abschätzen. Sofern $h < 1$, erhält man

$$\max_{1-h \leq t \leq 1+h} |f^{(m+1)}(t)| = \frac{m!}{(1-h)^{m+1}}$$

und damit

$$|\ln x - T_m \ln x| \leq \frac{h^{m+1} m!}{(m+1)! (1-h)^{m+1}} = \frac{1}{(m+1)(1/h-1)^{m+1}}, \quad x \in [1-h, 1+h].$$

Wählt man konkret $h = 1/4$, dann lautet die Fehlerabschätzung

$$|\ln x - T_m \ln x| \leq \frac{1}{(m+1)3^{m+1}}, \quad x \in [3/4, 5/4].$$

Dies zeigt insbesondere, dass die Abweichung für $m \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, die Taylor-Reihe also tatsächlich den Logarithmus auf diesem Intervall darstellt. Speziell für das quartische Taylor-Polynom erhält man $|\ln x - T_4 \ln x| \leq 1/(5 \cdot 3^5) \approx 8.2e-4$. Die tatsächliche maximale Abweichung auf diesem Intervall ist etwa um den Faktor 4 kleiner, es handelt sich ja aber auch nur um eine Abschätzung. Die Ungenauigkeit kommt dadurch ins Spiel, dass man die genaue Position der Stelle ξ im Lagrange-Restglied nicht kennt und deshalb vom „worst

⁵⁴Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813

case“, also dem Maximalwert des Ableitungsterms, ausgehen muss. Das Überschätzen des Fehlers wird besonders deutlich, wenn man ein größeres Intervall betrachtet, beispielsweise $I = [1/4, 7/4]$ entsprechend $h = 3/4$. Hier erhält man

$$|\ln x - T_m \ln x| \leq \frac{3^{m+1}}{(m+1)}, \quad x \in [1/4, 7/4],$$

und sieht, dass die rechte Seite divergiert, wenn m groß wird. In Wirklichkeit konvergiert die Taylor-Reihe aber auch hier gegen den Logarithmus, doch ist das auf diesem Weg nicht zu zeigen. Die entsprechende allgemeine Aussage liefert der nächste Abschnitt.

13.11 Taylor-Reihe einer elementaren Funktion: Zu den *elementaren Funktionen* gehören Potenzen, rationale Funktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus, trigonometrische und Arcusfunktionen, hyperbolische und Areafunktionen sowie deren Verkettung. Eine Stelle $z \in \mathbb{C}$ heißt *Singularität* der elementaren Funktion f , wenn f an dieser Stelle nicht definiert oder nicht (komplex) differenzierbar ist. Sei z_* die dem Entwicklungspunkt x_0 nächstgelegene Singularität, dann definieren wir $\tilde{R} := |x_0 - z_*|$ als deren Abstand in der komplexen Ebene. Wenn es keine Singularitäten gibt, setzen wir formal $\tilde{R} = \infty$. Betrachten wir nun die Taylor-Reihe Tf von f im Entwicklungspunkt x_0 , dann gilt für den Konvergenzradius $R \geq \tilde{R}$ und weiterhin

$$f(x) = Tf(x) \quad \text{für } |x - x_0| < \tilde{R}.$$

Dieser Satz besagt also, dass man elementare Funktionen zumindest in einer gewissen Umgebung des Entwicklungspunkts durch deren Taylor-Reihe darstellen kann. Dies bedeutet insbesondere auch, dass die Taylor-Polynome mit wachsendem Grad die Funktion dort immer besser approximieren.

13.12 Bemerkung: Es gibt nichtelementare Funktionen, bei denen $f(x)$ und $Tf(x)$ nur für $x = x_0$ übereinstimmen. Ein Beispiel ist

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Man beachte, dass dies wegen der Fallunterscheidung *keine* elementare Funktion ist. Man kann zeigen, dass f in $x_0 = 0$ beliebig oft differenzierbar ist mit $f^{(k)}(0) = 0$ für alle k . Es ist also $Tf(x) = 0$ für alle x , während $f(x) = 0$ nur für $x = 0$ gilt. Hier wird $f(x)$ also mit wachsendem m durch $T_m f(x)$ nicht immer besser approximiert.

13.13 Beispiel:

- Die elementare Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ hat im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Taylor-Reihe $Tf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. Der Konvergenzradius $R = 1$ ist gleich dem Abstand $\tilde{R} = 1$ von $x_0 = 0$ zur einzigen Singularität an der Stelle $z_* = -1$.
- Die elementare Funktion $f(x) = 1/(1+x^2)$ hat im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Taylor-Reihe $Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. Der Konvergenzradius $R = 1$ ist gleich dem Abstand $\tilde{R} = 1$ von $x_0 = 0$ zu beiden Singularitäten an den Stellen $z_* = \pm i$.

- Die Taylor-Reihe der elementaren Funktion $f(x) = \sqrt{x^2}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ ist $Tf(x) = 1 + (x-1)$. Deren Konvergenzradius ist $R = \infty$, während der Abstand zur Singularität $z_* = 0$ den Wert $\tilde{R} = 1$ hat. Tatsächlich gilt $Tf(x) = f(x)$ für $|x-1| < 1$ und sogar für alle $x \geq 0$, aber offensichtlich nicht auf dem gesamten Konvergenzgebiet $I_{Tf} = \mathbb{R}$.

13.14 Beispiel: Wir betrachten die elementare Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$ für einen reellen Exponenten $\alpha \neq 0$ und wählen $x_0 = 0$. Hier ist $f^{(k)}(0) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)$, und somit $f^{(k)}(0)/k! = \binom{\alpha}{k}$ ein Binomialkoeffizient [\rightarrow 1.26]. Die sogenannte *Binomialreihe* ist also gegeben durch

$$Tf(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Der Abstand zur einzigen Singularität $z_* = -1$ ist $\tilde{R} = 1$, es gilt also

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad -1 < x < 1.$$

Die Konvergenz in den Randpunkten hängt vom Wert von α ab. Ist dagegen $\alpha = n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, dann verschwinden alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $k > n$ und die Reihe hat somit nur endlich viele Summanden. In Übereinstimmung mit dem binomischen Lehrsatz [\rightarrow 1.26] ergibt sich die Gleichung

$$(1+x)^n = Tf(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

13.15 Landau-Symbole: Landau-Symbole⁵⁵ sind zunächst gewöhnungsbedürftig, da sie formal gesehen Mengen sind, in der Praxis aber wie Funktionen verwendet werden. Das führt dazu, dass sie scheinbar nicht allen vertrauten Rechenregeln gehorchen. Sie sind aber dennoch etwas ausgesprochen Praktisches, da sie es einem beim Umgang mit Potenzreihen erlauben, sich auf einige wenige relevante Terme zu konzentrieren und den ganzen verbleibenden Rest zuverlässig zu verwalten, ohne die betreffenden Koeffizienten explizit kennen zu müssen.

Wir definieren das *Landau-Symbol* $O(x^m)$ als die Menge

$$O(x^m) := \left\{ f : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^m} \text{ existiert} \right\}.$$

Diese Definition ist eine vereinfachte Variante des in der Literatur üblichen Begriffs⁵⁶, die aber für unsere Zwecke vollkommen ausreicht. Der Exponent m kennzeichnet also qualitativ,

⁵⁵Edmund Landau, 1877–1938

⁵⁶Tatsächlich definiert man ganz allgemein für eine Funktion g die Menge $O(g(x)) := \{f : \limsup_{x \rightarrow 0} |f(x)/g(x)| < \infty\}$, wobei \limsup den Limes superior bezeichnet. Neben den hier eingeführten Landau-Symbolen, die das Verhalten in der Umgebung des Ursprungs betreffen, verwendet man in ähnlicher Weise auch Landau-Symbole für das Verhalten im Unendlichen, insbesondere auch für die Klassifikation von Folgen oder die Komplexität von Algorithmen. Man sagt beispielsweise, dass ein gegebenes Verfahren zum Sortieren von n Objekten die Laufzeit $O(n^2)$ hat, um das Verhalten für große Datenmengen qualitativ zu erfassen. Wir werden dies hier aber nicht verwenden.

wie schnell die Werte einer Funktion $f \in O(x^m)$ an der Stelle $x_0 = 0$ mindestens gegen 0 gehen: je größer m , desto rascher.

Beispielsweise ist $\sin(2x) \in O(x)$, da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$ oder $x^3 e^x \in O(x^2)$, da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 e^x}{x^2} = 0$. Dagegen ist $\tan(x) \notin O(x^2)$, da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x^2}$ nicht existiert.

Auch wenn dies eigentlich sehr erklärungsbedürftig ist, verwendet man in der Praxis Landau-Symbole nicht als Mengen, sondern als Platzhalter für konkrete Funktionen, die man nicht explizit angeben kann oder will. Man schreibt zum Beispiel

$$\sin x = x + O(x^3)$$

und meint damit folgendes: Es gibt eine Funktion $f \in O(x^3)$, sodass $\sin x = x + f(x)$. Der genaue Verlauf dieser Funktion ist dabei irrelevant. Es geht vielmehr nur darum, dass sie im Ursprung eine dreifache Nullstelle hat und deshalb für $x \rightarrow 0$ betragsmäßig sehr kleine Werte annimmt. Dies zeigt, dass die Approximation $\sin x \approx x$ für kleine x sehr präzise ist. Um konkret nachzuweisen, dass die Funktion f tatsächlich in $O(x^3)$ liegt, betrachten wir

$$f(x) = \sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots = x^3 \left(-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^5}{7!} \pm \dots \right).$$

Nach Division durch x^3 bleibt nur der Term in der Klammer, der offensichtlich den Grenzwert $-1/3!$ hat. Dieser konkrete Zahlenwert ist hier aber gar nicht von Interesse. Entscheidend ist nur, dass bei der Reihendarstellung von $f(x)$ der Term x^3 ausgeklammert werden kann und somit der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x^3$ existiert. Man beachte, dass die Gleichungen

$$\sin x = x + O(x^2) \quad \text{oder} \quad \sin x = x + O(x)$$

ebenfalls korrekt sind⁵⁷, denn $f(x)$ liegt ja auch in den Mengen $O(x^2)$ und $O(x)$; die zugehörigen Grenzwerte sind jeweils 0. Die Spezifikation des Landau-Symbols ist also nicht eindeutig. Dagegen ist

$$\sin x \neq x + O(x^4),$$

da $f(x)/x^4 = (-1/3! + x^2/5! \mp \dots)/x$ im Ursprung divergiert.

Betrachten wir nun ganz allgemein eine Potenzreihe p mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und spalten die Summe in ein Polynom p_{m-1} vom Grad $\leq m-1$ und einen Rest r_m auf,

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{m-1} a_n x^n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n = p_{m-1}(x) + r_m(x).$$

Für den Rest gilt

$$r_m(x) = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \dots = x^m (a_m + a_{m+1} x + a_{m+2} x^2 + \dots)$$

und damit $\lim_{x \rightarrow 0} r_m(x)/x^m = a_m$. Also ist $r_m \in O(x^m)$ und wir schreiben

$$p(x) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n x^n + O(x^m).$$

⁵⁷Aus den beiden Gleichungen $\sin x = x + O(x^3)$ und $\sin x = x + O(x^2)$ folgt keineswegs $O(x^2) = O(x^3)$. Es bedeutet lediglich, dass die konkret gemeinte Funktion $f(x) = \sin x - x$ sowohl in $O(x^2)$ als auch in $O(x^3)$ liegt.

Es ist beispielsweise

$$\cos x = 1 - \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{p_3(x)} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots}_{r_4(x)} = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4).$$

Mit Landau-Symbolen kann man gemäß der folgenden Regeln rechnen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} O(x^n) &= 0 && \text{falls } n > 0 \\ O(x^n) + O(x^m) &= O(x^k) && k = \min(n, m) \\ f(x)O(x^n) &= O(x^n) && \text{falls } f \text{ stetig} \\ O(x^n) \cdot O(x^m) &= O(x^{n+m}) \\ O(x^n)/x^m &= O(x^{n-m}) \\ O(u^n) &= O(x^{nm}) && \text{falls } u = O(x^m) \\ f(x_0 + O(x^n)) &= f(x_0) + O(x^n) && \text{falls } f \text{ differenzierbar} \end{aligned}$$

Dagegen gilt die naheliegende Regel $O(x^n)/O(x^m) = O(x^{n-m})$ *nicht* (warum?).

Mithilfe dieser Regeln und der bekannten Taylor-Reihen elementarer Funktionen lassen sich häufig Taylor-Polynome komplizierterer Funktionen recht einfach angeben. Die Bestimmung der Koeffizienten mittels der Ableitungswerte kann verglichen damit sehr viel aufwändiger sein.

13.16 Beispiel:

- $f(x) = e^{-x^2}$, gesucht $T_4 f$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Mit $u = -x^2$ erhält man

$$f(x) = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + O(u^3) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6),$$

also $T_4 f(x) = 1 - x^2 + x^4/2$.

- $f(x) = x \ln(\cosh(x))$, gesucht $T_6 f(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Zunächst ist $\cosh(x) = 1 + x^2/2 + x^4/24 + O(x^6)$. Die Substitution $u = x^2/2 + x^4/24 + O(x^4)$ liefert

$$\begin{aligned} x \ln(\cosh(x)) &= x \left(\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3) \right) \\ &= x \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + O(x^6) \right) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + O(x^7), \end{aligned}$$

also⁵⁸ $T_6 f(x) = x^3/2 - x^5/12$.

- $f(x) = \tan x$, gesucht $T_3 f(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Mit den bekannten Reihen für Sinus und Kosinus erhält man zunächst

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - x^3/6 + O(x^5)}{1 - x^2/2 + O(x^4)}.$$

⁵⁸Versuchen Sie spaßeshalber einmal, dieses Ergebnis mithilfe der Ableitungswerte $f^{(k)}(0)$ herzuleiten!

Die Substitution $u = x^2/2 + O(x^4)$ liefert mit der geometrischen Reihe

$$\tan x = \frac{x - x^3/6 + O(x^5)}{1 - u} = (x - x^3/6 + O(x^5))(1 + u + O(u^2)).$$

Rücksitution ergibt

$$\tan x = (x - x^3/6 + O(x^5))(1 + x^2/2 + O(x^4)) = x + x^3/3 + O(x^5).$$

Also ist⁵⁹ $T_3 f(x) = x + x^3/3$.

13.17 Bestimmung von Grenzwerten: Grenzwerte vom Typ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad f(x_0) = g(x_0) = 0,$$

lassen sich ohne die Regel von l'Hospital bestimmen, indem man die Taylor-Entwicklung von f und g bis zum ersten von Null verschiedenen Term explizit bestimmt.

13.18 Beispiel:

- $f(x) = \sin(x^2) = x^2 + O(x^3)$, $g(x) = 1 - \cos x = x^2/2 + O(x^3)$, also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + O(x^3)}{x^2/2 + O(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + O(x)}{1/2 + O(x)} = 2.$$

- $f(x) = x^3(e^{2x} - 1) = 2x^4 + O(x^5)$, $g(x) = \ln(1 + x^3) = x^3 + O(x^4)$, also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(e^{2x} - 1)}{\ln(1 + x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 + O(x^5)}{x^3 + O(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + O(x^2)}{1 + O(x)} = 0.$$

- $f(x) = x^2 - \sin x^2 = x^6/6 + O(x^7)$, $g(x) = (1 - \cos x)^3 = x^6/8 + O(x^7)$, also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x^2}{(1 - \cos x)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6/6 + O(x^7)}{x^6/8 + O(x^7)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/6 + O(x)}{1/8 + O(x)} = \frac{4}{3}.$$

13.19 Minima/Maxima: Sei $f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, dann gilt

$$Tf(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + O(h^{k+1}).$$

Die Funktion f verhält sich in einer Umgebung von x_0 also wie das Taylor-Polynom

$$T_k f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k.$$

Daraus kann man folgendes ablesen:

- Wenn k ungerade ist und $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, dann hat f im Punkt x_0 einen Wendepunkt.
- Wenn k gerade ist und $f^{(k)}(x_0) > 0$, dann hat f im Punkt x_0 ein lokales Minimum.
- Wenn k gerade ist und $f^{(k)}(x_0) < 0$, dann hat f im Punkt x_0 ein lokales Maximum.

⁵⁹Dieses Ergebnis lässt sich zugegebenermaßen einfacher mithilfe der Ableitungen $f^{(k)}(0)$ herleiten; es geht in diesem Beispiel lediglich um die Demonstration von Rechentechniken.

13.20 Beispiel:

- Die Funktion

$$f(x) := \cos(x) + \cosh(x) = 2 + x^4/12 + O(x^5)$$

hat an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum.

- Mit $x = 1 + h$ ist

$$f(x) := e^{\sin^5(\ln x)} = e^{\sin^5(h+O(h^2))} = e^{(h+O(h^2))^5} = e^{h^5+O(h^6)} = 1 + h^5 + O(h^6).$$

Also hat f an der Stelle $x_0 = 1$ einen Wendepunkt.

14 Fourier-Reihen

Taylor-Reihen liefern einfache lokale Darstellungen für glatte Funktionen. In diesem Kapitel suchen wir dagegen eine Reihendarstellung, die *global* konvergiert und selbst dann noch brauchbare Resultate liefert, wenn die gegebene Funktion f Sprünge und Knicke aufweist. Man muss dazu aber voraussetzen, dass f periodisch ist, also anschaulich gesprochen einen Schwingungsvorgang beschreibt.

14.1 Periodische Funktion: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *L-periodisch*, wenn

$$f(x + L) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

für eine Zahl $L > 0$. Diese Zahl ist nicht eindeutig bestimmt, denn jede L -periodische Funktion ist gleichzeitig auch nL -periodisch für alle $n \in \mathbb{N}$. Man definiert deshalb die *Periode* einer Funktion als die *kleinste* Zahl $L > 0$, für die die Funktion L -periodisch ist. Beispielsweise sind für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $\sin nx$ und $\cos nx$ 2π -periodisch und haben Periode $2\pi/n$. Eine L -periodische Funktion ist durch ihre Werte auf einem beliebigen Intervall der Länge L vollständig bestimmt.

14.2 Trigonometrische Reihe: Eine Reihe der Form

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \end{aligned}$$

heißt *trigonometrische Reihe* mit Koeffizienten a_n, b_n . Die Partialsumme

$$t_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m a_n \cos nx + \sum_{n=1}^m b_n \sin nx$$

heißt *trigonometrisches Polynom* vom Grad m .

14.3 Eigenschaften:

- t konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut, wenn es eine Zahl $\alpha > 1$ gibt, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha b_n = 0.$$

Die Funktion t ist dann stetig.

- t ist k -mal stetig differenzierbar, wenn es eine Zahl $\alpha > k + 1$ gibt, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha b_n = 0.$$

Die Ableitungen sind wieder trigonometrische Reihen, deren Koeffizienten sich durch gliedweises Differenzieren bestimmen lassen.

- Trigonometrische Polynome und Reihen sind 2π -periodisch, d.h., $t_m(x + 2\pi) = t_m(x)$ bzw. $t(x + 2\pi) = t(x)$, falls konvergent.
- t bzw. $t_m(x)$ ist genau dann eine gerade Funktion, wenn alle b_n Null sind.
- t bzw. $t_m(x)$ ist genau dann eine ungerade Funktion, wenn alle a_n Null sind.

14.4 Orthogonalitätsrelationen: Um eine einheitliche Behandlung der Sinus- und Cosinusterme zu ermöglichen, definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sin(x), \quad v_3(x) = \sin(2x), \quad v_5(x) = \sin(3x), \quad \dots \\ v_0(x) &= 1, \quad v_2(x) = \cos(x), \quad v_4(x) = \cos(2x), \quad v_6(x) = \cos(3x), \quad \dots \end{aligned}$$

und die Koeffizienten

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= b_1, \quad \lambda_3 = b_2, \quad \lambda_5 = b_3, \quad \dots \\ \lambda_0 &= a_0/2, \quad \lambda_2 = a_1, \quad \lambda_4 = a_2, \quad \lambda_6 = a_3, \quad \dots \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Darstellung

$$t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k v_k(x) \quad \text{bzw.} \quad t_m(x) = \sum_{k=0}^{2m} \lambda_k v_k(x)$$

für trigonometrische Reihen und Polynome. Legen wir das L^2 -Skalarprodukt [\rightarrow 12.25]

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ zugrunde, dann sind die Funktionen v_j zueinander orthogonal. Es gilt genauer gesagt⁶⁰

$$\langle v_k, v_n \rangle = 0 \quad \text{für} \quad k \neq n$$

sowie

$$\langle v_0, v_0 \rangle = 2\pi \quad \text{und} \quad \langle v_n, v_n \rangle = \pi \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

Multiplizieren wir die Gleichung $t = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k v_k$ skalar mit v_n , dann erhalten wir⁶¹

$$\langle t, v_n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k v_k, v_n \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \langle v_k, v_n \rangle = \lambda_n \langle v_n, v_n \rangle$$

und damit

$$\lambda_n = \frac{\langle t, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle}.$$

14.5 Fourier-Reihe:⁶² Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische Funktion. Wenn $t = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n v_n$ eine trigonometrische Reihe ist, die mit f übereinstimmt, dann muss nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts für die Koeffizienten gelten⁶³

$$\lambda_n = \frac{\langle f, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

⁶⁰Beweis als Übungsaufgabe!

⁶¹Das fettgedruckte Gleichheitszeichen ist keineswegs selbstverständlich, da die Linearität des Skalarprodukts nur für endliche Summen garantiert ist. Man kann den Schritt aber in diesem Fall rechtfertigen.

⁶²Joseph Fourier, 1768–1830

⁶³Die Koeffizienten haben genau die in Abschnitt 2.35 für Orthogonalbasen angegebene Form. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Anzahl hier nicht endlich ist.

Für die Koeffizienten a_n und b_n bedeutet dies konkret

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Die Existenz dieser Integrale ist gesichert, sofern f eine Stammfunktion besitzt. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn f beschränkt ist und nur endlich viele Unstetigkeitsstellen im Integrationsbereich hat. Die trigonometrische Reihe

$$Ff(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

mit Koeffizienten a_n, b_n wie oben angegeben heißt *Fourier-Reihe* der Funktion f . Wenn man nur endlich viele Summanden berücksichtigt, so erhält man das (trigonometrische) *Fourier-Polynom*

$$F_m f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m a_n \cos nx + \sum_{n=1}^m b_n \sin nx$$

von f vom Grad m .

14.6 Regeln:

$$\begin{aligned} F(f + g) &= Ff + Fg \\ F(\alpha f) &= \alpha Ff \\ F(f') &= (Ff)' \\ F(f f) &= f(Ff), \quad \text{falls } a_0 = 0 \end{aligned}$$

14.7 Bemerkungen:

- Aus der Formel $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx$ erhält man speziell für $n = 0$ die Gleichung

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx.$$

Der konstante Term der Fourier-Reihe ist also der *Mittelwert*⁶⁴ der Funktion f .

- Wenn f gerade ist, das heißt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in (-\pi, \pi)$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen, dann ist Ff eine reine *Cosinus-Reihe*. Es gilt also $b_n = 0, n \in \mathbb{N}$. Die Berechnung der a_n vereinfacht sich zu $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx$.
- Wenn f ungerade ist, das heißt $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in (-\pi, \pi)$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen, dann ist Ff eine reine *Sinus-Reihe*. Es gilt also $a_n = 0, n \in \mathbb{N}_0$. Die Berechnung der b_n vereinfacht sich zu $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx$.
- Das Integral $\int_{-\pi}^{\pi}$ in der Definition der Koeffizienten kann durch ein beliebiges anderes Integral über ein Intervall der Länge 2π ersetzt werden, z.B. durch $\int_0^{2\pi}$.

⁶⁴Es empfiehlt sich, den Mittelwert $a_0/2$ stets getrennt zu ermitteln, sodass bei der Berechnung der übrigen Koeffizienten $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt werden kann.

- Die Werte der Koeffizienten a_n, b_n und damit die Fourier-Reihe Ff ändern sich nicht, wenn die Funktion f an endlich vielen Stellen abgeändert wird.
- Bezüglich der L^2 -Norm [→ 12.25] ist das Fourier-Polynom

$$F_m f = \sum_{k=0}^{2m} \frac{\langle f, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k$$

unter allen trigonometrischen Polynomen vom Grad m dasjenige mit der geringsten Abweichung. Der Approximationsfehler $\|f - t_m\|$ ist also in diesem Sinne minimal für $t_m = F_m f$. Dies entspricht genau der in Abschnitt 2.35 gemachten Aussage über die beste Approximation in linearen Teilräumen.

- Da die Funktionen v_j orthogonal zueinander sind, gilt nach dem Satz des Pythagoras [→ 2.7]

$$\|t_m\|^2 = \sum_{k=0}^{2m} \lambda_k^2 \|v_k\|^2 = \pi \left(2\lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{2m} \lambda_k^2 \right) = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n^2 + b_n^2) \right).$$

Wenn der Grenzwert $t = Ff$ mit f übereinstimmt, folgt daraus die *Parseval'sche Gleichung*⁶⁵

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

14.8 Konvergenz: Konvergenzaussagen für Fourier-Reihen sind im Allgemeinen schwierig. Beispielsweise ist die Stetigkeit von f allein noch keineswegs ausreichend für die gewünschte Gleichheit $Ff(x) = f(x)$. Konkrete Ergebnisse gibt es aber für den Fall, dass der Graph von f nur endlich viele Sprünge und Knicke aufweist. Genauer gesagt nennen wir f *stückweise glatt*, wenn es endlich viele Stellen

$$-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = \pi$$

gibt, sodass für alle $i = 0, \dots, N-1$ gilt:

- f ist stetig differenzierbar auf dem offenen Intervall (x_i, x_{i+1}) .
- f hat an der Stelle x_i einen rechts- und linksseitigen Grenzwert,

$$f(x_i^+) := \lim_{h \downarrow 0} f(x_i + h), \quad f(x_i^-) := \lim_{h \downarrow 0} f(x_i - h).$$

- Die Ableitung f' hat an jeder Stelle x_i ebenfalls einen rechts- und linksseitigen Grenzwert.

Wenn f also in diesem Sinne stückweise glatt ist, dann konvergiert $Ff(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$Ff(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{x_0, \dots, x_N\} \\ \frac{1}{2}(f(x_i^+) + f(x_i^-)) & \text{für } x = x_i. \end{cases}$$

Das heißt: Die Fourier-Reihe stimmt mit der gegebenen Funktion überall dort überein, wo f stetig ist. In den Sprungstellen nimmt die Fourier-Reihe den Mittelwert aus rechts- und linksseitigem Funktionsgrenzwert an.

⁶⁵Marc-Antoine Parseval, 1755–1836

14.9 Beispiel: Sei f 2π -periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Man spricht hier auch von einer *Rechteckschwingung*. Die Funktion ist ungerade im Sinne von Bemerkung 14.7, denn es gilt $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in (-\pi, \pi)$ mit Ausnahme der einen Stelle $x = 0$. Die zugehörige Fourier-Reihe ist also eine reine Sinus-Reihe mit Koeffizienten

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe von f ist damit

$$Ff(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

An der Sprungstelle $x = 0$ gilt offensichtlich $Ff(0) = 0$. Dies ist nicht der gegebene Funktionswert $f(0) = 1$, sondern, wie behauptet, gerade der Mittelwert der einseitigen Grenzwerte $f(0^+) = 1$ und $f(0^-) = -1$. An der Stelle $x = \pi/2$ ist f stetig und wir erhalten Übereinstimmung,

$$1 = f(\pi/2) = Ff(\pi/2) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \pi/2 + \frac{\sin 3\pi/2}{3} + \frac{\sin 5\pi/2}{5} + \dots \right).$$

Die Zähler der Brüche nehmen abwechselnd die Werte 1 und -1 an und wir erhalten erneut, diesmal aber auf ganz anderem Wege, die Leibniz-Reihe [\rightarrow 13.5]

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Die Parseval'sche Gleichung liefert

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2n+1)} \right)^2$$

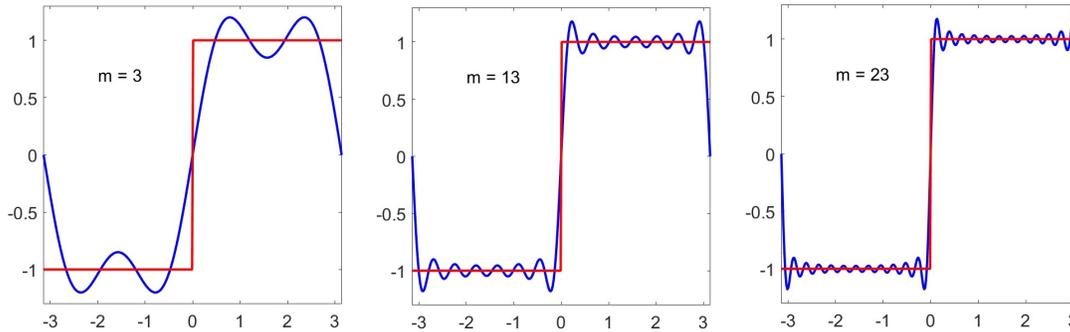
und damit den Reihenwert

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$$

Die Abbildung zeigt die Fourier-Polyome von Grad $m = 3, 13, 23$. Man beobachtet in der Nähe der Sprungstellen ein Über- und Unterschwingen, das mit wachsendem m zwar immer schneller abklingt, dessen Amplitude sich aber nicht verringert. Dieses Verhalten nennt man das *Gibbs-Phänomen*⁶⁶. Es tritt nicht nur in diesem Beispiel auf, sondern immer dann, wenn die gegebene Funktion f eine Sprungstelle hat. Fourier-Polynome hoher Ordnung zeigen hier stets ein Über- und Unterschwingen um etwa 9% der Sprunghöhe. Im Beispiel hat der Sprung

⁶⁶Josiah Willard Gibbs, 1839–1903. Man spricht den Namen wie „Gips“ und nicht wie „Chips“.

an der Stelle $x = 0$ die Höhe 2. Das Maximum der Fourier-Polynome liegt dementsprechend um etwa 0.18 höher als der rechtsseitige Grenzwert $f(0^+) = 1$.



14.10 Beliebige Periode: Ist die gegebene Funktion f L -periodisch, dann kann man diese durch die Transformation

$$g(x) := f(x/\omega), \quad \omega := \frac{2\pi}{L}$$

auf eine 2π -periodische Funktion g transformieren. Durch Rücktransformation der Fourier-Reihe von g erhält man für f die verallgemeinerte Fourier-Reihe

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

mit Koeffizienten

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos(n\omega x) dx, \quad b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin(n\omega x) dx.$$

14.11 Beispiel: Sei f eine 2-periodische Dreieckschwingung mit $f(x) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$. Mit $\omega = \pi$ berechnet man die Koeffizienten

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}, \quad a_n = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 n^2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Da f eine gerade Funktion ist, verschwinden alle b_n und wir erhalten die Cosinus-Reihe

$$Ff(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}.$$

14.12 Fourier-Reihe in komplexer Form: Etwas weniger anschaulich, aber technisch gesehen meist einfacher zu handhaben sind Fourier-Reihen in komplexer Form. Als Basisfunktionen verwendet man anstelle von Sinus und Cosinus die komplexen Exponentialfunktionen e^{inx} , $n \in \mathbb{Z}$, wobei die Euler-Formel [\rightarrow 3.12]

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

den Zusammenhang zum reellen Fall herstellt. Die Orthogonalitätsrelationen haben hier die einfache Form

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-ikx} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe [→ 14.5] der 2π -periodischen Funktion f lässt sich nun darstellen als

$$Ff(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}$$

mit komplexen Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Wie man sieht, ist also nur ein Integral zu berechnen, außerdem verschwindet die Sonderbehandlung des Koeffizienten a_0 . Die Umrechnung der komplexen Koeffizienten c_n in die reellen Koeffizienten a_n, b_n ist einfach. Sie ergeben sich als der doppelte Real- bzw. Imaginärteil,

$$a_n = 2 \operatorname{Re} c_n, \quad b_n = 2 \operatorname{Im} c_n.$$

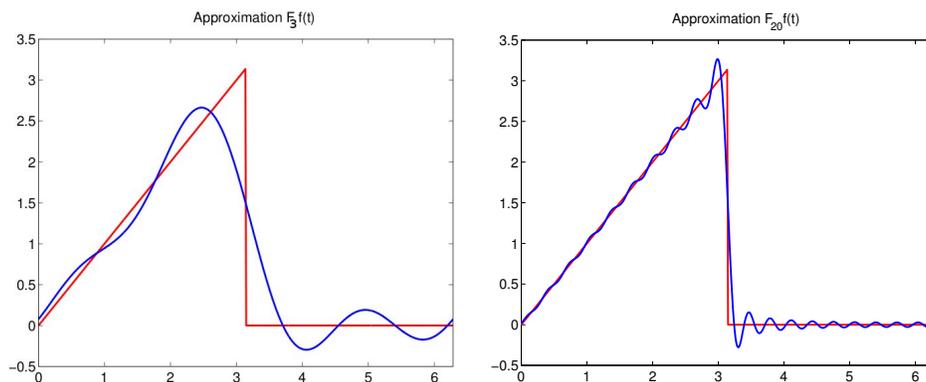
14.13 Beispiel: Sei f 2π -periodisch mit $f(x) = \max(0, x)$ für $x \in [-\pi, \pi)$. Für die komplexen Koeffizienten erhält man

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x e^{inx} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{für } n = 0 \\ \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi n^2} + i \frac{(-1)^{n+1}}{2n} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die reellen Koeffizienten sind also

$$a_n = \begin{cases} \pi/2 & \text{für } n = 0 \\ -2/(\pi n^2) & \text{für } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{für } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, \quad b_n = (-1)^{n+1}/n.$$

In der Abbildung sieht man die Fourier-Polynome von Grad $m = 3$ und $m = 20$. Wieder ist das Gibbs-Phänomen in der Nähe der Sprungstelle zu beobachten.



15 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Nachdem die Untersuchung reeller Funktionen in einer Variablen $x \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, wenden wir uns nun Funktionen zu, deren Argument ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ ist, also Funktionen vom Typ

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad y = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m).$$

Als Beispiel betrachte man die Funktion f , die jedem Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ im Raum mit Koordinaten x_1, x_2, x_3 die dort herrschende Temperatur $t = f(x_1, x_2, x_3)$ zuweist. Wenn auch der Funktionswert mehrdimensional ist, erhält man eine *vektorwertige Funktion*. Wir schreiben dann

$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{y} = F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{bmatrix}.$$

Eine solche Funktion entsteht beispielsweise, wenn man dem Punkt \vec{x} im Raum nicht nur die Temperatur $t = f_1(\vec{x})$, sondern auch noch den Luftdruck $p = f_2(\vec{x})$ zuweist, also $F(x_1, x_2, x_3) = [t, p]^T$.

In diesem Kapitel werden einige Grundbegriffe geklärt, bevor wir uns mit der Differenziation und Integration solcher Funktionen beschäftigen.

15.1 Erinnerung: Bevor wir einige grundlegende Begriffe und Ergebnisse aus Kapitel 2 wiederholen, führen wir der Einfachheit halber eine weitere Notation für Vektoren ein. Wir schreiben

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = [x_1, \dots, x_m]^T = (x_1, \dots, x_m).$$

Das heißt, dass liegend notierte Vektoren in *runden* Klammern als Spaltenvektoren zu verstehen sind, sodass die Notation eines Transpositionszeichens entfällt. Im Folgenden ist

$$\mathbb{R}^m := \{ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R} \}$$

der m -dimensionale Raum und

$$\begin{aligned} \vec{x} \pm \vec{y} &:= (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_m \pm y_m) \\ c\vec{x} &:= (cx_1, cx_2, \dots, cx_m), \quad c \in \mathbb{R} \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &:= \vec{x} \cdot \vec{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_my_m \\ \|\vec{x}\| &:= \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}. \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} \|c\vec{x}\| &= |c| \cdot \|\vec{x}\|, \quad c \in \mathbb{R} \\ \|\vec{x} + \vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \\ \|\vec{x} - \vec{y}\| &\geq \left| \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \right| \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &\leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \end{aligned}$$

Gemäß Abschnitt 8.14 gilt: Eine Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Vektoren $\vec{x}_k = (x_{1,k}, \dots, x_{m,k})$ in \mathbb{R}^m heißt *konvergent*, wenn die Zahlenfolge jeder Koordinate konvergiert, also die Zahlenfolge $(x_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ für $i = 1, \dots, m$. Der *Grenzwert* \vec{x}_0 ist dann gegeben als Vektor der Grenzwerte der einzelnen Koordinaten,

$$\vec{x}_0 := \begin{bmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{1,k} \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{m,k} \end{bmatrix},$$

und man schreibt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0.$$

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

- Die Folge \vec{x}_k konvergiert genau dann gegen \vec{x}_0 , wenn $\|\vec{x}_k - \vec{x}_0\|$ eine Nullfolge ist.
- Seien \vec{x}_k und \vec{y}_k konvergente Folgen mit Grenzwert \vec{x}_0 bzw. \vec{y}_0 . Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (\vec{x}_k + \vec{y}_k) &= \vec{x}_0 + \vec{y}_0, & \lim_{k \rightarrow \infty} c\vec{x}_k &= c\vec{x}_0, \quad c \in \mathbb{R} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \vec{x}_k, \vec{y}_k \rangle &= \langle \vec{x}_0, \vec{y}_0 \rangle, & \lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k\| &= \|\vec{x}_0\|. \end{aligned}$$

15.2 Beispiel:

- Die Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\vec{x}_k = (1/k, \sqrt[k]{k})$ ist konvergent zum Grenzwert

$$\vec{x}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \begin{bmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} 1/k \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Die Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\vec{x}_k = (1/k, 3, k)$ ist divergent, da die dritte Koordinate divergiert.

15.3 Kugeln: Eine *Kugel* in \mathbb{R}^n mit Mittelpunkt \vec{m} und Radius $r > 0$ ist gegeben durch

$$K_r(\vec{m}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{m}\| \leq r\} \quad \text{bzw.} \quad B_r(\vec{m}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{m}\| < r\}.$$

Dabei ist die erste Variante eine *abgeschlossene* und die zweite Variante eine *offene* Kugel. Wählt man speziell den Mittelpunkt $\vec{m} = \vec{0}$ im Ursprung und den Radius $r = 1$, dann spricht man von der *Einheitskugel*.

Der Rand der Kugel ist eine *Kugeloberfläche* und in beiden Fällen gegeben durch

$$\partial K_r(\vec{m}) = \partial B_r(\vec{m}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{m}\| = r\}.$$

Speziell im zweidimensionalen Fall $n = 2$ spricht man in der Regel nicht von einer Kugel und einer Kugeloberfläche, sondern von einer *Kreisscheibe* und einem Kreis bzw. von der *Einheitskreisscheibe* und dem *Einheitskreis*.

Im zweidimensionalen Fall $n = 2$ sind der Flächeninhalt F und der Umfang U eines Kreises gegeben durch

$$F = \pi r^2 \quad \text{bzw.} \quad U = 2\pi r.$$

Im dreidimensionalen Fall $n = 3$ sind das Volumen V und die Oberfläche O einer Kugel gegeben durch

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{bzw.} \quad O = 4\pi r^2.$$

15.4 Rand einer Menge: Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine Menge. Wie bereits im vorigen Abschnitt angedeutet, wird der *Rand* dieser Menge mit ∂M bezeichnet und ist in der Regel genau das, was man sich anschaulich darunter vorstellt. Formal gesprochen ist ein Randpunkt $\vec{x} \in \partial M$ dadurch charakterisiert, dass jede Kugel $B_r(\vec{x})$ sowohl Punkte enthält, die innerhalb als auch außerhalb von M liegen, also $M \cap B_r(\vec{x}) \neq \emptyset$ und $M \cap B_r(\vec{x}) \neq B_r(\vec{x})$ für alle $r > 0$.

15.5 Skalare Funktion mehrerer Veränderlicher: Sei $M \subset \mathbb{R}^m$. Eine Vorschrift $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Element $\vec{x} \in M$ eine reelle Zahl $y = f(\vec{x})$ zuordnet, heißt *skalare (oder reelle) Funktion von m Veränderlichen* mit Definitionsgebiet M . Gelegentlich spricht man auch von einem *Skalarfeld*. Wir verwenden synonym die Schreibweisen

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m).$$

Funktionen, die nur von einer reellen Variablen abhängen, nennt man *univariat*. Im Gegensatz dazu nennt man Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen, *multivariat*.

15.6 Spezielle skalare Funktionen:

- Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl, $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor, A eine $(m \times m)$ -Matrix und

$$\begin{aligned} f_0(\vec{x}) &= c \\ f_1(\vec{x}) &= c + \vec{a}^T \vec{x} \\ f_2(\vec{x}) &= c + \vec{a}^T \vec{x} + \vec{x}^T A \vec{x}. \end{aligned}$$

Dann ist f_0 eine konstante, f_1 eine affine⁶⁷ und f_2 eine quadratische Funktion.

- $f(\vec{x}) = \|\vec{x} - P\|$ ist die *Abstandsfunktion* zum Punkt P .

Dabei ist jeweils das Definitionsgebiet $M = \mathbb{R}^m$ möglich.

15.7 Grenzwert und Stetigkeit: Die Begriffsbildung für Grenzwert und Stetigkeit verläuft vollkommen analog zum Fall einer Veränderlichen [→ 10.4]. Die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ hat an der Stelle \vec{x}_0 den *Grenzwert* $f_0 \in \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = f_0$$

für jede Folge $(\vec{x}_k)_k$ in $M \setminus \{\vec{x}_0\}$, die gegen \vec{x}_0 konvergiert. Wir schreiben dann

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f_0.$$

Die Funktion f heißt *stetig* im Punkt $\vec{x}_0 \in M$, wenn

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0).$$

Anderenfalls heißt f *unstetig im Punkt \vec{x}_0* . Die Funktion f heißt *stetig*, wenn sie in allen Punkten von M stetig ist.

⁶⁷Gelegentlich wird die Funktion f_1 auch „linear“ genannt. Dies ist im Sinne von Kapitel 6 aber eigentlich nur dann korrekt, wenn $c = 0$ gilt. Analoges gilt für die Funktion F_1 in Abschnitt 15.11.

15.8 Regeln: Analog zum univariaten Fall [\rightarrow 10.9] $m = 1$ gilt:

- Wenn $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind, dann sind auch $f \pm g$, fg sowie $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ stetig. Der Quotient f/g ist stetig in \vec{x}_0 , falls $g(\vec{x}_0) \neq 0$.
- Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind, dann ist auch die verkettete Funktion $g(f(\vec{x}))$ stetig.
- Wenn M kompakt ist und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt die Funktion f auf M ihr Maximum und ihr Minimum an. Das heißt, es gibt Punkte \vec{x}_{\min} und \vec{x}_{\max} in M mit

$$f(\vec{x}_{\min}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_{\max}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in M.$$

15.9 Beispiel:

- Konstante, affine und quadratische Funktionen sowie Abstandsfunktionen sind stetig auf \mathbb{R}^m .
- $f(x, y) = x^2 \sin(x - y^3) + xy$ ist stetig auf \mathbb{R}^2 .

- Die Funktion

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist stetig auf \mathbb{R}^2 .

- Die Funktion

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ und unstetig in $\vec{0}$.

15.10 Vektorwertige Funktion: Seien f_1, \dots, f_n skalare Funktionen mit einem gemeinsamen Definitionsgebiet $M \subset \mathbb{R}^m$. Die daraus gebildete Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) \end{bmatrix}$$

heißt *vektorwertige Funktion* von m Veränderlichen. Die Funktionen f_1, \dots, f_n heißen *Koordinatenfunktionen*. F ist genau dann stetig, wenn alle Koordinatenfunktionen stetig sind. Falls Definitionsgebiet und Zielmenge dieselbe Dimension haben, also $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, dann nennt man F auch *Vektorfeld*. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedem Punkt des Raumes den Vektor der dort herrschenden Windgeschwindigkeit zuweist.

15.11 Spezielle Funktionen:

- Sei $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$, dann ist $F_0(\vec{x}) = \vec{c}$ eine *konstante* Funktion.
- Sei A eine $(n \times m)$ -Matrix, dann ist $F_1(\vec{x}) = \vec{c} + A\vec{x}$ eine *affine* Funktion.
- $\text{Id}(\vec{x}) := \vec{x}$ ist die *identische Abbildung* (oder kurz die *Identität*). Dies ist die lineare Abbildung mit $A = E$. Wenn das Definitionsgebiet auf die Menge $M \subset \mathbb{R}^m$ eingeschränkt ist, dann schreibt man auch Id_M .

15.12 Verkettung: Seien $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei vektorwertige Funktionen. Dann ist die *verkettete Funktion* $V := F \circ G$ definiert durch

$$V : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad V(\vec{x}) := F(G(\vec{x})).$$

Wenn F und G stetig sind, dann ist auch $V = F \circ G$ stetig.

15.13 Umkehrfunktion: Sei $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive vektorwertige Funktion mit Bildbereich

$$B := \{F(\vec{x}) : \vec{x} \in M\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte *Umkehrfunktion* $F^{-1} : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$F(\vec{x}) = \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad F^{-1}(\vec{y}) = \vec{x}.$$

Es gilt also

$$F^{-1} \circ F = \text{Id}_M, \quad F \circ F^{-1} = \text{Id}_B.$$

15.14 Beispiel: Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben mit

$$F(p, q) = \begin{bmatrix} e^p \cos q \\ e^p \sin q \end{bmatrix}, \quad G(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + y \\ xz \end{bmatrix}.$$

Die Verkettung $G \circ F$ ist nicht definiert, es gilt aber

$$V = F \circ G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad V(x, y, z) = \begin{bmatrix} e^{x+y} \cos xz \\ e^{x+y} \sin xz \end{bmatrix}.$$

F ist nicht injektiv und besitzt deshalb keine Umkehrfunktion. Schränkt man aber das Definitionsgebiet ein, beispielsweise

$$\tilde{F} : \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2), \quad \tilde{F}(p, q) = \begin{bmatrix} e^p \cos q \\ e^p \sin q \end{bmatrix},$$

dann ist \tilde{F} injektiv und hat als Bild $B := \{(r, s) : r > 0\}$ die rechte Halbebene. Die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$\tilde{F}^{-1} : B \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{F}^{-1}(r, s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \ln(r^2 + s^2) \\ \arctan(s/r) \end{bmatrix}.$$

15.15 Graph und Höhenlinie: Sei $M \subset \mathbb{R}^m$. Der *Graph* einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

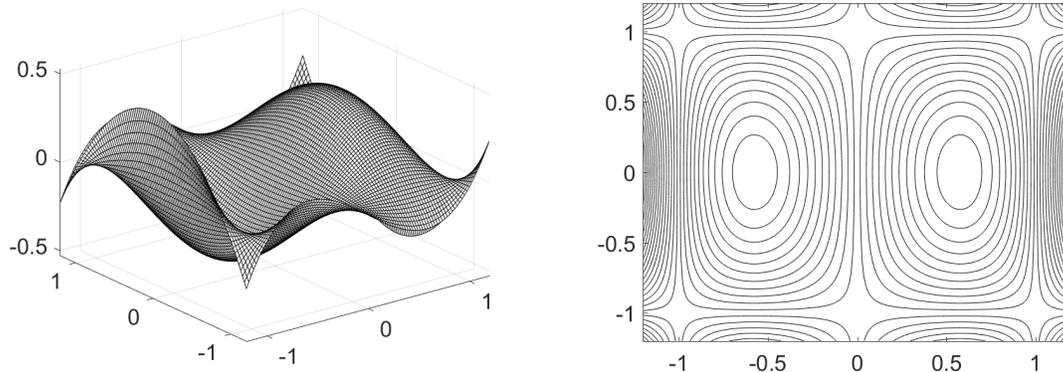
$$G_f := \{(\vec{x}, f(\vec{x})) : \vec{x} \in M\} \subset \mathbb{R}^{m+1}.$$

Es ist also $G_f \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Für $m = 1$ und $m = 2$ kann man mithilfe des Graphen den Funktionsverlauf veranschaulichen. Ebenfalls nützlich sind im Fall $m = 2$ *Höhenlinien*

$$H_f(c) := \{\vec{x} \in M : f(\vec{x}) = c\} \subset \mathbb{R}^m,$$

also Kurven im Definitionsgebiet, entlang derer die Funktion f einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$ besitzt. Beispiele hierfür sind Isobaren (Linien gleichen Luftdrucks) auf Wetterkarten oder,

wie der Name schon sagt, Höhenlinien auf Landkarten. Die Abbildung zeigt den Graphen und einige Höhenlinien der Funktion $f(x, y) = x(1 - x^2)(1 - y^2)$.



15.16 Bild und Parametrisierung: Genau zu unterscheiden vom Graphen ist das *Bild* [\rightarrow 1.8]

$$B_F := \{F(\vec{x}) : \vec{x} \in M\} \subset \mathbb{R}^n$$

einer vektorwertigen Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Man nennt F *im Wesentlichen injektiv*, wenn die Einschränkung dieser Funktion auf das Innere des Definitionsbereichs injektiv ist. Das bedeutet, dass es mit Ausnahme der Randpunkte eine eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten in M und in B_F gibt. Man nennt dann F eine *Parametrisierung* der Menge B_F über M . Die Aufgabe, zu einer gegebenen Menge B_F eine geeignete Parametrisierung zu finden, wird im Zusammenhang mit der mehrdimensionalen Integration noch sehr wichtig werden.

15.17 Beispiel:

- Die Funktion

$$F_1 : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix},$$

ist injektiv und damit eine Parametrisierung des Einheitskreises $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

- Die Funktion

$$F_2 : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F_2(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix},$$

hat ebenfalls den Einheitskreis als Bild, ist aber keine Parametrisierung, da beispielsweise gilt $F_2(\pi) = F_2(3\pi) = (-1, 0)$.

- Das Bild B_K der Funktion

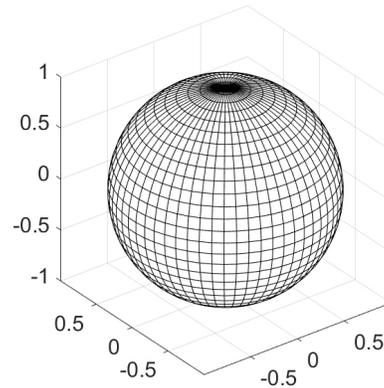
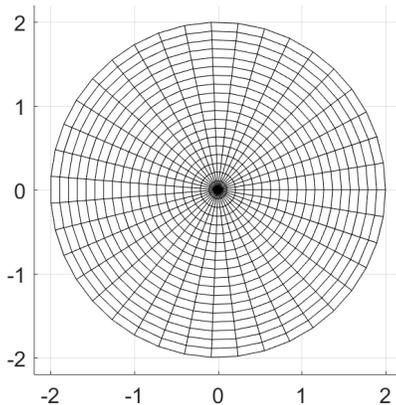
$$K : [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad K(r, \varphi) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix},$$

ist die abgeschlossene Kreisscheibe $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R\}$. Die Funktion K ist im Wesentlichen injektiv und damit eine Parametrisierung. Mehrdeutigkeit gibt es lediglich am Rand des Definitionsbereichs. Hier gilt $K(0, \varphi) = (0, 0)$ für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $K(r, 0) = K(r, 2\pi)$ für alle $r \in [0, R]$. Die Abbildung am Ende des Abschnitts zeigt links die Menge B_K für den Fall $R = 2$.

- Die Funktion

$$S : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad S(\varphi, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \psi \end{bmatrix},$$

ist eine Parametrisierung der Oberfläche $B_S := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ der Einheitskugel in \mathbb{R}^3 . Mehrdeutigkeit gibt es wieder am Rand. Hier ist $S(\varphi, 0) = (0, 0, 1)$ für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $S(0, \psi) = S(2\pi, \psi)$ für alle $\psi \in [0, \pi]$. Die Abbildung zeigt rechts die Menge B_S .



15.18 Kurve und Fläche: Die beiden folgenden Typen vektorwertiger Funktionen sind aus Sicht der Geometrie von besonderem Interesse:

- Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall auf der reellen Achse. Eine stetige Funktion $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Kurve* in \mathbb{R}^n . Ein Beispiel ist die *Helix* $c(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R}$. *Achtung:* Obwohl die Kurve eine vektorwertige Funktion ist, verwendet man hier üblicherweise Kleinbuchstaben – bevorzugt das kleine c vom Englischen *curve*.
- Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet in der Ebene \mathbb{R}^2 . Eine stetige Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *Fläche* in \mathbb{R}^3 . Ein Beispiel hierfür ist die Funktion S im Abschnitt zuvor.

Bei Kurven und Flächen wird das Bild auch *Spur* genannt. *Achtung:* In der Praxis (und auch in diesem Skript) ist der Sprachgebrauch gelegentlich ungenau und man spricht kurz auch von einer Kurve bzw. Fläche, wenn eigentlich deren Bild gemeint ist.

15.19 Visualisierung mit Matlab: Wichtige Matlab-Grafik-Befehle sind: `axis`, `camlight`, `cameratoolbar`, `clf`, `close`, `colormap`, `contour`, `cylinder`, `figure`, `grid`, `hold`, `light`, `linspace`, `mesh`, `meshgrid`, `plot`, `plot3`, `shading`, `subplot`, `surf`, `title`, `view`.

- Die Spur einer ebenen Kurve oder einer Raumkurve, also die Bildmenge B_c für $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, n = 2$ oder 3 , kann mit Hilfe der Befehle `plot` und `plot3` dargestellt werden.

– Kurve in $\mathbb{R}^2, c(t) = (t \cos t, t \sin t), t \in [0, 10]$.

```

t = linspace(0,10);           % 100 Punkte im Intervall [0,10]
x = t.*cos(t);               % x-Koordinaten
y = t.*sin(t);               % y-Koordinaten
plot(x,y);                   % Kurve plotten

```

– Kurve in \mathbb{R}^3 , $c(t) = (\cos t, \sin t, t/5)$, $t \in [0, 6\pi]$.

```

t = linspace(0,6*pi,300);    % 300 Punkte im Intervall [0,6*pi]
h = plot3(cos(t),sin(t),t/5,'r'); % rote Kurve plotten
set(h,'LineWidth',3);       % Liniendicke einstellen
grid on;                     % Koordinatengitter anzeigen
axis equal                   % einheitliche Achsenskalierung

```

- Der Graph der Funktion $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ kann mit Hilfe der Befehle `mesh` und `surf` dargestellt werden.

– $f(x, y) = x \cos(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 2]$.

```

x = linspace(-1,1,30);       % 30 x-Werte im Intervall [-1,1]
y = linspace( 0,2,30);       % 30 y-Werte im Intervall [ 0,2]
[x,y] = meshgrid(x,y);       % Punktegitter erzeugen
f = x.*cos(x.^2+y.^2);       % Funktionswerte
mesh(x,y,f);                 % Graph als Kurvennetz darstellen
cameratoolbar;               % interaktive Tools einschalten

```

– wie zuvor, aber `mesh`-Befehl ersetzen durch

```

surf(x,y,f);                 % Graph schattiert darstellen
shading interp;              % ohne Linien, glatter Farbverlauf
camlight;                    % Lichtquelle einschalten

```

- Das Bild B_F einer Fläche $F : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ kann ebenfalls mit Hilfe der Befehle `mesh` und `surf` dargestellt werden.

– $F(u, v) = (uv, u, u^2 - v^2)$, $[u, v] \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

```

u = linspace(-1,1);          % 100 u-Werte im Intervall [-1,1]
v = linspace(-1,1);          % 100 v-Werte im Intervall [-1,1]
[u,v] = meshgrid(u,v);       % Punktegitter erzeugen
h = surf(u.*v,u,u.^2-v.^2);   % Flaechе schattiert darstellen
shading interp;              % ohne Linien, glatter Farbverlauf
colormap(copper);           % Farbskala waehlen
cameratoolbar;              % interaktive Tools einschalten
camlight;                   % Lichtquelle einschalten
set(h,'AmbientStrength',0.7) % Flaechе aufhellen

```

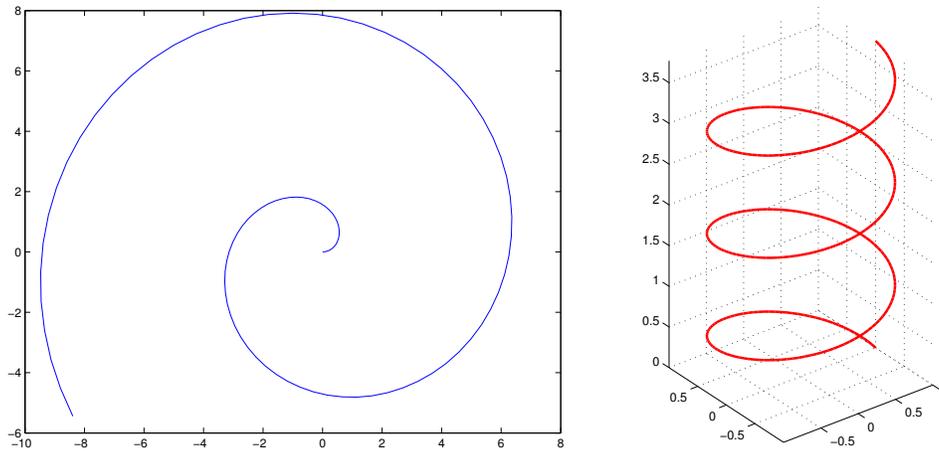


Abbildung 22: Links: Spur der ebenen Kurve $c : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t \cos t, t \sin t)$. Rechts: Spur der Raumkurve $c : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c(t) = (\cos t, \sin t, t/5)$

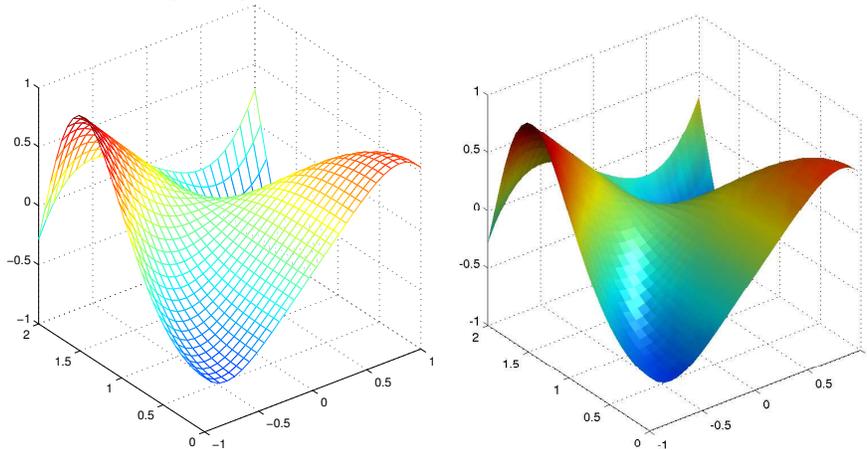


Abbildung 23: Graph G_f für $f : [-1, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \cos(x^2 + y^2)$.

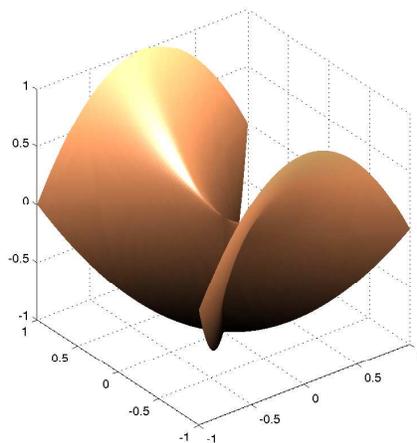


Abbildung 24: Bild B_F für $F : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(u, v) = (uv, u, u^2 - v^2)$.

16 Differenziation in mehreren Veränderlichen

Das Konzept des Differenzenquotienten, das im Fall einer Veränderlichen zur Definition der Ableitung geführt hat, kann bei Funktionen in mehreren Veränderlichen nicht angewandt werden. Betrachtet man eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, dann besteht das Problem genauer gesagt darin, dass bei einem Ausdruck der Form

$$\frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)}{\vec{x} - \vec{x}_0}$$

im Nenner ein Vektor steht, was keinen Sinn ergibt. Man kann sich der Aufgabe, einen Ableitungsbegriff für Funktionen in mehreren Veränderlichen zu definieren, auf (mindestens) zwei verschiedene Weisen nähern:

1. Man leitet eine Funktion $f(x_1, \dots, x_m)$ jeweils nach einer einzelnen Variablen ab und sieht dabei alle übrigen als konstant an. So entstehen m verschiedene *partielle Ableitungen*, die sich mit den bekannten univariaten Methoden einfach berechnen lassen. Beispielsweise erhält man für die Funktion $f(x, y) := x^2y + \sin(y)$ die beiden partiellen Ableitungen $f_x(x, y) = 2xy$ und $f_y(x, y) = x^2 + \cos(y)$.
2. Die Ableitung einer univariaten Funktion f im Punkt x_0 lässt sich dadurch charakterisieren, dass unter allen Geraden der Form

$$t(x) := f(x_0) + a(x - x_0),$$

die durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ gehen, diejenige mit der Steigung $a = f'(x_0)$ lokal die beste Approximation liefert. Betrachtet man den Fehler $r := f - t$ dann, gilt genauer gesagt nur in diesem Fall

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|r(x)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Für jede andere Wahl von a ist der Grenzwert von Null verschieden. Für eine skalare Funktion $f(\vec{x})$ in mehreren Veränderlichen ist die Tangente durch eine *Tangentialebene* zu ersetzen, man macht also analog zur Gleichung oben den Ansatz

$$t(\vec{x}) := f(\vec{x}_0) + \vec{a}^T(\vec{x} - \vec{x}_0).$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, die durch den Punkt $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ geht, und es stellt sich wieder die Aufgabe, den Vektor \vec{a} so zu wählen, dass lokal eine möglichst gute Approximation entsteht. Wenn es einen Vektor \vec{a} gibt, sodass für den zugehörigen Fehler $r := f - t$ analog gilt

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{|r(\vec{x})|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0,$$

dann heißt die Funktion f *differenzierbar* im Punkt \vec{x}_0 . Man bezeichnet den zugehörigen Vektor \vec{a} als *Gradient* von f und schreibt dafür $\vec{a} = \nabla f(\vec{x}_0)$. Um den Unterschied zur partiellen Differenzierbarkeit zu betonen, spricht man in diesem Zusammenhang gelegentlich auch von der *totalen Differenzierbarkeit*. Im allgemeinsten Fall betrachtet

man eine vektorwertige Funktion $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und macht für die Linearisierung den Ansatz

$$T(\vec{x}) := F(\vec{x}_0) + A(\vec{x} - \vec{x}_0).$$

Dabei ist $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Matrix und man bezeichnet diese als *Ableitung* $A = DF(\vec{x}_0)$, wenn für den Fehler $R := F - T$ wieder gilt

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\|R(\vec{x})\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Merke: Die Ableitung liefert die lokal beste lineare Approximation.

Die Definition der (totalen) Ableitung als beste lineare Approximation ist zwar aus theoretischer Sicht ein tragfähiges Konzept, allerdings lässt sich damit nicht ohne Weiteres konkret rechnen. Im Gegensatz dazu sind partielle Ableitungen einfach zu berechnen, ihre Existenz sagt aber über die Glattheit der betrachteten Funktion wenig aus. Betrachtet man beispielsweise die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } xy = 0 \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann existieren im Ursprung beide partiellen Ableitungen und sind gleich Null, die Funktion selbst ist hier aber noch nicht einmal stetig. Glücklicherweise verschwinden die Unterschiede zwischen den beiden Ansätzen, wenn man annimmt, dass alle partiellen Ableitungen einer Funktion f existieren und *stetig* sind. In diesem Fall ist f auch stetig differenzierbar im Sinne der besten linearen Approximation und die Einträge des Gradienten ∇f sind einfach die partiellen Ableitungen. Wir werden uns im Folgenden auf genau diesen Fall konzentrieren.

16.1 Partielle Ableitung: Sei \vec{x}_0 ein innerer Punkt der Menge $M \subset \mathbb{R}^m$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Bezeichne \vec{e}_i den i -ten Einheitsvektor der Standardbasis, dann definieren wir die Funktionen

$$g_i(t) := f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Wenn alle diese Funktionen differenzierbar an der Stelle $t = 0$ sind, dann heißt f *partiell differenzierbar* an der Stelle \vec{x}_0 . Die *partielle Ableitung* von f nach der i -ten Koordinate an der Stelle \vec{x}_0 ist dann definiert als

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) := g'_i(0).$$

Die Berechnung der partiellen Ableitung nach x_i verläuft praktisch so, dass man x_i als variabel und alle anderen Variablen als konstant betrachtet. Dann wendet man die bekannten Methoden für das Ableiten in einer Veränderlichen an. Die Bezeichnung partieller Ableitungen ist nicht einheitlich. Beispielsweise finden sich in der Literatur für die partielle Ableitung einer Funktion $f(x, y, z)$ nach der zweiten Variablen Bezeichnungen wie

$$\frac{\partial f}{\partial y}, f_y, \partial_y f, \partial_2 f, D_y f, D_2 f$$

und diese Liste ist keineswegs vollständig. Auch in diesem Skript werden wir verschiedene Notationen verwenden.

16.2 Beispiel:

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) = x^2y - e^{yz} &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -ye^{yz} \\
 f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| &\Rightarrow \partial_i f(\vec{x}) = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|}, \quad \vec{x} \neq \vec{0} \\
 f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } xy = 0 \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} &\Rightarrow f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0
 \end{aligned}$$

16.3 Stetige Differenzierbarkeit und Gradient: Eine Funktion f heißt *stetig differenzierbar* auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^m$, wenn alle partiellen Ableitungen existieren und stetig auf M sind. In diesem Fall wird der Spaltenvektor der partiellen Ableitungen als *Gradient* von f bezeichnet,

$$\nabla f := \begin{bmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_m f \end{bmatrix}.$$

Die Funktion $\nabla f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist also ein Vektorfeld. Das Symbol $\nabla = [\partial_1, \dots, \partial_m]^T$ heißt *Nabla-Operator*. Stetig differenzierbare Funktionen nennt man auch *C^1 -Funktionen* (vom Englischen „continuous“). *Achtung:* Gelegentlich (und insbesondere auch in älteren Versionen dieses Skripts) wird der Gradient als Zeilenvektor definiert.

16.4 Beispiel:

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) = x^2y - e^{yz} &\Rightarrow \nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 - ze^{yz} \\ -ye^{yz} \end{bmatrix} \\
 f(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle &\Rightarrow \nabla f(\vec{x}) = \vec{a} \\
 f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} &\Rightarrow \nabla f(\vec{x}) = 2A\vec{x}, \quad \text{falls } A = A^T \\
 f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| &\Rightarrow \nabla f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \quad \vec{x} \neq \vec{0}
 \end{aligned}$$

16.5 Regeln: Folgende Rechenregeln für C^1 -Funktionen $f, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ entsprechen genau dem univariaten Fall:

$$\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g, \quad \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g, \quad \nabla(f/g) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

16.6 Tangentialebene: Die mithilfe des Gradienten gebildete lineare Funktion

$$t(\vec{x}) := f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)^T (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

heißt *Tangentialebene* oder auch *Linearisierung* der C^1 -Funktion f an der Stelle \vec{x}_0 . Dies ist die einzige lineare Funktion, bei der für den Fehler $r := f - t$ gilt

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{|r(\vec{x})|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Die Tangentialebene ist in diesem Sinne die lokal beste lineare Approximation von f .

16.7 Beispiel: Sei $f(x, y) = 2x + e^{xy}$, dann ist $\nabla f(x, y) = [2 + ye^{xy}, xe^{xy}]^T$. Für $(x_0, y_0) = (1, 0)$ erhalten wir die Tangentialebene

$$t(x, y) = 3 + [2, 1] \cdot \begin{bmatrix} x - 1 \\ y \end{bmatrix} = 3 + 2(x - 1) + y = 1 + 2x + y.$$

16.8 Ableitung: Sei wieder $M \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge. Eine vektorwertige Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *stetig differenzierbar*, wenn alle ihre Koordinatenfunktionen stetig differenzierbar sind. Die (totale) *Ableitung* von F an der Stelle $\vec{x}_0 \in M$ ist dann definiert als die $(n \times m)$ -Matrix der transponierten Gradienten,

$$DF(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\vec{x}_0)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(\vec{x}_0)^T \end{bmatrix}.$$

Diese wird auch die *Jacobi-Matrix*⁶⁸ von F genannt. Sie stiftet eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n und gleicht damit, was die Dimension von Argumenten und Funktionswerten betrifft, der Funktion F selbst. Für den Spezialfall $n = 1$ einer skalaren Funktion ergibt sich die Beziehung

$$Df(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0)^T.$$

Die Ableitung ist hier also ein Zeilenvektor, während der Gradient ein Spaltenvektor ist. In der i -ten Spalte der Matrix DF stehen die partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen nach x_i . Man schreibt dafür in naheliegender Weise wieder $\partial_i F$, $\partial F / \partial x_i$ oder F_{x_i} und erhält

$$\partial_i F = \begin{bmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_n \end{bmatrix}, \quad DF = [\partial_1 F, \dots, \partial_m F].$$

Die Tangentialebenen der Koordinatenfunktionen ergeben zusammen die *Linearisierung* von F im Punkt \vec{x}_0 ,

$$T(\vec{x}) := \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}_0) + \nabla f_1(\vec{x}_0)^T(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}_0) + \nabla f_n(\vec{x}_0)^T(\vec{x} - \vec{x}_0) \end{bmatrix} = F(\vec{x}_0) + DF(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0).$$

Dies ist genau wie F eine Funktion von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^n und lokal wieder deren beste lineare Approximation, denn es gilt für den Rest $R := F - T$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\|R(\vec{x})\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Für kleine Abweichungen $\vec{x} \approx \vec{x}_0$ gilt also $F(\vec{x}) \approx T(\vec{x})$ und damit $F(\vec{x}) - F(\vec{x}_0) \approx DF(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$. *Merke:* Die Änderung des Funktionswerts ist näherungsweise gleich der Ableitung mal der Änderung des Arguments,

$$\Delta F \approx DF \cdot \Delta \vec{x}.$$

⁶⁸Carl Gustav Jacobi, 1804–1851

16.9 Beispiel:

- Für $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist die Ableitung eine (2×3) -Matrix,

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} xy + z \\ yz^2 \end{bmatrix} \Rightarrow DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} y & x & 1 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{bmatrix}, \quad F_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2yz \end{bmatrix}$$

- Für einen Vektor $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$ und $F(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$ ist

$$F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{bmatrix} \Rightarrow DF(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Bei Kurven $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, die ja nur von einem Argument abhängen, schreibt man für die Ableitung anstelle von Dc auch einfach wieder c' ,

$$c(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow Dc(t) = c'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

16.10 Kettenregel: Für die Verkettung $V = F \circ G$ vektorwertiger C^1 -Funktionen gilt analog zum univariaten Fall die Kettenregel

$$DV = (DF \circ G) \cdot DG.$$

Da das Matrizenprodukt nicht kommutativ ist, ist hier die Reihenfolge der Faktoren zu beachten. Nur dann sind auch die Dimensionen der Matrizen kompatibel.

16.11 Beispiel: Sei

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ y/x \\ x \end{bmatrix}, \quad G(r, t) = \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{bmatrix}.$$

Zur Bildung der Verkettung $V = F \circ G$ setzt man $(x, y) = G(r, t)$ und erhält durch Einsetzen $V(r, t) = F(G(r, t)) = (r^2, \tan t, r \cos t)$. Man kann diesen Ausdruck direkt ableiten (was hier einfacher ist) oder die Kettenregel anwenden: Die Ableitungen von F und G sind

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -y/x^2 & 1/x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad DG(r, t) = \begin{bmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{bmatrix}$$

und damit

$$DV(r, t) = \begin{bmatrix} 2r \cos t & 2r \sin t \\ -\sin t / (r \cos^2 t) & 1 / (r \cos t) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 1 + \tan^2 t \\ \cos t & -r \sin t \end{bmatrix}.$$

16.12 Umkehrfunktion: Sei $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein C^1 -Vektorfeld. Wenn dieses eine differenzierbare Umkehrfunktion F^{-1} besitzt, dann liefert Ableiten der Gleichung $F^{-1}(F(\vec{x})) = \vec{x}$ nach der Kettenregel mit $\vec{y} := F(\vec{x})$

$$DF^{-1}(\vec{y}) \cdot DF(\vec{x}) = E_m \quad \Rightarrow \quad DF^{-1}(\vec{y}) = (DF(\vec{x}))^{-1}.$$

Dabei ist E_m die $(m \times m)$ -Einheitsmatrix [→ 5.18]. Die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt \vec{y} ist also durch die Inverse der Ableitung im Urbild \vec{x} gegeben. Darüber hinaus gilt Folgendes:

- Wenn die Inverse von $DF(\vec{x}_0)$ nicht existiert, also falls $\det DF(\vec{x}_0) = 0$, dann besitzt entweder F keine Umkehrfunktion oder ist diese an der Stelle $\vec{y}_0 = F(\vec{x}_0)$ nicht differenzierbar.
- Wenn die Inverse von $DF(\vec{x}_0)$ existiert, also falls $\det DF(\vec{x}_0) \neq 0$, dann gibt es eine Kugel $B_\varepsilon(\vec{x}_0)$ um \vec{x}_0 , sodass die Einschränkung von F auf diese Kugel eine differenzierbare Umkehrfunktion besitzt, und es gilt $DF^{-1}(\vec{y}) = (DF(\vec{x}))^{-1}$ für $x \in B_\varepsilon(\vec{x}_0)$.

16.13 Richtungsableitung: Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld und $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Kurve. Dann ist $g := f \circ c$ eine reelle Funktion in einer Veränderlichen und es gilt nach der Kettenregel

$$g'(t) = Df(c(t)) \cdot c'(t) = \langle \nabla f(c(t)), c'(t) \rangle.$$

Im Fall einer ebenen Kurve $c(t) = (x(t), y(t))$ erhält man also beispielsweise

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

oder kurz

$$g' = f_x x' + f_y y'.$$

Ist die Kurve $c(t) = \vec{x}_0 + t\vec{r}$ speziell eine Gerade mit Richtungsvektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^m$ durch den Punkt \vec{x}_0 , dann ist *die Richtungsableitung* von f an der Stelle \vec{x}_0 in Richtung \vec{r} gegeben durch

$$\partial_{\vec{r}} f(\vec{x}_0) := g'(0) = \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{r} \rangle.$$

Wenn der Vektor \vec{r} die Länge 1 hat und mit dem Gradienten den Winkel φ einschließt, dann gilt

$$\partial_{\vec{r}} f(\vec{x}_0) = \|\nabla f(\vec{x}_0)\| \cdot \cos \varphi.$$

Dieser Wert ist maximal, wenn der Winkel $\varphi = 0$ ist, wenn also \vec{r} in Richtung des Gradienten weist. *Merke:* Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs.

16.14 Partielle Ableitungen höherer Ordnung: Durch partielles Ableiten partieller Ableitungen entstehen partielle Ableitungen höherer Ordnung. Wenn also die partiellen Ableitungen einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ selbst wieder C^1 -Funktionen sind, dann sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung gegeben durch

$$\partial_i \partial_j f := \partial_i (\partial_j f).$$

Andere Schreibweisen sind beispielsweise für die zweite partielle Ableitung einer Funktion $f(x, y, z)$ nach der ersten und dritten Koordinate

$$\partial_1 \partial_3 f, \partial_x \partial_z f, f_{xz}, \partial_{xz} f, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}.$$

Ableitungen dritter Ordnung entstehen durch partielles Differenzieren der Ableitungen zweiter Ordnung und so weiter. Funktionen, bei denen alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und stetig sind, nennt man auch C^k -Funktionen. Für solche Funktionen gilt der *Satz von Schwarz*: Die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen bestimmt werden, ist unerheblich. Es gilt also beispielsweise für C^2 -Funktionen

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f.$$

16.15 Beispiel: Für $f(x, y, z) = zy^2 \sin x$ ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = 2yz \cos x \\ f_{xxz}(x, y, z) &= f_{zxx}(x, y, z) = f_{zxx}(x, y, z) = -y^2 \sin x \\ \partial_1 \partial_2^2 \partial_3 f(x, y, z) &= \partial_2 \partial_3 \partial_1 \partial_2 f(x, y, z) = 2 \cos x. \end{aligned}$$

16.16 Hesse-Matrix: Die zweiten partiellen Ableitungen einer C^2 -Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ lassen sich in natürlicher Weise in Matrixform anordnen,

$$D^2 f := \begin{bmatrix} \partial_1 \partial_1 f & \partial_1 \partial_2 f & \cdots & \partial_1 \partial_m f \\ \partial_2 \partial_1 f & \partial_2 \partial_2 f & \cdots & \partial_2 \partial_m f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_m \partial_1 f & \partial_m \partial_2 f & \cdots & \partial_m \partial_m f \end{bmatrix}.$$

Man nennt dies die *Hesse-Matrix* von f . Es gibt in der Literatur wieder verschiedene Bezeichnungen, wie beispielsweise H_f oder $\nabla^2 f$. Technisch korrekt, aber unüblich, ist der Ausdruck $D\nabla f$. Hier ist ∇f ein Vektorfeld, dessen Ableitung gerade die gesuchte $(m \times m)$ -Matrix mit den zweiten partiellen Ableitungen ergibt. Die Hesse-Matrix ist nach dem Satz von Schwarz symmetrisch, es gilt also

$$D^2 f = (D^2 f)^T.$$

16.17 Beispiel:

- Für $f(x, y) = x/y$ ist

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1/y^2 \\ -1/y^2 & 2x/y^3 \end{bmatrix}.$$

- Für $f(x, y, z) = xy + yz$ ist

$$D^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Für $f(\vec{x}) = (\vec{x} - \vec{x}_0)^T A (\vec{x} - \vec{x}_0)$ mit einer symmetrischen Matrix A ist

$$D^2 f(\vec{x}) = 2A.$$

16.18 Taylor-Polynom eines Skalarfelds: Die Tangentialebene [\rightarrow 16.6] eines C^1 -Skalarfelds $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt \vec{x}_0 lässt sich als lineares Taylor-Polynom deuten,

$$T_1 f(\vec{x}) := t(x) = f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0)\vec{h}, \quad \vec{h} := \vec{x} - \vec{x}_0,$$

denn $T_1 f$ hat an der Stelle \vec{x}_0 denselben Wert und dieselbe Ableitung wie f . Falls f sogar C^2 ist, kann man das Restglied analog zum univariaten Fall [\rightarrow 13.9] in Lagrange-Form mithilfe der Hesse-Matrix angeben,

$$f(\vec{x}) - T_1 f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{h}^T D^2 f(\vec{\xi}) \vec{h}.$$

Dabei ist $\vec{\xi}$ eine Stelle auf der Verbindungsstrecke zwischen \vec{x} und \vec{x}_0 . Das letzte Beispiel im Abschnitt zuvor zeigt, dass

$$T_2 f(\vec{x}) := f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0)\vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^T D^2 f(\vec{x}_0) \vec{h}$$

das quadratische Taylor-Polynom ist, denn nun stimmt zusätzlich die Hesse-Matrix an der Stelle \vec{x}_0 überein. Die formale Analogie zum univariaten Fall ist auch hier unverkennbar. Taylor-Polynome höherer Ordnung und Taylor-Reihen lassen sich ebenfalls definieren, doch ist die erforderliche Notation recht kompliziert, sodass wir hier darauf verzichten.

16.19 Beispiel: Gesucht ist das quadratische Taylor-Polynom der Funktion $f(x, y, z) := y^3 + e^{xz}$ an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, -2)$. Der Funktionswert dort ist $f(0, 1, -2) = 2$. Die Ableitung ist

$$Df(x, y, z) = [ze^{xz}, 3y^2, xe^{xz}] \Rightarrow Df(0, 1, -2) = [-2, 3, 0]$$

und die Hesse-Matrix ergibt sich zu

$$D^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} z^2 e^{xz} & 0 & (1+xz)e^{xz} \\ 0 & 6y & 0 \\ (1+xz)e^{xz} & 0 & x^2 e^{xz} \end{bmatrix} \Rightarrow D^2 f(0, 1, -2) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} T_2 f(x, y, z) &= 2 + [-2, 3, 0] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z+2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [x, y-1, z+2] \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z+2 \end{bmatrix} \\ &= 2 - 2x + 3(y-1) + 2x^2 + 3(y-1)^2 + x(z+2). \end{aligned}$$

17 Extrema

Die Bestimmung lokaler Extremwerte ist auch für multivariate Funktionen eine sehr wichtige Aufgabe. Wie sind beispielsweise die Flughöhe h und die Geschwindigkeit v eines Flugzeugs zu wählen, um den Treibstoffverbrauch $f(h, v)$ zu minimieren? Das Vorgehen zur Lösung des Problems gleicht prinzipiell der bekannten Prozedur für den univariaten Fall: Zunächst liefern die Nullstellen der Ableitung (hier des Gradienten) Kandidaten für Extremstellen. Dann bestimmt man deren Charakter durch eine Untersuchung der zweiten Ableitung (hier der Hesse-Matrix). Eine Variante der Aufgabenstellung betrifft Probleme, bei denen Extremwerte unter gewissen einschränkenden Bedingungen gesucht werden. Man denke beispielsweise an die Bestimmung von Radius r und Höhe h einer zylindrischen Dose mit vorgegebenem Volumen V , sodass die Oberfläche $f(r, h)$ minimal wird. Hier genügt es dann nicht mehr, einfach die Nullstellen des Gradienten der Zielfunktion zu betrachten.

17.1 Lokales Extremum: Eine reellwertige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit Definitionsgebiet $M \subset \mathbb{R}^m$ besitzt im Punkt \vec{x}_0 ein lokales *Minimum* bzw. *Maximum*, wenn für eine Kugel $B_r(\vec{x}_0)$ um \vec{x}_0 mit hinreichend kleinem Radius $r > 0$ [→ 15.3] gilt

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) \quad \text{bzw.} \quad f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0) \quad \text{für alle} \quad \vec{x} \in B_\varepsilon(\vec{x}_0) \cap M.$$

Lokale Minima und Maxima bilden zusammen die Menge der lokalen *Extrema*. Bei einem *globalen Extremum* gelten die Bedingungen

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) \quad \text{bzw.} \quad f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0) \quad \text{für alle} \quad \vec{x} \in M.$$

Wir beschäftigen uns hier ausschließlich mit der Untersuchung lokaler Extrema. Wenn also im Folgenden kurz von einem Minimum oder Maximum die Rede ist, dann ist stets die lokale Variante gemeint.

17.2 Notwendige Bedingung: Sei f stetig differenzierbar. Wenn f im Punkt \vec{x}_0 ein lokales Extremum besitzt und \vec{x}_0 ein innerer Punkt von M ist, dann verschwindet dort der Gradient,

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Dies lässt sich wie folgt begründen: Wir betrachten wieder die Funktionen $g_i(t) := f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_i)$, die bereits bei der Definition der partiellen Ableitung verwendet wurden. Wenn f an der Stelle \vec{x}_0 ein Extremum hat, dann haben alle Funktionen g_1, \dots, g_m an der Stelle $t_0 = 0$ ebenfalls ein Extremum. Aus den bekannten Eigenschaften univariater Funktionen folgt, dass alle Ableitungen für $t_0 = 0$ verschwinden, also $g'_1(0) = \dots = g'_m(0) = 0$. Dies sind aber gerade die partiellen Ableitungen von f an der Stelle \vec{x}_0 , die den Gradienten bilden. *Achtung:* Die genannte Bedingung gilt nur für innere Punkte. Wenn \vec{x}_0 auf dem Rand von M liegt, kann f dort ein lokales Extremum haben, obwohl $\nabla f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ gilt.

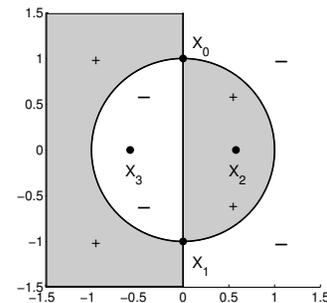
17.3 Kritischer Punkt: Ein innerer Punkt $\vec{x}_0 \in M$ heißt *kritischer Punkt* oder auch *stationärer Punkt* von f , wenn der Gradient dort verschwindet, $\nabla f(\vec{x}_0) = (0, \dots, 0)$. Ein kritischer Punkt, in dem kein Extremum vorliegt, heißt *Sattelpunkt*.

17.4 Beispiel:

- $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ hat Gradient $\nabla f(x, y) = (2x, 4y)$. Der einzige kritische Punkt ist $\vec{x}_0 = (0, 0)$. Die Funktion f hat dort ein Minimum, da $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) = 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.
- $f(x, y) = xy$ hat Gradient $\nabla f(x, y) = (y, x)$. Der einzige kritische Punkt ist $\vec{x}_0 = (0, 0)$. Die Funktion f hat dort einen Sattelpunkt, da f in jeder Umgebung von \vec{x}_0 sowohl positive als auch negative Funktionswerte annimmt. Man betrachte beispielsweise die Werte $f(t, t) = t^2$ und $f(-t, t) = -t^2$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$.
- $f(x, y) = x - x^3 - xy^2$ hat Gradient $\nabla f(x, y) = (1 - 3x^2 - y^2, -2xy)$ und Nullsetzen ergibt die kritischen Punkte

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit $f(x, y) = x(1 - x^2 - y^2)$ sieht man, dass das Vorzeichen von f in den grau schattierten Bereichen positiv und in den übrigen Bereichen negativ ist. Also handelt es sich bei \vec{x}_0 und \vec{x}_1 um Sattelpunkte, bei \vec{x}_2 um ein Maximum und bei \vec{x}_3 um ein Minimum.



17.5 Quadratische Funktionen: Sei $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor und A eine invertierbare symmetrische $(m \times m)$ -Matrix. Die quadratische Funktion

$$f(\vec{x}) = a + \vec{b}^T \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x}$$

hat den Gradienten

$$\nabla f(\vec{x}) = \vec{b} + A\vec{x}$$

und den kritischen Punkt

$$\vec{x}_0 = -A^{-1}\vec{b}.$$

Für ein beliebiges \vec{x} und $\vec{h} := \vec{x} - \vec{x}_0$ erhält man

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \vec{b}^T \vec{h} + \vec{x}_0^T A \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^T A \vec{h} = \frac{1}{2} \vec{h}^T A \vec{h} = \frac{1}{2} \vec{h}^T V D V^T \vec{h},$$

wobei $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von A und V die zugehörige orthogonale Matrix der Eigenvektoren ist. Mit $\vec{p} := V^T \vec{h}$ erhält man

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \frac{1}{2} \vec{p}^T D \vec{p} = \frac{1}{2} (\lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2 + \dots + \lambda_m p_m^2).$$

- Wenn alle Eigenwerte positiv sind, heißt die Matrix A *positiv definit*. Es ist dann $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \geq 0$ und f hat an der Stelle \vec{x}_0 ein Minimum.
- Wenn alle Eigenwerte negativ sind, heißt die Matrix A *negativ definit*. Es ist dann $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \leq 0$ und f hat an der Stelle \vec{x}_0 ein Maximum.
- Wenn es sowohl positive als auch negative Eigenwerte gibt, heißt die Matrix A *indefinit*. Dann hat f an der Stelle \vec{x}_0 einen Sattelpunkt.

17.6 Kriterien für Definitheit: Es gibt verschiedene Möglichkeit, die Definitheit einer symmetrischen Matrix A festzustellen, ohne die Eigenwerte explizit berechnen zu müssen.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: Hier gilt $\lambda_1 \lambda_2 = \det A$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$. Damit folgt

$$\begin{array}{llll} \det A > 0 & \text{und } a_{11} > 0 & \Rightarrow & A \text{ positiv definit} & \Rightarrow & \text{Minimum} \\ \det A > 0 & \text{und } a_{11} < 0 & \Rightarrow & A \text{ negativ definit} & \Rightarrow & \text{Maximum} \\ \det A < 0 & & \Rightarrow & A \text{ indefinit} & \Rightarrow & \text{Sattelpunkt.} \end{array}$$

Bei höherdimensionalen Matrizen liegen die Dinge etwas komplizierter. Wir beschränken uns hier darauf, einige Kriterien ohne weitere Begründung stichwortartig anzugeben.

- A ist genau dann negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist. Die nachfolgenden Bedingungen für positive Definitheit können deshalb auch dazu verwendet werden, um negative Definitheit festzustellen.
- *Hauptminoren:* Für $k = 1, \dots, n$ ist der k -te Hauptminor definiert als die $(k \times k)$ -Matrix A_k deren Elemente aus den ersten k Zeilen und Spalten von A entnommen sind. Die Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn die Determinanten aller dieser sogenannten führenden *Hauptminoren* positiv sind. Dieses Kriterium eignet sich in der Praxis vor allem für kleinere Matrizen. Es ist beispielsweise

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = 9, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A$$

Da alle Determinanten positiv sind,

$$\det A_1 = 9, \quad \det A_2 = 9, \quad \det A_3 = 36,$$

ist A positiv definit.

- *Cholesky-Zerlegung:*⁶⁹ Die Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn es eine untere Dreiecksmatrix L mit positiven Diagonaleinträgen gibt, sodass

$$A = L \cdot L^T.$$

Die Darstellung von A als Produkt dieser Form nennt man Cholesky-Zerlegung. Sie ist numerisch für Matrizen mit bis zu einigen Tausend Zeilen und Spalten schnell berechenbar und auch für andere Zwecke von Bedeutung. Im Beispiel ist

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

⁶⁹André-Louis Cholesky, 1875-1918

- **Diagonaldominanz:** Die Matrix A heißt diagonaldominant, wenn in jeder Zeile das Diagonalelement größer ist, als die Summe der Beträge der übrigen Elemente, d.h.,

$$a_{i,i} > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Diese Eigenschaft ist in vielen Anwendungsfällen gegeben und lässt sich ganz einfach überprüfen, selbst für sehr große Matrizen mit Millionen von Zeilen und Spalten. Diagonaldominanz ist eine hinreichende, aber keineswegs notwendige Bedingung für positive Definitheit. Für die Matrix im Beispiel gilt für die erste Zeile $9 > |-3| + |3|$ und für die dritte Zeile $6 > |3| + |-2|$, wie gefordert. Allerdings ist in der zweiten Zeile $2 < |-3| + |-2|$. Damit ist A zwar nicht diagonaldominant, aber, wie bereits gezeigt, dennoch positiv definit.

17.7 Beispiel:

- $f(x, y, z) = 3 - 4y + 4z + x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz$. Hier ist

$$a = 3, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_0 = -A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 8$. Also ist A positiv definit und die Funktion f hat an der Stelle \vec{x}_0 ein Minimum.

- $f(x, y) = 2 + x^2 + xy - y^2$. Hier ist $a = 2$, $\vec{b} = (0, 0)$ und

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wegen $\det A = -5$ hat f an der Stelle $\vec{x}_0 = (0, 0)$ einen Sattelpunkt.

- $f(x, y) = -1 - 3x^2 + xy - y^2$. Hier ist $a = -1$, $\vec{b} = (0, 0)$ und

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wegen $\det A = 11$ und $a_{11} = -6$ hat f an der Stelle $\vec{x}_0 = (0, 0)$ ein Maximum.

17.8 Charakter kritischer Punkte: Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und \vec{x}_0 ein kritischer Punkt. Dann hat das quadratische Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt \vec{x}_0 die Form

$$T_2 f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \vec{h}^T A \vec{h}, \quad A := D^2 f(\vec{x}_0).$$

Wenn die Hesse-Matrix A

- positiv definit ist, dann hat $T_2 f$ und damit auch f an der Stelle \vec{x}_0 ein Minimum.
- negativ definit ist, dann hat $T_2 f$ und damit auch f an der Stelle \vec{x}_0 ein Maximum.

- indefinit ist, dann hat T_2f und damit auch f an der Stelle \vec{x}_0 einen Sattelpunkt.

Für $m = 2$ können wieder die in [→ 17.5] für diesen Spezialfall angegebenen Kriterien verwendet werden.

Achtung: Die drei genannten Fälle decken nicht alle möglichen Situationen ab. Es kann vorkommen, dass einige (oder sogar alle) Eigenwerte von A verschwinden und die übrigen ein einheitliches Vorzeichen haben. Dann ist die Matrix weder positiv noch negativ definit, aber auch nicht indefinit. In diesem Fall müssen für die Bestimmung des Charakters des kritischen Punktes Taylor-Polynome höherer Ordnung oder geometrische Überlegungen herangezogen werden.

17.9 Beispiel:

- Für $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$ hat der Gradient $\nabla f(x, y) = (2x(1 - y), 4y - x^2)$ die Nullstellen

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Hesse-Matrix ist

$$A := D^2f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & 4 \end{bmatrix}.$$

Für $\vec{x} = \vec{x}_0$ gilt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det A = 8, \quad a_{11} = 2.$$

Also hat f an der Stelle \vec{x}_0 ein Minimum. Für $\vec{x} = \vec{x}_1$ bzw. $\vec{x} = \vec{x}_2$ gilt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mp 4 \\ \mp 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det A = -16.$$

Also hat f an den Stellen \vec{x}_1 und \vec{x}_2 einen Sattelpunkt.

- Für $f(\vec{x}) = (1 + x^2 + yz)e^y$ hat der Gradient $\nabla f(\vec{x}) = e^y(2x, 1 + z + x^2 + yz, y)$ die Nullstelle $\vec{x}_0 = (0, 0, -1)$. Die Hesse-Matrix

$$D^2f(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ und ist deshalb indefinit. f hat also an der Stelle \vec{x}_0 einen Sattelpunkt.

17.10 Extremum unter Nebenbedingungen: In den Anwendungen tritt häufig das Problem auf, Extrema einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ unter der Annahme zu bestimmen, dass die Menge der zulässigen Argumente durch eine *Nebenbedingung* der Form $g(\vec{x}) = 0$ eingeschränkt ist. Dabei sind sowohl f als auch g stetig differenzierbare reelle Funktionen. Man spricht dann auch von *ingeschränkten Extrema*. Als Beispiel denke man an eine zylindrische Konservendose mit Radius r und Höhe h , deren Oberfläche $f(r, h) = 2\pi r(r + h)$ unter

der Voraussetzung zu minimieren ist, dass das Volumen den vorgegebenen Wert V hat. Die Nebenbedingung hat hier also die Form $g(r, h) = \pi r^2 h - V = 0$. Es gibt zwei verschiedene Herangehensweisen:

1. *Parametrisierung.* Wenn man eine Parametrisierung $\Psi : G \rightarrow B$ der Menge $B = \{\vec{x} \in M : g(\vec{x}) = 0\}$ der zulässigen Argumente kennt, dann betrachtet man anstelle von $f(\vec{x})$ die Funktion $\varphi(\vec{u}) := f(\Psi(\vec{u}))$ für $\vec{u} \in G$. Diese lässt sich mit den bereits bekannten Methoden untersuchen. Hat man hierfür eine gewöhnliche Extremstelle \vec{u}_0 gefunden, dann hat f selbst an der Stelle $\vec{x}_0 := \Psi(\vec{u}_0)$ ein eingeschränktes Extremum. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass sich die Dimension des Problems reduziert. Während $\vec{x} \in M$ ein Vektor mit m Komponenten ist, hat die neue Variable $\vec{u} \in G$ nur $m - 1$ Komponenten. Außerdem lässt sich der Charakter des eingeschränkten Extremums mithilfe der Hesse-Matrix einfach bestimmen. Es kann aber schwierig sein, eine geeignete Funktion Ψ zu finden.

2. *Methode von Lagrange.* Wenn eine Parametrisierung der zulässigen Menge nicht zur Verfügung steht, dann kann man folgende Regel verwenden: Wenn die Funktion f an der Stelle $\vec{x}_0 \in M$ ein eingeschränktes Extremum besitzt, dann sind die Gradienten $\nabla f(\vec{x}_0)$ und $\nabla g(\vec{x}_0)$ linear abhängig. Es ist also

- entweder $\nabla g(\vec{x}_0) = \vec{0}$
- oder es gibt einen sogenannten *Lagrange-Multiplikator* $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\nabla f(\vec{x}_0) + \lambda \nabla g(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Der erste Fall ist als Ausnahmesituation zu betrachten, während der zweite den Regelfall darstellt. Im Gegensatz zur Reduktion der Dimension bei der Parametrisierungsmethode kommt hier allerdings eine zusätzliche Variable λ ins Spiel. Bei der Suche nach kritischen Stellen, also Kandidaten für ein eingeschränktes Extremum, ist nämlich das Gleichungssystem

$$\nabla f(\vec{x}) + \lambda \nabla g(\vec{x}) = \vec{0}, \quad g(\vec{x}) = 0$$

zu lösen, bei dem sowohl \vec{x} als auch λ unbekannt sind. Zudem ist die Bestimmung des Charakters nicht so einfach wie im Fall ohne Nebenbedingungen. Kriterien hierfür findet man in der Literatur unter dem Stichwort „geränderte Hesse-Matrix“.

Zur Begründung der Methode von Lagrange nehmen wir an, dass f an der Stelle \vec{x}_0 ein eingeschränktes Extremum besitzt und dass dort der Gradient von g nicht verschwindet, also $\nabla g(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Die Tatsache, dass man eine Parametrisierung der Menge B der zulässigen Argumente nicht explizit kennt, bedeutet nun keinesfalls, dass es eine solche nicht gibt. Im Gegenteil, man kann zeigen, dass es stets eine Funktion $\Psi : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow B$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- $\Psi(\vec{0}) = \vec{x}_0$,
- $\Psi(\vec{u}) \in B$, das heißt $g(\Psi(\vec{u})) = 0$ für alle \vec{u} ,
- die Zeilen der Matrix $A := (D\Psi(\vec{0}))^T$ sind linear unabhängig, also $\text{rang } A = m - 1$.

Dies besagt nicht, dass Ψ die gesamte Menge B parametrisiert, aber zumindest einen Teil davon in der Umgebung von \vec{x}_0 und dies ist für unsere Zwecke vollkommen ausreichend. Zunächst differenzieren wir die Gleichung $g(\Psi(\vec{u})) = 0$ nach \vec{u} , transponieren und setzen $\vec{u} = \vec{0}$,

$$(Dg(\Psi(\vec{0})) \cdot D\Psi(\vec{0}))^T = A\nabla g(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Dann betrachten wir die Funktion $\varphi(\vec{u}) := f(\Psi(\vec{u}))$. Diese hat an der Stelle $\vec{u}_0 = \vec{0}$ ein gewöhnliches Extremum, es gilt also

$$\nabla\varphi(\vec{0}) = (Df(\Psi(\vec{0})) \cdot D\Psi(\vec{0}))^T = A\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Das heißt, dass sowohl $\nabla f(\vec{x}_0)$ als auch $\nabla g(\vec{x}_0)$ im Kern von A liegen. Dieser ist aber nach der Dimensionsformel [→ 4.14]

$$m = \text{rang } A + \dim \ker A$$

eindimensional. Also sind die beiden Vektoren linear abhängig und es gibt, wie behauptet, eine Zahl λ mit $\nabla f(\vec{x}_0) + \lambda\nabla g(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

Gelegentlich sind auch mehrere Nebenbedingungen $g_1(\vec{x}) = \dots = g_n(\vec{x}) = 0$ gleichzeitig zu erfüllen. Der Ausnahmesituation $\nabla g(\vec{x}) = \vec{0}$ im Fall einer Nebenbedingung entspricht hier die lineare Abhängigkeit der Gradienten $\nabla g_1(\vec{x}), \dots, \nabla g_n(\vec{x})$. Anderenfalls verwendet man n Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und das Gleichungssystem zur Bestimmung kritischer Punkte bekommt die Form

$$\nabla f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(\vec{x}) = \vec{0}, \quad g_1(\vec{x}) = \dots = g_n(\vec{x}) = 0.$$

Dies sind $m + n$ Gleichungen für $m + n$ Unbekannte.

17.11 Beispiel: Wir betrachten, wie bereits eingangs erwähnt, eine zylindrische Konservendose mit Radius r , Höhe h und vorgegebenem Volumen V . Um eine möglichst kleine Oberfläche zu erhalten und damit den Materialverbrauch zu optimieren, stellt sich also das Minimierungsproblem

$$f(r, h) := 2\pi r(r + h) \rightarrow \min, \quad g(r, h) := \pi r^2 h - V = 0, \quad (r, h) \in \mathbb{R}_{>0}^2.$$

Dieses lässt sich mit beiden beschriebenen Ansätzen lösen:

- Alle zulässigen Argumente lassen sich in der Form

$$\begin{bmatrix} r \\ h \end{bmatrix} = \Psi(u) = \begin{bmatrix} u \\ V/(\pi u^2) \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}_{>0},$$

parametrisieren. Damit ergibt sich

$$\varphi(u) = f(\Psi(u)) = 2\pi u(u + V/(\pi u^2)) = 2\pi u^2 + 2V/u.$$

Diese Funktion hat ihr Minimum an der Stelle $u_0 = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$. Dementsprechend ist f eingeschränkt minimal für

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ h_0 \end{bmatrix} = \Psi(u_0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ V/(\pi u_0^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{V/(2\pi)} \\ 2\sqrt[3]{V/(2\pi)} \end{bmatrix}.$$

Die Abbildung zeigt links den Graphen der Funktion f mit einigen Höhenlinien sowie in rot die Kurve $(\Psi(u), \varphi(u))$ für den Fall $V = 500$. Diese hat für $u_0 \approx 4.3$ den minimalen z -Wert $\varphi(u_0) \approx 348.7$ entsprechend der kleinstmöglichen Oberfläche.

- Um die Lagrange-Methode anzuwenden, bestimmen wir zunächst die Gradienten von f und g ,

$$\nabla f(r, h) = \begin{bmatrix} 2\pi(2r + h) \\ 2\pi r \end{bmatrix}, \quad \nabla g(r, h) = \begin{bmatrix} 2\pi r h \\ \pi r^2 \end{bmatrix}.$$

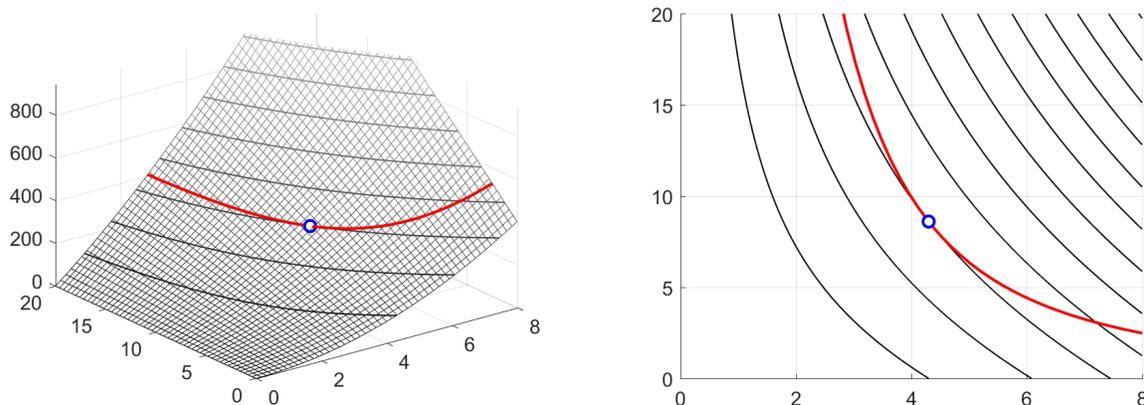
Damit sind folgende drei Gleichungen zu lösen:

$$2\pi(2r + h) + \lambda 2\pi r h = 0, \quad 2\pi r + \lambda \pi r^2 = 0, \quad \pi r^2 h - V = 0.$$

Da r positiv ist, folgt aus der zweiten Gleichung $\lambda r = -2$. Dies eingesetzt in die erste Gleichung liefert $2r = h$. Der Querschnitt der optimalen Dose ist also quadratisch. Damit erhält man aus der dritten Bedingung schließlich wie zuvor die Lösung

$$r_0 = h_0/2 = \sqrt[3]{V/(2\pi)}.$$

Der Lagrange-Multiplikator hat den Wert $\lambda = -2/r_0$, dieser ist hier aber eine rein rechnerische Größe und für das gesuchte Ergebnis belanglos. Die Abbildung zeigt rechts einige Höhenlinien der Funktion f sowie in rot die Menge B der zulässigen Argumente wieder für den Fall $V = 500$. Diese lässt sich als Höhenlinie $H_g(0)$ der Funktion g zum Funktionswert 0 interpretieren. In der gesuchten Minimalstelle $(r_0, h_0) \approx (4.3, 8.6)$ verlaufen die Höhenlinien von f und g in dieselbe Richtung. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Gradienten entsprechend der Lagrange-Bedingung kollinear sind.



Die tatsächliche Form von Konservendosen weicht von diesem Ergebnis mehr oder weniger deutlich ab, da neben dem Materialverbrauch auch andere Eigenschaften zu berücksichtigen sind.

17.12 Quadratische Funktion mit linearen Nebenbedingungen: Ein wichtiger Spezialfall ist der folgende: Gegeben ist eine quadratische Funktion der Form

$$f(\vec{x}) := c + \vec{a}^T \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x}$$

mit einer Zahl $c \in \mathbb{R}$, einem Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ und einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Die Nebenbedingungen g_1, \dots, g_n sind alle linear und lassen sich in der Form

$$G(\vec{x}) := B\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}$$

zusammenfassen, wobei $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Matrix ist. Der Gradient von f ist $\nabla f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{a}$ und der Gradient von g_i ist die i -te Spalte von B^T . Mit dem Vektor $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ von Lagrange-Multiplikatoren sind damit folgende Gleichungen zu lösen:

$$A\vec{x} + \vec{a} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{a} + B^T \vec{\lambda} = \vec{0}, \quad B\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}.$$

Diese kann man zu einem einzigen linearen Gleichungssystem zusammenfassen,

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix}.$$

Dieses ist meist eindeutig lösbar und liefert dann einen einzigen kritischen Punkt \vec{x}_0 .

18 Integration in mehreren Veränderlichen

Das Integrieren von Funktionen mehrerer Veränderlicher lässt sich wie das Differenzieren unter geeigneten Annahmen auf den univariaten Fall zurückführen. Neben den zu erwartenden technischen Schwierigkeiten bei der Bestimmung von Stammfunktionen ist die eigentliche Herausforderung die Verschiedenartigkeit der möglichen Integrationsgebiete. Wir wollen nicht nur über Rechtecke oder Quader integrieren, was vergleichsweise einfach ist, sondern auch über Kreise, Kugeln und andere krummlinig berandete Gebiete sowie Kurven und Flächen. Einen einheitlichen Zugang hierzu liefert das Konzept der Parametrisierung, mit dessen Hilfe man Integrale aller Art auf einfache Grundtypen zurückführen kann.

18.1 Integral über ein Intervall: Das kartesische Produkt

$$I := I_1 \times \cdots \times I_m$$

der eindimensionalen Intervalle I_1, \dots, I_m ist ein *Intervall in \mathbb{R}^m* . Sofern nichts anderes gesagt wird, setzen wir stets voraus, dass alle Intervalle kompakt, also beschränkt und abgeschlossen, sind. Für $m = 2$ ergibt sich das Rechteck $I = I_1 \times I_2$ und für $m = 3$ der Quader $I = I_1 \times I_2 \times I_3$ und auf genau diese beiden Fälle wollen wir uns im Folgenden konzentrieren. Betrachten wir zunächst den zweidimensionalen Fall. Für eine stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man das Integral über $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ durch

$$\int_I f := \int_{x_1=a_1}^{b_1} \left(\int_{x_2=a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1.$$

Bei der inneren Integration nach x_2 wird also x_1 als konstant betrachtet (genau wie beim partiellen Differenzieren). Das Ergebnis dieser eindimensionalen Integration ist dann eine Größe, die nur von x_1 abhängt,

$$g(x_1) := \int_{x_2=a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2.$$

Diese Funktion wird im zweiten Schritt wiederum eindimensional nach x_1 integriert und man erhält als Ergebnis den Zahlenwert des Integrals,

$$\int_I f = \int_{x_1=a_1}^{b_1} g(x_1) dx_1.$$

Nach dem *Satz von Fubini*⁷⁰ darf die Reihenfolge der Integrale vertauscht werden, es gilt also ebenso

$$\int_I f = \int_{x_2=a_2}^{b_2} \left(\int_{x_1=a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2.$$

Hier liefert die innere Integration also eine Funktion $h(x_2)$, die dann nach x_2 integriert wird. Das Endergebnis ist dasselbe. Im Dreidimensionalen definiert man analog zum vorherigen

$$\int_I f := \int_{x_1=a_1}^{b_1} \left(\int_{x_2=a_2}^{b_2} \left(\int_{x_3=a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1.$$

Dies ist also die Schachtelung dreier eindimensionaler Integrale und wie zuvor kann auch hier deren Reihenfolge beliebig gewählt werden. Die Klammern dienen der Verdeutlichung der einzelnen Integrale und werden später meist weggelassen.

⁷⁰Guido Fubini, 1879-1943

18.2 Beispiel:

- Für $f(x, y) = y + x^2\sqrt{y}$ und $I = [-3, 3] \times [0, 1]$ ist

$$\int_I f = \int_{x=-3}^3 \left(\int_{y=0}^1 (y + x^2 y^{1/2}) dy \right) dx$$

zu berechnen. Das innere Integral liefert

$$g(x) := \int_{y=0}^1 (y + x^2 y^{1/2}) dy = \frac{1}{2} y^2 + \frac{2x^2}{3} y^{3/2} \Big|_{y=0}^1 = \frac{1}{2} + \frac{2x^2}{3}.$$

Damit erhält man

$$\int_I f = \int_{x=-3}^3 g(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{2x^3}{9} \Big|_{x=-3}^3 = 15.$$

Bei vertauschter Integrationsreihenfolge

$$\int_I f = \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=-3}^3 (y + x^2 y^{1/2}) dx \right) dy$$

ist das innere Integral

$$h(y) := \int_{x=-3}^3 (y + x^2 y^{1/2}) dx = xy + \frac{y^{1/2}}{3} x^3 \Big|_{x=-3}^3 = 6y + 18y^{1/2}$$

und man erhält wie zuvor

$$\int_I f = \int_{y=0}^1 (6y + 18y^{1/2}) dy = 3y^2 + 12y^{3/2} \Big|_{y=0}^1 = 15.$$

- Im Beispiel zuvor sind beide Rechenwege etwa gleich aufwändig. Es gibt aber auch Fälle, in denen einer der beiden Wege erheblich schwieriger ist, als der andere. Man verifiziere beispielsweise $\int_I f = e - 2$ für $f(x, y) = xe^{xy}$ und $I = [0, 1]^2$ auf beide Arten.
- Für $f(x, y, z) = x + y/z^2$ und $I = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$ ist

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_{x=0}^1 \int_{y=1}^2 \int_{z=2}^3 (x + y/z^2) dz dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=1}^2 (x + y/6) dy dx = \int_{x=0}^1 (x + 1/4) dx = 3/4. \end{aligned}$$

18.3 Regeln:

- Auch das mehrdimensionale Integral ist linear,

$$\int_I (f \pm g) = \int_I f \pm \int_I g, \quad \int_I \alpha f = \alpha \int_I f, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Wenn der Integrand ein Produkt univariater Funktionen ist, dann (aber auch nur dann!) ist das Integral des Produkts gleich dem Produkt der Integrale. Beispielsweise gilt im zweidimensionalen Fall

$$\int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x)g(y) dy dx = \int_{x=a}^b f(x) dx \cdot \int_{y=c}^d g(y) dy.$$

18.4 Integral über ein Gebiet: Die Definition des Integrals und die Aussage über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge bleiben gültig, wenn die zu integrierende Funktion nicht stetig, aber zumindest beschränkt ist und alle auftretenden eindimensionalen Integrale existieren. Wir nennen die Funktion dann *integrierbar* über I . Sei nun $G \subset I$ eine Teilmenge von I und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine darauf definierte stetige Funktion. Wir bilden daraus eine neue Funktion $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$, die auf ganz I definiert ist, indem wir einfach durch den Funktionswert 0 fortsetzen,

$$\tilde{f}(\vec{x}) := \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{falls } \vec{x} \in G \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sofern das Gebiet G keine extrem komplizierte Form hat (also beispielsweise nicht aus unendlich vielen Teilstücken besteht), ist diese neue Funktion integrierbar und wir definieren

$$\int_G f := \int_I \tilde{f}.$$

Damit ist also das Problem der Integration über eine beliebige beschränkte Menge G auf den Standardfall der Integration über ein Intervall I zurückgeführt. Dahinter steckt der Gedanke, dass die hinzugefügten Nullwerte das Ergebnis der Integration nicht verändern sollen. Andere gängige Schreibweisen für das Integral sind

$$\int_G \mathbf{f} = \int_G f \, dG = \int_G f(\vec{x}) \, d\vec{x}$$

sowie im zweidimensionalen Fall

$$\int_G \mathbf{f} = \int_G f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_G f(x, y) \, dx dy$$

oder im dreidimensionalen Fall

$$\int_G \mathbf{f} = \int_G f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = \int_G f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Fettgedruckt sind jeweils die hier im Skript präferierten Varianten. So, wie im univariaten Fall das Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ den orientierten Flächeninhalt zwischen der x -Achse und dem Graphen von f beschreibt, lässt sich auch das zweidimensionale Integral geometrisch interpretieren: Das Integral $\int_G f(x, y) \, d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist das orientierte Volumen des Körpers zwischen der Teilmenge G der xy -Ebene und dem Graphen G_f der Funktion f .

18.5 Beispiel:

- Sei $G = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 : y \leq x^2\}$ und $f(x, y) = 2x^2y$. Wählt man das Rechteck $I = [-1, 1]^2$, dann gilt $G \subset I$. Man könnte auch ein größeres Rechteck verwenden, das bringt aber keine Vorteile. Nun ist nach Definition

$$\int_G f = \int_I \tilde{f} = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 \tilde{f}(x, y) \, dy dx.$$

Das innere Integral $g(x) := \int_{y=-1}^1 \tilde{f}(x, y) \, dy$ lässt sich auf das Intervall $y \in [-1, x^2]$ reduzieren, da die Funktion \tilde{f} für $y > x^2$ verschwindet. Man erhält also

$$g(x) = \int_{y=-1}^{x^2} 2x^2y \, dy = x^2y^2 \Big|_{y=-1}^{x^2} = x^6 - x^2$$

und schließlich

$$\int_G f = \int_{x=-1}^1 (x^6 - x^2) dx = x^7/7 - x^3/3 \Big|_{x=-1}^1 = -8/21.$$

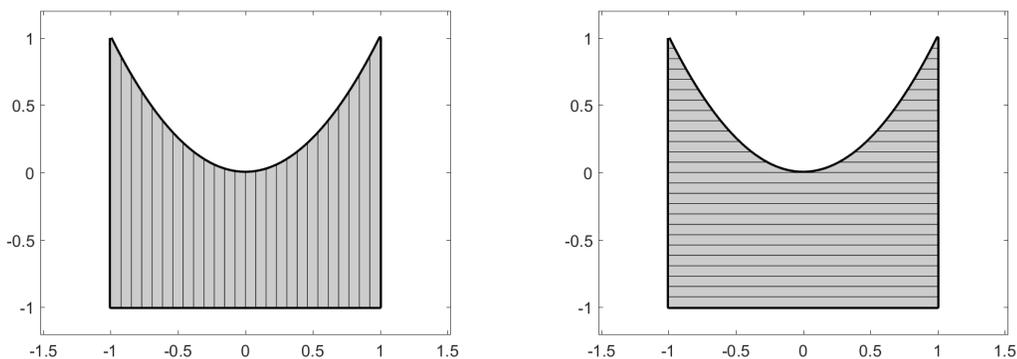
Man schreibt ohne Umwege auch einfach

$$\int_G f = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^{x^2} 2x^2y dy dx = \dots = -8/21$$

und versteht dabei die Beschreibung des Integrationsgebiets so: Für jedes x zwischen -1 und 1 läuft y von -1 bis x^2 . Tauscht man die Integrationsreihenfolge zu $\int_G f = \int_{y=-1}^1 \int_{x=-1}^1 \tilde{f}(x, y) dx dy$, dann lässt sich das innere Integral $h(y) := \int_{x=-1}^1 \tilde{f}(x, y) dx$ nicht so einfach auf den relevanten Bereich reduzieren: Für $y \leq 0$ läuft x von -1 bis 1 , und für $y > 0$ läuft x zunächst von -1 bis $-\sqrt{y}$ und dann von \sqrt{y} bis 1 . Man muss also letztlich drei Fälle unterscheiden,

$$\int_G f = \int_{y=-1}^0 \int_{x=-1}^1 2x^2y dx dy + \int_{y=0}^1 \int_{x=-1}^{-\sqrt{y}} 2x^2y dx dy + \int_{y=0}^1 \int_{x=\sqrt{y}}^1 2x^2y dx dy.$$

Die Berechnung liefert natürlich dasselbe Ergebnis, der Weg dorthin ist aber deutlich länger. Die Abbildung illustriert die beiden Varianten.



Merke: Man wählt die Integrationsreihenfolge so, dass sich die Grenzen des inneren Integrals möglichst einfach als Funktion der äußeren Variablen darstellen lassen.

- Sei $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und $f(x, y) = 1 + y$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_G f &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1+y) dy dx \\ &= \int_{x=-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \Big|_{x=-1}^1 = \pi. \end{aligned}$$

Obwohl der Integrand $f(x, y) = 1 + y$ eine sehr einfache Gestalt hat, wird die Berechnung letztlich doch etwas komplizierter (man verwende partielle Integration oder eine Tabelle), da die Beschreibung des Gebietsrandes als Funktion von x ins Spiel kommt.

- Sei $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 : 4x + 2y + z \leq 4\}$ das Tetraeder (d.h. die dreiseitige Pyramide) mit Eckpunkten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 4)$ und $f(x, y, z) = 1$. Die Beschreibung dieses Gebiets kann in beliebiger Reihenfolge durchgeführt werden, beispielsweise in den folgenden drei Schritten:
 1. Es sind x -Werte im Intervall $[0, 1]$ relevant.
 2. Für jedes $x \in [0, 1]$ sind y -Werte im Intervall $[0, 2 - 2x]$ zu berücksichtigen.
 3. Für jedes Wertepaar (x, y) mit $x \in [0, 1]$ und $y \in [0, 2 - 2x]$ läuft der z -Wert im Bereich $[0, 4 - 4x - 2y]$.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \int_G f &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{2-2x} \int_{z=0}^{4-4x-2y} dz dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{2-2x} (4 - 4x - 2y) dy dx = \int_{x=0}^1 (4x^2 - 8x + 4) dx = 4/3. \end{aligned}$$

Eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge führt auf eine andere Beschreibung des Gebiets, aber natürlich auf dasselbe Ergebnis, z.B.

$$\int_G f = \int_{z=0}^4 \int_{x=0}^{1-z/4} \int_{y=0}^{2-2x-z/2} dy dx dz = \dots = 4/3.$$

18.6 Integral über eine parametrisierte Menge: Die Beschreibung von Gebieten durch die Angabe von Grenzen für die Integrationsvariablen (x, y) oder (x, y, z) ist prinzipiell möglich, aber nicht immer zweckmäßig. Ebenso bietet dieser Formalismus keinen Zugang zur Integration über gekrümmte Bereiche, wie Kurven oder Flächen. Abhilfe schafft hier das Konzept der Parametrisierung [\rightarrow 15.16]. Sei also $\Psi : G \rightarrow B$ eine Parametrisierung der Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ über dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^m$, dann wollen wir das Integral einer Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ über B zurückführen auf das Integral der Funktion $f \circ \Psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ über G . Dabei ist aber die Verzerrung der Größenverhältnisse durch die Abbildung Ψ zu berücksichtigen. Dazu setzen wir ab sofort stets voraus, dass Ψ stetig differenzierbar ist und definieren den zugehörigen *Maßfaktor* als

$$\mu_\Psi := \sqrt{\det(D\Psi^T \cdot D\Psi)}.$$

Die hier auftretende Matrix $D\Psi^T \cdot D\Psi$ nennt man auch *erste Fundamentalform* von Ψ . Sie hat Dimension $m \times m$, ist symmetrisch und hat eine nichtnegative Determinante, sodass die Wurzel stets definiert ist. Sei nun $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf der Menge B erklärte Funktion, dann setzt man

$$\int_B f := \int_G (f \circ \Psi) \mu_\Psi.$$

Wenn $\tilde{\Psi} : \tilde{G} \rightarrow B$ eine andere Parametrisierung von B ist, dann gilt, wie man zeigen kann,

$$\int_B f = \int_G (f \circ \Psi) \mu_\Psi = \int_{\tilde{G}} (f \circ \tilde{\Psi}) \mu_{\tilde{\Psi}}.$$

Der Ausdruck $\int_B f$ ist also tatsächlich nur von der Menge B und der Funktion f abhängig und nicht von der Wahl der Parametrisierung. Dies rechtfertigt die gegebene Definition. Der Maßfaktor hat folgende geometrische Bedeutung:

- *Eindimensionaler Fall* $G \subset \mathbb{R}$: Das Bild eines kleinen Intervalls der Länge h um den Punkt $u \in G$ ist näherungsweise eine Strecke mit Länge $\mu_\Psi(u) \cdot h$.
- *Zweidimensionaler Fall* $G \subset \mathbb{R}^2$: Das Bild eines kleinen Quadrats mit Flächeninhalt h^2 um den Punkt $(u, v) \in G$ ist näherungsweise eine Parallelogramm mit Flächeninhalt $\mu_\Psi(u, v) \cdot h^2$.
- *Dreidimensionaler Fall* $G \subset \mathbb{R}^3$: Das Bild eines kleinen Würfels mit Volumen h^3 um den Punkt $(u, v, w) \in G$ ist näherungsweise ein Spat mit Volumen $\mu_\Psi(u, v, w) \cdot h^3$.

Im Grenzübergang $h \rightarrow 0$ werden diese Näherungen exakt.

18.7 Spezialfälle: Die Definition des Integrals über eine parametrisierte Menge ist zwar ganz allgemeiner Natur, in der Praxis treten aber meist nur die drei folgenden Fälle auf, in denen sich die Berechnung des Maßfaktors vereinfacht.

- *Umparametrisierung.* Wenn die Dimensionen von G und B gleich sind, also beide Teilmengen der Ebene \mathbb{R}^2 oder des Raums \mathbb{R}^3 sind, dann nennt man $\Psi : G \rightarrow B$ auch eine *Umparametrisierung*. Hier ist die Ableitung $D\Psi$ eine quadratische Matrix und es gilt

$$\mu_\Psi = \sqrt{\det(D\Psi^T \cdot D\Psi)} = \sqrt{\det D\Psi \cdot \det D\Psi} = |\det D\Psi|.$$

Man nennt $\det D\Psi$ *Jacobi-Determinante* oder auch *Funktionaldeterminante* von Ψ . Zu beachten ist, dass der Maßfaktor der Betrag hiervon ist. Die resultierende Formel

$$\int_B f = \int_G (f \circ \Psi) |\det D\Psi|$$

stellt einen Zusammenhang zwischen zwei m -dimensionalen Integralen her und wird auch *Substitutionsregel* genannt. Sie ist eng mit der bereits bekannten univariaten Substitutionsregel [\rightarrow 12.13] $\int_a^b f = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} (f \circ h) h'$ verwandt. In der Praxis wird sie typischerweise zur Vereinfachung des Integrationsgebiets und seltener zur Vereinfachung des Integranden eingesetzt.

- *Kurvenintegral.* Wenn $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit Spur B ist, dann nennt man $\int_c f := \int_B f$ das *Kurvenintegral* von f über c . Hier ist $c' = D\Psi$ ein Spaltenvektor und

$$\mu_c = \sqrt{\det(Dc^T \cdot Dc)} = \|c'\|$$

dessen Norm. Es gilt also

$$\int_c f = \int_a^b (f \circ c) \|c'\| = \int_a^b f(c(t)) \|c'(t)\| dt.$$

Dabei steht auf der rechten Seite ein gewöhnliches eindimensionales Integral, was der eindimensionalen Natur der Spur der Kurve entspricht.

- *Flächenintegral.* Wenn $S : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Definitionsbereich $G \subset \mathbb{R}^2$ und Spur B ist, dann nennt man $\int_S f := \int_B f$ das *Flächenintegral* von f über S . Hier ist

DS eine (3×2) -Matrix, deren Spaltenvektoren die partiellen Ableitungen $\partial_1 S$ und $\partial_2 S$ sind. Eine einfache, aber nicht ganz kurze Rechnung zeigt

$$\mu_S = \sqrt{\det(DS^T \cdot DS)} = \|\partial_1 S \times \partial_2 S\|.$$

Es gilt also

$$\int_S f = \int_G (f \circ S) \|\partial_1 S \times \partial_2 S\| = \int_G f(S(u, v)) \|\partial_1 S(u, v) \times \partial_2 S(u, v)\| \, dudv.$$

Dabei steht auf der rechten Seite ein zweidimensionales Integral, was der zweidimensionalen Natur der Spur der Fläche entspricht.

18.8 Beispiel:

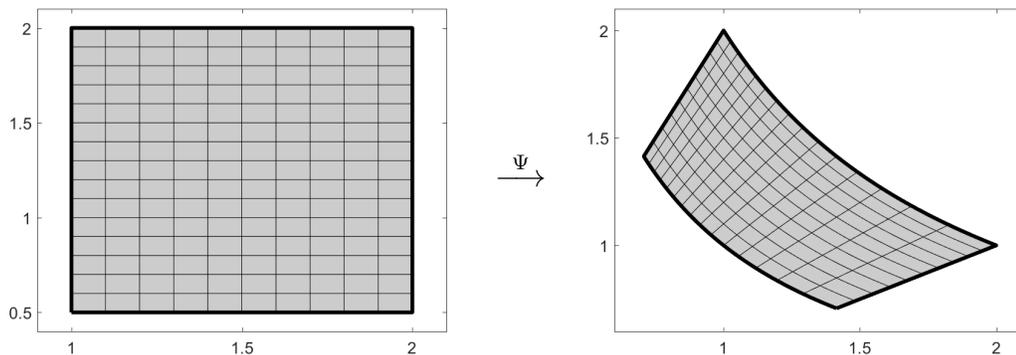
- Gegeben sei das Gebiet $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 : 1 \leq xy \leq 2 \text{ und } 1/2 \leq y/x \leq 2\}$ und die Funktion $f(x, y) = 2xy$. Die direkte Integration ist aufwändig, da der Gebietsrand eine komplizierte Form hat. Man sucht also eine Umparametrisierung $\Psi : G \rightarrow B$, bei der das Definitionsgebiet G eine möglichst einfache Gestalt hat – idealerweise ist G ein Intervall. Dies ist hier möglich, indem man die Ausdrücke xy und y/x , die in der Beschreibung von B auftauchen, als neue Variable verwendet, also

$$xy = u, \quad y/x = v.$$

Damit ist $G = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 2 \text{ und } 1/2 \leq v \leq 2\}$. Die Funktion Ψ erhält man durch Auflösen der Gleichungen oben nach x und y ,

$$\Psi(u, v) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{u/v} \\ \sqrt{uv} \end{bmatrix}.$$

Die Abbildung zeigt links das Intervall G und rechts die Menge B .



Für die Ableitung und den Maßfaktor erhält man

$$D\Psi(u, v) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{1/(uv)} & -\sqrt{u/v^3} \\ \sqrt{v/u} & \sqrt{u/v} \end{bmatrix}, \quad \mu_\Psi(u, v) = |\det D\Psi(u, v)| = \left| \frac{1}{2v} \right|.$$

Mit $f(x, y) = 2xy = 2u$ ist nun das Integral einfach zu berechnen:

$$\int_B f = \int_G \frac{2u}{|2v|} d(u, v) = \int_{u=1}^2 \int_{v=1/2}^2 \frac{u}{v} dv du = \int_{u=1}^2 u du \cdot \int_{v=1/2}^2 \frac{dv}{v} = 3 \ln 2.$$

Die Berechnung des Maßfaktors ließe sich übrigens folgendermaßen vereinfachen: Die Umkehrfunktion von Ψ , nennen wir sie $\Phi := \Psi^{-1}$, ist ja direkt gegeben,

$$\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ y/x \end{bmatrix},$$

und damit gilt [→ 16.12]

$$D\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{bmatrix}, \quad \mu_\Psi = |\det D\Psi| = \frac{1}{|\det D\Phi|} = \frac{1}{2y/x} = \frac{1}{2v}.$$

Die explizite Bestimmung der Funktion Ψ kann hier also entfallen.

- Für die Kurve $c(t) = (t \cos t, t \sin t)$, $t \in [0, 1]$, und $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist

$$c'(t) = \begin{bmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \end{bmatrix}, \quad \mu_c(t) = \|c'(t)\| = \sqrt{1 + t^2},$$

und $f(c(t)) = \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = t$. Damit erhält man

$$\int_c f = \int_0^1 f(c(t)) \|c'(t)\| dt = \int_0^1 t \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}.$$

- Für die Fläche $S(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$, und $f(x, y, z) = y^2/z$ ist

$$S_u = \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1 \end{bmatrix}, \quad S_v = \begin{bmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mu_S = \|S_u \times S_v\| = \sqrt{2}u$$

und $f(S(u, v)) = u \sin^2 v$. Damit erhält man

$$\int_S f = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{2\pi} \sqrt{2}u^2 \sin^2 v dv du = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}.$$

18.9 Wichtige Parametrisierungen: Die folgenden drei Parametrisierungen treten in der Praxis sehr häufig auf, die zugehörigen Maßfaktoren sind auswendig zu lernen.

- *Polarkoordinaten.* Jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lässt sich in der Form

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

darstellen, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ der Abstand zum Ursprung ist und φ der Winkel zur positiven x -Achse. Dieser lässt sich mithilfe des Arcustangens berechnen und

ist zunächst nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt. Um die Zuordnung eindeutig zu machen, wählt man meist den Wertebereich $[0, 2\pi)$, es ist aber beispielsweise auch $[-\pi, \pi)$ möglich. Man nennt (r, φ) die *Polarkoordinaten* des Punktes (x, y) . Die zugehörige Funktion

$$\Psi(r, \varphi) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}$$

kann zur Umparametrisierung ebener Gebiete verwendet werden. Für die Ableitung und den Maßfaktor erhält man

$$D\Psi(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \mu_\Psi = |\det D\Psi| = r.$$

Merke: Die Substitution mit Polarkoordinaten ist formal gegeben durch

$$d(x, y) = r d(r, \varphi).$$

Wählt man einen festen Radius $r = R$, so wird aus Ψ eine kreisförmige Kurve,

$$c(\varphi) := \Psi(R, \varphi) = \begin{bmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad \mu_c = R.$$

Polarkoordinaten verwendet man immer dann, wenn das Integrationsgebiet ganz oder teilweise kreisförmig berandet ist oder ganz allgemein bei Problemen, die eine Rotationssymmetrie um den Ursprung aufweisen.

- *Zylinderkoordinaten.* Sehr eng verwandt mit Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2 sind Zylinderkoordinaten in \mathbb{R}^3 . Genauer gesagt verwendet man Polarkoordinaten für (x, y) und lässt die z -Koordinate unverändert, also

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Die zugehörige Funktion

$$\Psi(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}$$

kann zur Umparametrisierung räumlicher Gebiete verwendet werden. Für die Ableitung und den Maßfaktor erhält man

$$D\Psi(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mu_\Psi = |\det D\Psi| = r.$$

Merke: Die Substitution mit Zylinderkoordinaten ist formal gegeben durch

$$d(x, y, z) = r d(r, \varphi, z).$$

Wählt man einen festen Radius $r = R$, so wird aus Ψ eine zylinderförmige Fläche,

$$S(\varphi, z) := \Psi(R, \varphi, z) = \begin{bmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}, \quad \mu_S = R.$$

Zylinderkoordinaten verwendet man bei Problemen, die eine Rotationssymmetrie um die z -Achse aufweisen.

- *Kugelkoordinaten.* Jeder Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta$$

darstellen, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0$ der Abstand zur Ursprung ist. Der *Azi-
mutwinkel* $\varphi \in [0, 2\pi)$ ist der Winkel der Projektion $(x, y, 0)$ zur positiven x -Achse
und der *Polarwinkel* $\vartheta \in [0, \pi)$ ist der Winkel von (x, y, z) zur positiven z -Achse. Die
zugehörige Funktion

$$\Psi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

kann zur Umparametrisierung räumlicher Gebiete verwendet werden. Für die Ableitung
und den Maßfaktor erhält man

$$D\Psi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{bmatrix}, \quad \mu_\Psi = r^2 \sin \vartheta.$$

Merke: Die Substitution mit Kugelkoordinaten ist formal gegeben durch

$$d(x, y, z) = r^2 \sin \vartheta d(r, \varphi, \vartheta).$$

Wählt man einen festen Radius $r = R$, so wird aus Ψ eine kugelförmige Fläche,

$$S(\varphi, \vartheta) := \Psi(R, \varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} R \cos \varphi \sin \vartheta \\ R \sin \varphi \sin \vartheta \\ R \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad \mu_S = R^2 \sin \vartheta.$$

Kugelkoordinaten verwendet man bei Problemen, die eine Rotationssymmetrie um den
Ursprung aufweisen.

18.10 Beispiel:

- Sei wie in [→ 18.5] $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Kreisscheibe mit Radius 1 und
 $f(x, y) = 1 + y$. In Polarkoordinaten lautet die Beschreibung des Integrationsgebiets
 $G = \{(r, \varphi) : r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Man erhält damit wesentlich einfacher als zuvor

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (1 + r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1/2 + 1/3 \cdot \sin \varphi) d\varphi = \pi.$$

- Sei $B = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 : x^2 + y^2 \leq z^2\}$ und $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}/z^2$. In
Zylinderkoordinaten lautet die Beschreibung des Integrationsgebiets $G = \{(r, \varphi, z) :$
 $r \in [0, 1], \varphi \in [0, \pi/2], z \in [r, 1]\}$. Damit ist

$$\int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{z=r}^1 \frac{r}{z^2} \cdot r dz d\varphi dr = \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^1 (r - r^2) dr = \frac{\pi}{12}.$$

- Sei $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ die Kugel mit Radius $R > 0$ um den Ursprung und $f(x, y, z) = z^2$. In Kugelkoordinaten lautet die Beschreibung des Integrationsgebiets $G = \{(r, \varphi, \vartheta) : r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi]\}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_K f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R (r \cos \vartheta)^2 \cdot r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta \\ &= \int_{\vartheta=0}^{\pi} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{r=0}^R r^4 dr = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{15}. \end{aligned}$$

18.11 Gebietszerlegung: Das Integral über ein kompliziert geformtes Gebiet G lässt sich gelegentlich dadurch vereinfachen, dass man es als Vereinigung $G = G_1 \cup G_2$ oder Differenz $G = G_1 \setminus G_2$ einfacherer Teilgebiete G_1 und G_2 beschreibt. Im Falle der Vereinigung ist dabei natürlich eine doppelte Überdeckung von Teilbereichen zu vermeiden. Man fordert deshalb, dass es keine inneren Punkte von G_1 oder G_2 geben darf, die im Schnitt $G_1 \cap G_2$ enthalten sind. Gemeinsame Randpunkte sind dagegen unkritisch. In diesem Fall gilt dann für $G = G_1 \cup G_2$

$$\int_G f = \int_{G_1} f + \int_{G_2} f.$$

Dies entspricht der Additivität [\rightarrow 12.16] des Integrals im univariaten Fall. Für die Differenz $G = G_1 \setminus G_2$ gilt dementsprechend

$$\int_G f = \int_{G_1} f - \int_{G_2} f.$$

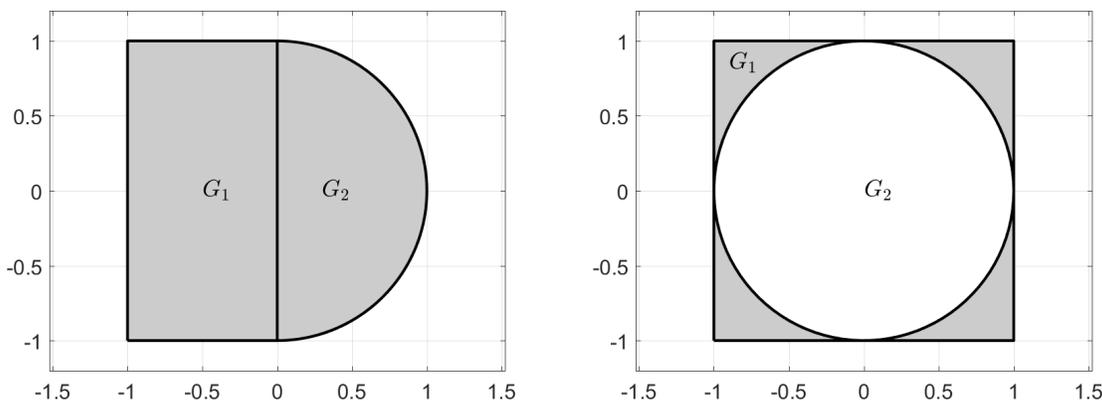
18.12 Beispiel:

- Die Menge $G = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1 \text{ und } -1 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$ lässt sich als Vereinigung des Rechtecks $G_1 := \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1 \text{ und } -1 \leq x \leq 0\}$ und des Halbkreises $G_2 = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1 \text{ und } 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$ darstellen. Für das Integral der Funktion $f(x, y) = x$ erhält man deshalb

$$\int_G f = \int_{y=-1}^1 \int_{x=-1}^0 x dx dy + \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^1 r^2 \cos \varphi dr d\varphi = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

- Die Menge $G := \{(x, y) \in [-1, 1]^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$ lässt sich als Differenz des Quadrats $G_1 = [-1, 1]^2$ und der Einheitskreisscheibe $G_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ darstellen. Für das Integral der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ erhält man deshalb

$$\int_G f = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 (x^2 + y^2) dy dx - \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 r^3 dr d\varphi = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}.$$



18.13 Maß und Schwerpunkt: Sei $\Psi : G \rightarrow B$ eine Parametrisierung der Menge B . Dann nennt man

$$|B| := \int_B 1 = \int_G \mu_\Psi$$

das *Maß* von B . Der *Schwerpunkt* von B ist definiert als

$$\vec{x}_s(B) := \frac{1}{|B|} \int_B \vec{x} = \frac{1}{|B|} \int_G \Psi \mu_\Psi.$$

Dabei ist das Integral über einen Vektor zu verstehen als der Vektor der Integrale über dessen Komponenten. Abhängig von der Dimension des Integrationsgebiets sind auch andere Bezeichnungen für das Maß gebräuchlich:

- *Eindimensionaler Fall.* Für eine Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Spur B schreibt man anstelle von $|B|$ auch einfach $|c|$ und nennt

$$|c| = \int_c 1 = \int_a^b \|c'\|$$

die *Länge* oder auch die *Bogenlänge* von c .

- *Zweidimensionaler Fall.* Für eine Umparametrisierung $\Psi : G \rightarrow B$ ist

$$|B| = \int_B 1 = \int_G |\det D\Psi|$$

der *Flächeninhalt* der Menge $B \subset \mathbb{R}^2$. Für eine Fläche $S : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Spur B schreibt man anstelle von $|B|$ auch einfach $|S|$ und nennt

$$|S| = \int_S 1 = \int_G \|\partial_1 S \times \partial_2 S\|$$

ebenfalls den *Flächeninhalt* oder auch die *Oberfläche* von S . *Achtung:* Im Gegensatz zum orientierten Flächeninhalt [\rightarrow 12.18], wie er bei der Integration in einer Variablen eingeführt wurde, ist der Flächeninhalt als Spezialfall des Maßes stets positiv.

- *Dreidimensionaler Fall.* Für eine Umparametrisierung $\Psi : G \rightarrow B$ ist

$$|B| = \int_B 1 = \int_G |\det D\Psi|$$

das *Volumen* der Menge $B \subset \mathbb{R}^3$.

18.14 Beispiel:

- Das Volumen der Kugel $K := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ mit Radius R ergibt sich zu

$$|K| = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r^2 \sin \vartheta \, dr d\varphi d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{r=0}^R r^2 \, dr = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Die Kugeloberfläche $\partial K := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ hat den Flächeninhalt

$$|\partial K| = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2 \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta = R^2 \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \varphi = 4\pi R^2.$$

Die Tatsache, dass sich die Oberfläche formal als Ableitung des Volumens nach R ergibt, $(4\pi R^3/3)' = 4\pi R^2$, ist kein Zufall. Man vergleiche mit dem analogen Zusammenhang zwischen dem Umfang und dem Flächeninhalt eines Kreises, $(\pi R^2)' = 2\pi R$.

- Schwerpunkte einfacher geometrischer Objekte lassen sich gelegentlich ohne Rechnung mithilfe von Symmetrieüberlegungen angeben. Beispielsweise ist der Schwerpunkt von Kreis oder Kugel deren Mittelpunkt. Betrachten wir nun einen Halbkreis $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ und } x \geq 0\}$. Für die x -Koordinate des Schwerpunkts erhalten wir

$$x_s(B) = \frac{1}{|B|} \int_B x = \frac{2}{\pi R^2} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^R r^2 \cos \varphi \, dr d\varphi = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42 \cdot R.$$

Für die y -Koordinate erhalten wir

$$y_s(B) = \frac{1}{|B|} \int_B y = \frac{2}{\pi R^2} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=0}^R r^2 \sin \varphi \, dr d\varphi = 0.$$

Auch dies wäre ohne Rechnung aus Symmetriegründen sofort klar gewesen. Zusammen ist also $\vec{x}_s(B) = (4R/3\pi, 0)$. Schneiden Sie einen Halbkreis aus Pappe aus, markieren Sie den Schwerpunkt und setzen Sie ihn an dieser Stelle auf eine Zirkelspitze. Was fällt auf?

18.15 Affine Abbildung:

Eine Funktion $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Form

$$\Psi(\vec{u}) = A\vec{u} + \vec{v}$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und einem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ heißt *affine Abbildung*. Dies ist also eine lineare Abbildung $\vec{u} \mapsto A\vec{u}$ gefolgt von einer Verschiebung um den Vektor \vec{v} .

Betrachten wir speziell den Fall $m = n$ und eine invertierbare Matrix A , dann ist Ψ injektiv und kann als Umparametrisierung $G \rightarrow B$ verwendet werden. Mit $D\Psi = A$ ist der Maßfaktor gegeben durch $\mu_\Psi = |\det A|$ und man erhält

$$|B| = \int_G |\det D\Psi| = |\det A| \int_G 1 = |\det A| \cdot |G|.$$

Das Maß skaliert also mit dem Betrag der Determinante von A . Für den Schwerpunkt gilt

$$\vec{x}_s(B) = \frac{1}{|B|} \int_G \Psi \mu_\Psi = \frac{1}{|G|} \int_G (A\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{x}_s(G) + \vec{v} = \Psi(\vec{x}_s(G)).$$

Das heißt, der Schwerpunkt von G wird von der affinen Abbildung auf den Schwerpunkt von B abgebildet.

Ist speziell $A = Q$ eine Drehung [→ 6.9], dann nennt man $\Psi(\vec{u}) = Q\vec{u} + \vec{v}$ eine *Bewegung*. Aus der Bedingung $Q^T Q = E$ folgt $\det Q = 1$ und es ergibt sich die *Bewegungsinvarianz* $|G| = |B|$ des Maßes. Dasselbe gilt für eine Spiegelung $A = S$ [→ 6.9], denn aus $S^2 = E$ folgt ebenfalls $|\det S| = 1$.

18.16 Rotationsfläche und -körper: Sei $c(t) = (x(t), z(t)), t \in [a, b]$, eine Kurve in der xz -Ebene. Durch Rotation um die z -Achse entsteht die Parametrisierung einer Rotationsfläche,

$$S(t, \varphi) = \begin{bmatrix} x(t) \cos \varphi \\ x(t) \sin \varphi \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [a, b], \varphi \in [0, 2\pi].$$

Sei $x_s(c) = \frac{1}{|c|} \int_c x$ die x -Koordinate des Kurvenschwerpunkts. Dann gilt nach der *ersten Guldinschen Regel*⁷¹ für den Flächeninhalt

$$|S| = 2\pi \int_c x = 2\pi x_s(c) \cdot |c|.$$

Das heißt, der Inhalt der Rotationsfläche ist gleich dem Umfang des Kreises durch den Kurvenschwerpunkt multipliziert mit der Kurvenlänge.

Wenn G ein ebenes Flächenstück ist, dessen Rand durch die Spur der Kurve c gegeben ist, dann berandet S den dreidimensionalen Körper K , der durch die Rotation von G um die z -Achse entsteht. Sei $x_s(G) = \frac{1}{|G|} \int_G x$ die x -Koordinate des Flächenschwerpunkts von G , dann gilt nach der *zweiten Guldinschen Regel* für das Volumen

$$|K| = 2\pi \int_G x = 2\pi x_s(G) \cdot |G|.$$

Das heißt, das Volumen des Rotationskörpers ist gleich dem Umfang des Kreises durch den Flächenschwerpunkt multipliziert mit der Querschnittsfläche.

18.17 Beispiel: Die Kurve $c(t) = (\cos t, \sin t), t \in [-\pi/2, \pi/2]$ beschreibt einen Halbkreis in der xz -Ebene. Durch Rotation entsteht die Fläche S , deren Spur die Oberfläche der Einheitskugel in \mathbb{R}^3 ist. Die Länge von c ist $|c| = \pi$ und der Flächeninhalt von S ist $|S| = 4\pi$. Also ist nach der ersten Guldinschen Regel die x -Koordinate des Kurvenschwerpunkts gegeben durch

$$x_s(c) = \frac{|S|}{2\pi|c|} = \frac{2}{\pi}.$$

Zusammen mit der z -Achse berandet c die Halbkreisscheibe $G := \{(x, z) : x \geq 0 \text{ und } x^2 + z^2 \leq 1\}$. Rotiert diese um die z -Achse, so entsteht die Einheitskugel K . Die Fläche von G ist $|G| = \pi/2$ und das Volumen von K ist $|K| = 4\pi/3$. Also ist nach der zweiten Guldinschen Regel die x -Koordinate des Flächenschwerpunkts gegeben durch

$$x_s(G) = \frac{|K|}{2\pi|G|} = \frac{4}{3\pi}.$$

⁷¹Paul Guldin, 1577–1643

Dies stimmt mit der Berechnung aus dem vorherigen Beispiel überein. Nun verschieben wir c und G um 2 Einheiten in x -Richtung. Dies ergibt die neue Kurve $\tilde{c} = c + (2, 0)$ und das neue Gebiet $\tilde{G} = G + (2, 0)$. Durch Rotation von \tilde{G} entsteht die äußere Hälfte \tilde{K} eines *Torus* (man denke an einen Donut oder einen Fahrradschlauch). Die x -Koordinate des Flächenschwerpunkt von \tilde{G} ist $x_s(\tilde{G}) = x_s(G) + 2$. Also ist das Volumen von \tilde{K} gegeben durch

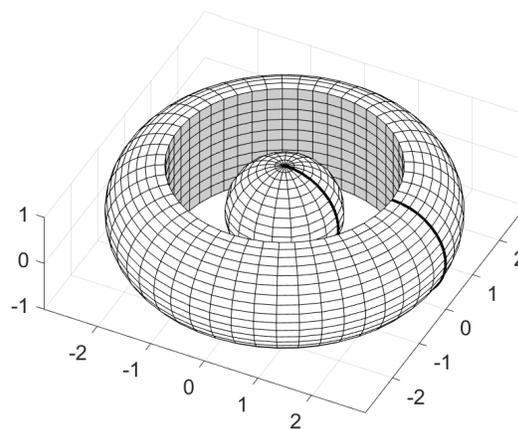
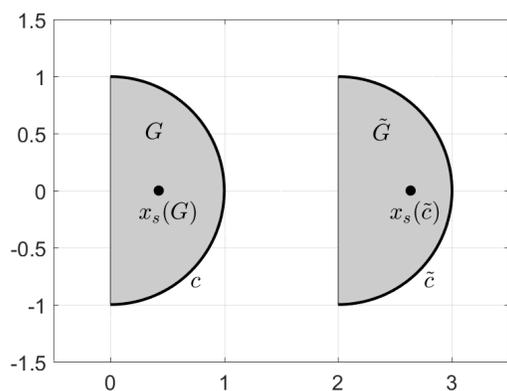
$$|\tilde{K}| = 2\pi x_s(\tilde{G}) \cdot |\tilde{G}| = 2\pi(2/3 + \pi).$$

Die Randfläche $\partial\tilde{K}$ von \tilde{K} besteht aus zwei Teilen: Zunächst gibt es einen inneren zylindrischen Teil mit Inhalt $4\pi \cdot 2 = 8\pi$. Der äußere Teil \tilde{S} entsteht durch Rotation von \tilde{c} und hat damit den Flächeninhalt

$$|\tilde{S}| = 2\pi x_s(\tilde{c}) \cdot |\tilde{c}| = 4\pi(1 + \pi).$$

Zusammen ist also

$$|\partial\tilde{K}| = 4\pi(3 + \pi).$$



18.18 Uneigentliches Integral: Man unterscheidet wie im univariaten Fall uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden und solche mit unbeschränktem Integrationsgebiet. Dabei ergeben sich aber unter Umständen subtile Probleme: Betrachten wir das Integral der Funktion $f(x, y) = (x - y)/(x + y)^3$ auf dem Intervall $I = [0, 1]^2$, dann scheint mit der Berechnung

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dy dx = \int_{x=0}^1 \frac{dx}{(1 + x)^2} = \frac{1}{2}$$

auf den ersten Blick alles in Ordnung zu sein. Ändert man aber die Integrationsreihenfolge, dann erhält man

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dx dy = - \int_{y=0}^1 \frac{dy}{(1 + y)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Mit der Substitutionsregel lassen sich auch noch andere Ergebnisse erzeugen. Es macht deshalb keinen Sinn, dem gesuchten uneigentlichen Integral einen Wert zuzuweisen – es divergiert! Eine allgemeine Definition des Konvergenzbegriffs für mehrdimensionale uneigentliche Integrale ist eine komplizierte Angelegenheit, wir begnügen uns deshalb mit den folgenden, etwas vereinfachten Ergebnissen.

1. *Unbeschränkter Integrand.* Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte Menge und die Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ nach den bisherigen Definitionen integrierbar, also insbesondere beschränkt. Wir betrachten nun für $\vec{x}_0 \in G$ und $\alpha > 0$ die Funktion

$$f(\vec{x}) := \frac{g(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^\alpha}.$$

Der Exponent α bestimmt, wie schnell der Nenner gegen Null und geht und damit die Funktionswerte anwachsen, wenn man sich der Singularität an der Stelle \vec{x}_0 nähert. Die Integrierbarkeit von f hängt davon ab, wie groß der Exponent α im Vergleich zur Raumdimension m ist. Es gilt:

- Für $\alpha < m$ ist das uneigentliche Integral $\int_G f$ konvergent. Die Integrationsreihenfolge kann beliebig gewählt und auch die Substitutionsregel angewandt werden.
- Für $\alpha \geq m$ ist das uneigentliche Integral $\int_G f$ in der Regel divergent. Ausnahmen hiervon kann es aber unter anderem dann geben, wenn die Funktion g an der Stelle \vec{x}_0 eine Nullstelle hat oder in einer Umgebung davon stark oszilliert.

Im eingangs diskutierten Beispiel liegt eine Singularität im Ursprung vor. Also setzen wir $\vec{x}_0 = (0, 0)$ und erhalten $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}^\alpha$. Der Exponent α ist so zu wählen, dass die zugehörige Funktion

$$g(x, y) = f(x, y) \sqrt{x^2 + y^2}^\alpha = \frac{(x - y) \sqrt{x^2 + y^2}^\alpha}{(x + y)^3}$$

beschränkt ist. Mit Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ erhält man

$$g(x, y) = r^{\alpha-2} \frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^3}$$

und sieht, dass man mindestens $\alpha = 2$ wählen muss. Konvergenz ließe sich aber nur garantieren, wenn ein Wert möglich wäre, der kleiner als die Raumdimension $m = 2$ ist. Es ist deshalb von Divergenz auszugehen, was mit den gemachten Beobachtungen übereinstimmt.

2. *Unbeschränktes Integrationsgebiet.* Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ eine unbeschränkte Menge und die Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Wir betrachten nun für ein $\alpha > 0$ die Funktion

$$f(\vec{x}) := \frac{g(\vec{x})}{\|\vec{x}\|^\alpha + 1},$$

wobei der Summand 1 im Nenner lediglich die technische Funktion hat, eine Singularität im Ursprung zu vermeiden. Der Exponent α bestimmt, wie schnell der Nenner groß wird und damit die Funktionswerte gegen Null gehen, wenn man Argumente mit wachsendem Betrag $\|\vec{x}\|$ betrachtet. Die Integrierbarkeit von f hängt wieder davon ab, wie groß der Exponent α im Vergleich zur Raumdimension m ist. Es gilt:

- Für $\alpha > m$ ist das uneigentliche Integral $\int_G f$ konvergent. Die Integrationsreihenfolge kann beliebig gewählt und auch die Substitutionsregel angewandt werden.
- Für $\alpha \leq m$ ist das uneigentliche Integral $\int_G f$ in der Regel divergent. Ausnahmen hiervon kann es aber unter anderem dann geben, wenn die Funktion g für große \vec{x} stark oszilliert, so wie bereits im einleitenden Beispiel in Abschnitt 12.23 beobachtet.

18.19 Beispiel:

- Wir betrachten die Funktion $f(\vec{x}) = 1/\|\vec{x}\|$ auf dem m -dimensionalen Gebiet $G_m = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x}\| \leq 1\}$. Hier ist also $g(\vec{x}) = 1$ und $\alpha = 1$. Im eindimensionalen Fall ist $m = \alpha = 1$ und das Integral $\int_{G_1} f = \int_{-1}^1 \frac{dx}{|x|}$, wie zu erwarten, divergent. Im zweidimensionalen Fall ist $m = 2 > \alpha = 1$ und das Integral über die Einheitskreisscheibe G_2 konvergent,

$$\int_{G_2} f = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \frac{1}{r} \cdot r \, dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 dr d\varphi = 2\pi.$$

Im dreidimensionalen Fall ist $m = 3 > \alpha = 1$ und das Integral über die Einheitskugel G_3 ebenfalls konvergent,

$$\int_{G_3} f = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin \vartheta \, dr d\varphi d\vartheta = 4\pi \int_{r=0}^1 r \, dr = 2\pi.$$

- Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ auf dem unbeschränkten Gebiet $G = \mathbb{R}^2$. Mit Polarkoordinaten sieht man, dass die Funktion

$$g(x, y) = \left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)^\alpha e^{-x^2-y^2} = (1 + r^\alpha) e^{-r^2}$$

für jedes $\alpha > 0$ beschränkt ist. Man kann also speziell $\alpha = 3 > m = 2$ wählen, um zu zeigen, dass das uneigentliche Integral konvergent ist. Wir erhalten zunächst

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

Beide Faktoren haben denselben Wert, der sich aber nicht mittels einer explizit bekannten Stammfunktion bestimmen lässt. In Polarkoordinaten erhalten wir dagegen ganz einfach

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} r e^{-r^2} dr d\varphi = \pi,$$

woraus die Formel

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

folgt, die beispielsweise in der Statistik von Bedeutung ist.

19 Arbeitsintegral und Fluss

In den Anwendungen spielen zwei Typen von Integralen eine wichtige Rolle, bei denen der Integrand ein Vektorfeld enthält, das skalar mit dem Tangenten- oder Normalenvektor des Integrationsgebiets multipliziert wird. So entsteht das Arbeitsintegral bzw. der Fluss.

19.1 Tangentenvektor: Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive C^1 -Kurve mit Spur B . Der normierte Tangentenvektor T von c an der Stelle $\vec{x} = c(t)$ ist gegeben durch

$$T(\vec{x}) := \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \quad \text{für } \vec{x} = c(t) \in B,$$

sofern der Nenner nicht verschwindet. Formal gesehen ist die Funktion $T : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ also ein Vektorfeld. Der Vektor $T(\vec{x})$ ist tangential zur Kurve an der Stelle \vec{x} und hat Länge $\|T(\vec{x})\| = 1$. Wenn $\tilde{c} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine andere Parametrisierung von B ist, dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- c und \tilde{c} haben dieselbe Orientierung. Das heißt, dass die Anfangs- und Endpunkte übereinstimmen, also $c(a) = \tilde{c}(\tilde{a})$ und $c(b) = \tilde{c}(\tilde{b})$. In diesem Fall stimmen die Tangentenvektoren von c und \tilde{c} überein,

$$T(\vec{x}) = \tilde{T}(\vec{x}) \quad \text{für } \vec{x} = c(t) = \tilde{c}(\tau) \in B.$$

- c und \tilde{c} haben entgegengesetzte Orientierung. Das heißt, dass der Anfangspunkt der einen der Endpunkt der anderen Kurve ist, also $c(a) = \tilde{c}(\tilde{b})$ und $c(b) = \tilde{c}(\tilde{a})$. In diesem Fall sind die Tangentenvektoren von c und \tilde{c} gegengleich,

$$T(\vec{x}) = -\tilde{T}(\vec{x}) \quad \text{für } \vec{x} = c(t) = \tilde{c}(\tau) \in B.$$

19.2 Beispiel: Die Kurve $c(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$, parametrisiert den Viertelkreis B mit Radius 2 im ersten Quadranten. Für $t = \pi/3$ ist $c(\pi/3) = (1, \sqrt{3})$ und $c'(\pi/3) = (-\sqrt{3}, 1)$. Damit ist der zugehörige Tangentenvektor gegeben durch

$$T(1, \sqrt{3}) = \frac{c'(\pi/3)}{\|c'(\pi/3)\|} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Die Kurve $\tilde{c}(\tau) = (\tau, \sqrt{4 - \tau^2})$, $\tau \in [0, 2]$, hat dieselbe Spur, ist aber entgegengesetzt orientiert, da $c(0) = \tilde{c}(2)$ und $c(\pi/2) = \tilde{c}(0)$. Anders ausgedrückt durchläuft \tilde{c} die Menge B im Uhrzeigersinn, während c gegen ihn läuft. Für $\tau = 1$ ist $\tilde{c}(1) = (1, \sqrt{3})$, wie zuvor, und $\tilde{c}'(1) = (1, -\sqrt{3}/3)$. Damit ist der zugehörige Tangentenvektor gegeben durch

$$\tilde{T}(1, \sqrt{3}) = \frac{\tilde{c}'(1)}{\|\tilde{c}'(1)\|} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = -T(1, \sqrt{3}).$$

19.3 Arbeitsintegral: Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit Spur B und Tangentenvektor T . Weiterhin sei $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, dessen Definitionsgebiet B enthält, also $B \subset G \subset \mathbb{R}^n$. Dann definieren wir das *Arbeitsintegral* von F längs c als

$$W_c(F) := \int_c F \cdot T.$$

Dabei bezeichnet hier und im Folgenden der Malpunkt zwischen Vektoren das Skalarprodukt, also $F \cdot T := \langle F, T \rangle$. Die oben gegebene abstrakte Definition des Arbeitsintegrals führt durch Einsetzen der Kurvenparametrisierung auf den Ausdruck

$$W_c(F) = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t) dt,$$

wobei sich der Maßfaktor $\|c'(t)\|$ des Integrals gerade mit dem Nenner in der Definition des normierten Tangentenvektors weghebt. Es ist anzumerken, dass der Ausdruck auf der rechten Seite auch verwendet werden kann, wenn die Kurve c nicht injektiv ist.

Physikalisch liegt der Definition des Arbeitsintegrals folgender Gedanke zugrunde: Wenn F ein Kraftfeld ist und $c(t)$ die Position eines Teilchens im Raum zum Zeitpunkt t angibt, dann ist $F(c(t))$ die Kraft, die auf das Teilchen zum Zeitpunkt t wirkt. Durch die Bildung des Skalarprodukts wird von dieser Kraft nur der tangentiale Anteil berücksichtigt; Kraftkomponenten senkrecht zur Bewegungsrichtung haben keinen Einfluss. Durch Integration dieser Größe erhält man gerade die Arbeit, die das Kraftfeld im Zeitintervall $[a, b]$ an dem Teilchen verrichtet.

19.4 Regeln:

- Das Arbeitsintegral ist linear bezüglich des Vektorfelds,

$$W_c(F \pm G) = W_c(F) \pm W_c(G), \quad W_c(\alpha F) = \alpha W_c(F).$$

- Wenn die Kurven c und \tilde{c} beide die Spur B haben und injektiv sind⁷², dann gilt

$$W_c(F) = W_{\tilde{c}}(F), \quad \text{falls } c \text{ und } \tilde{c} \text{ gleich orientiert}$$

und

$$W_c(F) = -W_{\tilde{c}}(F), \quad \text{falls } c \text{ und } \tilde{c} \text{ entgegengesetzt orientiert}$$

sind. Dies folgt unmittelbar aus der Gleichheit $T = \tilde{T}$ bzw. der Gegengleichheit $T = -\tilde{T}$ der Tangentenvektoren und der Unabhängigkeit des Kurvenintegrals von der Parametrisierung. Physikalisch gesehen bedeuten die obigen Formeln, dass bei gegebenem F der Betrag des Arbeitsintegrals nur davon abhängt, welche Punkte durchlaufen werden. Die Geschwindigkeit, mit der dies erfolgt, ist dagegen irrelevant.

19.5 Beispiel [→ 19.2]:

- Sei $F(x, y) = (-x, 1)$. Für $c(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ ist $c'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ und damit

$$W_c(F) = \int_0^{\pi/2} \begin{bmatrix} -2 \cos t \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \end{bmatrix} dt = \int_0^{\pi/2} (4 \sin t \cos t + 2 \cos t) dt = 4.$$

Für die entgegengesetzt orientierte Kurve $\tilde{c}(\tau) = (\tau, \sqrt{4 - \tau^2})$ erhalten wir $\tilde{c}'(\tau) = (1, -\tau/\sqrt{4 - \tau^2})$ und damit

$$W_{\tilde{c}}(F) = \int_0^2 \begin{bmatrix} -\tau \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\tau/\sqrt{4 - \tau^2} \end{bmatrix} d\tau = \int_0^2 (-\tau - \tau/\sqrt{4 - \tau^2}) d\tau = -4.$$

⁷²Die Bedingung der Injektivität ist wichtig. Beispielsweise haben sowohl $c(t) = [\cos t, \sin t], t \in [0, 2\pi]$, als auch $\tilde{c}(t) = [\cos t, \sin t], t \in [0, 8\pi]$, als Spur den Einheitskreis. Allerdings durchläuft c diesen nur einmal, \tilde{c} aber viermal. Entsprechend ist das Arbeitsintegral für \tilde{c} auch viermal so groß wie für c .

- Ein Teilchen mit Masse m bewegt sich unter Einfluss des Kraftfelds F . Die Bahn wird beschrieben durch die Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Damit ist die Geschwindigkeit $\vec{v} = c'$ und die Beschleunigung $\vec{a} = \vec{v}' = c''$. Zu Beginn des Vorgangs befindet sich das Teilchen in Ruhe, also $\vec{v}(a) = \vec{0}$. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz gilt zwischen Kraft und Beschleunigung der Zusammenhang $F = m\vec{a}$. Also ist

$$W_c(F) = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t) dt = m \int_a^b c''(t) \cdot c'(t) dt.$$

Es gilt $(\|\vec{v}\|^2)' = (\|c'\|^2)' = 2c' \cdot c''$ und damit

$$W_c(F) = \frac{1}{2} m \|\vec{v}(t)\|^2 \Big|_{t=a}^b = \frac{1}{2} m \|\vec{v}(b)\|^2.$$

Die Arbeit, die das Kraftfeld an dem Teilchen verrichtet, wird also in kinetische Energie umgesetzt.

19.6 Potenzial: Sei $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Wenn es eine skalare C^1 -Funktion $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, deren Gradient gerade das gegebene Vektorfeld ist, also

$$\nabla\varphi = F,$$

dann nennt man φ ein *Potenzial* von F . Damit ist das Potenzial das mehrdimensionale Analogon zur Stammfunktion in einer Veränderlichen. Allerdings ist, wie wir sehen werden, die Existenz eines Potenzials keine Selbstverständlichkeit, sondern an Bedingungen geknüpft. Ein Vektorfeld, das ein Potenzial besitzt, nennt man *Gradientenfeld* oder auch *konservatives Feld*. Mit φ ist natürlich auch $\varphi + c$ für eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$ ein Potenzial. Bei der Angabe von Potenzialen wird auf die Notation der Konstanten aber in der Regel verzichtet. Der Nutzen eines Potenzials liegt in der folgenden Beobachtung: Nach der Kettenregel gilt für eine Kurve c mit Bild $B \subset G$

$$(\varphi(c(t)))' = \nabla\varphi(c(t)) \cdot c'(t) = F(c(t)) \cdot c'(t).$$

Also ist

$$W_c(F) = \int_c F \cdot T = \int_a^b (\varphi(c(t)))' dt = \varphi(c(b)) - \varphi(c(a)).$$

Das Arbeitsintegral ist somit die *Potenzialdifferenz* zwischen End- und Anfangspunkt der Kurve. Interessanterweise taucht in dieser Gleichung die konkrete Form der Kurve gar nicht auf, sondern nur deren Anfangs- und Endpunkt. Das Arbeitsintegral ist in diesem Fall also *wegunabhängig*. Speziell für eine *geschlossene Kurve* mit $c(a) = c(b)$ hat das Arbeitsintegral den Wert Null. *Achtung:* In der Physik wird der Zusammenhang zwischen Potenzial und Vektorfeld gelegentlich in der Form $\nabla\varphi = -F$ definiert. Bis auf das Vorzeichen ändert sich dabei aber nichts.

19.7 Beispiel:

- Gegeben ist das Vektorfeld $F(x, y) = (-x, 1)$ und die Kurve $c(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ wie in [\[→ 19.5\]](#). Die Funktion $\varphi(x, y) = y - x^2/2$ ist ein Potenzial, denn

$$\nabla\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} -x \\ 1 \end{bmatrix} = F(x, y).$$

Damit erhalten wir ohne explizite Integration den Wert

$$W_c(F) = \varphi(c(\pi/2)) - \varphi(c(0)) = \varphi(0, 2) - \varphi(2, 0) = 4.$$

Jede andere Kurve mit demselben Anfangs- und Endpunkt liefert das gleiche Resultat. Man führe die explizite Berechnung beispielsweise für die geradlinige Verbindung $[2 - t, t], t \in [0, 2]$, durch und vergleiche.

- Für eine Funktion $h : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir das radialsymmetrische Vektorfeld $F(\vec{x}) = h(\|\vec{x}\|)\vec{x}$. Definiert man die Funktion $H(r) = \int r h(r) dr$, dann ist das Potenzial von F gegeben durch $\varphi(\vec{x}) = H(\|\vec{x}\|)$, denn

$$\nabla\varphi(\vec{x}) = H'(\|\vec{x}\|) \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = h(\|\vec{x}\|)\vec{x} = F(\vec{x}).$$

Ein Beispiel hierfür ergibt sich aus dem Gravitationsgesetz. Befindet sich ein Massepunkt im Ursprung eines Koordinatensystems, dann ist die Kraft auf eine weitere Masse an der Stelle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ für eine geeignete Konstante $\lambda > 0$ gegeben durch $F(\vec{x}) = -\lambda \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$. Hier ist also $h(r) = -\lambda/r^3$ und damit $H(r) = -\int \lambda/r^2 dr = \lambda/r$. Das Gravitationspotenzial ist damit $\varphi(\vec{x}) = \lambda/\|\vec{x}\|$. Der Wert des Arbeitsintegrals für eine beliebige Kurve c , die die Punkte $\vec{p} = c(a)$ und $\vec{q} = c(b)$ verbindet, ist $W_c(F) = \varphi(\vec{q}) - \varphi(\vec{p}) = \lambda(1/\|\vec{q}\| - 1/\|\vec{p}\|)$. Eine völlig analoge Rechnung ergibt sich für das Potenzial eines elektrostatischen Feldes gemäß dem Coulomb'schen Gesetz.

- Wir suchen ein Potenzial für das Vektorfeld $F(x, y) = (\alpha y, x + 2y)$. Dabei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Für die noch unbekannte Funktion φ muss gelten

$$\partial_x \varphi(x, y) = f_1(x, y) = \alpha y, \quad \partial_y \varphi(x, y) = f_2(x, y) = x + 2y.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\varphi(x, y) = \alpha xy + c(y)$. Dabei ist zu beachten, dass die Integrationskonstante c von y abhängen darf, aber natürlich nicht von x . Dies eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt die Bedingung

$$\alpha x + c'(y) = x + 2y \quad \Rightarrow \quad c'(y) = (1 - \alpha)x + 2y.$$

Da die Funktion $c'(y)$ nur von y abhängt, ergibt sich für $\alpha \neq 1$ ein Widerspruch, es existiert dann also kein Potenzial. Für $\alpha = 1$ folgt aus $c'(y) = 2y$ dagegen $c(y) = y^2$ und wir erhalten $\varphi(x, y) = xy + y^2$.

19.8 Existenz eines Potenzials: Im univariaten Fall gibt es zu einer gegebenen stetigen Funktion stets eine Stammfunktion. Im Gegensatz dazu ist die Existenz eines Potenzials an stark einschränkende Bedingungen geknüpft. Betrachten wir ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und nehmen wir an, dass dieses ein Potenzial φ besitzt. Dann ist dieses zweimal stetig differenzierbar und wir erhalten

$$\nabla\varphi = F \quad \Rightarrow \quad D^2\varphi = DF.$$

Da die Hesse-Matrix $D^2\varphi$ symmetrisch ist, muss dies auch für die Ableitung DF des Vektorfeldes gelten. Wenn diese sogenannte *Integrabilitätsbedingung* verletzt ist, kann also kein Potenzial existieren.

Merke: Ein Vektorfeld kann nur dann ein Potenzial besitzen, wenn seine Ableitungsmatrix symmetrisch ist,

$$DF = DF^T.$$

Es stellt sich nun die Frage, ob diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist. Die Antwort darauf hängt von der Gestalt des Definitionsgebiets G ab. Man sagt, die Menge G sei *einfach zusammenhängend*, wenn man jede geschlossene Kurve c in G auf einen Punkt zusammenziehen kann, ohne dabei G zu verlassen. Einfach zusammenhängend sind beispielsweise \mathbb{R}^n , Kugeln der Form $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| < R\}$, \mathbb{R}^2 ohne eine Halbgerade oder \mathbb{R}^3 ohne einen Punkt. Nicht einfach zusammenhängend sind dagegen beispielsweise \mathbb{R}^2 ohne einen Punkt, ein Torus in \mathbb{R}^3 oder \mathbb{R}^3 ohne eine Gerade. Außerdem bleibt die Eigenschaft, einfach zusammenhängend zu sein, unverändert bei stetigen Deformationen der Menge. Nun gilt: Wenn G einfach zusammenhängend ist und die Ableitungsmatrix DF des Vektorfelds $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ symmetrisch ist, dann besitzt F ein Potenzial. Diese Bedingung an G ist allerdings nicht notwendig. Es gibt durchaus Gradientenfelder, die auf nicht einfach zusammenhängenden Gebieten definiert sind, beispielsweise $F(\vec{x}) = \vec{x}/\|\vec{x}\|^3$ mit dem Potenzial $\varphi(\vec{x}) = -1/\|\vec{x}\|$ auf dem Definitionsgebiet $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$.

19.9 Beispiel:

- Wir betrachten nochmals das Vektorfeld $F(x, y) = (\alpha y, x + 2y)$. Dessen Ableitung

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ist genau dann symmetrisch, wenn $\alpha = 1$. Da das Definitionsgebiet $G = \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, existiert also genau in diesem Fall ein Potenzial.

- Das lineare Vektorfeld $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ besitzt genau dann ein Potenzial, wenn die Matrix $A = DF(\vec{x})$ symmetrisch ist. Es ist dann gegeben durch $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} / 2$.
- Das Vektorfeld $F(x, y, z) = (y^2, 2xy + z, y + 3z^2)$ besitzt ein Potenzial, da das Definitionsgebiet $G = \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend und die Ableitungsmatrix

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} - & 2y & 0 \\ 2y & - & 1 \\ 0 & 1 & - \end{bmatrix}$$

symmetrisch ist. Auf die Berechnung der Diagonaleinträge kann man verzichten, da sie keine Rolle für die Symmetrie spielen. Die Berechnung des Potenzials erfolgt in drei Schritten:

- Aus $\varphi_x \stackrel{!}{=} y^2$ folgt $\varphi(x, y, z) = xy^2 + c(y, z)$.
- Aus $\varphi_y = 2xy + c_y \stackrel{!}{=} 2xy + z$ folgt $c_y = z$ und damit $c(y, z) = yz + d(z)$.
- Aus $\varphi_z = y + d_z \stackrel{!}{=} y + 3z^2$ folgt $d_z = 3z^2$ und damit $d(z) = z^3$. Das Endergebnis ist also $\varphi(x, y, z) = xy^2 + yz + z^3$.

- Für das Vektorfeld $F(x, y) = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2))$ mit dem Definitionsgebiet $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ ist

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} - & \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & - \end{bmatrix}$$

symmetrisch. Allerdings ist G nicht einfach zusammenhängend. Tatsächlich hat für die geschlossene Kurve $c(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$, das Arbeitsintegral den Wert

$$W_c(F) = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} dt = 2\pi \neq 0.$$

Also kann F kein Potenzial besitzen. Die Funktion $\varphi(x, y) = \arctan(y/x)$ erfüllt zwar die Bedingung $\nabla\varphi = F$, sie ist aber für $x = 0$ nicht definiert und damit kein Potenzial von F . Auch $\tilde{\varphi} = -\arctan(x/y)$ ist kein Potenzial, da zwar auch hier $\tilde{\nabla}\varphi = F$ gilt, diesmal aber die Gerade $y = 0$ eine Definitionslücke darstellt.

19.10 Normalenvektor: Sei $\Psi : G \rightarrow B$ eine injektive Parametrisierung der Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ über $G \subset \mathbb{R}^m$. Eine stetige vektorwertige Funktion $\Psi^\perp : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *normal* zu Ψ , wenn $D\Psi^T \cdot \Psi^\perp = \vec{0}$ gilt, also alle partiellen Ableitungen von Ψ orthogonal zu Ψ^\perp sind. Der zugehörige normierte *Normalenvektor* an der Stelle $\vec{x} \in B$ ist definiert durch

$$N(\vec{x}) := \frac{\Psi^\perp(\vec{u})}{\|\Psi^\perp(\vec{u})\|}, \quad \vec{x} = \Psi(\vec{u}),$$

sofern der Nenner nicht verschwindet. Formal gesehen ist die Funktion $N : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ also ein Vektorfeld. Der Normalenvektor steht ebenfalls senkrecht auf allen partiellen Ableitungen und hat Länge 1. Für $n = m + 1$ ist der Kern von $D\Psi^T$ typischerweise eindimensional und somit die Funktion Ψ^\perp bis auf Skalierung eindeutig bestimmt. Das heißt, dass es genau zwei verschiedene normierte Normalenvektoren gibt, die in die entgegengesetzte Richtung weisen. Für ebene Kurven und Flächen lassen sich spezielle normale Funktionen einfach berechnen.

Kurve: Für die ebene Kurve $c(t) = (x(t), y(t))$ sind

$$c^\perp = \begin{bmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad c^\perp = \begin{bmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}$$

zwei spezielle normale Funktionen, die durch Drehung von c' um ± 90 Grad entstehen. Wir schreiben auch

$$c^\perp = \pm R \cdot c' \quad \text{mit der Drehmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der zugehörige normierte Normalenvektor ist gegeben durch

$$N(\vec{x}) = \frac{c^\perp(t)}{\|c^\perp(t)\|} = \frac{c^\perp(t)}{\mu_c(t)}.$$

Fläche: Für die Fläche $S : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind

$$S^\perp = \partial_1 S \times \partial_2 S \quad \text{und} \quad S^\perp = \partial_2 S \times \partial_1 S$$

zwei spezielle normale Funktionen. Der zugehörige normierte Normalenvektor ist gegeben durch

$$N(\vec{x}) = \frac{S^\perp(\vec{u})}{\|S^\perp(\vec{u})\|} = \frac{S^\perp(\vec{u})}{\mu_S(\vec{u})}.$$

Für Kurve und Fläche gilt:

- Je nachdem, welche Variante für die normale Funktion gewählt wird, weist der Normalenvektor in die eine oder die genau entgegengesetzte Richtung. Die Präzisierung erfolgt in Übungsaufgaben und Anwendungen meist durch geometrisch anschauliche Angaben wie: “nach oben gerichtet” oder “in das Innere des Gebiets zeigend”.
- Der normierte Normalenvektor ist – bis auf die Wahl der Orientierung – eindeutig bestimmt, also unabhängig von der gewählten Parametrisierung der Menge B .

19.11 Fluss: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ die Spur einer ebenen Kurve ($n = 2$) oder einer Fläche ($n = 3$) mit Normalenvektor N und sei $V : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, dessen Definitionsgebiet B enthält, also $B \subset D \subset \mathbb{R}^n$. Dann definiert man den *Fluss* von V durch B als

$$\Phi_B(V) := \int_B V \cdot N.$$

Durch die Bildung des Skalarprodukts werden nur Anteile von V senkrecht zu B berücksichtigt, während die tangentialen Anteile keine Rolle spielen. Die Verhältnisse sind also genau umgekehrt wie beim Arbeitsintegral. Die oben gegebene abstrakte Definition des Flusses führt durch Einsetzen der Parametrisierung für die Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf

$$\Phi_c(V) = \int_a^b V(c(t)) \cdot c^\perp(t) dt, \quad c^\perp = \pm R \cdot c',$$

und für die Fläche $S : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf

$$\Phi_S(V) = \int_G V(S(u, v)) \cdot S^\perp(u, v) dudv, \quad S^\perp = \pm \partial_u S \times \partial_v S.$$

In beiden Fällen hebt sich der Maßfaktor des Integrals gerade mit dem Nenner in der Darstellung des Normalenvektors weg. Die Wahl des Vorzeichens für die normale Funktion c^\perp bzw. S^\perp hängt von der Aufgabenstellung ab.

Physikalisch liegt der Definition des Flusses folgender Gedanke zugrunde: Wenn V die Strömungsgeschwindigkeit eines Gases oder einer Flüssigkeit beschreibt, dann ist der Fluss die Stoffmenge, die pro Zeiteinheit durch die Spur der Kurve c bzw. der Fläche S tritt. Es gibt aber auch weitere Anwendungen des Flusses, beispielsweise in der Elektrodynamik und der Gravitationstheorie.

19.12 Regeln:

- Der Fluss ist linear bezüglich des Vektorfelds,

$$\Phi_B(V \pm W) = \Phi_B(V) \pm \Phi_B(W), \quad \Phi_B(\alpha V) = \alpha \Phi_B(V).$$

- Der Fluss ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

19.13 Beispiel:

- Die Kurve $c(t) = (\cos t, t \cos t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, parametrisiert den Rand eines Gebiets in der rechten Halbebene. Gesucht ist der Fluss des Vektorfelds $V(x, y) = (x^2, xy)$ durch c von innen nach außen. Eine normale Funktion erhalten wir mit

$$c'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t - t \sin t \end{bmatrix} \Rightarrow c^\perp(t) = \begin{bmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$

Nun ist zu prüfen, ob c^\perp die richtige Orientierung hat. Hierzu genügt es, einen einzigen Punkt zu betrachten. Beispielsweise ist $c^\perp(0) = (1, 0)$. Dieser Vektor zeigt, wie gefordert, in das Äußere des Gebiets. Somit kann c^\perp wie angegeben für die Berechnung verwendet werden. Wir erhalten

$$\Phi_c(V) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ t \cos^2 t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t \end{bmatrix} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t dt = 4/3.$$

Tipp: Zur Berechnung des letzten Integrals schreibt man $\cos^3 t = (1 - \sin^2 t) \cos t$ und verwendet dann die Substitution $u = \sin t$.

- Die Fläche $S(u, v) = (-u, v, 1 - u^2)$, $(u, v) \in [-1, 1]^2$, parametrisiert einen parabolischen Zylinder. Gesucht ist der Fluss des Vektorfelds $V(x, y, z) = (0, xy, \sqrt{z})$ durch S von unten nach oben. Eine normale Funktion erhalten wir mit

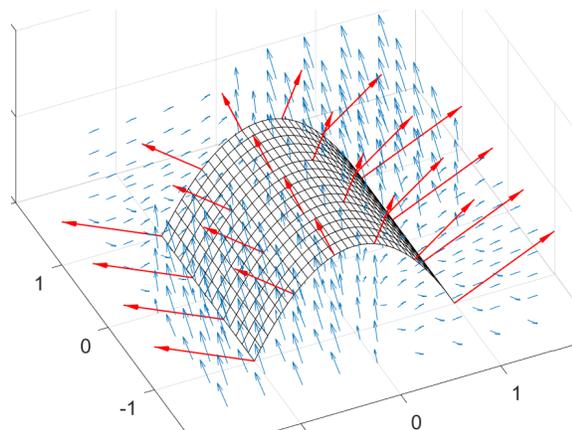
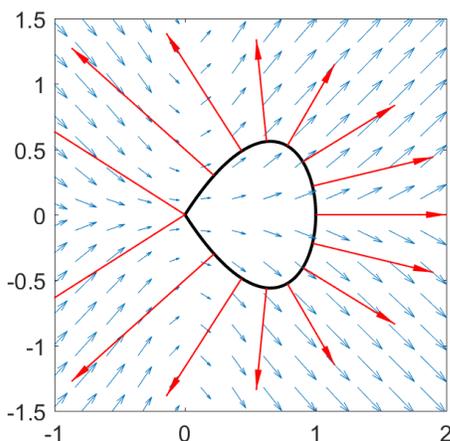
$$S_u(u, v) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2u \end{bmatrix}, \quad S_v(u, v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S^\perp = S_u \times S_v = \begin{bmatrix} 2u \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach unten, da die dritte Koordinate negativ ist. Entsprechend der Aufgabenstellung ist also der entgegengesetzt gerichtete Vektor zu wählen,

$$S^\perp = S_v \times S_u = \begin{bmatrix} -2u \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir für den Fluss

$$\Phi_S(V) = \int_{u=-1}^1 \int_{v=-1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ -uv \\ \sqrt{1-u^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2u \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dv du = \int_{u=-1}^1 \int_{v=-1}^1 \sqrt{1-u^2} dv du = \pi.$$



19.14 Fluss und Potenzial: Der Fluss $\Phi_c(V)$ des Vektorfelds $V = (f, g)$ durch die ebene Kurve c lässt sich folgendermaßen auf ein Arbeitsintegral zurückführen: Wir definieren das Kraftfeld

$$F := \begin{bmatrix} -g \\ f \end{bmatrix} = R^T V \quad \text{mit der Drehmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$W_c(F) = \int_c F \cdot T = \int_c (R^T V) \cdot T = \int_c V \cdot (RT) = \int_c V \cdot N = \Phi_c(V).$$

Der Fluss von V durch c ist also gleich dem Arbeitsintegral des orthogonalen Kraftfelds F längs c . Diese Uminterpretation ist insbesondere dann zweckmäßig, wenn F ein Potenzial besitzt und so die Integration vermieden werden kann. Betrachtet man die Ableitungen

$$DV = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}, \quad DF = \begin{bmatrix} -g_x & -g_y \\ f_x & f_y \end{bmatrix},$$

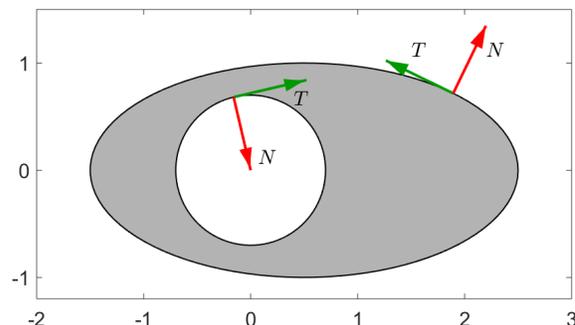
dann sieht man, dass die notwendige Symmetriebedingung $f_x = -g_y$ für die Existenz eines Potenzials für F gleichbedeutend ist mit $\text{spur } DV = f_x + g_y = 0$.

20 Vektoranalysis

Das Integral über ein Gebiet G kann in gewissen Fällen auf ein Integral über den Gebietsrand ∂G zurückgeführt werden. Dies bedeutet, dass aus dem zweidimensionalen Integral über eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^2$ ein eindimensionales Integral über dessen Randkurve ∂G wird oder dass aus dem dreidimensionalen Integral über eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^3$ ein zweidimensionales Integral über dessen Randfläche ∂G wird. Diesen Sachverhalt kann man sich einerseits zunutze machen, um die Berechnung von Integralen zu vereinfachen, er liefert aber auch wichtige theoretische Einsichten.

20.1 Der Integralsatz in der Ebene: Wir betrachten ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ in der Ebene mit einem stückweise glatten Rand ∂G . Der Rand heißt *orientiert*, wenn der Normalenvektor N und der Tangentenvektor T folgendermaßen gewählt sind:

- N weist in das Äußere des Gebiets,
- in Richtung von T gesehen liegt das Äußere des Gebiets rechts.



Der orientierte Rand der Einheitskreisscheibe wird also beispielsweise gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen und es gilt $N(\vec{x}) = \vec{x}$. Wird der orientierte Rand durch eine Kurve $c(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$, parametrisiert, dann gilt $T \circ c = (x', y')/\mu_c$ und $N \circ c = (y', -x')/\mu_c$. Dabei ist die Kurve c gegebenenfalls in mehrere Teile c_1, \dots, c_k zu zerlegen; die entsprechenden Teilintegrale werden aufsummiert. Sofern nichts anderes gesagt wird, wird der Rand stets als in dieser Form orientiert und parametrisiert angenommen.

Sei also $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit orientiertem Rand ∂G und Normalenvektor $N = (n_1, n_2)$, dann gilt für eine stetig differenzierbare Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ der *Integralsatz in der Ebene*

$$\int_G \partial_i f = \int_{\partial G} f n_i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Einsetzen einer Parametrisierung liefert die beiden Formeln

$$\int_G f_x = \int_a^b f(c(t)) y'(t) dt, \quad \int_G f_y = - \int_a^b f(c(t)) x'(t) dt.$$

Wie schon bei der Berechnung des Arbeitsintegrals hebt sich auch hier der Nenner in der Definition des Normalenvektors mit dem Maßfaktor weg.

Wir beweisen den Integralsatz für $i = 2$, der Fall $i = 1$ ist vollkommen analog. Dazu betrachten wir zunächst ein Gebiet, das sich in der Form $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } p(x) \leq y \leq q(x)\}$ beschreiben lässt. Die Randkurve besteht aus vier Teilstücken c_1, \dots, c_4 , sodass $\int_{\partial G} = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} + \int_{c_4}$. Da die Randkurven c_2 und c_4 vertikal verlaufen, ist hier $n_2 = 0$ und somit $\int_{c_2} f n_2 = \int_{c_4} f n_2 = 0$. Wir parametrisieren die Randkurve c_1 in der Form

$$c_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ p(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [a, b],$$

und erhalten mit $x'_1(t) = 1$ das Integral

$$\int_{c_1} f n_2 = - \int_a^b f(t, p(t)) dt.$$

Für die Kurve $\tilde{c}_3(t) = (t, q(t))$ ist analog $\int_{\tilde{c}_3} f n_2 = - \int_a^b f(t, q(t)) dt$. Da \tilde{c}_3 und c_3 entgegengesetzt orientiert sind, ergibt sich

$$\int_{\partial G} f n_2 = \int_{c_1} f n_2 - \int_{\tilde{c}_3} f n_2 = \int_a^b (f(t, q(t)) - f(t, p(t))) dt.$$

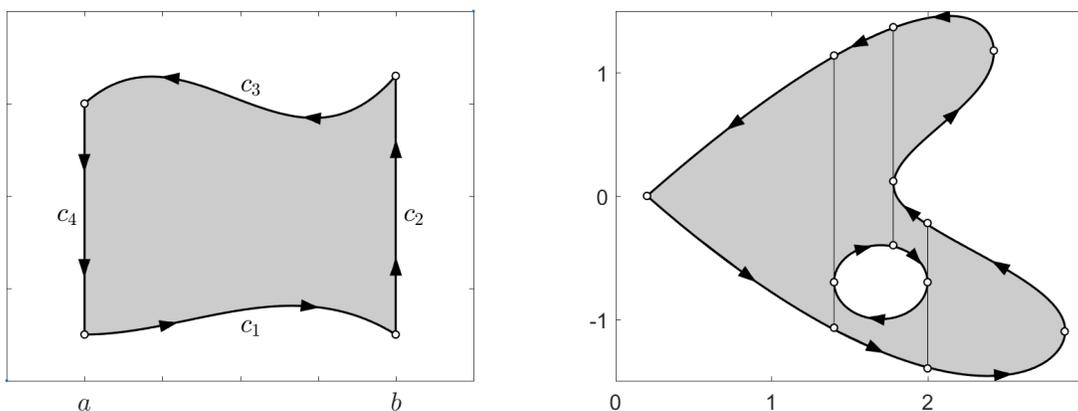
Nun schreiben wir für festes t die Differenz der Funktionswerte als Integral über die Ableitung,

$$f(t, q(t)) - f(t, p(t)) = \int_{y=p(t)}^{q(t)} f_y(t, y) dy,$$

und erhalten, indem wir die Variable t noch in x umbenennen,

$$\int_{\partial G} f n_2 = \int_{t=a}^b \int_{y=p(t)}^{q(t)} f_y(t, y) dy dt = \int_{x=a}^b \int_{y=p(x)}^{q(x)} f_y(x, y) dy dx = \int_G f_y.$$

Komplizierter geformte Gebiete zerlegt man in Teile des soeben untersuchten Typs und summiert die Teilintegrale auf. Dabei ist lediglich zu beachten, dass die Kurvenintegrale entlang der vertikalen Trennlinien alle verschwinden und somit in Summe nur das Kurvenintegral über die Randkurve verbleibt.



20.2 Beispiel: Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung der Randkurve des Gebiets $G \subset \mathbb{R}^2$. Dann ist der Flächeninhalt von G gegeben durch

$$|G| = \int_G 1 = \int_{\partial G} x n_1 = \int_a^b x(t) y'(t) dt$$

oder genauso durch

$$|G| = \int_G 1 = \int_{\partial G} y n_2 = - \int_a^b y(t) x'(t) dt.$$

Ist G speziell ein Polygon mit den n Ecken $\vec{x}_1 = (x_1, y_1), \dots, \vec{x}_n = (x_n, y_n)$, dann lassen sich die Segmente der Randkurve parametrisieren durch

$$c_i(t) = \vec{x}_i + t(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i), \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n.$$

Dabei setzen wir $\vec{x}_{n+1} := \vec{x}_1$, um den Endpunkt \vec{x}_n mit dem Anfangspunkt \vec{x}_1 zu verbinden. Damit ergibt sich die *Gauß'sche Trapezformel*

$$|G| = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (x_i + t(x_{i+1} - x_i))(y_{i+1} - y_i) dt = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i).$$

20.3 Divergenz und Rotation in der Ebene: Wir betrachten nun den Fluss $\Phi_{\partial G}(V)$ des Vektorfelds $V = (v_1, v_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch den Rand des Gebiets $G \subset \mathbb{R}^2$ von innen nach außen. Nach dem Integralsatz in der Ebene gilt

$$\Phi_{\partial G}(V) = \int_{\partial G} V \cdot N = \int_{\partial G} (v_1 n_1 + v_2 n_2) = \int_G (\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2).$$

Der Term $\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2$ ist ein Maß für die lokale „Quellstärke“ des Vektorfelds. Man bezeichnet ihn als *Divergenz* von V ,

$$\operatorname{div} V := \operatorname{spur} DV = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2.$$

Es gilt also

$$\Phi_{\partial G}(V) = \int_{\partial G} V \cdot N = \int_G \operatorname{div} V.$$

Merke: Der Fluss durch den Rand ist gleich dem Gebietsintegral über die Divergenz.

Wir betrachten nun das Arbeitsintegral $W_{\partial G}(F)$ des Vektorfelds $F = (f_1, f_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ längs des orientierten Randes des Gebiets G . Wie in Abschnitt 19.14 verwenden wir die Drehmatrix R und setzen $V := RF = (f_2, -f_1)$. Nun ist

$$W_{\partial G}(F) = \Phi_{\partial G}(V) = \int_G \operatorname{div} V = \int_G (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1).$$

Der Term $\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$ ist ein Maß für die lokale „Verwirbelung“ des Vektorfelds. Man bezeichnet ihn als die zweidimensionale *Rotation* von F ,

$$\operatorname{rot}_2 F := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1.$$

Es gilt also

$$\int_{\partial G} F \cdot T = \int_G \operatorname{rot}_2 F.$$

Merke: Das Arbeitsintegral längs des Randes eines ebenen Gebiets ist gleich dem Gebietsintegral über die Rotation.

Wir bemerken noch, dass die Ableitungsmatrix DF genau dann symmetrisch ist, wenn $\operatorname{rot}_2 F = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$ verschwindet. Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials von F lässt sich also auch in der Form $\operatorname{rot}_2 F = 0$ schreiben.

20.4 Beispiel:

- Gesucht ist der Fluss des Vektorfelds $V(x, y) = (x + \sin y, y^2 - e^x)$ durch den Einheitskreis von innen nach außen. Einsetzen der Parametrisierung $c(t) = (\cos t, \sin t)$ führt auf das Integral

$$\Phi_c(V) = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos t + \sin(\sin t) \\ \sin^2 t - e^{\cos t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} dt,$$

dessen Berechnung technisch aufwändig ist. Andererseits ist $\operatorname{div} V = 1 + 2y$, sodass für die Einheitskreisscheibe K gilt

$$\Phi_c(V) = \int_K \operatorname{div} V = |K| + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 2r^2 \sin \varphi \, dr d\varphi = |K| = \pi.$$

- Gesucht ist das Arbeitsintegral des Vektorfelds $F(x, y) = (3y, x + \tan(y))$ längs des positiv orientierten Randes des Dreiecks D mit Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 4)$. Die direkte Berechnung über die Randkurve führt auf drei teilweise komplizierte Einzelintegrale. Mit $\operatorname{rot}_2 F = 1 - 3 = -2$ sieht man dagegen unmittelbar

$$W_c(F) = \int_D \operatorname{rot}_2 F = -2|D| = -4.$$

- Wir drehen die Punkte der Ebene mit Winkelgeschwindigkeit ω um den Punkt $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$. Dadurch beschreibt der Punkt \vec{x} die Bahnkurve

$$c(t) = \vec{x}_0 + R(t)(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad \text{mit der Drehmatrix} \quad R(t) := \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ergibt sich damit für den Punkt $\vec{x} = (x, y)$ der Geschwindigkeitsvektor

$$V(x, y) = c'(0) = \begin{bmatrix} -\omega(y - y_0) \\ \omega(x - x_0) \end{bmatrix}.$$

Die Rotation dieses Geschwindigkeitsfelds ist $\operatorname{rot}_2 V = 2\omega$. Das heißt, die Rotation ordnet dem Vektorfeld die doppelte Drehgeschwindigkeit zu.

20.5 Divergenz und Rotation im Raum: Vollkommen analog zum ebenen Fall definiert man die *Divergenz* eines Vektorfelds $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ als

$$\operatorname{div} V := \operatorname{spur} DV = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \cdots + \partial_n v_n.$$

Mit dem Nabla-Operator ∇ schreibt man in sinnfälliger Weise auch

$$\operatorname{div} V = \nabla \cdot V = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Natürlich werden hier die Komponenten nicht wie beim Standard-Skalarprodukt multipliziert, sondern vielmehr die Operatoren ∂_i auf die Funktionen v_i angewandt.

Bei der Rotation liegen die Dinge etwas komplizierter. Wir kennen sie im Zweidimensionalen als skalare Größe, was damit zu erklären ist, dass sich eine Drehung in der Ebene durch den Wert der Winkelgeschwindigkeit charakterisieren lässt. Im Dreidimensionalen dagegen benötigt man zur Beschreibung einer Drehbewegung neben der Winkelgeschwindigkeit aber auch die Lage der Drehachse. Insofern ist die Rotation hier eine vektorielle Größe. Höherdimensionale Fälle betrachten wir nicht. Man definiert für das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die *Rotation* als

$$\operatorname{rot} F := \nabla \times F = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{bmatrix}.$$

Hinweis: In der englischsprachigen Literatur findet man für die Rotation meist die Bezeichnung $\text{curl } F$.

Dreht man die Punkte des Raums mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Drehachse $g : \vec{x}_0 + t\vec{v}$, wobei \vec{v} ein Vektor der Länge 1 ist, dann ist das zugehörige Geschwindigkeitsfeld gegeben durch

$$V(\vec{x}) = \omega \vec{v} \times (\vec{x} - \vec{x}_0).$$

Berechnet man dessen Rotation, so erhält man $\text{rot } V = 3\omega\vec{v}$. Die Rotation ordnet also dem Geschwindigkeitsfeld einen Vektor zu, der in Richtung der Drehachse weist und dessen Länge das Dreifache der Winkelgeschwindigkeit ist.

Der Zusammenhang mit der Rotation im ebenen Fall ist der Folgende: Sei $F = (f_1, f_2, 0)$ ein Vektorfeld, das in dem Sinne eben ist, dass die dritte Komponente verschwindet und dass die beiden anderen Komponenten $f_1 = f_1(x_1, x_2)$ und $f_2 = f_2(x_1, x_2)$ nicht von x_3 abhängen. Dann ist

$$\text{rot } F = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{bmatrix}$$

und die dritte Komponente ist gerade $\text{rot}_2(f_1, f_2)$.

Auch im dreidimensionalen Fall ist die notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials von F genau dann erfüllt, wenn die Rotation verschwindet,

$$DF = DF^T \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot } F = \vec{0}.$$

20.6 Regeln:

- Divergenz und Rotation sind linear,

$$\text{div}(\alpha F \pm G) = \alpha \text{div } F \pm \text{div } G, \quad \text{rot}(\alpha F \pm G) = \alpha \text{rot } F \pm \text{rot } G$$

- Für eine skalare Funktion f und ein Vektorfeld G gilt die Produktregel,

$$\text{div}(fG) = \nabla f \cdot G + f \text{div } G, \quad \text{rot}(fG) = \nabla f \times G + f \text{rot } G.$$

- Rotationsfelder sind divergenzfrei,

$$\text{div } \text{rot } F = 0.$$

- Gradientenfelder sind rotationsfrei,

$$\text{rot } \nabla f = \vec{0}.$$

Unter en.wikipedia.org/wiki/Vector_calculus_identities findet sich eine lange Liste weiterer nützlicher Identitäten.

20.7 Der Integralsatz von Gauß: Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand ∂G und $V : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann gilt für den Fluss von V durch ∂G von innen nach außen

$$\Phi_{\partial G}(V) = \int_{\partial G} V \cdot N = \int_G \operatorname{div} V.$$

Dies ist genau die bereits aus dem ebenen Fall bekannte Formel. *Merke nochmals:* Der Fluss durch den Rand ist gleich dem Gebietsintegral über die Divergenz.

Der Integralsatz von Gauß besitzt zahlreiche physikalische Anwendungen. Betrachten wir beispielsweise eine inkompressible Flüssigkeit mit Strömungsgeschwindigkeit V , dann fließt durch die Randfläche ∂G genauso viel in das Gebiet G hinein, wie hinausfließt. Der Fluss ist also insgesamt Null und damit auch $\int_G \operatorname{div} V = 0$. Da dies für jedes beliebige Gebiet gilt, muss V divergenzfrei sein. Wird nun die Flüssigkeit lokal erwärmt oder abgekühlt, so dehnt sie sich dementsprechend aus oder zieht sich zusammen. In diesem Fall ist $\operatorname{div} V \neq 0$. Punkte mit positiver/negativer Divergenz nennt man Quellen/Senken. Nun ist die Gesamtbilanz des Flusses $\Phi_{\partial G}(V)$ durch den Rand gleich dem Integral $\int_G \operatorname{div} V$ über alle Quellen und Senken im Inneren des Gebiets.

20.8 Beispiel:

- Wir berechnen den Fluss $\Phi_{\partial G}(V)$ des Vektorfelds $V(x, y, z) = (z^2, y, 1)$ durch den Rand der Menge $G := \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ von innen nach außen. G ist ein Kegel mit Spitze im Ursprung und kreisförmiger Grundfläche in Höhe $z = 1$. Zur direkten Berechnung des Flusses betrachten wir die Mantelfläche und die Grundfläche getrennt. Eine Parametrisierung des Mantels ist gegeben durch $S_1(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ und wir erhalten

$$\Phi_{S_1}(V) = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{2\pi} \begin{bmatrix} u^2 \\ u \sin v \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ -u \end{bmatrix} dv du = \dots = -2\pi/3.$$

Eine Parametrisierung der Grundfläche ist gegeben durch $S_2(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 1)$ und wir erhalten

$$\Phi_{S_2}(V) = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{2\pi} \begin{bmatrix} 1 \\ u \sin v \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} dv du = \dots = \pi.$$

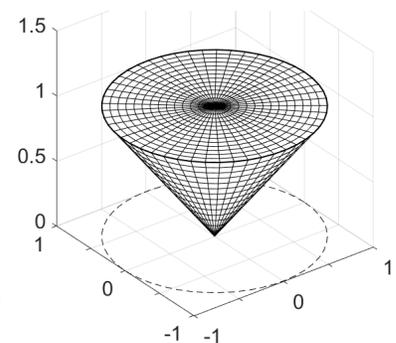
Zusammen ist also $\Phi_{\partial G}(V) = \pi/3$. Andererseits ist $\operatorname{div} V = 1$ und damit nach dem Integralsatz von Gauß

$$\Phi_{\partial G}(V) = \int_G \operatorname{div} V = \int_G 1 = |G|.$$

Die bekannte Formel

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \times \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}$$

für Kegel und Pyramiden aller Art liefert damit ohne aufwändige Integration dasselbe Resultat für den gesuchten Fluss.



- Ein Körper K ist in eine Flüssigkeit mit spezifischem Gewicht γ eingetaucht. Befindet sich der Flüssigkeitsspiegel auf Höhe $x_3 = 0$, dann ist also $x_3 \leq 0$ für alle $\vec{x} \in K$. Auf einen Punkt $\vec{x} \in \partial K$ der Oberfläche des Körpers wirkt nach dem *Pascal'schen Gesetz* der Druck $P(\vec{x}) = (\gamma x_3 - p_0)N$, wobei p_0 der umgebende Luftdruck ist. Damit wirkt auf den Körper die resultierende Kraft

$$F = \int_{\partial K} P = \int_{\partial K} (\gamma x_3 - p_0)N.$$

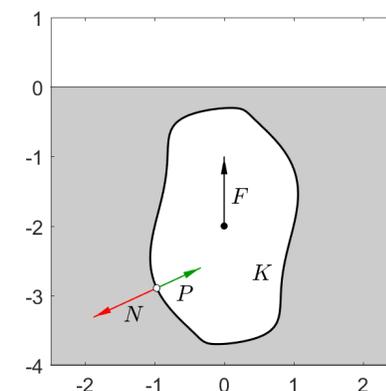
Die Komponente $f_i = F \cdot \vec{e}_i$ der Kraft ergibt sich durch das Skalarprodukt von F mit dem i -ten Einheitsvektor \vec{e}_i . Nach dem Integralsatz von Gauß gilt

$$f_i = \int_{\partial K} (\gamma x_3 - p_0)\vec{e}_i \cdot N = \int_K \operatorname{div}(\gamma x_3 - p_0)\vec{e}_i = \gamma \int_K \partial_i x_3.$$

Mit $\partial_1 x_3 = \partial_2 x_3 = 0$ und $\partial_3 x_3 = 1$ erhalten wir also die Kraft

$$F = \begin{bmatrix} \int_K 0 \\ \int_K 0 \\ \gamma \int_K 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma |K| \end{bmatrix}.$$

Die vertikale Komponente ist das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit und damit genau der Auftrieb nach dem *archimedischen Prinzip*⁷³.



20.9 Der Integralsatz von Green:⁷⁴ Die folgenden Überlegungen spielen in der Theorie der partiellen Differenzialgleichungen eine zentrale Rolle. Für die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ gilt nach der Produktregel

$$\operatorname{div}(g \nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g \operatorname{div} \nabla f.$$

Den Ausdruck $\Delta := \operatorname{div} \nabla$ bezeichnet man als *Laplace-Operator*⁷⁵ und es gilt

$$\Delta f := \operatorname{div} \nabla f = \partial_1^2 f + \cdots + \partial_n^2 f = \operatorname{spur} D^2 f.$$

Nun liefert der Integralsatz von Gauß

$$\int_G \operatorname{div}(g \nabla f) = \int_G (\nabla g \cdot \nabla f + g \Delta f) = \int_{\partial G} g \nabla f \cdot N.$$

Die hier auftretende Richtungsableitung $\nabla_N f = \nabla f \cdot N$ bezeichnet man auch als *Normalenableitung* von f . Stellt man die obige Formel noch etwas um, so erhält man den *Integralsatz von Green*,

$$\int_G \nabla g \cdot \nabla f = \int_{\partial G} g \nabla_N f - \int_G g \Delta f.$$

⁷³Archimedes von Syrakus, ca. 287–212 v. Chr.

⁷⁴George Green, 1793–1841

⁷⁵Pierre-Simon Laplace, 1749–1827

Man beachte die formale Ähnlichkeit zur partiellen Integration im univariaten Fall,

$$\int_a^b g' f' = g f' \Big|_a^b - \int_a^b g f''.$$

Wählt man speziell die konstante Funktion $g = 1$, dann liefert der Integralsatz von Green die Formel

$$\int_G \Delta f = \int_{\partial G} \nabla_N f = \Phi_{\partial G}(\nabla f).$$

Merke: Das Gebietsintegral über den Laplace-Operator ist der Fluss des Gradienten durch den Rand.

20.10 Der Integralsatz von Stokes:⁷⁶ Die Formel $W_{\partial G}(F) = \int_G \operatorname{rot}_2 F$ für das Arbeitsintegral längs einer geschlossenen Kurve im ebenen Fall besitzt ebenfalls eine Verallgemeinerung in den Raum \mathbb{R}^3 . Hierzu betrachten wir eine Flächenparametrisierung $S : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Spur B und nehmen wieder an, dass der Rand von G stückweise glatt ist. Wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, eine Parametrisierung von ∂G ist, dann ist $c(t) := S(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$, eine Parametrisierung des Randes ∂B von B . Im Folgenden kann die Orientierung der Randkurve und des Normalenvektors der Fläche nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Es gelte vielmehr, anschaulich gesprochen, die *Rechte-Hand-Regel*: Wenn der ausgestreckte Daumen der rechten Hand in Richtung der Flächennormale N weist, dann geben die übrigen Finger die Richtung der Randkurve ∂B an. Praktisch lässt sich dies so umsetzen, dass man zur Bestimmung von N die normale Funktion $S^\perp = \partial_1 S \times \partial_2 S$ verwendet und γ wie üblich so orientiert, dass in Kurvenrichtung gesehen das Äußere von G rechts liegt. Wenn N in die Gegenrichtung zeigt, ist auch die Orientierung von γ umzukehren.

Nach dem *Integralsatz von Stokes* gilt nun für ein Vektorfeld F in \mathbb{R}^3

$$W_{\partial B}(F) = \int_{\partial B} F \cdot T = \int_B \operatorname{rot} F \cdot N = \Phi_B(\operatorname{rot} F).$$

Merke: Das Arbeitsintegral längs der Randkurve ist gleich dem Fluss der Rotation durch die Fläche.

Der Zusammenhang mit dem ebenen Fall ist folgendermaßen gegeben: Wie auf Seite 197 sei wieder $F = (f_1, f_2, 0)$ ein Vektorfeld, das nur von x_1 und x_2 abhängt und dessen dritte Komponente verschwindet. Wenn weiterhin die Fläche B ganz in der xy -Ebene liegt, dann ist $N = (0, 0, 1)$ und es gilt somit wie zuvor $W_{\partial B}(F) = \int_B \operatorname{rot} F \cdot N = \int_B \operatorname{rot}_2(f_1, f_2)$.

20.11 Beispiel: Sei $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z \geq 0\}$ die Oberfläche der oberen Hälfte der Einheitskugel und $F(x, y, z) = (0, x, z^2)$. Wir berechnen zunächst das Arbeitsintegral von F längs des Randes $\partial B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 \text{ und } z = 0\}$. Dies ist der Einheitskreis in der xy -Ebene, den wir wie üblich in den Form $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in (0, 2\pi)$ parametrisieren. Wir erhalten

$$W_{\partial B}(F) = \int_{t=0}^{2\pi} F(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} dt = \dots = \pi.$$

⁷⁶George Stokes, 1819–1903

Eine Parametrisierung der Halbkugel ist gegeben durch

$$S(u, v) = \begin{bmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{bmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \pi/2],$$

und die Rotation von F ist $\operatorname{rot} F(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Also ist der Fluss der Rotation durch die Fläche

$$\begin{aligned} \Phi_B(\operatorname{rot} F) &= \int_B \operatorname{rot} F \cdot N = \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\pi/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos u \sin^2 v \\ \sin u \sin^2 v \\ \cos v \sin v \end{bmatrix} dv du \\ &= \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\pi/2} \cos v \sin v dv du = \dots \pi \end{aligned}$$

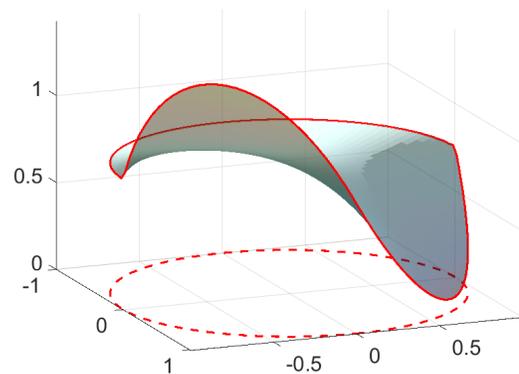
und damit genauso groß, wie das Arbeitsintegral.

20.12 Beispiel: Wir wollen abschließend ein etwas komplexeres Beispiel diskutieren, in dem verschiedene Methoden aus dem behandelten Stoff zum Einsatz kommen und wir den Herren Taylor, Fourier, Gauß, Laplace und Green nochmals begegnen werden.

Wir betrachten eine Seifenhaut, die in eine Drahtschleife eingespannt ist, und nehmen an, dass man ihre Form mithilfe der Parametrisierung

$$S(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}, \quad (u, v) \in G,$$

beschreiben kann. Die gesuchte Fläche ist also der Graph der Funktion f über dem Gebiet G .



Für Punkte $(u, v) \in \partial G$ am Rand des Gebiets liegen die Funktionswerte durch die Form des Drahtes fest. Es gilt also die *Randbedingung*

$$f(u, v) = d(u, v), \quad (u, v) \in \partial G,$$

für eine vorgegebene Funktion d . Im Inneren des Gebiets wird sich die Seifenhaut aufgrund der Oberflächenspannung (bei Vernachlässigung der Schwerkraft) so formen, dass der Flächeninhalt so klein wie möglich ist. Gesucht ist also diejenige Funktion f , für die

$$|S| = \int_G \mu_S = \int_G \|S_u \times S_v\| = \int_G \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$$

unter Einhaltung der Randbedingung minimal wird. Da dieses Problem nichtlinear und deshalb ziemlich schwierig zu lösen ist, sucht man nach einer Vereinfachung. Dazu nehmen wir an, dass die partiellen Ableitungen f_u, f_v betragsmäßig klein und die Seifenhaut damit also fast eben ist. Das quadratische Taylor-Polynom der Funktion $k(x, y) := \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ im

Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ist $T_2k(x, y) = 1 + (x^2 + y^2)/2$. Also erhalten wir mit $x = f_u$ und $y = f_v$ die Näherung

$$\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \approx 1 + \frac{1}{2}(f_u^2 + f_v^2) = 1 + \frac{1}{2} \|\nabla f\|^2.$$

Anstelle des ursprünglichen Minimierungsproblems betrachten wir also dessen Approximation

$$|S| \approx \int_G \left(1 + \frac{1}{2} \|\nabla f\|^2\right) = |G| + \frac{1}{2} \int_G \|\nabla f\|^2 \rightarrow \min.$$

Offensichtlich ist dies äquivalent dazu, eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ zu finden, welche die Randbedingung einhält und für die das Funktional

$$J(f) := \int_G \|\nabla f\|^2$$

minimal ist. Der Unterschied zu bekannten Minimierungsproblemen besteht darin, dass nicht eine endliche Zahl von Argumenten zu bestimmen ist, sondern eine komplette Funktion. Man nennt eine solche Aufgabe auch *Variationsproblem*.

Sei f die gesuchte Funktion und $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige weitere Funktion, die auf dem Rand verschwindet, also $g(u, v) = 0$ für $(u, v) \in \partial G$. Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir nun die neue Funktion $f + tg$. Diese erfüllt die Randbedingung und liefert deshalb keinen kleineren Funktionalwert als f , das heißt $J(f) \leq J(f + tg)$. Halten wir für den Augenblick die Funktion g fest, dann ist also

$$J(f + tg) - J(f) = \int_G (\|\nabla(f + tg)\|^2 - \|\nabla f\|^2) = 2t \int_G \nabla f \cdot \nabla g + t^2 \int_G \|\nabla g\|^2$$

eine quadratische Funktion in t , die keine negativen Werte annimmt. Dies ist nur möglich, wenn der lineare Term $2t \int_G \nabla f \cdot \nabla g$ verschwindet. Da g auf dem Rand Null ist, gilt deshalb nach dem Satz von Green

$$0 = \int_G \nabla f \cdot \nabla g = \int_{\partial G} g \nabla f - \int_G g \Delta f = - \int_G g \Delta f.$$

Der letzte Term kann für beliebige Funktionen g nur dann Null sein, wenn der zweite Faktor Δf verschwindet. Die *Laplace-Gleichung*

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$$

ist also eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Minimums und man kann zeigen, dass diese auch hinreichend ist. Gleichungen dieser Art nennt man *partielle Differenzialgleichungen*.

Wir sind damit zwar einen Schritt weiter, kennen die gesuchte Funktion f aber immer noch nicht. Wir betrachten nun den Spezialfall, dass das Gebiet G die Einheitskreisscheibe ist. In diesem Fall bietet es sich an, die Funktion f in Polarkoordinaten darzustellen,

$$p(r, \varphi) := f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad r \in [0, 1], \quad \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Damit ist die Funktion p für jeden festen Wert von r eine 2π -periodische Funktion in der Winkelvariablen φ und kann damit in eine Fourier-Reihe entwickelt werden, deren Koeffizienten von r abhängen,

$$p(r, \varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r) \sin n\varphi.$$

Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Randbedingung und damit auch die gesuchte Lösung ungerade bezüglich der x -Achse ist. Dann ist p für jedes feste r eine ungerade Funktion in φ und somit $a_n(r) = 0$.

Nun muss die Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ in eine Bedingung für die Funktion p umgeschrieben werden. Mithilfe der Kettenregel findet man

$$\Delta f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{rr} + \frac{p_r}{r} + \frac{p_{\varphi\varphi}}{r^2} = 0.$$

Wir setzen den Fourier-Ansatz für p in die Gleichung rechts ein und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n''(r) + b_n'(r)/r - b_n(r)n^2/r^2 \right) \sin n\varphi = 0.$$

Auf der linken Seite steht wieder eine Fourier-Reihe, die genau dann verschwindet, wenn alle Koeffizienten Null sind. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$b_n''(r) + b_n'(r)/r - b_n(r)n^2/r^2 = 0.$$

Wie man leicht nachrechnet, erfüllt die Funktion

$$b_n(r) = \alpha_n r^{-n} + \beta_n r^n$$

für beliebige Konstanten $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ diese Gleichung und man kann zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Für $\alpha_n \neq 0$ ist die Funktion $b_n(r)$ und damit auch die gesuchte Lösung g unbeschränkt, was keinen Sinn ergibt. Es ist also $\alpha_n = 0$. Zur Bestimmung von β_n betrachten wir die Randbedingung

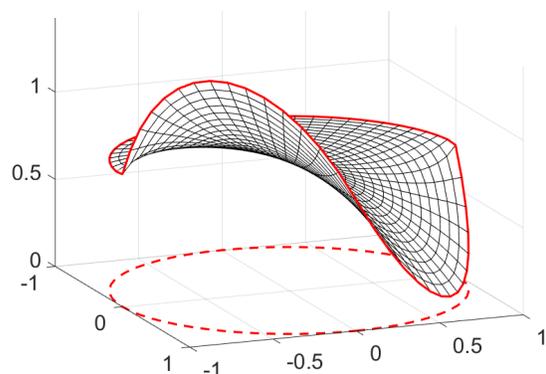
$$p(1, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\varphi = d(\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Die β_n sind also die Fourier-Koeffizienten der Funktion $d(\cos \varphi, \sin \varphi)$ und lassen sich wie in Abschnitt 14.5 angeben berechnen,

$$\beta_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Wir erhalten damit schließlich für die gesuchte Lösung die Reihendarstellung

$$p(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n r^n \sin n\varphi.$$



Im Allgemeinen wird man für die gesuchte Fläche aber keine explizite Formel finden können. Stattdessen begnügt man sich dann meist mit einer numerischen Approximation. Wir skizzieren hierzu ein Verfahren, das darauf beruht, die in der Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ auftretenden Ableitungen näherungsweise durch Differenzenquotienten zu ersetzen. Nehmen wir dazu der Einfachheit halber an, dass das Gebiet $G = [0, 1]^2$ das Einheitsquadrat ist. Dann unterteilen wir dieses in ein Gitter mit $n \times n$ Maschen und betrachten nur noch die Funktionswerte an Gitterpunkten,

$$f_{i,j} := f(i/n, j/n), \quad i, j = 0, \dots, n.$$

Für alle Punkte im Inneren von G ist die Gleichung $\Delta f = 0$ näherungsweise zu realisieren. Dazu überlegt man sich Folgendes: Die Ableitung der Funktion $z(t)$ an den Stellen $t_0 \pm h/2$ lässt sich mithilfe des Differenzenquotienten für kleines h annähern durch

$$z'(t_0 + h/2) \approx \frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h}, \quad z'(t_0 - h/2) \approx \frac{z(t_0) - z(t_0 - h)}{h}.$$

Nochmaliges Bilden eines Differenzenquotienten führt auf

$$z''(t_0) \approx \frac{z'(t_0 + h/2) - z'(t_0 - h/2)}{h} \approx \frac{z(t_0 + h) + z(t_0 - h) - 2z(t_0)}{h^2}.$$

Wendet man diese Formel auf $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ in beide Koordinatenrichtungen an, dann erhält man mit $h := 1/n$ die Näherung

$$\Delta f(i/n, j/n) \approx \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}}{h^2}.$$

Der Ausdruck rechts soll also verschwinden. Durch die Randvorgabe $f = d$ kennen wir außerdem die Werte $f_{i,j}$ am Rand und erhalten somit das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j} = 0 & \text{für } i, j = 1, \dots, n-1 \\ f_{i,j} = d(i/n, j/n) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies sind $(n+1)^2$ Gleichungen für die $(n+1)^2$ Unbekannten $f_{i,j}$ und man kann zeigen, dass dieses System eindeutig lösbar ist. Der Gauß-Algorithmus liefert hier also prinzipiell Ergebnisse, doch stößt man damit selbst auf schnellen Rechnern für großes n rasch an Grenzen hinsichtlich Rechenzeit und -genauigkeit. Es gibt aber alternative Lösungsverfahren, mit denen man selbst Millionen von Gleichungen für Millionen von Unbekannte oft noch sinnvoll lösen kann.

