

**Skript zur Vorlesung**  
**Analysis III – Gewöhnliche**  
**Differentialgleichungen**

**Wintersemester 2016/17**

Robert Haller-Dintelmann

22. März 2017



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>iii</b>
<b>1 Problemstellung und Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2 Zentrale Begriffsbildungen</b>	<b>7</b>
<b>3 Trennung der Variablen</b>	<b>13</b>
<b>4 Existenz von Lösungen – Der Satz von Peano</b>	<b>23</b>
<b>5 Eindeutige Lösungen – Der Satz von Picard-Lindelöf</b>	<b>31</b>
<b>6 Explizite Gleichungen höherer Ordnung</b>	<b>45</b>
<b>7 Lineare Differentialgleichungen</b>	<b>49</b>
<b>8 Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten</b>	<b>63</b>
<b>9 Stabilitätstheorie autonomer Gleichungen</b>	<b>73</b>
<b>10 Lyapunov-Stabilität</b>	<b>83</b>
<b>Index</b>	<b>89</b>



# Einleitung

Die mathematische Modellierung sehr vieler Phänomene in den Natur- und Ingenieurwissenschaften, sowie den Wirtschaftswissenschaften, um nur einige wichtige Bereiche zu nennen, führt am Ende auf eine oder mehrere Differentialgleichungen. Das beginnt bei einfachen Wachstumsmodellen und beinhaltet die gesamte klassische Mechanik, worunter z. B. die Berechnung von Planeten- oder Satellitenbahnen fällt. Wir finden Differentialgleichungen in der mathematischen Biologie, z. B. in Räuber-Beute-Modellen, und am Ende ist auch jede Wettervorhersage die (angenäherte) Lösung eines sehr komplexen Systems von Differentialgleichungen. Wegen dieser Bedeutung waren die Fragen, die die Behandlung von Differentialgleichungen mit sich bringen, eine, wenn nicht die, entscheidende Triebkraft zur Entwicklung der Analysis und auch heute noch bilden sie einen ihrer Hauptanwendungsbereiche und befeuern die weitere Entwicklung.

Wir wollen uns in dieser Vorlesung mit der „einfachsten“ Form von Differentialgleichungen, den sogenannten *gewöhnlichen Differentialgleichungen* beschäftigen. Diese haben eine sehr gut entwickelte und schöne Lösungstheorie, die sich gut mit Hilfe der in den bisherigen Grundvorlesungen vermittelten Methoden darstellen lässt.

Wir beginnen im ersten Kapitel mit einigen motivierenden Beispielen, die auch zeigen sollen, wie Differentialgleichungen in der Beschreibung natürlicher Vorgänge ganz natürlich auftauchen. Dann werden in Kapitel 2 zunächst die verwendeten grundlegenden Begrifflichkeiten, wie „Differentialgleichung“, „Anfangswertproblem“ und „Lösung“ eingeführt, bevor wir in Kapitel 3 eine erste Sorte von konkreten Differentialgleichungen kennenlernen, die sich unter Umständen explizit lösen lassen.

Zwei Kernkapitel der Vorlesung sind die Abschnitte 4 und 5, in denen die Lösbarkeit (Satz von Peano), bzw. die eindeutige Lösbarkeit (Satz von Picard-Lindelöf) von Differentialgleichungen behandelt wird. Diese wird zunächst für die übersichtlicheren Gleichungen erster Ordnung entwickelt und dann im Kapitel 6 auf Gleichungen höherer Ordnung verallgemeinert.

Die Abschnitte 7 und 8 stehen dann ganz im Zeichen von linearen Differentialgleichungen. Diese extrem wichtige Klasse umfasst einige elementare Differentialgleichungen aus der Physik und Mechanik, z. B. den harmonischen Oszillator. Vor allem hat sie aber den Vorteil, dass sehr viel über die Struktur der Lösungen ausgesagt werden kann und in einigen Fällen sogar explizite Lösungsformeln existieren. Die linearen Differentialgleichungen dienen deshalb immer wieder als Referenzprobleme, auf die man kompliziertere Fragestellungen zurückzuführen

## *Inhaltsverzeichnis*

versucht oder deren Lösungen als Näherungslösungen herangezogen werden. Schließlich gibt es einen letzten großen Block der Vorlesung, in dem es um das qualitative Verhalten von Lösungen geht, genauer um das Langzeitverhalten globaler Lösungen. Wir entwickeln zunächst im Kapitel 9 die grundlegenden Begriffe wie stabiles und instabiles Gleichgewicht und geben dann mit dem Satz von der linearisierten Stabilität ein Kriterium an, das in vielen Fällen das Stabilitätsverhalten allgemeiner autonomer Gleichungen auf die Untersuchung eines assoziierten linearen Problems zurückspielt, für das die entsprechenden Fragen leicht zu beantworten sind. Im anschließenden Kapitel 10 gehen wir dann noch kurz auf das Stabilitätsresultat von Lyapunov ein.

Im Verlauf der Vorlesung werden Sie merken, dass wir für die Behandlung der Differentialgleichungen so ziemlich auf alles zurückgreifen werden, was Sie in den vergangenen zwei Semestern in den Vorlesungen zur Analysis und zur linearen Algebra gesehen haben. Wir werden natürlich viel differenzieren und integrieren, aber wir werden auch den genauen Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz brauchen, den Banachschen Fixpunktsatz in seiner vollen Stärke nutzen, Sie werden einige Eigenwerte und Eigenvektoren sehen und auch die bisher vielleicht etwas rätselhafte Jordan-Normalform wird einen starken Auftritt haben.

So wird diese Vorlesung hoffentlich helfen, dass Sie einige bisher abstrakt gebliebene Konzepte aus den bisherigen Grundvorlesungen mit ein bisschen Leben füllen können. Aber vor allem soll sie zeigen was für ein spannendes und herausforderndes Thema Differentialgleichungen sind.

# 1 Problemstellung und Motivation

Die Beispiele in diesem Abschnitt sollen zum Einen zeigen wie Differentialgleichungen ganz natürlich als modellhafte Beschreibung der Realität entstehen und zum Anderen werden sie in der weiteren Vorlesung immer wieder als typische Beispiele herangezogen werden.

Wir beginnen mit einem ganz einfachen Beispiel.

**Beispiel 1.1.** (Einfaches Wachstumsmodell)

Wir betrachten die Größe einer Population, z. B. von Bakterien in einer Petrischale, als Funktion der Zeit  $t$  und nennen diese  $y(t)$ . Zu jeder Zeit  $t \geq 0$  bezeichnet also  $y(t)$  die Größe unserer Population. Unsere einfache Modellierungsannahme ist nun, dass zu jedem Moment der Zuwachs der Population, also die Ableitung der Funktion  $y$ , proportional ist zur momentanen Größe der Population, d. h. dem Wert  $y(t)$ . Das führt auf den Zusammenhang

$$y'(t) = \mu y(t), \quad t \geq 0,$$

wobei  $\mu$  die Proportionalitätskonstante ist, welche in diesem Fall üblicherweise *Wachstumsrate* genannt wird.

Diese Gleichung ist so einfach, dass sich noch einige Lösungen erraten lassen. So ist z. B. die konstante Nullfunktion eine Lösung und auch  $y(t) = e^{\mu t}$  liefert eine Lösung. Außerdem ist für jede Konstante  $C \in \mathbb{R}$  auch die Funktion  $y(t) = Ce^{\mu t}$  eine Lösung. (Wobei wir für  $C = 0$  natürlich wieder bei der Nullfunktion sind.) Das verifiziert man im Zweifelsfall durch einfaches Nachrechnen, denn es ist für diese Funktionen

$$y'(t) = \frac{d}{dt}(Ce^{\mu t}) = C\mu e^{\mu t} = \mu y(t).$$

Eine naheliegende Frage ist, ob das nun alle Lösungen sind. Das ist tatsächlich der Fall, wie man mit dem folgenden oft nützlichen Trick nachweisen kann: Es sei  $u : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung unserer einfachen Wachstumsgleichung. Dann gilt unter Verwendung, dass  $u$  eine Lösung ist,

$$\frac{d}{dt}(u(t)e^{-\mu t}) = u'(t)e^{-\mu t} - u(t)\mu e^{-\mu t} = \mu u(t)e^{-\mu t} - \mu u(t)e^{-\mu t} = 0.$$

Also gibt es eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$  mit  $u(t)e^{-\mu t} = C$ , d. h. es ist  $u(t) = Ce^{\mu t}$ .

**Bemerkung 1.2.** Die Konstante  $C$  in Beispiel 1.1 ist nicht nur ein mathematisches Artefakt, sondern hat auch im zugrundeliegenden Modell eine Bedeutung.

## 1 Problemstellung und Motivation

Es ist nämlich  $u(0) = Ce^{0t} = C$ , sodass  $C$  der Populationsgröße zum Startzeitpunkt  $t = 0$  entspricht. Man spricht deshalb auch vom *Startwert* oder noch häufiger *Anfangswert* der Differentialgleichung.

### Beispiel 1.3. (Logistisches Wachstumsmodell)

Das Ergebnis von Beispiel 1.1 ist, dass die Größe der Population exponentiell wächst. Das ist kein Wunder, denn unser Modell (Zuwachs proportional zur Populationsgröße) legt dem Wachstum keinerlei Begrenzung auf. Das ist in einer Situation begrenzter Ressourcen, z. B. wenn die Petrischale schon fast voll ist, keine realistische Annahme, sodass dann die Lösung der Gleichung das reale Wachstum nicht mehr adäquat beschreibt. Wir müssen also in diesem Fall unser Modell verfeinern.

Eine Möglichkeit ist es, eine maximale Grenzpopulation zu postulieren, die wir der Bequemlichkeit halber auf Eins (= 100%) setzen, sodass unsere Funktion  $y$  nun nicht mehr die absolute Größe der Population beschreibt, sondern die relative Größe verglichen mit der Maximalpopulation. Die verfeinerten Modellierungsannahmen sind nun, dass der Zuwachs der Population weiter proportional zur Größe der Population, aber gleichzeitig auch proportional zum verbleibenden Platz, also zu  $1 - y(t)$  ist. Das führt auf die neue Differentialgleichung

$$y'(t) = \mu y(t)(1 - y(t)), \quad t \geq 0.$$

Diese Differentialgleichung ist als Gleichung des *logistischen Wachstums* bekannt. Hier springen die Lösungen nun nicht mehr so direkt ins Auge wie beim einfachen Wachstumsmodell. Wir werden aber auch diese Gleichung im Verlauf des nächsten Kapitels lösen können.

### Beispiel 1.4. (Freier Fall)

Das nächste Beispiel kommt aus der Physik. Wir betrachten den freien Fall auf der Erde. Dabei sei  $s(t)$  der Abstand des Körpers zur Erde zur Zeit  $t$ . Dann ist  $s'(t)$  (in der Physik üblicherweise  $\dot{s}(t)$ , da es sich hier um eine Zeitableitung handelt) die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit  $t$  und  $s''(t)$ , bzw.  $\ddot{s}(t)$ , seine Beschleunigung. Diese ist durch die Gravitation konstant  $-g$  mit<sup>1</sup>  $g \approx 9,81\text{m/s}^2$ , sodass wir die Differentialgleichung

$$s''(t) = -g, \quad t \geq 0,$$

erhalten.

Das ist die vom Typ her einfachste Differentialgleichung, denn hier taucht nur eine einzige Ableitung der gesuchten Funktion  $s$  auf und nicht die Funktion  $s$  selbst. Eine solche Gleichung können wir einfach lösen, indem wir mit Hilfe des

---

<sup>1</sup>Das Minuszeichen kommt daher, dass die Kraft der positiven Flugrichtung entgegenwirkt.

Hauptsatzes zwei Mal hochintegrieren:

$$\begin{aligned}s'(t) &= s'(0) + \int_0^t s''(\tau) \, d\tau = s'(0) - \int_0^t g \, d\tau = s'(0) - gt \quad \text{und} \\ s(t) &= s(0) + \int_0^t s'(\tau) \, d\tau = s(0) + s'(0)t - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

Lösungen sind also die Funktionen der Form  $s(t) = C_0 + C_1t - \frac{1}{2}gt^2$  mit beliebigen Konstanten  $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$ . Dass wir nun zwei frei wählbare Konstanten und nicht wie beim Wachstumsmodell nur eine bekommen, liegt daran, dass in dieser Differentialgleichung zweite Ableitungen auftauchen. Man sagt die Gleichung ist von zweiter *Ordnung*. Aber auch in diesem Fall haben diese beiden Konstanten eine Bedeutung für das Modell, in diesem Fall also eine physikalische: Wie wir oben gesehen haben ist  $C_0 = s(0)$ , d. h.  $C_0$  ist der Startpunkt unseres Körpers zur Zeit  $t = 0$  und  $C_1 = s'(0)$  die Startgeschwindigkeit. Auch hier werden die frei wählbaren Konstanten also durch die Wahl des Anfangszustandes festgelegt.

**Beispiel 1.5.** (Freier Fall aus dem Weltall)

Wieder ist das Modell des freien Falls im letzten Beispiel nur unter sehr speziellen Bedingungen anwendbar. Es passt z. B. gut auf einen Eiszapfen, der von einem Dach fällt, versagt allerdings, wenn der Körper aus den Tiefen des Weltalls kommt. Denn dann ist die Erdgravitation nicht konstant, sondern nimmt mit zunehmendem Abstand von der Erde ab.

Um das zu modellieren, sei ab jetzt  $s(t)$  der Abstand unseres Körpers vom Erdmittelpunkt zur Zeit  $t \geq 0$ . Dann verwenden wir das Newton'sche Gravitationsgesetz, das besagt, dass zwei Massen  $M$  und  $m$  im Abstand  $d$  sich mit einer Kraft  $F$  anziehen, die durch

$$F = \gamma \frac{Mm}{d^2}$$

mit der Gravitationskonstante  $\gamma$  gegeben ist. Wir nehmen  $M$  als die Erdmasse und  $m$  als die Masse unseres fallenden Körpers. Dann ist der Abstand der beiden zum Zeitpunkt  $t$  gerade gegeben durch unsere Funktion  $s(t)$ . Außerdem ist nach der Grundformel der Mechanik (Kraft ist Masse mal Beschleunigung) mit dem gleichen Minuszeichen wie oben

$$ms''(t) = -F = -\gamma \frac{Mm}{s(t)^2}, \quad t \geq 0,$$

und wir erhalten die Differentialgleichung

$$s''(t) = -\gamma \frac{M}{s(t)^2}, \quad t \geq 0.$$

Auch diese Gleichung kann mit den Methoden des nächsten Kapitels gelöst werden.

## 1 Problemstellung und Motivation

Natürlich lässt sich auch an diesem Modell noch heftig herumäkeln, denn es vernachlässigt die Gravitationseffekte von Mond, Sonne, Jupiter, . . . , Pluto, . . . . Sie sind herzlich eingeladen, das Modell weiter zu verfeinern und die Weltformel für alle zukünftigen Weltraumflüge zu finden. Bevor Sie allerdings daran verzweifeln, befragen Sie die Suchmaschine Ihres Vertrauens, Wikipedia o.ä. zum Thema *Dreikörperproblem* . . .

**Bemerkung 1.6.** Ich hoffe, die bisherigen Beispiele machen schon klar, dass die Beschreibung eines Phänomens der realen Welt durch eine Differentialgleichung immer eine Modellierung ist und dabei Modellierungsannahmen erfordert. Die Ergebnisse, die man dann aus der Gleichung bekommen kann, sind immer nur so gut, wie die Modellierungsannahmen nahe an der Realität sind. Wenn man also seltsame Ergebnisse bekommt, lohnt es sich darüber nachzudenken, ob die Modellierungsannahmen noch erfüllt sind. Allzu oft wird leider in einem solchen Fall die Realität umdefiniert und an die Ergebnisse der Modellrechnungen angepasst. Das ist keine saubere Anwendung der Mathematik mehr, sondern im besten Falle Selbstbetrug und schlimmstenfalls Weltbetrug.

**Beispiel 1.7.** (Lotka-Volterra-Gleichungen)

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch einen kurzen Ausflug in die mathematische Biologie zu einem einfachen Räuber-Beute-Modell machen. Wir betrachten nur zwei Spezies: eine Beute und einen Räuber. Die beiden betrachteten Größen sind

$y_1(t)$  : Populationsgröße des Beutetiers,

$y_2(t)$  : Populationsgröße des Raubtiers.

Unsere Modellierungsannahmen für die Beutetiere sind, dass diese sich nach dem einfachen Wachstumsmodell mit einer Geburtenrate  $\alpha > 0$  vermehren und proportional zur Größe der Räuberpopulation mit einer Sterberate  $\beta y_2(t)$  mit  $\beta > 0$  sterben. Das ergibt für die Funktion  $y_1$  die Gleichung

$$y_1'(t) = \alpha y_1(t) - \beta y_2(t) y_1(t), \quad t \geq 0,$$

die natürlich von der Größe der Räuberpopulation  $y_2$  abhängt.

Für die Räuberspezies nehmen wir an, dass sie mit einer konstanten Sterberate  $\gamma > 0$  stirbt und sich umso stärker vermehrt, je mehr Beute es gibt, d. h. dass die Wachstumsrate zur Zeit  $t$  gegeben ist durch  $\delta y_1(t)$  mit einer Konstanten  $\delta > 0$ . Das ergibt für  $y_2$  die Gleichung

$$y_2'(t) = -\gamma y_2(t) + \delta y_1(t) y_2(t), \quad t \geq 0,$$

die nun wiederum natürlicherweise von  $y_1$  abhängt.

Auf diese Weise erhalten wir das erste Beispiel eines sogenannten *Systems* von Differentialgleichungen, die sogenannten Lotka-Volterra-Gleichungen:

$$\begin{cases} y_1'(t) &= \alpha y_1(t) - \beta y_2(t)y_1(t), \\ y_2'(t) &= -\gamma y_2(t) + \delta y_1(t)y_2(t), \end{cases} \quad t \geq 0.$$

Hier kann jeweils die eine der beiden Größen gut bestimmt werden, wenn die andere bekannt ist, aber das große Problem liegt eben üblicherweise in der Kopplung der beiden. Wir werden im weiteren Verlauf der Vorlesung auf dieses System zurückkommen, aber es kann schon jetzt verraten werden, dass es dabei nicht mehr darum gehen wird, dieses explizit zu lösen, denn ein solches formelhaftes Lösen ist schon in diesem relativ einfachen Beispiel im Allgemeinen nicht mehr möglich. Trotzdem kann man auch ohne Kenntnis der genauen Lösung noch sehr viel qualitative Information über das Verhalten der Lösung bekommen, vgl. Kapitel 9 und 10.



## 2 Zentrale Begriffsbildungen

In diesem Kapitel wollen wir die späteren Betrachtungen auf ein solides Fundament stellen und genau definieren, was wir unter einer Differentialgleichung verstehen und was genau gemeint ist, wenn wir von einer Lösung reden.

Zunächst legen wir für die gesamte Vorlesung fest, dass mit einem Intervall in  $\mathbb{R}$  immer ein echtes Intervall, d. h. mit mindestens zwei verschiedenen Elementen gemeint ist.

**Definition 2.1.** (a) Es seien  $d, k, n \in \mathbb{N}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $D \subseteq I \times (\mathbb{R}^d)^{n+1}$  und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine Funktion. Dann heißt

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \quad t \in I,$$

gewöhnliche Differentialgleichung (DGL). Hierbei ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  die gesuchte Funktion.

(b) Die Zahl  $n$  der höchsten in der DGL auftauchenden Ableitung der Funktion  $y$  heißt Ordnung der DGL.

(c) Eine DGL heißt

- skalar, wenn  $d = 1$  ist.
- autonom, falls  $F$  nicht von der ersten Variablen  $(t)$  abhängt.
- explizit, wenn man die Gleichung nach der Ableitung höchster Ordnung auflösen kann, d. h., wenn man sie in der Form

$$y^{(n)}(t) = \tilde{F}(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

mit einer Funktion  $\tilde{F} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $\tilde{D} \subseteq I \times (\mathbb{R}^d)^n$  schreiben kann.

**Bemerkung 2.2.** (a) Die Funktion  $F$  in der Definition der DGL beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen der gesuchten Funktion  $y$  und ihren Ableitungen, der die DGL ausmacht. Dass die Werte von  $y$  in  $\mathbb{R}^d$  und nicht nur in  $\mathbb{R}$  liegen dürfen, ist eine nötige Allgemeinheit, um auch den Fall von Systemen, vgl. Beispiel 1.7, durch die Definition abzudecken.

(b) Der wichtigste Spezialfall von DGLen ist der von expliziten Gleichungen erster Ordnung. In diesem Fall schreibt man meist ein kleines  $f$  statt des großen  $\tilde{F}$  und erhält deren allgemeine Form als

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I, \quad (2.1)$$

## 2 Zentrale Begriffsbildungen

mit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $D \subseteq I \times \mathbb{R}^d$ .

Diese besondere Bedeutung bekommen die Gleichungen erster Ordnung nicht dadurch, dass sie besonders oft vorkommen. Tatsächlich sind vor allem in der Physik Gleichungen der Ordnung zwei der Normalfall. Vielmehr kann man sich auf Gleichungen erster Ordnung zurückziehen, da es ein äußerst allgemeines Verfahren gibt, das es erlaubt, jede DGL höherer Ordnung in ein System von Gleichungen erster Ordnung umzuschreiben, vgl. Kapitel 6. In diesem Sinne enthalten die DGLen erster Ordnung schon alle DGLen höherer Ordnung.

Wir werden deshalb im Folgenden im Wesentlichen nur Gleichungen erster Ordnung behandeln. Das hat auch den großen Vorteil, dass alles notationell deutlich übersichtlicher wird.

- (c) Da Notationen bei der Beschreibung von DGLen trotzdem ein nervenaufreibendes Thema sind, haben sich schon beim Hinschreiben einer DGL einige schlampige Notationen eingebürgert, die oft praktisch sind. So schreibt man statt (2.1) oft unter Weglassung des Arguments nur  $y'(t) = f(t, y)$  oder sogar  $y' = f(t, y)$ . Man muss dann eben wissen, dass  $y$  immer eine Funktion von der Variablen  $t$  ist. Das führt dann z. B. zu solchen Gleichungen:  $y^{(4)} - 3y''' - 2y'' - y' - y = \sin(t)$ .

**Beispiel 2.3.** Wir betrachten nochmal die Beispiele aus Kapitel 1 im Lichte dieser neuen Begriffe.

- (a) Die DGL des einfachen Wachstums, vgl. Beispiel 1.1, ist  $y'(t) = \mu y(t)$ . Das ist eine skalare, explizite, autonome Gleichung erster Ordnung mit  $f(t, y) = f(y) = \mu y$ .
- (b) Das logistische Wachstum, vgl. Beispiel 1.3, hat die Gleichung  $y'(t) = \mu y(t)(1 - y(t))$ . Das ist eine skalare, explizite und autonome Gleichung erster Ordnung mit  $f(t, y) = f(y) = \mu y(1 - y)$ .
- (c) Im ersten Beispiel 1.4 zum freien Fall haben wir es bei der Gleichung  $y''(t) = -g$  wieder mit einer skalaren, expliziten und autonomen DGL zu tun, die aber nun von zweiter Ordnung ist. Hier ist in obiger Notation die Funktion  $\tilde{F}(t, y, y') = -g$  konstant.
- (d) Auch der freie Fall aus dem Weltraum führt mit  $y''(t) = -\gamma M/y(t)^2$ , siehe Beispiel 1.5, auf eine skalare, explizite und autonome DGL zweiter Ordnung. Hier ist  $\tilde{F}(t, y, y') = -\gamma M/y^2$ .
- (e) Schließlich ist das Lotka-Volterra-System aus Beispiel 1.7 ein explizites und autonomes System erster Ordnung mit 2 Komponenten, also in obiger No-

tation  $d = 2$ . Mit  $y = (y_1, y_2)$  ist die zugehörige Funktion  $\tilde{F}$  gegeben durch

$$\tilde{F}(t, y) = \begin{pmatrix} \alpha y_1 - \beta y_2 y_1 \\ -\gamma y_2 + \delta y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, werden DGLen oft mit Anfangsbedingungen komplementiert. Den formalen Begriff dazu führen wir für explizite DGLen ein.

**Definition 2.4.** Seien  $d, n \in \mathbb{N}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $D \subseteq I \times (\mathbb{R}^d)^n$  und  $\tilde{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Funktion. Sind ein  $t_0 \in I$  und Werte  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}^d$  mit  $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$  gegeben, so nennt man

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = \tilde{F}(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), & t \in I, \\ y^{(j)}(t_0) = y_j, & j = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

Anfangswertproblem (AWP) und  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  heißen Anfangswerte.

Von nun an werden wir uns, wie schon angekündigt, für einige Zeit auf explizite DGLen erster Ordnung beschränken, d. h. wir werden DGLen der Form

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I, \quad (2.2)$$

bzw. Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

betrachten.

Als Nächstes wollen wir für diese noch den Begriff der Lösung exakt einführen.

**Definition 2.5.** Betrachte für ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , eine Menge  $D \subseteq I \times \mathbb{R}^d$ , eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ , einen Anfangszeitpunkt  $t_0 \in I$  und einen Anfangswert  $y_0 \in \mathbb{R}^d$  mit  $(t_0, y_0) \in D$  die DGL aus (2.2), bzw. das Anfangswertproblem aus (2.3).

(a) Eine Funktion  $u : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt Lösung der DGL, falls

- $J \subseteq I$  ein Intervall ist,
- $u$  stetig differenzierbar in  $J$  ist,
- $(t, u(t)) \in D$  für alle  $t \in J$  ist und
- $u'(t) = f(t, u(t))$  für alle  $t \in J$  gilt.

(b) Gilt zusätzlich

- $t_0 \in J$  und

## 2 Zentrale Begriffsbildungen

- $u(t_0) = y_0$ ,

so heißt  $u$  Lösung des Anfangswertproblems.

- (c) Ist  $\tilde{u} : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^d$  ebenfalls eine Lösung der DGL, bzw. des Anfangswertproblems mit  $J \subseteq \tilde{J}$  und  $\tilde{u}|_J = u$ , so heißt  $\tilde{u}$  eine Fortsetzung von  $u$ .
- (d) Eine Lösung  $u$  auf einem Intervall  $J$  heißt maximale Lösung, falls es keine echte Fortsetzung von  $u$  gibt, d. h. für jede Fortsetzung  $\tilde{u} : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}^d$  von  $u$  gilt  $\tilde{J} = J$  und  $\tilde{u} = u$ . In diesem Fall heißt  $J$  maximales Existenzintervall der Lösung.
- (e) Ist  $J = I$ , so heißt  $u$  globale Lösung und im Fall  $J \subsetneq I$  spricht man oft von einer lokalen Lösung.

**Bemerkung 2.6.** (a) Zwei Lösungen einer DGL oder eines Anfangswertproblems, von denen die eine eine Fortsetzung der anderen ist, werden üblicherweise nicht als verschiedene Lösungen angesehen, obwohl sie formal zweifelsohne verschiedene Lösungsfunktionen sind. In diesem Sinne ist es auch immer zu verstehen, wenn im weiteren Verlauf der Vorlesung von „eindeutiger Lösung“ die Rede ist: Zwei Lösungen unterscheiden sich dann höchstens durch Einschränkung bzw. Fortsetzung voneinander.

- (b) In der obigen Definition mag es auf den ersten Blick befremdlich wirken, warum das Intervall  $J$  eingeführt wird. Warum suchen wir die Lösung nicht auf ganz  $I$ ? Die Antwort ist ganz einfach: Weil das im Allgemeinen nicht gutgeht. Zur Illustration betrachten wir das folgende Beispiel.

**Beispiel 2.7.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t)^2, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

mit  $I = \mathbb{R}$ . Eine Lösung dieses Problems ist die Tangensfunktion, denn es ist  $\tan(0) = 0$  und die Ableitung des Tangens ist  $1 + \tan^2$ . Aber die Tangensfunktion ist um den Startzeitpunkt  $t_0 = 0$  nur auf dem Intervall  $(-\pi/2, \pi/2)$  differenzierbar, unsere Lösung hört also in  $t = \pi/2$  auf zu existieren. Dabei war die Gleichung auf ganz  $\mathbb{R}$  gestellt! Hier fallen also  $I = \mathbb{R}$  und maximales Existenzintervall  $J = (-\pi/2, \pi/2)$  auseinander. Das Problem lässt sich auch nicht irgendwie umgehen, denn wie wir später sehen werden, ist dieses Anfangswertproblem eindeutig lösbar.

Hier passiert Folgendes: Am Nullpunkt ist die Lösung Null, aber wegen der Differentialgleichung gilt  $y'(0) = 1 + y(0)^2 = 1 + 0^2 = 1$ . Also ist die Lösung in Null wachsend und wird dadurch positiv. Für  $t > 0$  ist also  $y'(t) = 1 + y(t)^2$  noch größer und die Lösung wächst noch stärker. Was wiederum durch die Differentialgleichung wieder dafür sorgt, dass die Ableitung schneller wächst. Diese

Rückkopplung wird so schnell so stark, dass die Funktion auf einem endlichen Intervall nach Unendlich gepeitscht wird. Man nennt einen solchen Effekt einen *Blow-up* bzw. in der Physik manchmal *Resonanz*.

Zum Schluss dieses Abschnitts zeigen wir noch, dass jede Lösung eines Anfangswertproblems zu einer maximalen Lösung fortgesetzt werden kann.

**Satz 2.8.** *Ist  $u$  eine Lösung von (2.3), so hat  $u$  eine Fortsetzung, die eine maximale Lösung von (2.3) ist.*

*Beweis.* Wir verwenden das Zornsche Lemma. Zur Erinnerung:

**Lemma von Zorn:** Es sei  $M \neq \emptyset$  eine partiell geordnete Menge. Hat jede total geordnete Teilmenge von  $M$  („Kette“) eine obere Schranke in  $M$ , so besitzt  $M$  maximale Elemente.

Zur Anwendung dieses Lemmas betrachten wir  $M$  als die Menge aller Lösungen von (2.3), die Fortsetzungen von  $u$  sind. Nach Voraussetzung ist  $u \in M$ , also ist  $M$  nicht leer. Als Ordnung auf dieser Menge definieren wir für alle  $v_1, v_2 \in M$

$$v_1 \leq v_2 \iff v_2 \text{ Fortsetzung von } v_1.$$

Zunächst kann man sich leicht überlegen, dass damit tatsächlich eine Ordnungsrelation auf  $M$  definiert ist. Sodann sei eine beliebige Kette in  $M$  gegeben, d. h. eine Menge  $K = \{v_\alpha : \alpha \in A\}$ , in der je zwei Elemente vergleichbar sind. Hierbei ist  $A$  eine beliebige Indexmenge. Wir konstruieren nun eine obere Schranke von  $K$  in  $M$ , also eine Lösung  $u_*$  von (2.3), die eine Fortsetzung sowohl von  $u$ , als auch von jedem  $v_\alpha \in K$  ist.

Für jedes  $\alpha \in A$  sei  $J_\alpha$  das Intervall, auf dem die Lösung  $v_\alpha$  definiert ist. Damit setzen wir

$$J_* := \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha.$$

Dann ist auch  $J_*$  wieder ein Intervall, denn wegen  $t_0 \in J_\alpha$  für alle  $\alpha \in A$  ist  $J_*$  als Vereinigung von zusammenhängenden Mengen mit nichtleerem Schnitt wiederum zusammenhängend.

Nun definieren wir uns eine Funktion  $u_*$  auf  $J_*$  folgendermaßen: Sei  $t \in J_*$ . Dann gibt es ein  $\alpha \in A$  mit  $t \in J_\alpha$  und eine zugehörige Lösung  $v_\alpha$  auf  $J_\alpha$ . Mit dieser setzen wir  $u_*(t) = v_\alpha(t)$ .

Diese Setzung wirft natürlich sofort die Frage nach der Wohldefiniertheit auf, denn ein  $t$  liegt natürlich in verschiedenen Intervallen  $J_\alpha$ . Sind aber  $\alpha, \beta \in A$  mit  $t \in J_\alpha \cap J_\beta$  und sind  $v_\alpha$  und  $v_\beta$  die zugehörigen Lösungen auf  $J_\alpha$  bzw.  $J_\beta$ , so müssen diese vergleichbar sein, da  $K$  eine Kette ist. Es ist also entweder  $v_\beta$  eine Fortsetzung von  $v_\alpha$  oder  $v_\alpha$  eine Fortsetzung von  $v_\beta$ . In beiden Fällen ist  $v_\alpha(t) = v_\beta(t)$ .

Die so konstruierte Funktion  $u_*$  ist in jedem Teilintervall von  $J_*$  die Einschränkung einer Lösung von (2.3), also erfüllt sie in jedem Punkt aus  $J_*$  die Differentialgleichung und den Anfangswert ebenso. Schließlich ist  $u_*$  nach Konstruktion

## 2 Zentrale Begriffsbildungen

eine Fortsetzung jeder Lösung  $v_\alpha$  für alle  $\alpha \in A$  und damit insbesondere auch eine Fortsetzung von  $u$ .

Das Element  $u_*$  ist also eine obere Schranke von  $K$  in  $M$  und nach dem Zornschen Lemma hat  $M$  damit ein maximales Element. Ein solches ist aber genau eine maximale Lösung von (2.3), die eine Fortsetzung von  $u$  ist.  $\square$

Man beachte, dass diese Konstruktion in keiner Weise eine eindeutige maximale Lösung garantiert und das ist im Allgemeinen auch nicht der Fall, wie wir noch sehen werden. Hat man aber aus anderer Quelle noch ein Eindeutigkeitsresultat zur Verfügung, so ist üblicherweise diese dann eindeutige maximale Lösung gemeint, wenn von *der* Lösung eines Anfangswertproblems gesprochen wird.

# 3 Trennung der Variablen

In diesem Abschnitt betrachten wir ein erstes Lösungsverfahren für eine spezielle Klasse von DGLen, die DGLen von getrennten Veränderlichen, zu denen z. B. alle autonomen DGLen, d. h. auch unser logistisches Wachstum und der freie Fall gehören.

**Beispiel 3.1.** Wir betrachten wieder das logistische Wachstum aus Beispiel 1.3

$$y'(t) = \mu y(t)(1 - y(t)), \quad t \geq 0.$$

Das ist eine autonome Gleichung der Form  $y' = f(y)$  mit  $f(y) = \mu y(1 - y)$ . Am Graphen dieser Funktion, vgl. Abbildung 3.1, kann man schon Einiges zum qualitativen Verhalten der Lösungen dieser DGL ablesen. Zunächst entspricht

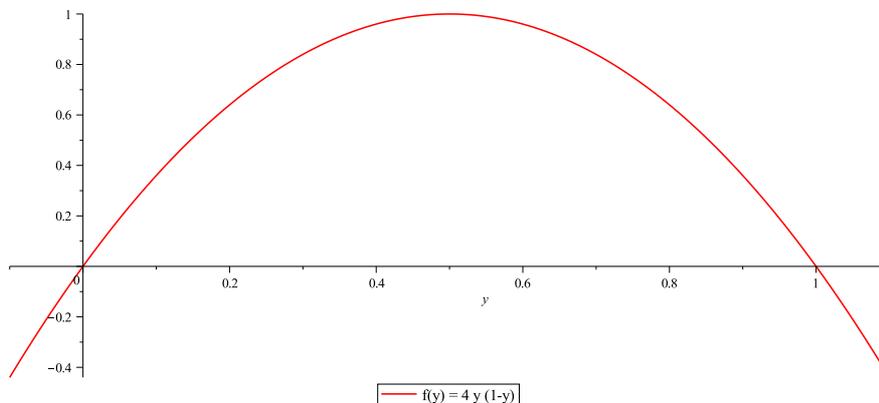


Abbildung 3.1: Die Funktion  $f(y) = \mu y(1 - y)$  mit  $\mu = 4$ .

jede Nullstelle von  $f$  einer konstanten Lösungsfunktion, in diesem Fall sind das die Konstanten Null und Eins. Machen Sie sich klar, dass das wirklich Lösungen sind! Solche konstanten Lösungen sind ein sehr wichtiges Charakteristikum einer DGL und werden auch *stationäre Lösungen* genannt.

Diese stationären Lösungen entsprechen zwei wichtigen Spezialfällen des Modells. Die Nulllösung ist zwar langweilig ergibt aber Sinn: Wenn die Anfangspopulation Null ist, bleibt es dabei. Die Einslösung bedeutet, dass in diesem Modell eine Population, die bei Maximalbevölkerung startet, für immer unverändert in diesem Zustand bleibt.

### 3 Trennung der Variablen

Bleibt die Frage, was passiert für einen Startwert  $y(0)$ , der beispielsweise echt zwischen Null und Eins liegt? Auch darüber kann man einiges an diesem Graphen ablesen. Für  $0 < y(0) < 1$  ist nämlich  $y'(0) = f(y(0)) > 0$ , also wird die Lösung zunächst ansteigen, d. h. in unserer Abbildung auf der horizontalen Achse nach rechts rutschen. Das geschieht, falls noch  $0 < y(t) \leq 1/2$  gilt, immer schneller, aber je näher die Lösung dem Wert 1 kommt, umso kleiner wird die Ableitung, die durch die Funktion  $f$  gegeben ist. Die Lösung wird sich also streng monoton wachsend asymptotisch dem Wert Eins annähern.

Damit haben wir noch keine Formel für die Lösung, aber doch schon eine recht genaue Vorstellung, wie die Lösung aussehen wird. Und das ohne einen Strich gerechnet zu haben!

Sie sind herzlich eingeladen für andere Startwerte ähnliche Überlegungen anzustellen. Was passiert z. B., wenn wir mit einer Überbevölkerung, also  $y(0) > 1$ , starten? Oder mit einer negativen Population? (Ja, ja, so eine Frage kann nur von einem Mathematiker kommen...)

**Beispiel 3.2.** Wir bleiben beim logistischen Wachstum und wollen diese Gleichung

$$y'(t) = \mu y(t)(1 - y(t)), \quad t \geq 0,$$

nun explizit lösen. Dazu nehmen wir an,  $u : [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$  wäre eine Lösung.

Wir wissen natürlich nicht, ob es so eine Lösung gibt, aber erstens geben uns die Überlegungen aus dem vorherigen Abschnitt gute Zuversicht, dass dem so ist, und zweitens wollen wir nur herausfinden, wie eine Lösung aussehen müsste, wenn sie existiert. Wenn wir erfolgreich sind, ist alles gut, denn nachzurechnen, dass wir tatsächlich eine Lösung haben, ist sehr einfach.

Unsere hypothetische Lösung erfüllt dann obige DGL, es gilt also für alle  $t \geq 0$

$$\frac{u'(t)}{\mu u(t)(1 - u(t))} = 1.$$

Integrieren wir diese Gleichung erhalten wir mit der Funktion  $f$  aus Beispiel 3.1

$$t = \int_0^t 1 \, ds = \int_0^t \frac{u'(s)}{\mu u(s)(1 - u(s))} \, ds = \int_0^t \frac{u'(s)}{f(u(s))} \, ds.$$

Das letzte Integral schreit geradezu danach mit der Substitution  $x = u(s)$  bearbeitet zu werden. Das ergibt mit  $y_0 := u(0)$

$$\begin{aligned} t &= \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{1}{f(x)} \, dx = \int_{y_0}^{u(t)} \frac{1}{\mu x(1 - x)} \, dx = \frac{1}{\mu} \int_{y_0}^{u(t)} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{\mu} \left( \ln(x) - \ln(1 - x) \right) \Big|_{y_0}^{u(t)} = \frac{1}{\mu} \ln \left( \frac{u(t)(1 - y_0)}{y_0(1 - u(t))} \right). \end{aligned}$$

Nun ist der schwerste Teil der Arbeit getan und wir müssen „nur“ noch nach  $u(t)$  auflösen. Das ergibt zunächst durch Anwendung der Exponentialfunktion

$$e^{\mu t} = \frac{u(t)(1 - y_0)}{y_0(1 - u(t))}$$

und nach einigen Umstellungen das Ergebnis

$$u(t) = \frac{e^{\mu t} y_0}{1 + (e^{\mu t} - 1) y_0}.$$

Eine Probe bestätigt leicht, dass wir tatsächlich eine Lösung unserer DGL gefunden haben.

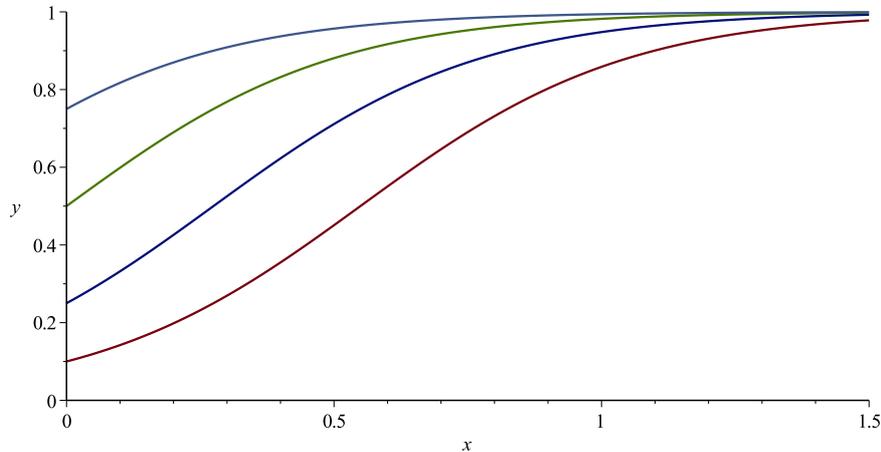


Abbildung 3.2: Lösungen des logistischen Wachstums mit  $\mu = 4$  für die Anfangswerte  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{3}{4}$ .

**Bemerkung 3.3.** Der entscheidende Schritt in der Berechnung der Lösung im letzten Beispiel war die Substitution  $x = u(s)$  im Integral. Danach fiel alles auseinander. Dieser Schritt hat nichts mit der speziellen Gestalt von  $f$  und damit der Gleichung zu tun, sondern geht immer dann, wenn im Nenner nur  $f(u(s))$  und nicht  $f(s, u(s))$  steht, wie das bei einer allgemeinen DGL der Fall wäre. Das bedeutet, dass ein ähnliches Verfahren immer versucht werden kann, wenn ein skalares Anfangswertproblem die Form

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) = g(t) \cdot h(y(t)), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

hat, d. h. auf der rechten Seite ist die Abhängigkeit von den Variablen  $t$  und  $y$  multiplikativ getrennt. Man spricht von einer DGL *mit getrennten Variablen* oder *von getrennten Veränderlichen*.

### 3 Trennung der Variablen

Machen wir mit der Gleichung in (3.1) die gleiche Rechnung wie eben, so finden wir unter der Voraussetzung  $h(y(t)) \neq 0$  zunächst für alle  $t \in I$

$$\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t).$$

Dann integriert man wieder diese Gleichung von  $t_0$  bis  $t$  und substituiert  $x = y(s)$ . Das liefert

$$\int_{t_0}^t g(s) \, ds = \int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{h(y(s))} \, ds = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{h(x)} \, dx.$$

Wenn nun  $h$  und  $g$  hinreichend brav sind, so dass die Integrale bestimmbar sind und sich die dann ergebende Gleichung wie im obigen Beispiel nach  $y(t)$  auflösen lässt, liefert das die Lösung des Anfangswertproblems (3.1). Wir formulieren das als allgemeines Prinzip im nächsten Satz.

**Satz 3.4** (Trennung der Variablen).

Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, sowie  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \Omega$ .

Ist  $h(y_0) \neq 0$ , so gibt es ein Intervall  $J \subseteq I$ , auf dem das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= g(t) \cdot h(y(t)), & t \in I, \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung hat, nämlich  $u = H^{-1} \circ G$  mit

$$G(t) := \int_{t_0}^t g(s) \, ds \quad \text{und} \quad H(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{h(x)} \, dx.$$

*Beweis.* Wir zerlegen den Beweis in 3 Schritte.

**1.  $H^{-1} \circ G$  ergibt Sinn:** Da  $h$  stetig ist, gibt es ein offenes Intervall  $U \subseteq \Omega$  um  $y_0$ , sodass  $h(y) \neq 0$  ist für alle  $y \in U$ . Dann ist nach dem Hauptsatz die Funktion  $H$  stetig differenzierbar auf  $U$  und es gilt  $H(y_0) = 0$ . Außerdem ist  $H'(y) = 1/h(y) \neq 0$  für alle  $y \in U$ . Das bedeutet, dass  $H : U \rightarrow H(U) =: V$  bijektiv und  $H^{-1} : V \rightarrow U$  stetig differenzierbar ist.

Weiterhin ist nach dem Hauptsatz die Funktion  $G$  stetig differenzierbar und es bleibt nur noch zu klären, dass wir  $H^{-1}$  und  $G$  verknüpfen können. Dazu halten wir zunächst fest, dass  $V$  als Bild eines offenen Intervalls unter dem Homöomorphismus  $H$  selbst ein offenes Intervall ist. Da  $H(y_0) = 0$  ist und  $y_0$  nach Konstruktion in  $U$  liegt, muss  $0 \in V$  gelten. Schließlich gilt  $G(t_0) = 0$ . Also gibt es dank der Stetigkeit von  $G$  ein offenes Intervall  $J \subseteq I$  um  $t_0$  mit  $G(J) \subseteq V$ .

Für alle  $t \in J$  liegt also  $G(t)$  in  $V$ , sodass für alle diese  $t$  die Verknüpfung  $H^{-1}(G(t))$  Sinn ergibt. Man beachte auch, dass diese Funktion auf  $J$  damit stetig differenzierbar ist.

**2.  $u = H^{-1} \circ G$  ist Lösung:** Wir müssen die Bedingungen aus Definition 2.5 (a) und (b) für das Intervall  $J$  und  $D = I \times \Omega$  nachweisen. Im ersten Schritt haben wir schon gesehen, dass die Funktion  $u$  auf  $J$  stetig differenzierbar ist. Außerdem gilt

$$u(J) = H^{-1}(G(J)) \subseteq H^{-1}(V) = U \subseteq \Omega. \quad (3.2)$$

Also ist  $(t, u(t)) \in D = I \times \Omega$  für alle  $t \in J$ . Schließlich können wir einfach nachrechnen, dass für alle  $t \in J$  gilt

$$u'(t) = \frac{1}{H'(H^{-1}(G(t)))} \cdot G'(t) = \frac{1}{H'(u(t))} \cdot g(t) = \frac{1}{\frac{1}{h(u(t))}} \cdot g(t) = h(u(t)) \cdot g(t),$$

sowie

$$u(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = y_0.$$

Also ist  $u$  eine Lösung des Anfangswertproblems.

**3. Eindeutigkeit:** Sei  $\tilde{u} : J \rightarrow \Omega$  eine weitere Lösung unseres Anfangswertproblems auf  $J$ . Wir betrachten  $\tilde{J} := \{t \in J : u = \tilde{u} \text{ zwischen } t_0 \text{ und } t\}$ . Dann ist  $t_0 \in \tilde{J}$  und damit  $\tilde{J} \neq \emptyset$ . Weiterhin ist  $\tilde{J}$  abgeschlossen in  $J$ , denn  $\tilde{J}$  ist nach Konstruktion ein Teilintervall von  $J$ , auf dem  $u$  und  $\tilde{u}$  übereinstimmen. Da  $u$  und  $\tilde{u}$  stetig auf  $J$  sind, stimmen sie dann auch auf dem Rand von  $\tilde{J}$  in  $J$  überein.

Wenn wir nun noch zeigen können, dass  $\tilde{J}$  offen in  $J$  ist, so muss  $\tilde{J} = J$  sein, denn  $J$  ist als Intervall zusammenhängend.

Sei also  $t_* \in \tilde{J}$ . Dann ist  $\tilde{u}(t_*) = u(t_*) \in U$  wegen (3.2). Nun sind aber  $U$  und  $J$  offen, sowie  $\tilde{u}$  stetig, sodass es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit  $\tilde{u}(t) \in U$  für alle  $t \in (t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon)$  und  $(t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon) \subseteq J$ .

Es ist aber auch  $\tilde{u}(t) = u(t) \in U$  für alle  $t \in \tilde{J}$ . Also gilt dies für alle  $t$  aus einem offenen Teilintervall von  $J$ , das sowohl  $t_0$  als auch  $t_*$  enthält. Wenn wir nun beachten, dass das nach der Konstruktion von  $U$  bedeutet, dass  $h(\tilde{u}(t)) \neq 0$  gilt, bekommen wir für diese  $t$  mit Hilfe der Rechnung aus Bemerkung 3.3

$$\int_{t_0}^t g(s) \, ds = \int_{y_0}^{\tilde{u}(t)} \frac{1}{h(x)} \, dx.$$

Umformuliert in  $G$  und  $H$  steht da aber gerade  $G(t) = H(\tilde{u}(t))$ , d. h. für alle  $t$  aus unserem offenen Intervall um  $t_*$  gilt

$$u(t) = H^{-1}(G(t)) = \tilde{u}(t).$$

Also ist  $t_*$  ein innerer Punkt von  $\tilde{J}$  und wir haben die noch fehlende Offenheit von  $\tilde{J}$  gezeigt.  $\square$

Wir wollen das Verfahren an einigen Beispielen erproben.

### 3 Trennung der Variablen

**Beispiel 3.5.** (a) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = ty(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

In den Notationen von Satz 3.4 ist dann  $g(t) = t$ ,  $h(y) = y$ ,  $t_0 = 0$  und  $y_0 = 1$ . Also ist wegen  $h(y_0) = y_0 = 1 \neq 0$  die Voraussetzung des Satzes erfüllt und mit

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(s) \, ds = \int_0^t s \, ds = \frac{1}{2}t^2$$

und

$$H(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{h(x)} \, dx = \int_1^y \frac{1}{x} \, dx = \ln(y) - \ln(1) = \ln(y)$$

erhalten wir wegen  $H^{-1}(x) = e^x$  die Lösung

$$y(t) = H^{-1}(G(t)) = e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

So viel zur formal sauberen Anwendung des Satzes und nun zum wahren Leben. Ähnlich wie bei der Anwendung der Substitutionsregel gibt es einen sehr starken formalen Kalkül, der aus folgender Rechnung besteht: Man schreibt  $y'$  als  $dy/dt$  und lässt bei  $y'$  und  $y$  die Argumente weg. Dann erhält man, wenn man alle Anteile mit  $t$  auf die eine Seite und alle Anteile mit  $y$  auf die andere Seite sortiert:

$$y' = ty \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dy}{dt} = ty \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{y}dy = tdt,$$

was offensichtlicher mathematischer Nonsens ist, aber wunderbar funktioniert, wenn man nun auf beiden Seiten einen Integralhaken drüberwirft:

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int t \, dt.$$

Integration auf beiden Seiten liefert dann

$$\ln(y) = \frac{1}{2}t^2 + c$$

mit einer Integrationskonstanten  $c \in \mathbb{R}$ , die am Ende zum Einstellen des Anfangswertes dienen wird. Auflösen nach  $y$  liefert

$$y(t) = e^{\frac{1}{2}t^2+c}$$

und es bleibt die Anfangsbedingung einzustellen. Wegen  $1 \stackrel{!}{=} y(0) = e^c$  folgt  $c = 0$  und wir erhalten auch die Lösung  $y(t) = e^{t^2/2}$ .

Bei diesem Vorgehen ist eine Probe allerdings ein Muss, denn diese schwarze Messe ist kein Beweis, dass belastbar das richtige Ergebnis herausgekommen ist. Man beachte auch, dass während dieses Procederes nirgends die Voraussetzung  $h(y_0) \neq 0$  abgeprüft wird. Zum Glück ist die Probe üblicherweise das kleinste Problem, denn sie geht schnell. Tatsächlich ist

$$y'(t) = \frac{1}{2} \cdot 2te^{\frac{1}{2}t^2} = ty(t) \quad \text{und} \quad y(0) = e^0 = 1.$$

(b) Als zweites Beispiel betrachten wir für  $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'(t) = \cos(t)e^{y(t)}, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Auch das ist eine DGL von getrennten Veränderlichen und mit obigem Verfahren bekommen wir die Lösung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = \cos(t)e^y &\rightsquigarrow e^{-y} dy = \cos(t) dt \rightsquigarrow \int e^{-y} dy = \int \cos(t) dt \\ &\rightsquigarrow -e^{-y} = \sin(t) + c \rightsquigarrow y(t) = -\ln(-\sin(t) - c). \end{aligned}$$

Nun können wir noch den Anfangswert einstellen:

$$a \stackrel{!}{=} y(0) = -\ln(-c) \implies e^{-a} = -c \implies c = -e^{-a}.$$

Also ist unser Lösungskandidat  $y(t) = -\ln(e^{-a} - \sin(t))$ . Diesen müssen wir noch durch eine Probe absichern: Es ist

$$y'(t) = -\frac{1}{e^{-a} - \sin(t)} \cdot (-\cos(t)) = \frac{\cos(t)}{e^{-a} - \sin(t)}$$

und

$$\cos(t)e^{y(t)} = \cos(t)e^{-\ln(e^{-a} - \sin(t))} = \cos(t)\frac{1}{e^{-a} - \sin(t)}$$

sowie

$$y(0) = -\ln(e^{-a}) = -(-a) = a.$$

**Bemerkung 3.6.** Diese Gleichung hat für manche Anfangswerte einen Blow-up, aber nicht für alle. So existiert die Lösung z. B. für  $a = 2$  nur, solange  $\sin(t) < e^{-2}$  gilt, denn danach ist das Argument des Logarithmus negativ. Wählen wir aber z. B.  $a = -1$ , so ist die Lösung  $y(t) = -\ln(e - \sin(t))$  und diese existiert für alle  $t \in \mathbb{R}$ , vgl. Abbildung 3.3.

Das zeigt, dass eine Gleichung für verschiedene Anfangswerte einmal globale und einmal nur lokale Lösungen haben kann. Außerdem stellt man fest, dass das maximale Existenzintervall der Lösung rechts von der Null für große Anfangswerte beliebig klein wird.

### 3 Trennung der Variablen

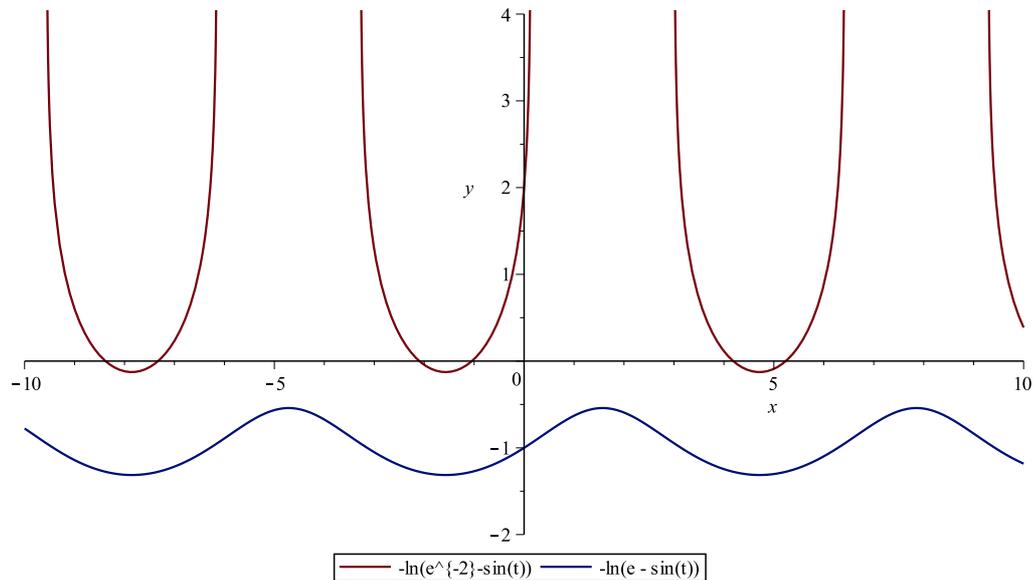


Abbildung 3.3: Zwei Lösungen der DGL aus Beispiel 3.5 (b) für  $y(0) = 2$  mit Blow-up (rote Kurve) und für  $y(0) = -1$  als globale Lösung (blaue Kurve).

**Bemerkung 3.7.** Diese Lösungsmethode für DGLen mit getrennten Veränderlichen ist ein sehr starkes Werkzeug, das dadurch noch stärker wird, dass sich weitere DGLen durch Substitution auf diesen Typ zurückführen lassen. Hier und auch in anderen Zusammenhängen gibt es einen ganzen Zoo von trickreichen Transformationen und ad-hoc-Lösungsmethoden, auf denen aber nicht der Schwerpunkt dieser Vorlesung liegt. Wir wollen nur beispielhaft sogenannte homogene DGLen betrachten.

Eine *homogene DGL* zeichnet sich dadurch aus, dass die rechte Seite nur vom Quotienten  $y(t)/t$  abhängt. Sie sind also von der Form

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right).$$

In diesem Fall hilft es, die Funktion  $u(t) = y(t)/t$  zu betrachten, denn für diese gilt dann

$$u'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{f(u(t))}{t} - \frac{u(t)}{t}.$$

Wir bekommen also für  $u$  die DGL

$$u'(t) = \frac{f(u(t)) - u(t)}{t}$$

und diese ist von getrennten Veränderlichen!

**Beispiel 3.8.** Wir behandeln das Beispiel

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)}{t} - \frac{t^2}{y^2(t)}, & t \in \mathbb{R}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Hier führt die oben angegebene Substitution  $u = y/t$  auf

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{\frac{y(t)}{t} - \frac{t^2}{y^2(t)}}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{y(t)}{t^2} - \frac{t}{y(t)^2} - \frac{y(t)}{t^2} \\ &= -\frac{t}{y(t)^2} = -\frac{1}{t} \frac{1}{u(t)^2} \end{aligned}$$

und wir haben die versprochene DGL von getrennten Veränderlichen. Diese können wir nun lösen:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{t} \frac{1}{u^2} &\rightsquigarrow u^2 du = -\frac{1}{t} dt \rightsquigarrow \int u^2 du = -\int \frac{1}{t} dt \\ &\rightsquigarrow \frac{1}{3} u^3 = -\ln(t) + c. \end{aligned}$$

Also ist unser Lösungskandidat für die Gleichung von getrennten Veränderlichen  $u(t) = \sqrt[3]{-3 \ln(t) + 3c}$  und damit für die ursprüngliche Gleichung

$$y(t) = tu(t) = t \sqrt[3]{-3 \ln(t) + 3c}.$$

Das Einstellen des Anfangswerts liefert

$$2 \stackrel{!}{=} y(1) = 1 \cdot \sqrt[3]{0 + 3c} = \sqrt[3]{3c} \iff 8 = 3c \iff c = \frac{8}{3}.$$

Die endgültige Lösung ist damit

$$y(t) = t \sqrt[3]{-3 \ln(t) + 8}$$

und die abschließende Probe bestätigt das auch.



## 4 Existenz von Lösungen – Der Satz von Peano

Wir lassen das konkrete Lösen spezieller Gleichungen für eine Weile sein und wenden uns der allgemeinen Frage zu, welche Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme überhaupt lösbar sind. Hierzu gibt es mit dem Satz von Peano ein sehr weitreichendes Resultat, das garantiert, dass jedes Anfangswertproblem mit einer stetigen rechten Seite  $f$  eine Lösung besitzt. Dieses Theorem wollen wir in diesem Kapitel entwickeln. Wir betrachten also wieder das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

und zeigen zunächst, dass dieses äquivalent in eine Integralgleichung umgeschrieben werden kann.

Das wird sich auch in späteren Betrachtungen immer wieder als nützlich erweisen.

**Lemma 4.1.** *Seien  $d \in \mathbb{N}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $D \subseteq I \times \mathbb{R}^d$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig und  $(t_0, y_0) \in D$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Funktion  $u$  ist Lösung von (4.1) auf  $I$ .*

(b)  *$u : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist stetig und es gilt für alle  $t \in I$ , dass  $(t, u(t)) \in D$  und*

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds. \quad (4.2)$$

*Beweis.*

**1. (a)  $\implies$  (b):** Sei  $u$  eine Lösung von (4.1) auf  $I$ . Dann ist  $u$  automatisch stetig, es gilt immer  $(t, u(t)) \in D$  und der Hauptsatz liefert für alle  $t \in I$

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s) \, ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds.$$

**2. (b)  $\implies$  (a):** Da  $u$  und  $f$  nach Voraussetzung stetig sind, ist auch die Komposition  $s \mapsto f(s, u(s))$  stetig auf  $I$ . Also bekommen wir wieder mit dem Hauptsatz, dass die Funktion

$$t \mapsto u(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds$$

#### 4 Existenz von Lösungen – Der Satz von Peano

auf  $I$  stetig differenzierbar ist und  $u'(t) = f(t, u(t))$  für alle  $t \in I$  gilt. Da außerdem  $u(t_0) = y_0 + 0 = y_0$  ist, finden wir, dass  $u$  eine Lösung von (4.1) auf  $I$  ist.  $\square$

**Bemerkung 4.2.** Wir suchen nun also stetige Lösungen der Integralgleichung (4.2) auf einem Intervall. Dieses wollen wir im Folgenden als kompaktes Intervall  $[a, b]$  mit  $a < b$  wählen.

Wir erinnern daran, dass für jede abgeschlossene Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  der Raum  $C([a, b], G)$  mit der *Maximumsnorm*

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

ein Banachraum ist.<sup>1</sup>

Insbesondere haben wir also einen normierten Raum, in dem alle topologischen Begriffe Sinn ergeben. Beispielsweise ist eine Teilmenge  $\mathcal{F} \subseteq C([a, b], G)$  genau dann beschränkt, wenn eine Konstante  $M \geq 0$  existiert mit  $\|f\|_\infty \leq M$  für alle  $f \in \mathcal{F}$ , d. h. genau dann, wenn  $|f(t)| \leq M$  für alle  $f \in \mathcal{F}$  und alle  $t \in [a, b]$  gilt.

Wir führen einige weitere für das Folgende wichtige Begriffe für Teilmengen dieses Raums ein.

**Definition 4.3.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  abgeschlossen. Eine Teilmenge  $\mathcal{F}$  von  $C([a, b], G)$  heißt

- (a) relativ kompakt, wenn ihr Abschluss  $\overline{\mathcal{F}}$  kompakt ist.
- (b) gleichgradig stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ so dass } \forall f \in \mathcal{F} \forall t_1, t_2 \in [a, b] \text{ mit } |t_1 - t_2| < \delta \text{ gilt} \\ |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon,$$

d. h. alle  $f \in \mathcal{F}$  sind gleich gut gleichmäßig stetig.

Ein handhabbares Kriterium für gleichgradige Stetigkeit gibt das folgende Lemma an, dessen Beweis als Übung verbleibt.

**Lemma 4.4.** Sei  $\mathcal{F} \subseteq C([a, b], G)$  gleichmäßig Lipschitz-stetig, d. h. es gibt eine Konstante  $L \geq 0$  mit

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq L|t_1 - t_2| \quad \text{für alle } t_1, t_2 \in [a, b] \text{ und alle } f \in \mathcal{F}.$$

Dann ist  $\mathcal{F}$  gleichgradig stetig.

---

<sup>1</sup>Hier und in der gesamten weiteren Vorlesung schreiben wir für eine Norm in  $\mathbb{R}^d$  nur den einfachen Betragsstrich  $|\cdot|$ . Eine Unterscheidung, welche Norm hier genau gemeint ist, ist i. A. nicht nötig, da alle Normen auf  $\mathbb{R}^d$  äquivalent sind.

Die wesentliche Bedeutung dieses Begriffes ergibt sich aus dem folgenden Satz von Arzelà-Ascoli, der ein sehr mächtiges Kompaktheitskriterium für Teilmengen von  $C([a, b], G)$  darstellt. Man beachte, dass dieser Raum unendlichdimensional ist, sodass der Satz von Heine-Borel nicht zieht und Kompaktheit nicht leicht nachzuweisen ist.

**Theorem 4.5** (Arzelà-Ascoli). *Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  abgeschlossen. Ist  $\mathcal{F} \subseteq C([a, b], G)$  beschränkt und gleichgradig stetig, so ist  $\mathcal{F}$  relativ kompakt.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass jede Folge  $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$  eine in  $C([a, b], G)$  konvergente Teilfolge hat. Dann folgt die relative Kompaktheit von  $\mathcal{F}$ , da in normierten Räumen Folgenkompaktheit und Kompaktheit äquivalent sind.

Zunächst wählen wir eine Folge  $(t_n)$  in  $[a, b]$ , die in diesem Intervall dicht liegt, z. B. eine Abzählung der rationalen Punkte in diesem Intervall.

Sei nun  $(f_n)$  eine Folge in  $\mathcal{F}$ . Dann ist die Folge  $(f_n(t_1))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^d$  beschränkt, denn  $\mathcal{F}$  ist beschränkt, vgl. Bemerkung 4.2. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, angewandt in  $\mathbb{R}^d$ , hat diese Folge also eine konvergente Teilfolge  $(f_{n_k}(t_1))_{k \in \mathbb{N}}$ . Die zugehörige Folge von Funktionen  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  bezeichnen wir im Folgenden mit  $(f_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ .

In einem zweiten Schritt setzen wir nun die Stelle  $t_2$  in die Funktionen dieser Folge ein. Das ergibt wiederum eine beschränkte Folge  $(f_n^{(1)}(t_2))$  in  $\mathbb{R}^d$ , die also wieder eine konvergente Teilfolge besitzt. Die zugehörige Funktionenfolge bezeichnen wir nun mit  $(f_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ . Man beachte, dass dadurch  $(f_n^{(2)})$  eine Teilfolge von  $(f_n^{(1)})$  ist, d. h. nicht nur die Folge  $(f_n^{(1)}(t_1))_{n \in \mathbb{N}}$ , sondern auch die Folge  $(f_n^{(2)}(t_1))_{n \in \mathbb{N}}$  ist in  $\mathbb{R}^d$  konvergent.

Iterieren wir dieses Verfahren, so erhalten wir für jedes  $k \geq 2$  eine Teilfolge  $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(f_n^{(k-1)})_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass  $(f_n^{(k)}(t_j))_{n \in \mathbb{N}}$  für jedes  $j = 1, 2, \dots, k$  konvergiert. Wir betrachten nun die Diagonalfolge  $g_k := f_n^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Diese ist zunächst mal eine Teilfolge unserer ursprünglichen Folge  $(f_n)$ . Außerdem ist für jedes  $j \in \mathbb{N}$  das Endstück  $(g_k)_{k \geq j}$  eine Teilfolge der  $j$ -ten ausgewählten Teilfolge  $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ , also ist  $(g_k(t_j))_{k \geq j}$  konvergent und damit auch  $(g_k(t_j))_{k \in \mathbb{N}}$ . Dieses Argument zieht für jedes  $j$ , d. h. die Folge  $(g_k)$  konvergiert an allen Stellen  $t_1, t_2, \dots$ , die wir so gewählt haben, dass sie in  $[a, b]$  dicht liegen.

Wir zeigen nun, dass diese Folge  $(g_k)$  unsere gesuchte konvergente Teilfolge von  $(f_n)$  ist, indem wir zeigen, dass sie eine Cauchy-Folge ist.

Sei dazu  $\varepsilon > 0$ . Da  $\mathcal{F}$  gleichgradig stetig ist, existiert ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $s, t \in [a, b]$  mit  $|s - t| < \delta$  gilt

$$|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}. \quad (4.3)$$

Zu diesem  $\delta$  wählen wir dann ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $(b - a)/N < \delta$  und verwenden nun, dass die Folge  $(t_n)$  dicht in  $[a, b]$  liegt, indem wir das Intervall  $[a, b]$  in  $N$  gleich

#### 4 Existenz von Lösungen – Der Satz von Peano

lange Stücke aufteilen und aus jedem dieser Intervalle  $[a + (j - 1)\frac{b-a}{N}, a + j\frac{b-a}{N}]$ ,  $j = 1, \dots, N$ , ein Folgenglied  $t_{n_j}$  auswählen.

Nun haben wir uns oben überlegt, dass für jedes dieser  $t_{n_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , die Folge  $(g_k(t_{n_j}))_{k \in \mathbb{N}}$  konvergent ist und damit ist sie insbesondere eine Cauchyfolge. Also gibt es ein  $K \in \mathbb{N}$  mit

$$\left|g_k(t_{n_j}) - g_\ell(t_{n_j})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } k, \ell \geq K \text{ und alle } j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.4)$$

Sei nun  $t \in [a, b]$  beliebig gegeben. Dann ist  $t$  in einem unserer Teilintervalle, d. h. es gibt ein  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  mit  $t \in [a + (j - 1)\frac{b-a}{N}, a + j\frac{b-a}{N}]$ . Damit ist  $t$  aus dem selben Teilintervall wie  $t_{n_j}$  und insbesondere ist  $|t - t_{n_j}| < (b - a)/N < \delta$  nach der Wahl von  $N$ . Also gilt wegen (4.3)

$$\left|g_k(t) - g_k(t_{n_j})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Verwenden wir nun (4.5), (4.4) und noch einmal (4.5), so erhalten wir für alle  $k, \ell \geq K$

$$\begin{aligned} \left|g_k(t) - g_\ell(t)\right| &\leq \left|g_k(t) - g_k(t_{n_j})\right| + \left|g_k(t_{n_j}) - g_\ell(t_{n_j})\right| + \left|g_\ell(t_{n_j}) - g_\ell(t)\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Beachten wir nun noch, dass  $K$  unabhängig von  $t$  ist, so folgt daraus für alle  $k, \ell \geq K$

$$\|g_k - g_\ell\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} \left|g_k(t) - g_\ell(t)\right| \leq \varepsilon.$$

Also ist  $(g_k)$  eine Cauchyfolge in  $C([a, b], G)$  und wir sind fertig.  $\square$

Nun können wir uns dem Satz von Peano zuwenden.

**Theorem 4.6** (Peano). *Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $D \subseteq I \times \mathbb{R}^d$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine stetige Funktion. Dann hat für jedes  $(t_0, y_0) \in D$  das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

*mindestens eine Lösung.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass für ein  $T > 0$  die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + T] \quad (4.7)$$

eine stetige Lösung  $u$  besitzt, für die  $(t, u(t)) \in D$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + T]$  gilt. Dann folgt die Lösbarkeit des Anfangswertproblems auf  $[t_0, t_0 + T]$  aus Lemma 4.1 und die Lösbarkeit auf einem Intervall  $[t_0 - T, t_0]$  zeigt man analog.

Dazu wählen wir ein  $T_0 > 0$  und einen Radius  $r > 0$ , sodass für<sup>2</sup>  $G := \overline{U_r(y_0)}$  die Menge  $K := [t_0, t_0 + T_0] \times G$  eine kompakte Teilmenge von  $D$  ist. Das geht dank der Offenheit von  $D$ . Nun ist  $f$  eine stetige Funktion auf  $K$ , es gibt also eine Konstante  $M \geq 0$  mit  $|f(s, y)| \leq M$  für alle  $(s, y) \in K$ . Mit dieser setzen wir schließlich  $T := \min\{T_0, r/(2M)\}$ .

Nun konstruieren wir eine Familie  $u_\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , von approximativen Lösungen in  $C([t_0, t_0 + T], G)$  und zeigen dann mit dem Satz von Arzelà-Ascoli, dass diese relativ kompakt ist, also einen Häufungspunkt hat, der sich dann als Lösung unserer Integralgleichung herausstellen wird.

Zu jedem  $\alpha \in (0, T)$  konstruieren wir dazu eine Funktion  $u_\alpha : (-\infty, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  folgendermaßen:

- Für  $t \leq t_0$ , setze zunächst  $u_\alpha(t) := y_0$ .
- Für  $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$  sei

$$u_\alpha(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\alpha(s - \alpha)) \, ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0) \, ds.$$

Man beachte, dass  $u_\alpha$  hier nur scheinbar durch sich selbst definiert wird, denn im Integral wird  $u_\alpha$  nur an Stellen aus  $[t_0 - \alpha, t_0]$  ausgewertet und dort ist es schon definiert. So können wir uns immer ein  $\alpha$ -Intervall weiterhangeln und definieren entsprechend für  $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$u_\alpha(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\alpha(s - \alpha)) \, ds$$

in diesem Sinne.

In einem ersten Schritt müssen wir nun zeigen, dass für alle  $t \in [t_0, t_0 + T]$  der Wert  $u_\alpha(t)$  immer in  $G$  liegt. Der Hintergrund ist, dass wir Ausdrücke der Form  $|f(t, u_\alpha(s))|$  durch  $M$  abschätzen wollen, und das können wir nur, wenn wir wissen, dass  $t \in [t_0, t_0 + T]$  und  $u_\alpha(s) \in G$  sind. Da für  $t \leq t_0$  der Wert  $u_\alpha(t) = y_0$  in  $G$  liegt, reicht es  $t > t_0$  zu betrachten. Wir beweisen dazu die

**Zwischenbehauptung:** Sei  $t \in (t_0, t_0 + T]$  und  $n \in \mathbb{N}$  sei so gewählt, dass  $t \in (t_0 + n\alpha, t_0 + (n + 1)\alpha]$  gilt. Dann ist

$$|u_\alpha(t) - y_0| \leq M(n + 1)\alpha. \quad (4.8)$$

Man beachte, dass für alle  $t \in [t_0, t_0 + T]$  gilt, dass  $n\alpha \leq T$  ist. Ist für ein  $t$  in diesem Intervall also die Abschätzung in (4.8) richtig, so folgt

$$|u_\alpha(t) - y_0| \leq M(n + 1)\alpha = Mn\alpha + M\alpha \leq MT + M\alpha \leq 2MT \leq 2Mr/(2M) = r,$$

---

<sup>2</sup>Mit  $U_r(y_0)$  ist die offene Kugel um  $y_0$  mit Radius  $r$  gemeint.

#### 4 Existenz von Lösungen – Der Satz von Peano

wir haben also dann  $u_\alpha(t) \in G = \overline{U_r(y_0)}$ .

Zum Beweis der Zwischenbehauptung gehen wir induktiv vor. Für  $n = 0$ , d. h.  $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$  ist

$$|u_\alpha(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, u_\alpha(s - \alpha)) \, ds \right| = \left| \int_{t_0}^t f(s, y_0) \, ds \right| \leq M(t - t_0) \leq M\alpha.$$

Im Induktionsschritt ist  $t \in [t_0 + n\alpha, t_0 + (n + 1)\alpha]$ . Dann gilt unter Verwendung von Induktionsannahme und Induktionsanfang

$$\begin{aligned} |u_\alpha(t) - y_0| &\leq |u_\alpha(t) - u_\alpha(t - n\alpha)| + |u_\alpha(t - n\alpha) - y_0| \\ &\leq \left| \int_{t-n\alpha}^t f(s, u_\alpha(s - \alpha)) \, ds \right| + M\alpha \leq Mn\alpha + M\alpha = M(n + 1)\alpha, \end{aligned}$$

da  $u_\alpha(s - \alpha)$  für alle  $s \in [t - n\alpha, t]$  nach Induktionsannahme in  $G$  liegt und  $t - n\alpha \in [t_0, t_0 + \alpha]$  ist.

Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen und wir wissen insbesondere, dass  $u_\alpha(t)$  in  $G$  liegt für alle  $\alpha \in (0, T)$  und alle  $t \in [t_0, t_0 + T]$ . Wir können also die Teilmenge  $\mathcal{F} := \{u_\alpha : \alpha \in (0, T)\}$  von  $C([t_0, t_0 + T], G)$  betrachten und müssen nun zeigen, dass diese die Voraussetzungen des Satzes von Arzelà-Ascoli erfüllt. Für alle  $t, \tau \in [t_0, t_0 + T]$  und alle  $\alpha \in (0, T)$  gilt

$$|u_\alpha(t) - u_\alpha(\tau)| = \left| \int_t^\tau f(s, u_\alpha(s - \alpha)) \, ds \right| \leq M|t - \tau|. \quad (4.9)$$

Damit sind die Funktionen  $u_\alpha$ ,  $\alpha \in (0, T)$ , gleichmäßig (bzgl.  $\alpha$ ) Lipschitz-stetig, womit die Familie  $\mathcal{F}$  nach Lemma 4.4 gleichgradig stetig ist.

Zum Nachweis, dass  $\mathcal{F}$  beschränkt ist, setzen wir in (4.9)  $\tau = t_0$ . Das liefert für alle  $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$|u_\alpha(t)| \leq |u_\alpha(t) - u_\alpha(t_0)| + |u_\alpha(t_0)| \leq M|t - t_0| + |y_0| \leq MT + |y_0|$$

und diese Schranke ist unabhängig von  $t$  und  $\alpha$ .

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli 4.5 ist also  $\mathcal{F}$  relativ kompakt, d. h. insbesondere hat die Folge  $(u_{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $(z_n) := (u_{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$  mit einem Grenzwert  $y$ . Man beachte, dass die Indexfolge  $(\alpha_n)$  als Teilfolge von  $(1/n)$  eine Nullfolge ist. Wir zeigen nun, dass  $y$  eine Lösung des Anfangswertproblems (4.6) ist.

Zunächst ist  $y$  der Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen bezüglich der Maximumsnorm, d. h. die Folge  $(z_n)$  konvergiert gleichmäßig gegen  $y$ . Damit ist  $y$  auch eine stetige Funktion auf  $[t_0, t_0 + T]$ . Weiter gilt mit Hilfe von (4.9) für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |z_n(t - \alpha_n) - y(t)| &= |u_{\alpha_n}(t - \alpha_n) - u_{\alpha_n}(t)| + |u_{\alpha_n}(t) - y(t)| \\ &\leq M|t - \alpha_n - t| + |u_{\alpha_n}(t) - y(t)| = M\alpha_n + |u_{\alpha_n}(t) - y(t)| \end{aligned}$$

und beide Summanden im letzten Ausdruck gehen gleichmäßig in  $t$  gegen Null. Also konvergiert neben der Folge  $(z_n)$  auch die Folge  $(z_n(\cdot - \alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $y$ .

Nun brauchen wir einen vollen Rundumschlag an Vorwissen aus der Analysis I. Die Funktion  $f$  ist auf der kompakten Menge  $K$  stetig und damit dort auch gleichmäßig stetig. Da gleichmäßig stetige Bilder von gleichmäßig konvergenten Folgen wieder gleichmäßig konvergieren, konvergiert damit die Folge  $(f(s, z_n(s - \alpha_n)))_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig in  $s$  gegen  $f(s, y(s))$ . Das erlaubt es uns nun den Limes in das Integral über  $f$  zu ziehen und wir erhalten für  $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_{\alpha_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_{\alpha_n}(s - \alpha_n)) \, ds \right) \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t \lim_{n \rightarrow \infty} f(s, u_{\alpha_n}(s - \alpha_n)) \, ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds. \end{aligned}$$

Also löst  $y$  tatsächlich auf  $[t_0, t_0 + T]$  die Integralgleichung und ist damit eine Lösung unseres Anfangswertproblems.  $\square$

**Bemerkung 4.7.** Obwohl der Beweis mit den sehr konkreten approximativen Lösungen  $u_\alpha$  arbeitet, ist er am Ende in keiner Weise konstruktiv, d. h. er liefert keine Idee, wie man eine Lösung der Gleichung konkret berechnen oder zumindest nähern könnte. Das liegt daran, dass im entscheidenden Moment mit Kompaktheit argumentiert wird. Hier weiß man eben nicht konstruktiv welche Teilfolge man auswählen müsste, die gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert.

An dieser Stelle geht u.U. auch die Eindeutigkeit der Lösung verloren, denn wir können ja nicht ausschließen, dass andere Teilfolgen gegen andere Lösungen konvergieren.



## 5 Eindeutige Lösungen – Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir zeigen zunächst mit einem Beispiel, dass Anfangswertprobleme mit einer stetigen rechten Seite  $f$  nicht zwangsläufig eindeutig lösbar sind. Die Voraussetzungen des Satzes von Peano sind für Eindeutigkeit der Lösungen zu schwach. Danach kommen wir zum Satz (bzw. den Sätzen) von Picard-Lindelöf, die sehr handhabbare Kriterien für eindeutige Lösbarkeit liefern.

**Beispiel 5.1.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= \sqrt{|y(t)|}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

Zunächst stellen wir fest, dass die rechte Seite stetig ist, nach dem Satz von Peano ist das Anfangswertproblem also lösbar. Weiterhin gilt, dass mit jeder Lösung  $y(t)$  auch die Funktion  $z(t) = -y(-t)$  eine Lösung ist, denn es gilt:

$$z'(t) = -(-1)y'(-t) = y'(-t) = \sqrt{|y(-t)|} = \sqrt{|-y(-t)|} = \sqrt{|z(t)|}$$

und

$$z(0) = -y(-0) = -0 = 0.$$

Das allein macht noch nicht die Eindeutigkeit der Lösung kaputt, denn für die (relativ) offensichtliche Lösung  $y(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , führt das nicht auf eine neue Lösung. Es hat aber den Vorteil, dass wir uns bei der Suche nach weiteren Lösungen auf nicht-negative Lösungen beschränken können.

Die DGL ist autonom, also insbesondere von getrennten Veränderlichen. Wenn wir diese Maschine anwerfen, finden wir (Man beachte, dass wir nicht-negative Lösungen suchen und deshalb den Betrag weglassen können.)

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{\sqrt{y}} dy = dt \quad \rightsquigarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int dt \quad \rightsquigarrow \quad 2\sqrt{y} = t + c.$$

Das liefert uns die Lösung  $y(t) = (t + c)^2/4$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Stellen wir noch den Anfangswert  $y(0) = 0$  ein, so erhalten wir  $c = 0$  und damit eine Lösung unseres Anfangswertproblems mit  $y(t) = t^2/4$ , die sich auch leicht durch eine Probe bestätigen lässt.

## 5 Eindeutige Lösungen – Der Satz von Picard-Lindelöf

Offensichtlich ist dies nicht die oben schon gefundene Nulllösung, also hat unser Anfangswertproblem mal mindestens zwei Lösungen. Die Lage ist sogar noch schlimmer, denn jede Funktion der Form

$$y_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ \frac{(t-a)^2}{4}, & a \leq t \end{cases}$$

für  $a \geq 0$  ist eine Lösung. Außerdem gibt es natürlich deren nach obigem Verfahren verneigten korrespondierenden Lösungen

$$z_a(t) = \begin{cases} -\frac{(t-a)^2}{4}, & t < a, \\ 0, & a \leq t \end{cases}$$

für  $a < 0$ . Und schließlich kann man diese alle noch zusammenstüpseln und erhält z. B. Lösungen wie

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{(t+2)^2}{4}, & t < -2, \\ 0, & -2 \leq t < 1, \\ \frac{(t-1)^2}{4}, & 1 \leq t, \end{cases}$$

vgl. Abbildung 5.1.

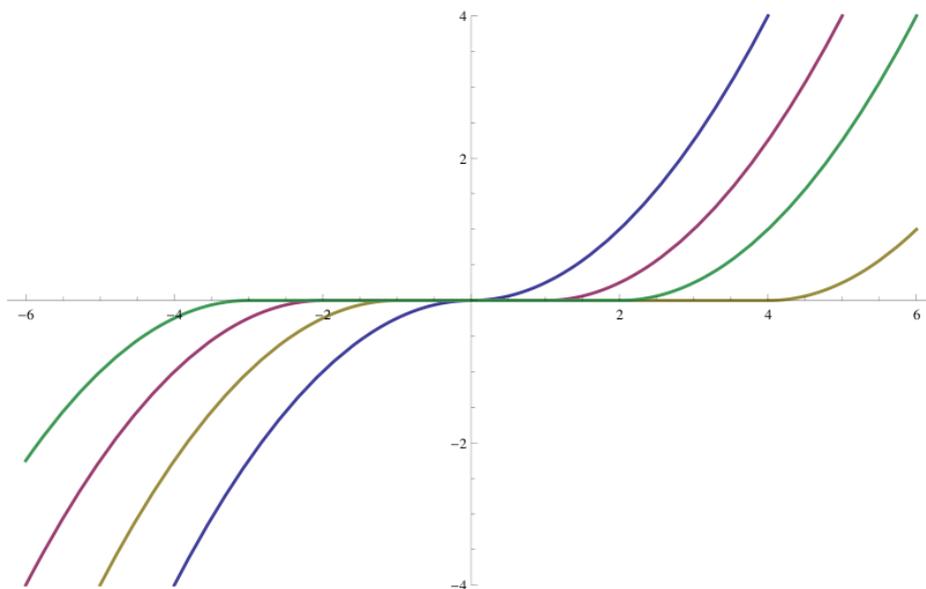


Abbildung 5.1: Einige Lösungen von  $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$  mit  $y(0) = 0$ .

Schreiben wir einen anderen Startwert vor, z. B.  $y(0) = 1$ , so erhält man zumindest ein kleines Stück weit eine eindeutige Lösung, aber sobald die Lösung die Null trifft, kann sie sich wieder in alle diese Parabeläste verzweigen.

Das Problem tritt also in den Nullstellen von  $y$  auf. Es fällt auf, dass die Funktion  $f$  in  $y = 0$  zwar stetig ist, aber nicht wirklich brav, denn das ist die Stelle an

der die Tangente der Wurzelfunktion senkrecht wird. Hierin scheint also das Übel zu liegen. Tatsächlich ist Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite das entscheidende Kriterium.

**Theorem 5.2** (Picard-Lindelöf, globale Version). *Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sei stetig und erfülle eine globale Lipschitz-Bedingung, d. h. es gibt ein  $L \geq 0$ , sodass*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \text{für alle } t \in I \text{ und alle } y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d, \quad (5.1)$$

dann hat für jede Wahl von  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^d$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

genau eine globale Lösung.

*Beweis.* Gemäß Lemma 4.1 zeigen wir wieder, dass die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds, \quad t \in I, \quad (5.3)$$

eine eindeutige globale Lösung hat. Des Weiteren stellen wir fest, dass es ausreicht dieses für jedes kompakte Teilintervall  $J$  von  $I$  zu zeigen, denn dann können wir das Intervall  $I$  mit solchen kompakten Teilintervallen ausschöpfen.

Sei also ab jetzt  $J$  ein kompaktes Teilintervall von  $I$ . Dann betrachten wir die Abbildung

$$T : C(J, \mathbb{R}^d) \rightarrow C(J, \mathbb{R}^d) \quad \text{mit} \quad (Tu)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds, \quad t \in J.$$

Man sieht, dass jede Lösung unserer Integralgleichung (5.3) ein Fixpunkt dieser Abbildung  $T$  ist und umgekehrt auch jeder Fixpunkt von  $T$  eine Lösung von (5.3). Wir müssen im Folgenden also zeigen, dass  $T$  genau einen Fixpunkt hat.

Dazu werden wir den Banachschen Fixpunktsatz verwenden. Zur Erinnerung:

**Banachscher Fixpunktsatz:** Ist  $X$  ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum mit Metrik  $d$  und  $T : X \rightarrow X$  eine strikte Kontraktion, d. h. es gibt ein  $q \in [0, 1)$  mit

$$d(T(x), T(y)) \leq q d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X,$$

so hat  $T$  genau einen Fixpunkt. Weiter konvergiert die Folge mit  $x_{n+1} = T(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , für jedes  $x_0 \in X$  gegen den Fixpunkt.

Hier arbeiten wir in  $X = C(J, \mathbb{R}^d)$ , aber nicht mit der Maximumsnorm wie in Kapitel 4 sondern mit einer leicht modifizierten Norm, die einen zusätzlichen Parameter enthält. Für  $\alpha > 0$  setzen wir

$$\|u\|_\alpha := \max_{t \in J} (|u(t)| e^{-|t-t_0|/\alpha}).$$

## 5 Eindeutige Lösungen – Der Satz von Picard-Lindelöf

Da das Intervall  $J$  beschränkt ist, gibt es ein  $C \in \mathbb{R}$  mit  $|t - t_0| \leq C$  für alle  $t \in J$ . Mit diesem  $C$  bekommen wir für alle  $u \in C(J, \mathbb{R}^d)$  im Vergleich unserer neuen  $\alpha$ -Norm mit der Maximumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$

$$e^{-C/\alpha} \|u\|_\infty = \max_{t \in J} (|u(t)| e^{-C/\alpha}) \leq \underbrace{\max_{t \in J} (|u(t)| e^{-|t-t_0|/\alpha})}_{=\|u\|_\alpha} \leq \max_{t \in J} |u(t)| = \|u\|_\infty. \quad (5.4)$$

Das bedeutet, dass die Normen  $\|\cdot\|_\alpha$  und  $\|\cdot\|_\infty$  für jedes  $\alpha > 0$  auf  $C(J, \mathbb{R}^d)$  äquivalent sind. Da dieser Raum mit der Maximumsnorm ein Banachraum ist, ist er auch mit jeder der  $\alpha$ -Normen ein solcher, d. h. insbesondere ein vollständiger, metrischer Raum, in dem wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden können. Es bleibt zu zeigen, dass  $T : C(J, \mathbb{R}^d) \rightarrow C(J, \mathbb{R}^d)$  mit der  $\alpha$ -Norm für eine geeignete Wahl von  $\alpha$  eine strikte Kontraktion ist.

Zunächst halten wir fest, dass für jedes  $u \in C(J, \mathbb{R}^d)$  nach dem Hauptsatz und dank der Stetigkeit von  $f$  auch die Funktion  $Tu$  eine stetige Funktion auf  $J$  ist, die Abbildung  $T$  bildet also wirklich nach  $C(J, \mathbb{R}^d)$  ab. Zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft seien  $u, v \in C(J, \mathbb{R}^d)$  gegeben. Dann gilt nach Definition und mit der Dreiecksungleichung für Integrale

$$\begin{aligned} d(Tu, Tv) &= \|Tu - Tv\|_\alpha = \left\| y_0 + \int_{t_0}^{\bullet} f(s, u(s)) \, ds - \left( y_0 + \int_{t_0}^{\bullet} f(s, v(s)) \, ds \right) \right\|_\alpha \\ &= \left\| \int_{t_0}^{\bullet} (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) \, ds \right\|_\alpha \\ &= \max_{t \in J} \left[ \left| \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) \, ds \right| e^{-|t-t_0|/\alpha} \right] \\ &\leq \max_{t \in J} \left[ \left| \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \, ds \right| e^{-|t-t_0|/\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Nun können wir die Lipschitz-Bedingung an  $f$  ins Spiel bringen und dann mit dem Ziel weiterrechnen eine  $\alpha$ -Norm von  $u - v$  zu produzieren.

$$\begin{aligned} &\leq \max_{t \in J} \left[ \left| \int_{t_0}^t L |u(s) - v(s)| \, ds \right| e^{-|t-t_0|/\alpha} \right] \\ &= \max_{t \in J} \left[ \left| \int_{t_0}^t L |u(s) - v(s)| e^{-|s-t_0|/\alpha} e^{|s-t_0|/\alpha} \, ds \right| e^{-|t-t_0|/\alpha} \right] \\ &\leq \max_{t \in J} \left[ \left| \int_{t_0}^t L \|u - v\|_\alpha e^{|s-t_0|/\alpha} \, ds \right| e^{-|t-t_0|/\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Dann ist das verbliebene Integral leicht auszuwerten

$$\begin{aligned} &= L \|u - v\|_\alpha \max_{t \in J} \left[ \left| \int_{t_0}^t e^{|s-t_0|/\alpha} \, ds \right| e^{-|t-t_0|/\alpha} \right] \\ &= L \|u - v\|_\alpha \max_{t \in J} \left[ \int_0^{|t-t_0|} e^{s/\alpha} \, ds \right] e^{-|t-t_0|/\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L\|u - v\|_\alpha \max_{t \in J} \left[ \alpha \left( e^{|t-t_0|/\alpha} - 1 \right) e^{-|t-t_0|/\alpha} \right] \\
&= L\alpha\|u - v\|_\alpha \max_{t \in J} \left( 1 - e^{-|t-t_0|/\alpha} \right)
\end{aligned}$$

und wir erhalten, da der letzte Faktor durch 1 abgeschätzt werden kann,

$$\leq L\alpha\|u - v\|_\alpha = L\alpha \cdot d(u, v).$$

Wir wählen nun das bisher beliebige  $\alpha$  mit  $\alpha := 1/(L+1)$ . Dann ist  $T$  eine strikte Kontraktion und wir sind fertig.  $\square$

**Bemerkung 5.3.** Ein Vorteil dieses Beweisverfahrens ist, dass es konstruktiv ist, denn der Banachsche Fixpunktsatz liefert eine Iterationsvorschrift mit, wie der Fixpunkt, d. h. die Lösung unseres Anfangswertproblems, approximiert werden kann. Genauer finden wir unter den Voraussetzungen von Theorem 5.2, dass für jedes  $u_0 \in C(J, \mathbb{R}^d)$  die Folge  $(u_n)$  mit

$$u_{n+1}(t) = (Tu_n)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) \, ds, \quad t \in J, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

bezüglich  $\|\cdot\|_\alpha$  und damit auch bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$ , d. h. gleichmäßig auf  $J$ , gegen die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (5.2) konvergiert. Dieses Verfahren wird *Picard-Iteration* genannt.

Gehen wir zurück auf unser Intervall  $I$ , bekommen wir durch die Picard-Iteration eine Folge, die punktweise auf  $I$  und auf jedem kompakten Teilintervall von  $I$  gleichmäßig gegen die Lösung konvergiert. Ein solches Konvergenzverhalten nennt man auch *kompakt-gleichmäßige Konvergenz*.

**Beispiel 5.4.** Wir wollen die Picard-Iteration anhand des schon bekannten Anfangswertproblems aus Beispiel 3.5 (a) einmal in Aktion erleben. Dort hatten wir gesehen, dass das Problem

$$\begin{cases} y'(t) &= ty(t), \quad t \in [-1, 1], \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

die eindeutige Lösung  $y(t) = e^{t^2/2}$  hat. Auf dieses Anfangswertproblem ist unser globaler Satz von Picard-Lindelöf anwendbar, denn die rechte Seite  $f(t, y) = ty$  erfüllt die globale Lipschitz-Bedingung wegen

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |ty_1 - ty_2| = |t||y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_2|$$

für alle  $t \in [-1, 1]$  und alle  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ .

Die Picard-Iteration wird also für jeden Startwert gegen die Lösung konvergieren. Trotzdem ist man natürlich meist versucht, möglichst nahe an der Lösung zu starten. Wenn es kein besseres Orakel gibt, ist eine typische Wahl für den

## 5 Eindeutige Lösungen – Der Satz von Picard-Lindelöf

Startwert  $u_0$  die konstante Funktion, deren Wert der Anfangswert ist. In diesem Fall also  $u_0(t) = 1$ ,  $t \in [-1, 1]$ . Damit ist dann

$$u_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_0(s)) \, ds = 1 + \int_0^t s u_0(s) \, ds = 1 + \int_0^t s \, ds = 1 + \frac{1}{2}t^2$$

und weiter

$$u_2(t) = 1 + \int_0^t s u_1(s) \, ds = 1 + \int_0^t \left( s + \frac{1}{2}s^3 \right) \, ds = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4.$$

Dieses Beispiel ist besonders schön, denn die Picard-Iteration liefert genau die Reihenentwicklung der Lösung

$$e^{t^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{t^{2k}}{k!} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \dots$$

**Bemerkung 5.5.** Die globale Lipschitz-Bedingung in (5.1) ist im Allgemeinen eine viel zu starke Voraussetzung, denn keine Funktion mit unbeschränkter Ableitung kann diese je erfüllen. So hat z. B. jedes Anfangswertproblem zur DGL  $y'(t) = \cos(t)e^{y(t)}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , nach Beispiel 3.5 (b) eine eindeutige Lösung, aber  $y \mapsto e^y$  ist nicht global Lipschitz-stetig.

Einerseits muss das so sein, denn Theorem 5.2 liefert ja globale Lösungen und wie wir in Beispiel 3.5 gesehen haben ist das Anfangswertproblem zu dieser Gleichung nicht für alle Anfangswerte global lösbar. Der globale Picard-Lindelöf kann also gar nicht ziehen.

Andererseits hätten wir natürlich gerne auch eine Version des Satzes für lokale Lösbarkeit. Es stellt sich heraus, dass wir wieder eine Lipschitz-Bedingung brauchen, aber eine lokale. Diese führen wir in der folgenden Definition ein.

**Definition 5.6.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $D \subseteq I \times \mathbb{R}^d$  offen. Dann erfüllt  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine lokale Lipschitz-Bedingung in  $D$ , falls für jedes  $(t_0, y_0) \in D$  eine Umgebung  $U(t_0, y_0) \subseteq D$  dieses Punktes und eine Konstante  $L(t_0, y_0) \geq 0$  existiert, sodass

$$\left| f(t, y_1) - f(t, y_2) \right| \leq L(t_0, y_0) |y_1 - y_2| \quad \text{für alle } (t, y_1), (t, y_2) \in U(t_0, y_0).$$

**Bemerkung 5.7.** Diese lokale Lipschitz-Bedingung ist dank des Mittelwertsatzes z. B. immer dann erfüllt, wenn  $f$  in  $D$  stetig differenzierbar ist. Das Beispiel 3.5 (b) passt hier also locker hinein.

Bevor wir die lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf beweisen können, brauchen wir noch ein Lemma, das eigentlich eine gehobene Bezeichnung verdient, da es in der Behandlung von DGLen häufig angewendet wird. Aber es heißt eben überall *Lemma von Gronwall*.

**Lemma 5.8** (Gronwall). *Seien  $a, t_0, T \in \mathbb{R}$  mit  $t_0 < T$  gegeben und seien  $u, v \in C([t_0, T], \mathbb{R})$  zwei Funktionen mit  $v \geq 0$  auf ganz  $[t_0, T]$ . Gilt für alle  $t \in [t_0, T]$  die Ungleichung*

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^t u(s)v(s) \, ds, \quad (5.5)$$

so folgt für alle  $t \in [t_0, T]$

$$u(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) \, ds\right).$$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Damit betrachten wir die Funktion

$$h_\varepsilon(t) := (a + \varepsilon) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) \, ds\right), \quad t \in [t_0, T].$$

Für diese ist dann

$$h'_\varepsilon(t) = (a + \varepsilon) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) \, ds\right) \cdot v(t) = h_\varepsilon(t)v(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Nach dem Hauptsatz ist also für alle  $t \in [t_0, T]$

$$h_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t h'_\varepsilon(s) \, ds = a + \varepsilon + \int_{t_0}^t h_\varepsilon(s)v(s) \, ds. \quad (5.6)$$

Unser Ziel ist es nun für alle  $t \in [t_0, T]$  und alle  $\varepsilon > 0$  die Ungleichung

$$u(t) \leq h_\varepsilon(t) = (a + \varepsilon) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) \, ds\right)$$

zu zeigen. Dann folgt die Behauptung durch den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Dazu nehmen wir als Kontraposition an, dass es ein  $\varepsilon > 0$  und ein  $t \in [t_0, T]$  gibt mit  $u(t) > h_\varepsilon(t)$ . Wir arbeiten mit dem Prinzip des kleinsten Verbrechers und setzen deshalb  $\tau := \inf\{t \in [t_0, T] : u(t) > h_\varepsilon(t)\}$ . Dann ist zunächst festzuhalten, dass  $\tau > t_0$  gilt, denn nach Voraussetzung (5.5) (mit  $t = t_0$ ) gilt  $u(t_0) \leq a < a + \varepsilon = h_\varepsilon(t_0)$ . Außerdem muss dank der Stetigkeit von  $u$  und  $h_\varepsilon$  gelten, dass  $u(\tau) = h_\varepsilon(\tau)$  ist.

Da  $\tau$  der kleinste Zeitpunkt ist, ab dem  $u$  die Funktion  $h_\varepsilon$  übersteigt, muss für alle  $t \in [t_0, \tau]$  die Ungleichung  $u(t) \leq h_\varepsilon(t)$  erfüllt sein. Das liefert nun mit Voraussetzung (5.5) und unserem Zwischenergebnis (5.6) den Widerspruch

$$u(\tau) \leq a + \int_{t_0}^{\tau} u(s)v(s) \, ds < a + \varepsilon + \int_{t_0}^{\tau} h_\varepsilon(s)v(s) \, ds = h_\varepsilon(\tau). \quad \square$$

Die Stärke dieses Lemmas ist, dass es eine implizite Ungleichung, bei der die Funktion  $u$  auf beiden Seiten des Relationszeichens steht, in eine explizite Ungleichung verwandelt: Im Resultat ergibt sich eine Abschätzung für  $u$ , die nur von den anderen gegebenen Daten abhängt. Wir werden das im Beweis des nachfolgenden Satzes bewundern können, der ein ganz allgemeines Eindeigkeitskriterium liefert.

## 5 Eindeutige Lösungen – Der Satz von Picard-Lindelöf

**Satz 5.9.** Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall,  $D \subseteq I \times \mathbb{R}^d$  offen,  $(t_0, y_0) \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung in  $D$ . Ist dann  $J \subseteq I$  ein Intervall mit  $t_0 \in J$  und sind  $u_1, u_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  Lösungen des Anfangswertproblems (5.2), so gilt  $u_1 = u_2$  auf  $J$ .

*Beweis.* Seien  $J \subseteq I$  ein Intervall und  $u_1, u_2 \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$  zwei Lösungen des Anfangswertproblems. Wir zeigen zunächst, dass diese, wenn sie in einem Punkt übereinstimmen, auch noch für leicht größere Zeitpunkte gleich bleiben, d. h. wir zeigen die

**Zwischenbehauptung:** Gilt  $u_1(\tau) = u_2(\tau)$  für ein  $\tau \in J$ , so gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $u_1 = u_2$  auf  $J \cap [\tau, \tau + \varepsilon]$ .

Sei also  $\tau \in J$  mit  $u_1(\tau) = u_2(\tau) =: y_*$ . Dann gibt es dank der von  $f$  erfüllten lokalen Lipschitz-Bedingung (vgl. Definition 5.6) eine Umgebung  $U_\tau \subseteq D$  von  $(\tau, y_*)$  und eine Konstante  $L_\tau \geq 0$  mit

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L_\tau |y_1 - y_2| \quad \text{für alle } (t, y_1), (t, y_2) \in U_\tau.$$

Da  $u_1$  und  $u_2$  als Lösungen beide stetig sind und  $U_\tau$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass die Punkte  $(t, u_1(t))$  und  $(t, u_2(t))$  für alle  $t \in [\tau, \tau + \varepsilon]$  in  $U_\tau$  liegen. Mit diesem  $\varepsilon$  gilt für alle  $t \in [\tau, \tau + \varepsilon]$  nach den Hauptsatz

$$\begin{aligned} |u_1(t) - u_2(t)| &= \left| u_1(\tau) + \int_\tau^t u_1'(s) \, ds - u_2(\tau) - \int_\tau^t u_2'(s) \, ds \right| \\ &= \left| \int_\tau^t (u_1'(s) - u_2'(s)) \, ds \right| \\ &= \left| \int_\tau^t (f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))) \, ds \right| \\ &\leq \int_\tau^t |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))| \, ds \\ &\leq \int_\tau^t L_\tau |u_1(s) - u_2(s)| \, ds. \end{aligned}$$

Auf diese Ungleichung können wir nun das Lemma von Gronwall 5.8 anwenden mit  $a = 0$ ,  $u(t) = |u_1(t) - u_2(t)|$  und  $v(s) = L_\tau \geq 0$ . Das liefert für alle  $t \in [\tau, \tau + \varepsilon]$

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq 0 \cdot \exp\left(\int_\tau^t L_\tau \, ds\right) = 0,$$

also ist  $u_1(t) = u_2(t)$  für all diese  $t$  und die Zwischenbehauptung erledigt.

Damit können wir nun beweisen, dass  $u_1 = u_2$  auch auf dem ganzen Intervall  $[t_0, \infty) \cap J$  gilt. Der Beweis für  $t < t_0$  geht dann analog.

Da beide Lösungen das selbe Anfangswertproblem lösen, gilt schon mal  $u_1(t_0) = u_2(t_0) = y_0$ . Also ist die Menge  $M = \{t \in J : u_1 = u_2 \text{ in } [t_0, t]\} \neq \emptyset$  und es macht Sinn  $T := \sup M$  zu definieren. Wenn  $T = \infty$  gilt oder  $T$  das rechte Intervallende

von  $[t_0, \infty) \cap J$  ist, so sind wir fertig. Wir nehmen also an,  $T$  liege im Inneren von  $J$ . Da  $u_1$  und  $u_2$  stetig sind, muss dann  $u_1(T) = u_2(T)$  gelten. Also sagt uns unsere Zwischenbehauptung, dass es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit  $u_1 = u_2$  in  $[T, T + \varepsilon]$ , aber das steht im Widerspruch zur Maximalität von  $T$ . Die kritische Zeitgrenze  $T$  kann also nicht im Inneren von  $J$  liegen und wir sind fertig.  $\square$

Nun ist alle Arbeit getan und wir müssen nurmehr ernten, um unsere Version des Satzes von Picard-Lindelöf für lokale Lösbarkeit zu bekommen.

**Theorem 5.10** (Picard-Lindelöf, lokale Version). *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $D \subseteq I \times \mathbb{R}^d$  offen. Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig und erfüllt eine lokale Lipschitz-Bedingung in  $D$ , vgl. Definition 5.6, so hat für jedes Paar  $(t_0, y_0) \in D$  das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

*genau eine Lösung.*

*Beweis.* Die Existenz einer Lösung ist dank der Stetigkeit von  $f$  durch den Satz von Peano 4.6 garantiert und die Eindeutigkeit folgt aus Satz 5.9.  $\square$

**Beispiel 5.11.** Vor dem Hintergrund dieser Resultate schauen wir uns noch mal unsere notorischen Beispiele an.

- (a) Bei der DGL  $y'(t) = ty(t)$ , vgl. Beispiel 3.5 (a), ist die rechte Seite  $f(t, y) = ty$  linear in  $y$  und damit global Lipschitz-stetig. Nach Theorem 5.2 ist also für jeden Anfangswert eine eindeutige globale Lösung garantiert, was man mit  $y(t) = \pm e^{t^2/2+c}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , auch bekommt.
- (b) Für die DGL  $y'(t) = 1 + y^2(t)$  aus Beispiel 2.7 ist die rechte Seite  $f(y) = 1 + y^2$  nicht global Lipschitz-stetig, aber als stetig differenzierbare Funktion lokal Lipschitz-stetig. Also gibt es nach Satz 5.10 zu jedem Anfangswert eine eindeutige Lösung, aber diese ist i. A. nicht global. Tatsächlich sind alle Lösungen gegeben durch  $y(t) = \tan(t + c)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Alle diese Lösungen haben einen Blow-up.
- (c) Man sollte sich jetzt aber hüten in unsere Ergebnisse zu viel hineinzuinterpretieren. Ist die rechte Seite nur lokal und nicht global Lipschitz-stetig, so kann die DGL trotzdem globale Lösungen haben! Ein Beispiel ist unser logistisches Wachstum  $y'(t) = \mu y(t)(1 - y(t))$ , vgl. Beispiele 1.3 und 3.2. Hier sind alle Lösungen global, obwohl die rechte Seite  $f(y) = \mu y(1 - y) = \mu(-y^2 + y)$  nicht global Lipschitz-stetig ist.
- (d) Auch Mischformen kommen vor. Wir haben in Beispiel 3.5 (b) gesehen, dass die Gleichung  $y'(t) = \cos(t)e^{y(t)}$  mit der nur lokal Lipschitz-stetigen rechten Seite  $f(t, y) = \cos(t)e^y$  für manche Anfangswerte globale Lösungen hat, für andere jedoch ein Blow-up entsteht, die Lösung also lokal bleibt.

## 5 Eindeutige Lösungen – Der Satz von Picard-Lindelöf

- (e) Genau so gibt es auch Anfangswertprobleme, bei denen die rechte Seite nicht einmal stetig ist und die trotzdem eindeutige Lösungen haben. Ein Banalbeispiel ist

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

mit  $f(x) = 1$  für alle  $x \neq 0$  und  $f(0) = 0$ .

- (f) Schließlich kommen wir noch mal auf Beispiel 5.1 zurück. Dort hatten wir festgestellt, dass das Anfangswertproblem  $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$ ,  $y(0) = 0$  nicht einmal lokal eindeutig lösbar ist. Das passt wunderbar dazu, dass gerade in  $y = 0$  die Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite  $f(y) = \sqrt{|y|}$  verletzt ist. Startet man mit einem anderen Anfangswert, z. B.  $y(0) = 1$ , so ist  $f$  in einer Umgebung von  $(0, 1)$  stetig differenzierbar und damit lokal Lipschitz-stetig. Es gibt also nach der lokalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf lokal eine eindeutige Lösung. Erst wenn diese Lösung den Wert Null erreicht, geht die Eindeutigkeit verloren, vgl. auch Abbildung 5.1.

Nach diesen Überlegungen zu lokalen und globalen Lösungen wollen wir uns nun das maximale Existenzintervall einer Lösung noch ein bisschen näher anschauen. So schön der lokale Satz von Picard-Lindelöf ist, so unbefriedigend ist es doch, dass man nicht weiß wie groß dieses denn nun ist, bevor man die Lösung ausgerechnet hat (was man im Allgemeinen gar nicht kann...). Tatsächlich ist es möglich ohne Kenntnis der Lösung eine worst-case-Abschätzung anzugeben. Wir tun das im folgenden Satz der Übersichtlichkeit halber nur für den Fall skalarer Gleichungen, d. h.  $d = 1$ , und vom Startzeitpunkt  $t_0$  aus nach rechts.

**Satz 5.12** (Lifespan). *Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $D \subseteq I \times \mathbb{R}$  offen,  $(t_0, y_0) \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die in  $D$  einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Ist  $U(t_0, y_0)$  eine Umgebung von  $(t_0, y_0)$  aus der lokalen Lipschitz-Bedingung und sind  $h, c > 0$  so gewählt, dass*

$$Q := [t_0, t_0 + h] \times [y_0 - c, y_0 + c] \subseteq U(t_0, y_0)$$

*gilt, so enthält das maximale Existenzintervall der Lösung des Anfangswertproblems (5.2) das Intervall  $[t_0, t_0 + a]$ , wobei*

$$a = \min\{h, c/M\} \quad \text{mit} \quad M = \max_{(t,y) \in Q} |f(t, y)|$$

*ist.*

*Außerdem gilt für die Lösung  $u$  auf  $[t_0, t_0 + a]$  für alle  $t$  in diesem Intervall die Ungleichung  $|u(t) - y_0| \leq c$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die Funktion

$$\tilde{f}(t, y) = \begin{cases} f(t, y_0 - c), & t \in [t_0, t_0 + h], y < y_0 - c, \\ f(t, y), & t \in [t_0, t_0 + h], y_0 - c \leq y \leq y_0 + c, \\ f(t, y_0 + c), & t \in [t_0, t_0 + h], y_0 + c < y. \end{cases}$$

Dann liegt für alle  $(t, y) \in [t_0, t_0 + h] \times \mathbb{R}$  das Argument von  $f$  bei der Auswertung von  $\tilde{f}$  im Würfel  $Q$ , d. h. insbesondere in  $U(t_0, y_0)$  und dort ist  $f$  Lipschitz-stetig nach Voraussetzung. Also ist  $\tilde{f}$  auf dem Intervall  $[t_0, t_0 + h]$  *global* Lipschitz-stetig. Nach dem globalen Satz von Picard-Lindelöf 5.2 hat also das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = \tilde{f}(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + h], \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung  $v$  auf  $[t_0, t_0 + h]$ . Für alle  $t \in [t_0, t_0 + a]$  gilt (Man beachte, dass  $a \leq h$  ist.)

$$|v(t) - y_0| = \left| y_0 + \int_{t_0}^t v'(s) \, ds - y_0 \right| = \left| \int_{t_0}^t \tilde{f}(s, v(s)) \, ds \right|.$$

Nun ist  $\tilde{f}$ , da es die stetige Funktion  $f$  nur auf der kompakten Menge  $Q$  auswertet, darüberhinaus auch beschränkt durch  $M$ . Das liefert nun mit der brutalen Standardabschätzung für Integrale

$$|v(t) - y_0| \leq M|t_0 - t| \leq Ma \leq M \frac{c}{M} = c. \quad (5.7)$$

Also ist  $v(t) \in [y_0 - c, y_0 + c]$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + a]$ . Das bedeutet aber, dass für alle  $t \in [t_0, t_0 + a]$  gilt  $\tilde{f}(t, v(t)) = f(t, v(t))$  und damit

$$v'(t) = \tilde{f}(t, v(t)) = f(t, v(t)),$$

was zusammen mit  $v(t_0) = y_0$  bedeutet, dass unser  $v$  eine Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems auf dem Intervall  $[t_0, t_0 + a]$  ist. Damit muss deren maximales Existenzintervall mindestens  $[t_0, t_0 + a]$  umfassen.

Die behauptete Abschätzung für  $u = v$  auf diesem Intervall steht schließlich in (5.7).  $\square$

**Übungsaufgabe 5.13.** Für autonome Gleichungen mit positiver rechter Seite kann die Länge des Existenzintervalls exakt berechnet werden. Zeigen Sie dazu die folgende Aussage:

Es seien  $g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  lokal Lipschitz-stetig und  $y : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$  die maximal nach rechts fortgesetzte Lösung des Anfangswertproblems  $y'(t) = g(y(t))$ ,  $y(0) = 0$ , wobei  $b \in (0, \infty]$  die gesuchte rechte Grenze des Existenzintervalls ist. Für diese gilt

$$b = \int_0^\alpha \frac{1}{g(x)} \, dx, \quad \text{mit} \quad \alpha = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow b^-} y(t), & \text{falls } y \text{ beschränkt} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Fall, dass  $y$  beschränkt ist, ist außerdem notwendigerweise  $b = \infty$ .

## 5 Eindeutige Lösungen – Der Satz von Picard-Lindelöf

Der folgende Satz sieht furchtbar technisch und nutzlos aus. Aber er ist die theoretische Grundlage, die die Beschreibung natürlicher Vorgänge durch gewöhnliche Differentialgleichungen erst möglich macht. Der Satz sagt in einer quantifizierten Form aus, dass die Lösungen von Anfangswertproblemen stetig vom Anfangswert und von der rechten Seite abhängen. Das ist wichtig, denn im realen Leben fließen in die Bestimmung der Anfangswerte Messdaten ein und die sind nie exakt. Genauso enthält die Funktion  $f$  auf der rechten Seite üblicherweise reichlich Materialparameter, die auch nie vollständig exakt bekannt sind.

Der folgende Satz zeigt nun: Löse ich das Anfangswertproblem mit einem leicht verfälschten Anfangswert oder einer leicht verfälschten rechten Seite, so wird sich die Lösung dadurch nicht allzu stark gegenüber der exakten Lösung verändern. Nur dadurch kann man rechtfertigen, das Ergebnis dann trotz der Messfehler als Näherung für das Verhalten des modellierten Systems zu verwenden.

Aus demselben Grund wäre ohne dieses Ergebnis auch jede numerische Behandlung von Differentialgleichungen sinnlos.

Der Einfachheit halber formulieren wir den Satz nur für den Fall einer globalen Lipschitz-Bedingung. Mit etwas mehr Klimmzügen bleibt das Resultat aber auch für lokale Lösungen richtig.

**Satz 5.14** (Stetige Abhängigkeit von den Daten). *Seien  $t_0, T \in \mathbb{R}$  mit  $t_0 < T$ .*

- (a) *Seien  $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L$  und  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^d$ . Sind  $u, v$  die eindeutigen Lösungen der Anfangswertprobleme*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)), \\ v(t_0) = y_1 \end{cases}$$

*auf  $[t_0, T]$ , so gilt*

$$\|u - v\|_\infty \leq (L + 1)e^{(L+1)(T-t_0)}|y_0 - y_1|.$$

- (b) *Seien  $f, g : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $\|f - g\|_\infty < \infty$  und es sei  $f$  global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L$ . Ist  $y_0 \in \mathbb{R}^d$  und sind  $u, v$  Lösungen der Anfangswertprobleme*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} v'(t) = g(t, v(t)), \\ v(t_0) = y_0, \end{cases}$$

*auf  $[t_0, T]$ , so gilt*

$$\|u - v\|_\infty \leq (L + 1)(T - t_0)e^{(L+1)(T-t_0)}\|f - g\|_\infty.$$

*Beweis.* (a) Für alle  $t \in I := [t_0, T]$  gilt

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &= \left| u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s) \, ds - v(t_0) - \int_{t_0}^t v'(s) \, ds \right| \\ &= \left| y_0 - y_1 + \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) \, ds \right| \\ &\leq |y_0 - y_1| + \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \, ds. \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die selbe Rechnung wie im Beweis des globalen Satzes von Picard-Lindelöf 5.2 für die dort eingeführte  $\alpha$ -Norm:

$$\begin{aligned} \|u - v\|_\alpha &= \max_{t \in I} |u(t) - v(t)| e^{-(t-t_0)/\alpha} \\ &\leq \max_{t \in I} \left[ |y_0 - y_1| + \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \, ds \right] e^{-(t-t_0)/\alpha} \\ &\leq \max_{t \in I} e^{-(t-t_0)/\alpha} |y_0 - y_1| + \max_{t \in I} e^{-(t-t_0)/\alpha} \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \, ds \\ &\leq |y_0 - y_1| + L\alpha \|u - v\|_\alpha. \end{aligned}$$

Setzen wir wieder  $\alpha = 1/(L+1)$ , finden wir damit

$$\|u - v\|_{1/(L+1)} \leq |y_0 - y_1| + L/(L+1) \|u - v\|_{1/(L+1)}$$

bzw. umgestellt

$$\frac{1}{L+1} \|u - v\|_{1/(L+1)} \leq |y_0 - y_1|.$$

Verwenden wir nun noch die Abschätzungen aus (5.4) zur Äquivalenz der  $\alpha$ - mit der Maximumsnorm, so liefert das

$$\|u - v\|_\infty \leq e^{(L+1)(T-t_0)} \|u - v\|_{1/(L+1)} \leq (L+1) e^{(L+1)(T-t_0)} |y_0 - y_1|.$$

(b) Wie im ersten Teil rechnen wir für alle  $t \in I$

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t u'(s) \, ds - y_0 - \int_{t_0}^t v'(s) \, ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - g(s, v(s))) \, ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \, ds + \int_{t_0}^t |f(s, v(s)) - g(s, v(s))| \, ds. \end{aligned}$$

Dann ist wieder mit der  $\alpha$ -Norm

$$\begin{aligned} \|u - v\|_\alpha &= \max_{t \in I} |u(t) - v(t)| e^{-(t-t_0)/\alpha} \\ &\leq \max_{t \in I} e^{-(t-t_0)/\alpha} \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \, ds \\ &\quad + \max_{t \in I} e^{-(t-t_0)/\alpha} \int_{t_0}^t |f(s, v(s)) - g(s, v(s))| \, ds. \end{aligned}$$

## 5 Eindeutige Lösungen – Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir schätzen den ersten Summanden wie im Beweis von Teil (a) ab und verwenden im zweiten die Voraussetzung  $\|f - g\|_\infty < \infty$ . Das ergibt

$$\begin{aligned} &\leq L\alpha\|u - v\|_\alpha + \max_{t \in I} (t - t_0) e^{-(t-t_0)/\alpha} \|f - g\|_\infty \\ &\leq L\alpha\|u - v\|_\alpha + (T - t_0)\|f - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Setzen wir wieder  $\alpha = 1/(L+1)$  und bringen die beiden Terme mit  $\|u - v\|_\alpha$  auf eine Seite, so ergibt das

$$\frac{1}{L+1}\|u - v\|_{1/(L+1)} \leq (T - t_0)\|f - g\|_\infty$$

und wir erhalten wie oben

$$\|u - v\|_\infty \leq e^{(L+1)(T-t_0)}\|u - v\|_{1/(L+1)} \leq (L+1)(T-t_0)e^{(L+1)(T-t_0)}\|f - g\|_\infty. \quad \square$$

## 6 Explizite Gleichungen höherer Ordnung

In diesem Abschnitt wollen wir uns DGLen zweiter und höherer Ordnung anschauen. Wie schon in Bemerkung 2.2 (b) angekündigt, gibt es ein allgemeines Verfahren, mit dem solche Gleichungen zu Systemen von DGLen erster Ordnung umgeformt werden können. Dieses wollen wir jetzt entwickeln. Wir betrachten also eine explizite DGL  $n$ -ter Ordnung, vgl. Definition 2.1 (c),

$$y^{(n)}(t) = \tilde{F}(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (6.1)$$

mit einer Funktion  $\tilde{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $D \subseteq I \times (\mathbb{R}^d)^n$  bzw. das zugehörige Anfangswertproblem mit den zusätzlichen Bedingungen

$$y^{(j)}(t_0) = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (6.2)$$

mit  $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$ .

Für solche Gleichungen müssen wir allerdings zunächst analog zu Definition 2.5 den Begriff der Lösung einführen.

**Definition 6.1.** (a) Eine Funktion  $u : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt Lösung von (6.1) auf  $J$ , falls

- $J \subseteq I$  ein Intervall ist,
- $u$   $n$ -mal stetig differenzierbar auf  $J$  ist,
- $(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) \in D$  für alle  $t \in J$  ist und
- $u$  die Gleichung (6.1) für alle  $t \in J$  erfüllt.

(b) Ist zusätzlich

- $t_0 \in J$  und
- $u$  erfüllt (6.2),

so heißt  $u$  Lösung des Anfangswertproblems (6.1)/(6.2).

(c) Ist  $J = I$ , so heißt die Lösung global.

## 6 Explizite Gleichungen höherer Ordnung

Die Idee zur Behandlung solcher Gleichungen höherer Ordnung ist nun die Folgende: Wir betrachten die Funktion  $v : I \rightarrow (\mathbb{R}^d)^n$  mit

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Dann ist

$$v'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \\ \tilde{F}(t, v(t)) \end{pmatrix} =: f(t, v(t)) \quad (6.4)$$

mit  $f : D \rightarrow (\mathbb{R}^d)^n$ . Das ist nun ein System erster Ordnung für die Funktion  $v$  und die Anfangswerte aus (6.2) übersetzen sich genau zu

$$v(t_0) = \begin{pmatrix} v_1(t_0) \\ v_2(t_0) \\ v_3(t_0) \\ \vdots \\ v_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \\ y''(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Das Anfangswertproblem (6.1)/(6.2) wird also genau zu einem Anfangswertproblem eines Systems erster Ordnung. Dass diese beiden Probleme äquivalent sind, wollen wir jetzt zeigen.

**Satz 6.2.** *Eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist genau dann eine Lösung von (6.1)/(6.2), wenn die Funktion  $v : I \rightarrow (\mathbb{R}^d)^n$  aus (6.3) eine Lösung von (6.4)/(6.5) ist.*

*Beweis.*

**1. „ $\implies$ “** Sei  $y$  eine Lösung von (6.1)/(6.2) auf  $I$ . Dann ist  $y$   $n$ -mal stetig differenzierbar auf  $I$ , also ist die Funktion  $v = (y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  aus (6.3) noch einmal stetig differenzierbar auf  $I$ . Weiter gilt nach der Definition einer Lösung auch  $(t, v(t)) = (t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in D$  für alle  $t \in I$ . Schließlich gilt nach obigen Rechnungen in (6.4) und (6.5) auch  $v'(t) = f(t, v(t))$  auf  $I$  und  $v(t_0) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ . Also ist  $v$  eine Lösung von (6.4)/(6.5).

**2. „ $\Leftarrow$ “** Sei  $v$  eine Lösung von (6.4)/(6.5) und  $y := v_1$ . Der Nachweis, dass  $y$  nun (6.1)/(6.2) löst, ist etwas aufwändiger, denn wir müssen nun aus der einfachen Differenzierbarkeit von  $v$  die  $n$ -malige Differenzierbarkeit von  $y$  kitzeln.

Da  $v$  als Lösung stetig differenzierbar ist, ist  $y = v_1$  stetig differenzierbar auf  $I$  und es gilt

$$y'(t) = v_1'(t) = [f(t, v(t))]_1 = v_2(t).$$

Nun folgt wiederum aus der stetigen Differenzierbarkeit von  $v$ , dass  $y' = v_2$  auf  $I$  stetig differenzierbar ist. Also ist  $y$  schon mal zweimal stetig differenzierbar auf  $I$  und es gilt

$$y''(t) = v_2'(t) = [f(t, v(t))]_2 = v_3(t).$$

Iteriert man dieses Argument, bekommen wir aus der stetigen Differenzierbarkeit von  $v_n$ , dass  $y$  auf  $I$   $n$ -mal stetig differenzierbar ist und es gilt

$$y^{(n)}(t) = v_n'(t) = [f(t, v(t))]_n = \tilde{F}(t, v(t)) = \tilde{F}(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

Des Weiteren gilt damit für alle  $t \in I$

$$(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) = (t, v(t)) \in D,$$

da  $(t, v(t))$  eine Lösung von (6.4)/(6.5) ist. Schließlich gilt auch für alle  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$y^{(j)}(t_0) = v_{j+1}(t_0) = y_j.$$

Die Funktion  $y$  ist also eine Lösung von (6.1)/(6.2) auf  $I$ . □

Mit Hilfe dieses Resultats können nun alle unsere Erkenntnisse über die (eindeutige) Lösbarkeit von Differentialgleichungen und Anfangswertproblemen auch auf den Fall höherer Ordnung übertragen werden. Beispielhaft wollen wir das nun für den Satz von Peano tun.

**Theorem 6.3** (Satz von Peano). *Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $D \subseteq I \times (\mathbb{R}^d)^n$  offen,  $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$  und  $\tilde{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) &= \tilde{F}(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), & t \in I, \\ y^{(j)}(t_0) &= y_j, & j = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

eine Lösung.

*Beweis.* Mit  $\tilde{F}$  ist auch die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  aus (6.4) stetig. Also sagt der Satz von Peano 4.6, dass das Anfangswertproblem (6.4)/(6.5) eine Lösung besitzt. Nach Satz 6.2 existiert dann auch die im Theorem versprochene Lösung. □

Die globale Version des Satzes von Picard-Lindelöf sieht dann so aus:

## 6 Explizite Gleichungen höherer Ordnung

**Theorem 6.4** (Satz von Picard-Lindelöf, globale Version). *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\tilde{F} : I \times (\mathbb{R}^d)^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  sei stetig und erfülle eine globale Lipschitz-Bedingung, d. h. für ein  $L \geq 0$  gelte*

$$\left| \tilde{F}(t, x_0, \dots, x_{n-1}) - \tilde{F}(t, z_0, \dots, z_{n-1}) \right| \leq L \left| (x_0, \dots, x_{n-1}) - (z_0, \dots, z_{n-1}) \right|$$

für alle  $t \in I$  und alle  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \in (\mathbb{R}^d)^n$ .

Dann besitzt für alle  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}^d$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = \tilde{F}(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), & t \in I, \\ y^{(j)}(t_0) = y_j, & j = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

genau eine globale Lösung.

Der Beweis per Reduktion auf den Satz 5.2 von Picard-Lindelöf für Gleichungen erster Ordnung bleibt als Übungsaufgabe stehen, genauso wie die Formulierung und der Beweis der lokalen Version dieses Satzes.

Wir wollen hier einmal eine ganz konkrete und wichtige Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System umschreiben.

**Beispiel 6.5.** (harmonischer Oszillator, Federpendel) Bei einem Federpendel oder allgemeiner bei jedem (makroskopischen) harmonischen Oszillator wird die Amplitude  $y$  durch das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) = 0, & t > 0, \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$$

beschrieben. Dabei ist  $a$  die Startauslenkung und  $b$  die Startgeschwindigkeit. Der Parameter  $\omega^2$  ist durch das beschriebene System festgelegt, bei einem Federpendel z. B. durch die Eigenschaften der Feder.

Wenden wir unsere Reduktionsmethode an, so erhalten wir mit  $v = (y, y')$  das System erster Ordnung

$$v'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ -\omega^2 y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ -\omega^2 v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} v(t).$$

Allerdings kommen wir nun nicht weiter, denn wir haben bisher ob der ganzen Theorie zu wenig konkrete Gleichungen gelöst. Dabei sieht die Gleichung nicht schlimm aus: Sie ist autonom. Autonome skalare Gleichungen können wir schon lösen, denn diese sind von getrennten Veränderlichen. Das hilft uns hier leider nicht weiter, denn unser Lösungsverfahren aus Abschnitt 3 lässt sich nicht auf Systeme übertragen (warum nicht?).

Dafür hat diese Gleichung eine weitere schöne Struktur: Wir können die rechte Seite als eine Matrix mal die unbekannte Funktion schreiben, was an lineare Gleichungssysteme erinnert. Tatsächlich ist dies eine sogenannte lineare Differentialgleichung. Mit dieser extrem wichtigen Klasse von Differentialgleichungen wollen wir uns in den nächsten beiden Abschnitten beschäftigen, und wir werden dabei auch diese Gleichung lösen.

# 7 Lineare Differentialgleichungen

**Definition 7.1.** Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $d \in \mathbb{N}$  und  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ , sowie  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  Funktionen.

(a) Dann heißt

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad t \in I,$$

lineare DGL, bzw. System von linearen DGLen.

(b) Ist  $b = 0$ , so nennt man die DGL homogen, ansonsten inhomogen.

**Bemerkung 7.2.** (a) Die Begriffsbildungen homogenes/inhomogenes System kennen Sie schon von linearen Gleichungssystemen. Die Parallelität der Begriffe ist hier beabsichtigt. Wir werden sehr viele Parallelen in der theoretischen Behandlung feststellen.

(b) Leider ist der Begriff „homogen“ im Zusammenhang mit Differentialgleichungen nun doppelt belegt. Man beachte, dass die homogenen linearen DGLen (bis auf den Namen) nichts mit den homogenen DGLen aus Bemerkung 3.7 zu tun haben.

(c) In Koordinaten ausgeschrieben ist die allgemeine Form eines linearen Systems von DGLen mit  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^d$  und  $b(t) = (b_i(t))_{i=1}^d$

$$y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1d}(t)y_d(t) + b_1(t)$$

$$y_2'(t) = a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2d}(t)y_d(t) + b_2(t)$$

⋮

$$y_d'(t) = a_{d1}(t)y_1(t) + a_{d2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{dd}(t)y_d(t) + b_d(t).$$

Schon rein optisch erinnert das an ein lineares Gleichungssystem.

Die eindeutige globale Lösbarkeit von Anfangswertproblemen zu linearen Systemen folgt nun für stetige Funktionen  $A$  und  $b$  sofort aus dem Satz von Picard-Lindelöf.

**Satz 7.3.** Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $d \in \mathbb{N}$ , und  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ , sowie  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetige Funktionen. Dann hat für jedes  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^d$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + b(t), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (7.1)$$

genau eine globale Lösung.

## 7 Lineare Differentialgleichungen

*Beweis.* Wir wenden den globalen Satz von Picard-Lindelöf 5.2 an. Ist  $I$  selbst kein kompaktes Intervall, so schöpfen wir dieses wie im Beweis von Picard-Lindelöf durch kompakte Teilintervalle aus. Sei also  $J$  ein beliebiges kompaktes Teilintervall von  $I$ . Dann ist nach Voraussetzung an  $A$  und  $b$  die rechte Seite  $f(t, y(t)) = A(t)y(t) + b(t)$  der DGL in (7.1) stetig und es bleibt nur die globale Lipschitz-Bedingung nachzurechnen. Seien dazu  $t \in J$  und  $y, z \in \mathbb{R}^d$ . Dann ist

$$\begin{aligned} |f(t, y) - f(t, z)| &= |A(t)y + b(t) - A(t)z - b(t)| = |A(t)(y - z)| \\ &\leq \|A(t)\| |y - z| \leq C_J |y - z|, \end{aligned}$$

wobei  $\|A(t)\|$  eine passende Matrixnorm bezeichnet und  $C_J := \max_{t \in J} \|A(t)\|$  ist. Letzteres macht Sinn, da  $A$  stetig und  $J$  kompakt ist.

Nach Theorem 5.2, d. h. dem globalen Satz von Picard-Lindelöf, hat damit das Anfangswertproblem (7.1) genau eine globale Lösung.  $\square$

**Bemerkung 7.4.** Bevor wir die theoretischen Betrachtungen weiterführen, betrachten wir zunächst den Spezialfall einer skalaren linearen Gleichung, also  $d = 1$ :

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Hier sind nun  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktionen, sowie  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

Wir konzentrieren uns zunächst auf das **homogene Problem**, sprich wir setzen  $b = 0$ :

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Dieses ist nun freundlicherweise von getrennten Veränderlichen, so dass wir mit unseren Werkzeugen aus Abschnitt 3 anrücken können. Das ergibt

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y \rightsquigarrow \int \frac{1}{y} dy = \int a(t) dt \rightsquigarrow \ln(|y|) = A(t) + c,$$

wobei  $c$  eine Integrationskonstante und  $A$  eine beliebige Stammfunktion von  $a$  ist. Diese existiert, da  $a$  stetig ist.

Also erhalten wir

$$|y(t)| = e^{A(t)+c} = e^{A(t)} e^c = e^{A(t)} c'$$

mit  $c' > 0$ , bzw.

$$y(t) = C e^{A(t)}$$

mit  $C \in \mathbb{R}$  beliebig.

Wenn wir nun den Anfangswert einstellen wollen, erhalten wir  $y_0 \stackrel{!}{=} y(t_0) = C e^{A(t_0)}$  und erkennen, dass es geschickt ist, die Stammfunktion  $A$  von  $a$  so zu wählen, dass  $A(t_0) = 0$  gilt, d. h.  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$ . Dann gilt  $y_0 = C e^0 = C$ . Zusammengesteckt liefert das die allgemeine Lösung des homogenen Problems (7.3)

$$u(t) = y_0 e^{A(t)} \quad \text{mit} \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds. \quad (7.4)$$

Wir wenden uns nun dem **inhomogenen Problem** (7.2) zu. Die verwendete Methode heißt *Variation der Konstanten* und ist ein geradezu universelles Werkzeug zur Lösung von inhomogenen linearen Systemen oder Gleichungen, vorausgesetzt man hat die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems bei der Hand, was ja bei uns nun der Fall ist.

Zur Verwendung dieses Verfahrens müssen wir genau das tun, was der Name sagt: Wir nehmen die allgemeine Lösung  $Ce^{A(t)}$  des homogenen Problems her und lassen die Konstante variieren, d. h. wir suchen eine Lösung der Form  $u(t) = C(t)e^{A(t)}$  mit  $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$ . Dieser Ansatz führt auf

$$u'(t) = C'(t)e^{A(t)} + C(t)A'(t)e^{A(t)} = C'(t)e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)}.$$

Damit unser  $u$  eine Lösung der inhomogenen Gleichung wird, muss also gelten

$$C'(t)e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)} = u'(t) = a(t)u(t) + b(t) = a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t),$$

d. h. wir brauchen

$$C'(t)e^{A(t)} = b(t) \quad \text{bzw.} \quad C'(t) = b(t)e^{-A(t)}.$$

Diese DGL lässt sich nun durch einfaches Hochintegrieren lösen und wir bekommen

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds.$$

Fassen wir wieder alles zusammen, erhalten wir

$$u(t) = C(t)e^{A(t)} = C(t_0)e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds.$$

Stellen wir noch den Anfangswert ein, so erhalten wir, da das ganze Integral genauso wie die Funktion  $A$  in  $t_0$  verschwindet,  $C(t_0) = y_0$  und damit die endgültige Lösung von (7.2) zu

$$u(t) = y_0e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds.$$

Wir fassen die gerade gewonnenen Erkenntnisse noch in einem Satz zusammen und geben der gefundenen Formel dabei auch ihren üblichen Namen.

**Satz 7.5** (Variation-der-Konstanten-Formel, Duhamel'sche Formel). *Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Dann ist die eindeutige globale Lösung des Anfangswertproblems (7.2) gegeben durch*

$$y_0e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)} ds \quad \text{mit} \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds.$$

*Beweis.* Die Existenz einer eindeutigen globalen Lösung garantiert Satz 7.3. Dass diese durch die gegebene Formel gegeben ist, rechnet man einfach nach.  $\square$

## 7 Lineare Differentialgleichungen

**Bemerkung 7.6.** Betrachtet man nochmal die gerade gefundene Lösungsformel, so fällt erneut eine Parallele zu linearen Gleichungssystemen auf. Die Lösungen des inhomogenen Problems ergeben sich als Summe aller Lösungen des zugehörigen homogenen Systems ( $y_0 e^{A(t)}$ ) und einer speziellen Lösung des inhomogenen Problems (der Integralterm). Die spezielle Lösung wird auch hier oft *Partikulärlösung* genannt.

Wir wollen die Formel bzw. das Verfahren einmal in Aktion sehen. Dabei wird sichtbar, dass man sich die Duhamel'sche Formel nicht einmal merken muss, man muss nur wissen, dass man das homogene Problem lösen muss (was immer nach getrennten Veränderlichen geht) und dann den Ansatz der Variation der Konstanten macht.

**Beispiel 7.7.** Wir lösen das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t) + t, \quad t \in I, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Das zugehörige homogene Problem ist hier  $y'(t) = y(t)$  und dessen allgemeine Lösung haben wir schon in Beispiel 1.1 zu  $Ce^t$  mit  $C \in \mathbb{R}$  beliebig bestimmt.

Wir können also den Ansatz der Variation der Konstanten machen und suchen also eine Lösung der Form  $u(t) = C(t)e^t$ . Dann gilt

$$u(t) + t \stackrel{!}{=} u'(t) = C'(t)e^t + C(t)e^t = C'(t)e^t + u(t).$$

Also brauchen wir  $C'(t)e^t = t$ , d. h.  $C'(t) = te^{-t}$ . Integriert man diese Gleichung, so liefert das

$$C(t) = \int te^{-t} dt = -te^{-t} + \int e^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t} + c$$

und damit ist

$$u(t) = (-te^{-t} - e^{-t} + c)e^t = -t - 1 + ce^t.$$

Mit dem Anfangswert gilt dann

$$1 \stackrel{!}{=} u(0) = (-1 + c)e^0 = c - 1, \quad \text{also } c = 2,$$

so dass unsere endgültige Lösung sich zu

$$u(t) = 2e^t - t - 1$$

ergibt, was man auch leicht durch eine Probe bestätigt.

Das in den letzten Nummern vorgeführte Verfahren zur Lösung skalarer linearer DGLen lässt sich leider nicht auf allgemeine Systeme übertragen, denn das ganze fußt ja auf dem Verfahren für getrennte Veränderliche. Es stellt sich leider heraus,

dass es keine allgemeine Lösungsformel mehr gibt, aber wir werden sehen, dass uns zumindest das qualitative Lösungsverhalten und die Methode der Variation der Konstanten erhalten bleibt.

Wir beginnen auch im Fall von linearen Systemen wieder mit der Behandlung des homogenen Problems und beschäftigen uns zunächst mit dessen Lösungsraum.

**Satz 7.8** (Superpositionsprinzip). *Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $d \in \mathbb{N}$ , sowie  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  eine stetige Funktion. Dann ist die Menge aller Lösungen des homogenen Problems  $y'(t) = A(t)y(t)$  ein  $d$ -dimensionaler Untervektorraum von  $C^1(I, \mathbb{R}^d)$ .*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst mit dem Untervektorraumkriterium, dass unsere betrachtete Lösungsmenge

$$L = \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^d) : u'(t) = A(t)u(t)\}$$

ein Untervektorraum von  $C^1(I, \mathbb{R}^d)$  ist. Nach Satz 7.3 ist  $L$  zunächst mal nicht leer und sind  $u, v \in L$ , sowie  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$(\lambda u + \mu v)'(t) = \lambda u'(t) + \mu v'(t) = \lambda A(t)u(t) + \mu A(t)v(t) = A(t)(\lambda u(t) + \mu v(t))$$

und damit ist auch  $\lambda u + \mu v \in L$ .

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass  $\dim(L) = d$  ist. Sei dazu  $e_1, e_2, \dots, e_d$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^d$  und für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$  bezeichne  $u_j$  die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems  $y'(t) = A(t)y(t)$  mit  $y(t_0) = e_j$ . Wir zeigen nun, dass  $u_1, u_2, \dots, u_d$  eine Basis von  $L$  bilden.

Zunächst sind diese  $d$  Funktionen linear unabhängig, denn für  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$  mit  $\sum_{j=1}^d \lambda_j u_j = 0$  gilt an der Stelle  $t_0$

$$0 = \sum_{j=1}^d \lambda_j u_j(t_0) = \sum_{j=1}^d \lambda_j e_j,$$

womit alle  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , Null sind.

Zum Nachweis, dass unsere  $d$  Funktionen ganz  $L$  erzeugen, sei  $u \in L$  beliebig gegeben. Dann ist  $u(t_0) \in \mathbb{R}^d$ , es gibt also  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$  mit  $u(t_0) = \sum_{j=1}^d \lambda_j e_j$ . Mit diesen  $\lambda_j$  bilden wir die Funktion  $v = \sum_{j=1}^d \lambda_j u_j$ . Diese ist dann als Linearkombination von Funktionen in  $L$  selbst wieder in  $L$ , also eine Lösung von  $y'(t) = A(t)y(t)$ . Außerdem genügt sie der Anfangsbedingung

$$v(t_0) = \sum_{j=1}^d \lambda_j u_j(t_0) = \sum_{j=1}^d \lambda_j e_j = u(t_0).$$

Dieses eindeutig lösbares Anfangswertproblem wird also sowohl von  $u$  als auch von  $v$  gelöst, womit  $u = v$  gilt und wir fertig sind.  $\square$

## 7 Lineare Differentialgleichungen

**Bemerkung 7.9.** Das Superpositionsprinzip ist ein fundamentales physikalisches Prinzip in vielen Bereichen. Es besagt, dass wann immer man zwei Lösungen eines homogenen linearen Problems addiert, d. h. überlagert („superponiert“), dabei wieder eine Lösung des selben Problems herauskommt. Es gilt z. B. für (freie) Schwingungen jeder Art (Töne, Wasserwellen, ...).

Da nun der Raum  $L$  aller Lösungen unserer homogenen linearen DGL ein Vektorraum ist, ist es wiederum interessant, Basen von  $L$  anzuschauen, denn aus einer solchen lassen sich dann alle Lösungen zusammenbauen. Meistens schreibt man diese in Form einer Matrix, vgl. die folgende Definition.

**Definition 7.10.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $d \in \mathbb{N}$  und  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  stetig, sowie  $L = \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^d) : u'(t) = A(t)u(t)\}$  der Lösungsraum des zugehörigen homogenen linearen Systems.

- (a) Eine Basis von  $L$  heißt Fundamentalsystem des Systems.
- (b) Eine stetig differenzierbare Matrixfunktion  $Z : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ , deren Spaltenvektoren ein Fundamentalsystem bilden, wird Fundamentalmatrix des Systems genannt.

**Bemerkung 7.11.** Ist  $Z : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  eine Fundamentalmatrix von  $y'(t) = A(t)y(t)$ , dann gilt mit komponentenweiser Anwendung der Ableitung  $Z'(t) = A(t)Z(t)$ , denn jede Spalte von  $Z$  erfüllt nach Definition diese Gleichheit.

Nun können wir uns auch für Systeme dem inhomogenen Problem zuwenden. Wir zeigen zunächst, dass deren Lösungen sich wieder als Summe einer speziellen Lösung mit allen Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung ergeben.

**Satz 7.12** (Lösung inhomogener linearer DGLen). Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $d \in \mathbb{N}$ , sowie  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetige Funktionen. Ist  $Z : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  eine Fundamentalmatrix von  $y'(t) = A(t)y(t)$ ,  $L$  der Lösungsraum dieses Systems und  $u_p : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine Lösung (Partikulärlösung) der inhomogenen DGL

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad (7.5)$$

so gilt für die Menge  $L_{\text{inh}}$  aller Lösungen von (7.5)

$$L_{\text{inh}} = \{u_p + v : v \in L\} = \{u_p + Zc : c \in \mathbb{R}^d\}.$$

*Beweis.* 1.  $L_{\text{inh}} \subseteq \{u_p + v : v \in L\}$ : Sei  $u$  eine Lösung von (7.5). Dann gilt für die Funktion  $v := u - u_p$

$$v' = u' - u_p' = Au + b - Au_p - b = A(u - u_p) = Av.$$

Also ist  $u = u_p + v$  mit einer Funktion  $v \in L$ .

2.  $\{u_p + v : v \in L\} \subseteq \{u_p + Zc : c \in \mathbb{R}^d\}$ : Ist  $v \in L$ , so ist nach der Definition einer Fundamentalmatrix  $v$  eine Linearkombination der Spalten von  $Z$ , also gibt es ein  $c \in \mathbb{R}^d$  mit  $v = Zc$ .
3.  $\{u_p + Zc : c \in \mathbb{R}^d\} \subseteq L_{\text{inh}}$ : Sei  $u = u_p + Zc$  für ein  $c \in \mathbb{R}^d$ . Schreiben wir  $z_1, z_2, \dots, z_d$  für die Spalten von  $Z$ , so gilt

$$\begin{aligned} u' &= \left( u_p + \sum_{j=1}^d c_j z_j \right)' = u_p' + \sum_{j=1}^d c_j z_j' = Au_p + b + \sum_{j=1}^d c_j Az_j \\ &= Au_p + A \sum_{j=1}^d c_j z_j + b = Au + b. \end{aligned}$$

Also ist  $u \in L_{\text{inh}}$ . □

Zum Finden von Lösungen eines konkreten inhomogenen Systems von linearen DGLen haben wir also zwei Dinge zu erledigen. Zum Einen müssen wir eine Fundamentalmatrix finden und zum Anderen eine Partikulärlösung.

Das explizite Bestimmen einer Fundamentalmatrix ist i. A. nicht möglich. Nur in einigen Spezialfällen ist es möglich konkrete Formeln anzugeben. Wir werden uns damit im nächsten Abschnitt 8 beschäftigen.

Im Moment wollen wir zunächst nur das folgende angenehme Lemma notieren, das dazu führt, dass zumindest die Überprüfung, ob eine gegebene Matrixfunktion ein Fundamentalsystem darstellt, nicht zu viel Arbeit bedeutet.

**Lemma 7.13.** *Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $d \in \mathbb{N}$  und  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  stetig. Sind  $u_1, u_2, \dots, u_d : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  Lösungen von  $y'(t) = A(t)y(t)$ , so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a)  $u_1, u_2, \dots, u_d$  sind linear unabhängig, d. h.  $Z = (u_1, u_2, \dots, u_d)$  ist eine Fundamentalmatrix.
- (b) Für alle  $t \in I$  sind  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_d(t)$  linear unabhängig.
- (c) Es gibt ein  $t \in I$ , so dass  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_d(t)$  linear unabhängig sind.

*Beweis. 1. (a)  $\implies$  (b)* Sei  $t_0 \in I$ . Seien weiter  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$  gegeben mit  $\sum_{j=1}^d \lambda_j u_j(t_0) = 0$ . Dann gilt für die Funktion  $u = \sum_{j=1}^d \lambda_j u_j$

$$\begin{aligned} u' &= \sum_{j=1}^d \lambda_j u_j' = \sum_{j=1}^d \lambda_j A u_j = A \sum_{j=1}^d \lambda_j u_j = Au \quad \text{und} \\ u(t_0) &= \sum_{j=1}^d \lambda_j u_j(t_0) = 0. \end{aligned}$$

## 7 Lineare Differentialgleichungen

Nach Satz 7.3 ist das Anfangswertproblem  $y'(t) = A(t)y(t)$ ,  $y(t_0) = 0$  aber eindeutig lösbar und eine offensichtliche Lösung ist die Nullfunktion. Also ist

$$0 = u = \sum_{j=1}^d \lambda_j u_j.$$

Nach Voraussetzung sind die Funktionen  $u_1, u_2, \dots, u_d$  linear unabhängig, also sind alle  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , Null.

**2. (b)  $\implies$  (c)** bedarf keines Beweises.

**3. (c)  $\implies$  (a)** Sei  $t_0$  ein Element von  $I$ , für das  $u_1(t_0), u_2(t_0), \dots, u_d(t_0)$  linear unabhängig sind. Sind  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass  $\sum_{j=1}^d \lambda_j u_j = 0$  ist, so ist insbesondere  $0 = \sum_{j=1}^d \lambda_j u_j(t_0)$  und nach Voraussetzung sind alle  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , Null.  $\square$

Zur späteren Verwendung notieren wir noch das folgende Lemma.

**Lemma 7.14.** Sei  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  stetig und  $Z : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  eine Fundamentalmatrix von  $y'(t) = A(t)y(t)$ . Ist  $V \in \mathbb{R}^{d \times d}$  invertierbar, so ist auch  $W(t) := Z(t)V$  eine Fundamentalmatrix.

*Beweis.* Mit  $Z(t)$  ist auch  $W(t)$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$  invertierbar und es gilt

$$W'(t) = (Z(t)V)' = Z'(t)V = A(t)Z(t)V = A(t)W(t). \quad \square$$

Um im allgemeinen Fall weiterarbeiten zu können, müssen wir im Moment davon ausgehen, dass wir irgendwoher eine Fundamentalmatrix haben. Dann können wir zur Bestimmung einer Partikulärlösung wieder die Methode der Variation der Konstanten versuchen.

Sei also  $Z : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  eine Fundamentalmatrix des homogenen Problems  $y'(t) = A(t)y(t)$ . Dann haben wir in Satz 7.12 gesehen, dass die allgemeine Lösung dieses Problems die Form  $Z(t)c$  mit beliebigem  $c \in \mathbb{R}^n$  hat. Unser Ansatz für die Variation der Konstanten ist also

$$u_p(t) = Z(t)c(t), \quad t \in I,$$

für die Partikulärlösung. Damit muss dann gelten

$$Au_p + b \stackrel{!}{=} u_p' = Z'c + Zc' \stackrel{\text{Bem. 7.11}}{=} AZc + Zc' = Au_p + Zc'.$$

Also muss  $Zc' = b$  gelten. Da  $Z(t)$  als Fundamentalmatrix für jedes  $t \in I$  nach Lemma 7.13 linear unabhängige Spalten hat, können wir  $Z(t)$  jeweils invertieren und bekommen die Bedingung

$$c'(t) = Z(t)^{-1}b(t), \quad t \in I.$$

Eine Lösung davon bekommen wir, wenn wir für ein beliebiges  $t_0 \in I$  rechnen:  
 $c(t) = \int_{t_0}^t Z(s)^{-1}b(s) \, ds$ . Damit ist dann  $u_p$  mit

$$u_p(t) = Z(t)c(t) = Z(t) \int_{t_0}^t Z(s)^{-1}b(s) \, ds$$

eine Partikulärlösung mit  $u_p(t_0) = 0$ .

Wir fassen diese Überlegungen noch mal in einem Satz zusammen.

**Satz 7.15** (Variation-der-Konstanten-Formel, Duhamel'sche Formel). *Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $d \in \mathbb{N}$ ,  $t_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^d$ , sowie  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  und  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetige Funktionen. Ist  $Z : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  eine Fundamentalmatrix von  $y'(t) = A(t)y(t)$ , so ist die eindeutige Lösung (vgl. Satz 7.3) von*

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) + b(t), \quad t \in I, \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

gegeben durch

$$Z(t)Z(t_0)^{-1}y_0 + Z(t) \int_{t_0}^t Z(s)^{-1}b(s) \, ds.$$

**Bemerkung 7.16.** Hat man sogar eine Fundamentalmatrix, die  $Z(t_0) = E$  mit der Einheitsmatrix  $E$  erfüllt, so liest sich die Duhamel'sche Formel wie im skalaren Fall, vgl. Satz 7.5, wenn man dort die  $1 \times 1$ -Fundamentalmatrix  $Z(t) = e^{A(t)}$  verwendet.

**Beispiel 7.17.** Wir nehmen den harmonischen Oszillator aus Beispiel 6.5 wieder auf, setzen aber der Einfachheit halber unten dann  $\omega^2 = 1$ . Bisher hatten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) &= 0, \quad t > 0, \\ y(0) &= a \\ y'(0) &= b \end{cases}$$

umgeschrieben zu dem System

$$v'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} v(t).$$

Wir nehmen noch eine Inhomogenität und einen Anfangswert dazu und betrachten das inhomogene lineare  $2 \times 2$ -System

$$v'(t) = A(t)v(t) + b(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} v(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

mit Anfangswert  $v(0) = (1, 1)^T$ .

## 7 Lineare Differentialgleichungen

Getreu dem aktuellen Vorgehen regnet im Moment die Fundamentalmatrix noch vom Himmel:

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir diese aber tatsächlich auch berechnen können. Im Moment können wir zumindest nachweisen, dass es eine ist.

Dazu verifizieren wir zunächst, dass die Spalten  $z_1$  und  $z_2$  der Matrix  $Z$  jeweils das homogene System lösen:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z_1(t) \quad \text{und} \\ z_2'(t) &= \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z_2(t). \end{aligned}$$

Außerdem sind  $z_1(0) = (0, 1)^T$  und  $z_2(0) = (-1, 0)^T$  offensichtlich linear unabhängig, womit nach Lemma 7.13 die beiden Spalten für alle  $t \in I$  und auch als Funktionen linear unabhängig sind. Also ist  $Z$  eine Fundamentalmatrix unseres homogenen Systems.

Die Lösung unseres Anfangswertproblems bekommen wir nun mit der Variation-der-Konstanten-Formel. Verwendet man, dass die Matrix  $Z(t)$  jeweils orthogonal ist, so lässt sich diese zum Glück leicht invertieren. Das ergibt

$$\begin{aligned} v(t) &= Z(t)Z(0)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Z(t) \int_0^t Z(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Z(t) \int_0^t \begin{pmatrix} \sin(s) & \cos(s) \\ -\cos(s) & \sin(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \sin(t) + \cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} + Z(t) \int_0^t \begin{pmatrix} s \cos(s) \\ s \sin(s) \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

Im Integral muss man nun in beiden Komponenten partiell integrieren. Das liefert

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \sin(t) + \cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \sin(t) + \cos(t) - 1 \\ -t \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(t) + \cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} t \sin^2(t) + \sin(t) \cos(t) - \sin(t) + t \cos^2(t) - \sin(t) \cos(t) \\ t \sin(t) \cos(t) + \cos^2(t) - \cos(t) - t \sin(t) \cos(t) + \sin^2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(t) + \cos(t) + t - \sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) + 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) + t \\ -\sin(t) + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun wollen wir uns langsam dem aufgeschobenen Problem der Bestimmung einer Fundamentalmatrix zuwenden. Wir wissen bisher, dass die Spalten einer Fundamentalmatrix für alle  $t \in I$  linear unabhängig sind, d. h. die Determinante einer solchen Matrix verschwindet nirgends. Wir geben dieser zunächst einen Namen.

**Definition 7.18.** *Es seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $d \in \mathbb{N}$  und  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  eine stetige Funktion. Ist  $Z : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  eine Fundamentalmatrix des Systems  $y'(t) = A(t)y(t)$ , so heißt  $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\omega(t) = \det(Z(t))$  Wronski-Determinante des Systems.*

Auch wenn man die Fundamentalmatrix nicht kennt, kann man erstaunlicherweise etwas über die Wronski-Determinante aussagen.

**Satz 7.19.** *Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $d \in \mathbb{N}$  und  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  eine stetige Funktion. Weiter seien  $z_1, z_2, \dots, z_d : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  Lösungen von  $y'(t) = A(t)y(t)$ . Ist  $Z(t)$  die Matrix mit Spalten  $z_1, z_2, \dots, z_d$ , so ist  $\omega(t) = \det(Z(t))$ ,  $t \in I$ , stetig differenzierbar auf  $I$  und es gilt für alle  $t, t_0 \in I$*

$$(a) \quad \omega'(t) = \text{Spur}(A(t))\omega(t) \quad \text{und}$$

$$(b) \quad \omega(t) = \omega(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur}(A(s)) \, ds\right).$$

*Beweis.* Die Aussage in (b) folgt aus (a) und der allgemeinen Lösungsformel für skalare, homogene lineare Gleichungen, vgl. (7.4).

Dafür ist der Beweis von (a) umso unangenehmer zu führen. Zunächst ist der Fall, dass  $\omega(t_0) = 0$  ist, leicht zu erledigen. Dann muss nach Lemma 7.13 sogar  $\omega(t) = 0$  für alle  $t \in I$  gelten und die Gleichung in (a) ist sicher wahr. Es sei also  $\omega(t_0) \neq 0$  und damit auch  $\omega(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ .

Dann ist die Matrix  $Z(t)$  für alle  $t \in I$  invertierbar und wir können  $B(t) = Z(t)^{-1}A(t)Z(t)$  betrachten. Nun gilt  $Z'(t) = A(t)Z(t) = Z(t)B(t)$  nach Bemerkung 7.11. Also ist für jedes  $j \in \{1, \dots, d\}$  mit dem  $j$ -ten Standardbasisvektor  $e_j$

$$z'_j(t) = \left(Z(t)e_j\right)' = Z'(t)e_j = Z(t)B(t)e_j.$$

Nun ist  $B(t)e_j$  die  $j$ -te Spalte  $(b_{k,j}(t))_{k=1}^d$  der Matrix  $B(t)$  und wir bekommen

$$z'_j(t) = Z(t) \left(b_{k,j}(t)\right)_{k=1}^d = \sum_{k=1}^d b_{k,j}(t) z_k(t). \quad (7.6)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir beginnen die Determinante abzuleiten. Dazu verwenden wir die *Leibniz-Formel*:

$$\det(Z(t)) = \sum_{\pi \in S_d} \text{sgn}(\pi) z_{1\pi(1)}(t) \cdot z_{2\pi(2)}(t) \cdot \dots \cdot z_{d\pi(d)}(t).$$

## 7 Lineare Differentialgleichungen

Hierbei bezeichnet  $S_d$  die Permutationsgruppe auf  $\{1, 2, \dots, d\}$  und  $\text{sgn}(\pi)$  das Signum von  $\pi \in S_d$ . Damit und mit dröflfacher Anwendung der Produktregel gilt

$$\begin{aligned} \omega'(t) = \sum_{\pi \in S_d} \text{sgn}(\pi) & \left[ z'_{1\pi(1)}(t) \cdot z_{2\pi(2)}(t) \cdot \dots \cdot z_{d\pi(d)}(t) \right. \\ & + z_{1\pi(1)}(t) \cdot z'_{2\pi(2)}(t) \cdot z_{3\pi(3)}(t) \cdot \dots \cdot z_{d\pi(d)}(t) \\ & + \dots + z_{1\pi(1)}(t) \cdot z_{2\pi(2)}(t) \cdot \dots \cdot z_{d-1\pi(d-1)}(t) \cdot z'_{d\pi(d)}(t) \left. \right]. \end{aligned}$$

Vertauscht man nun die Summationsreihenfolge der beiden endlichen Summen ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega'(t) = (\det(Z(t)))' & = \det(z'_1(t), z_2(t), \dots, z_d(t)) \\ & + \det(z_1(t), z'_2(t), z_3(t), \dots, z_d(t)) \\ & + \dots + \det(z_1(t), \dots, z_{d-1}(t), z'_d(t)). \end{aligned}$$

Setzen wir hier (7.6) ein, so erhalten wir unter Verwendung der Linearität der Determinante

$$\begin{aligned} \omega'(t) & = \det\left(\sum_{k=1}^d b_{k1}(t)z_k(t), z_2(t), \dots, z_d(t)\right) \\ & + \det\left(z_1(t), \sum_{k=1}^d b_{k2}(t)z_k(t), z_3(t), \dots, z_d(t)\right) \\ & + \dots + \det\left(z_1(t), \dots, z_{d-1}(t), \sum_{k=1}^d b_{kd}(t)z_k(t)\right) \\ & = \sum_{k=1}^d \left[ b_{k1}(t) \det(z_k(t), z_2(t), \dots, z_d(t)) \right. \\ & + b_{k2}(t) \det(z_1(t), z_k(t), z_3(t), \dots, z_d(t)) \\ & + \dots + b_{kd}(t) \det(z_1(t), \dots, z_{d-1}(t), z_k(t)) \left. \right]. \end{aligned}$$

Da die Determinante alternierend ist, ist in jedem Summanden der äußeren Summe nur einer der inneren Summanden ungleich Null. Das ergibt

$$\begin{aligned} \omega'(t) & = b_{11}(t) \det(z_1(t), z_2(t), \dots, z_d(t)) + b_{22}(t) \det(z_1(t), z_2(t), z_3(t), \dots, z_d(t)) \\ & + \dots + b_{dd}(t) \det(z_1(t), \dots, z_{d-1}(t), z_d(t)) \\ & = \sum_{j=1}^d b_{jj}(t) \det(z_1(t), z_2(t), \dots, z_d(t)) = \text{Spur}(B(t))\omega(t). \end{aligned}$$

Schließlich sind wegen  $B(t) = Z(t)^{-1}A(t)Z(t)$  die Matrizen  $A(t)$  und  $B(t)$  für jedes  $t \in I$  ähnlich, d. h. es gilt jeweils  $\text{Spur}(A(t)) = \text{Spur}(B(t))$  und wir haben (a) gezeigt.  $\square$

**Bemerkung 7.20.** Die Wronski-Determinante ist damit selbst die Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung. Sind  $W(t)$  und  $Z(t)$ ,  $t \in I$ , zwei Fundamentalmatrizen des selben Systems  $y'(t) = A(t)y(t)$ , so gilt mit Hilfe von Satz 7.19 (b) für ein  $t_0 \in I$

$$\det(W(t)) = \det(W(t_0)) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur}(A(s)) \, ds\right)$$

und

$$\det(Z(t)) = \det(Z(t_0)) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur}(A(s)) \, ds\right), \quad t \in I.$$

Da  $Z$  eine Fundamentalmatrix ist, gilt  $\det(Z(t_0)) \neq 0$  und wir erhalten für alle  $t \in I$

$$\exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur}(A(s)) \, ds\right) = \frac{\det(Z(t))}{\det(Z(t_0))}$$

und damit

$$\det(W(t)) = \frac{\det(W(t_0))}{\det(Z(t_0))} \det(Z(t)).$$

Die Wronski-Determinanten unterscheiden sich also höchstens durch eine multiplikative Konstante ungleich Null.

Damit ist die Wronski-Determinante eines Systems von linearen Differentialgleichungen vor allem eine Kenngröße des Systems und weniger der speziellen Wahl einer Fundamentalmatrix.



# 8 Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten

Im letzten Kapitel wurde schon erwähnt, dass die explizite Bestimmung eines Fundamentalsystems für lineare Systeme im Allgemeinen nicht möglich ist. Wir wollen uns in diesem Abschnitt dem Spezialfall einer konstanten Matrixfunktion  $A$  widmen, in dem dieses Problem eine elegante Lösung hat. Wir betrachten also

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

mit einer festen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  oder<sup>1</sup>  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  und einer stetigen Funktion  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Wir haben schon gesehen wie man das inhomogene Problem mit Hilfe der Variation der Konstanten lösen kann, sobald eine Lösung des homogenen Problems bekannt ist. Es bleibt also nur noch die Aufgabe übrig ein Fundamentalsystem zu finden, d. h. eine Matrixwertige Funktion  $Z : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  (oder  $\mathbb{C}^{d \times d}$ ) mit  $Z'(t) = AZ(t)$  und  $\det(Z(t)) \neq 0$  für alle  $t \in I$ .

Formal ist das kreative Erraten einer Fundamentalmatrix, genügend Frechheit vorausgesetzt, kein Problem:  $Z(t) = e^{tA}$ . Es bleibt die Frage, wie die Exponentialfunktion einer Matrix definiert sein soll. Dazu stellen wir fest:

**Satz 8.1.** Sei  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ . Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$  absolut in  $\mathbb{C}^{d \times d}$ .

*Beweis.* Sei  $|\cdot|$  eine Norm in  $\mathbb{C}^d$  und  $\|\cdot\|$  die zugehörige Matrixnorm, d. h.  $\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$ . Für diese gilt  $\|A^n\| \leq \|A\|^n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|} < \infty$$

und somit die Reihe absolut konvergent. □

Das ermöglicht uns die folgende Definition.

---

<sup>1</sup>Wir haben bisher die gesamte Vorlesung in  $\mathbb{R}^d$  zugebracht. Warum steht hier plötzlich nun  $\mathbb{C}$ ? Das liegt daran, dass uns unsere Betrachtungen tief in die Eigenwerttheorie von Matrizen führen werden und aus den bekannten Gründen macht Eigenwerttheorie in  $\mathbb{R}$  keine Freude.

## 8 Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten

**Definition 8.2.** Zu  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  heißt

$$\exp(A) := e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \in \mathbb{C}^{d \times d}$$

Matrixexponentialfunktion.

Wir sammeln einige einfache algebraische Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion, deren Beweis als Übungsaufgabe verbleibt.

**Lemma 8.3.** Seien  $A, B \in \mathbb{C}^{d \times d}$  und  $s, t \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

- (a)  $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B$ .
- (b)  $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$ .
- (c)  $e^{tA+sE} = e^s e^{tA}$ .
- (d)  $e^A$  ist invertierbar und  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .
- (e) Bezeichnet  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  die Diagonalmatrix mit Einträgen  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$  auf der Diagonalen, so gilt  $e^{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_d})$ .

Man beachte, dass die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion  $e^{A+B} = e^A e^B$  in (a) nur für kommutierende Matrizen gilt. Tatsächlich ist das sogar eine Äquivalenz: Die Gültigkeit der Funktionalgleichung impliziert schon, dass die Matrizen kommutieren.

Für uns ist aber die entscheidende Eigenschaft der Matrixexponentialfunktion, dass Sie uns eine Fundamentalmatrix liefert. Das halten wir im nächsten Satz fest.

**Satz 8.4.** Sei  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ . Dann ist  $Z(t) = e^{tA}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , eine Fundamentalmatrix von  $y'(t) = Ay(t)$ .

*Beweis.* Der Konvergenzradius der Potenzreihe, die  $e^{tA}$  definiert, ist Unendlich. Also ist  $t \mapsto e^{tA}$  eine differenzierbare Funktion und wir dürfen unter dem Summenzeichen differenzieren. Das ergibt

$$Z'(t) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}A^n}{n!} = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = AZ(t).$$

Des Weiteren ist nach Lemma 8.3 (d) die Matrix  $e^{tA}$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$  invertierbar, d. h.  $\det(e^{tA}) \neq 0$ .  $\square$

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie man  $e^{tA}$  für eine konkret gegebene Matrix  $A$  berechnen kann. Eine erste erfreuliche Antwort gibt es für diagonalisierbare

Matrizen, d. h. falls es eine invertierbare Matrix  $V \in \mathbb{C}^{d \times d}$  gibt, so dass  $V^{-1}AV = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tVDV^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (VDV^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n VD^n V^{-1}}{n!} = V \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n D^n}{n!} V^{-1} \\ &= Ve^{tD}V^{-1} = V \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_d})V^{-1} \end{aligned} \quad (8.1)$$

nach Lemma 8.3 (e).

Mit unseren bisherigen Erkenntnissen bekommen wir für diagonalisierbare Matrizen schon eine zufriedenstellende Antwort.

**Satz 8.5.** Sei  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  und jeweils zugehörigen Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_d$ . Dann ist

$$\{e^{t\lambda_j} v_j : j = 1, \dots, d\}$$

ein Fundamentalsystem von  $y'(t) = Ay(t)$ .

*Beweis.* Die Matrix  $W(t)$  mit den Spalten  $e^{t\lambda_j} v_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , ist mit Hilfe von (8.1) und mit der dortigen Notation gerade gegeben durch

$$W(t) = V \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_d}) = e^{tA}V.$$

Da  $e^{tA}$  eine Fundamentalmatrix ist, ist nach Lemma 7.14 auch  $W(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , eine solche.  $\square$

**Bemerkung 8.6.** Ist  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  so will man üblicherweise auch ein reelles Fundamentalsystem angeben. Hat  $A$  komplexe Eigenwerte, so treten diese in konjugiert komplexen Paaren auf. Für jedes dieser Paare  $\lambda, \bar{\lambda}$  bildet man  $\text{Re}(e^{t\lambda}v)$  und  $\text{Im}(e^{t\lambda}v)$ , wobei  $v$  der zu  $\lambda$  gehörige Eigenvektor ist, und wirft die Lösungen zu  $\bar{\lambda}$  weg. Macht man dies für alle komplexen Eigenwerte und nimmt dazu noch die (sowieso reellen) Lösungen zu den reellen Eigenwerten, so erhält man  $d$  linear unabhängige reelle Lösungen, d. h. ein reelles Fundamentalsystem.

Im Allgemeinen sind Matrizen nicht diagonalisierbar, aber es gibt mit der Jordan-Normalform eine brauchbare fast-diagonale ähnliche Matrix.

**Erinnerung 8.7.** (Jordan-Normalform) Die Matrix  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  habe die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ , wobei jeder Eigenwert in der Aufzählung so oft auftaucht wie es seiner geometrischen Vielfachheit entspricht, d. h. entsprechend der Dimension des zugehörigen Eigenraums. Dann existiert eine Basiswechsellmatrix  $V \in \mathbb{C}^{d \times d}$  mit

$$J = V^{-1}AV = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_\ell} \end{pmatrix},$$

## 8 Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten

wobei jedes Jordankästchen  $J_{\lambda_i} \in \mathbb{C}^{p_i \times p_i}$  die Form

$$J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

hat.

Für die zugehörigen Basisvektoren, d. h. Spalten von  $V$ ,  $v_1^{(i)}, \dots, v_{p_i}^{(i)}$  gilt

$$0 = (A - \lambda_i E)v_1^{(i)} \quad \text{und} \quad v_j^{(i)} = (A - \lambda_i E)v_{j+1}^{(i)}, \quad j = 1, \dots, p_i - 1.$$

Statt  $e^{tA}$  können wir also  $e^{tJ}$  für die zugehörige Jordan-Normalform ausrechnen. Das vereinfacht die Sache aus zwei Gründen sehr. Zum Einen verträgt sich die Matrixexponentialfunktion mit der Blockstruktur der Jordannormalform, denn haben zwei Matrizen  $A$  und  $B$  die selbe Blockstruktur, so bleibt diese bei der Bildung von  $A+B$  und  $AB$  erhalten, so dass mit  $tJ$  auch  $e^{tJ}$  die selbe Blockstruktur hat. Damit gilt

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_{\lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tJ_{\lambda_2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{tJ_{\lambda_\ell}} \end{pmatrix}.$$

Zum Anderen lässt sich die Matrixexponentialfunktion eines Jordankästchens dank seiner einfachen Struktur tatsächlich mit vertretbarem Aufwand ausrechnen. Dazu zerlegen wir für den Eigenwert  $\lambda$  das  $p \times p$ -Jordankästchen  $J_\lambda$  folgendermaßen

$$J_\lambda = \lambda E + N \quad \text{mit} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $\lambda E$  und  $N$  kommutieren, gilt  $e^{tJ_\lambda} = e^{t\lambda E + tN} = e^{t\lambda} e^{tN}$  (vgl. auch Lemma 8.3 (c)).

Wir müssen also nur noch  $e^{tN}$  ausrechnen. Das ist machbar, weil  $N$  nilpotent ist. Es ist nämlich

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, N^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad N^p = 0.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 e^{tN} &= \sum_{n=0}^p \frac{t^n}{n!} N^n = E + tN + \frac{t^2}{2} N^2 + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} N^{p-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Damit bekommen wir das folgende Resultat zur Bestimmung eines Fundamentalsystems für beliebige lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten.

**Theorem 8.8.** Sei  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ . Zu jedem Eigenvektor  $v_1$  von  $A$  mit zugehörigem Eigenwert  $\lambda$  bestimme man die zum zugehörigen Jordankästchen gehörenden Basisvektoren  $v_1, \dots, v_p$  mit  $v_j = (A - \lambda E)v_{j+1}$ ,  $j = 1, \dots, p-1$ , und bestimme daraus die  $p$  Funktionen

$$e^{t\lambda} v_1, e^{t\lambda}(tv_1 + v_2), e^{t\lambda} \left( \frac{t^2}{2} v_1 + tv_2 + v_3 \right), \dots, e^{t\lambda} \left( \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} v_1 + \dots + tv_{p-1} + v_p \right).$$

Nimmt man diese Lösungen für jeden Jordanblock, d. h. jeden Eigenvektor von  $A$ , zusammen, erhält man ein Fundamentalsystem von  $y'(t) = Ay(t)$ .

*Beweis.* Sei  $J \in \mathbb{C}^{d \times d}$  die Jordannormalform von  $A$  und  $V$  die zugehörige Basiswechselmatrix mit  $J = V^{-1}AV$ . Dann ist nach Lemma 7.14 durch  $Ve^{tJ} = e^{tAV}$  eine Fundamentalmatrix von  $y'(t) = Ay(t)$  gegeben.

Dank der Blockstruktur von  $e^{tJ}$  können wir jedes Jordankästchen einzeln behandeln und führen daher den Rest des Beweises im Fall, dass  $J$  nur aus einem Jordankästchen besteht. Dann ist  $V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_p)$  die Matrix deren Spalten die verallgemeinerten Eigenvektoren  $v_1$  bis  $v_p$  sind und es gilt mit unseren Überlegungen von oben

$$\begin{aligned}
 Ve^{tJ} &= Ve^{t\lambda} e^{tN} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} v_1 & tv_1 + v_2 & \frac{t^2}{2} v_1 + tv_2 + v_3 & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} v_1 + \dots + tv_{p-1} + v_p \end{pmatrix}. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Bemerkung 8.9.** (a) Auf diese Weise bekommt man im Allgemeinen wieder ein komplexes Fundamentalsystem. Will man für eine reelle Matrix  $A$  ein

## 8 Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten

reelles Fundamentalsystem haben, so kann man auch hier wieder wie in Bemerkung 8.6 vorgehen: Für jeden komplexen Eigenwert  $\lambda$  bildet man von den zugehörigen Lösungen im Fundamentalsystem den Real- und den Imaginärteil und wirft dafür die Lösungen, die zum Eigenwert  $\bar{\lambda}$  gehören, weg.

- (b) Jede Spalte unserer so gewonnenen Fundamentalmatrix  $Ve^{tJ}$  ist von der Form  $p(t)e^{t\lambda}$ , wobei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  und  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  in jeder Komponente ein Polynom ist, dessen Grad echt kleiner als die Größe des zugehörigen Jordankästchens ist.

Da alle Lösungen von  $y'(t) = Ay(t)$  Linearkombinationen aus diesen Funktionen sind, bekommen wir: Jede Lösung  $u$  dieses homogenen Systems ist von der Form

$$u(t) = \sum_{i=1}^k e^{t\lambda_i} p_i(t).$$

Hierbei sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die verschiedenen Eigenwerte von  $A$  und  $p_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist in jeder Komponente ein Polynom, dessen Grad echt kleiner als die Größe des größten Jordankästchens von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_i$  ist. Der Grad ist also im schlimmsten Falle gleich der Differenz von algebraischer und geometrischer Vielfachheit des Eigenwerts  $\lambda_i$ .

**Beispiel 8.10.** Wir betrachten das System

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist  $-(\lambda - 2)^3$ , es gibt also nur einen Eigenwert  $\lambda = 2$ . Bestimmt man den Eigenraum, so stellt man fest, dass dieser eindimensional ist. Es gibt also nur ein Jordankästchen. Ein Eigenvektor ist  $v_1 = (-1 \ 1 \ -1)^T$ .

Mögliche zugehörige Basisvektoren  $v_2$  und  $v_3$  erhält man durch Lösen der linearen Gleichungssysteme  $(A - 2E)v_2 = v_1$  und  $(A - 2E)v_3 = v_2$  zu  $v_2 = (0 \ 0 \ 1/2)^T$  und  $v_3 = (-1/2 \ 0 \ -1/4)^T$ . Das ergibt nach Theorem 8.8 das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} & \left\{ e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{2t} \left[ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right], e^{2t} \left[ \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \right] \right\} \\ & = \left\{ e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} -t \\ t \\ \frac{1}{2} - t \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Wie wir in Kapitel 6 gesehen haben, kann jede Differentialgleichung höherer Ordnung in ein System von Gleichungen erster Ordnung überführt werden. Das gibt uns nun die Möglichkeit unsere eben erlangten Erkenntnisse auf lineare Gleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu übertragen.

Tatsächlich reduziert sich die allgemeine homogene lineare DGL  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0 \quad (8.2)$$

mit stetigen Funktionen  $a_j : I \rightarrow \mathbb{R}, j = 0, \dots, n-1$ , mittels des dort vorgestellten Verfahrens zu

$$v'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} v(t) \quad (8.3)$$

und damit zu einem homogenen linearen System erster Ordnung.

Wir können also unsere Ergebnisse aus Kapitel 7 übertragen. Insbesondere ist nach dem Superpositionsprinzip, vgl. Satz 7.8, die Menge aller Lösungen ein  $n$ -dimensionaler Untervektorraum des  $C^n(I, \mathbb{R})$  und wir nennen auch hier eine Basis dieses Lösungsraums ein *Fundamentalsystem* der Gleichung.

**Bemerkung 8.11.** Der Zusammenhang zwischen Fundamentalsystemen für die Gleichungen in (8.2) und (8.3) ist einfach: Ist  $z_1(t), \dots, z_n(t) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  ein Fundamentalsystem von (8.3), so bilden die ersten Komponenten dieser Funktionen  $(z_1(t))_1, \dots, (z_n(t))_1 \in C^n(I, \mathbb{R})$  ein Fundamentalsystem von (8.2).

Im Spezialfall von konstanten Koeffizienten ist es auch für Gleichungen höherer Ordnung möglich ein Fundamentalsystem explizit zu bestimmen. Der Beweis des folgenden Satzes ergibt sich entweder durch allgemeines Berechnen der Jordannormalform des zugehörigen Systems erster Ordnung oder in elementarer Weise durch Nachrechnen.

**Theorem 8.12.** Für  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$  betrachte die DGL

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0. \quad (8.4)$$

(a) Ist  $\lambda_*$  eine Nullstelle von

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

mit Vielfachheit  $k \in \mathbb{N}$ , so sind

$$e^{t\lambda_*}, te^{t\lambda_*}, \dots, t^{k-1}e^{t\lambda_*}$$

linear unabhängige Lösungen von (8.4).

## 8 Lineare DGLen mit konstanten Koeffizienten

(b) Die Lösungen aus (a), für alle Nullstellen von  $P$  zusammengenommen, bilden ein Fundamentalsystem von (8.4).

**Bemerkung 8.13.** Das Polynom  $P$  in obigem Theorem entspricht, bis u.U. auf das Vorzeichen, dem charakteristischen Polynom der Matrix, die man beim Umschreiben der Gleichung in ein System erster Ordnung bekommt. Deshalb wird es oft ebenfalls als *charakteristisches Polynom* einer solchen Gleichung  $n$ -ten Grades mit konstanten Koeffizienten bezeichnet. Entsprechend heißen die Nullstellen dann auch oft „Eigenwerte“, obwohl weit und breit keine Matrix zu sehen ist.

**Beispiel 8.14.** Wir behandeln die DGL

$$y^{(5)}(t) + 4y^{(4)}(t) + 2y'''(t) - 4y''(t) + 8y'(t) + 16y(t) = 0.$$

Das charakteristische Polynom ergibt sich hier zu

$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 2)^3(\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i).$$

Damit ist ein (komplexes) Fundamentalsystem nach Theorem 8.12 gegeben durch

$$e^{-2t}, te^{-2t}, t^2e^{-2t}, e^{(1-i)t}, e^{(1+i)t}.$$

Will man zu diesem eigentlich reellen Problem auch ein reelles Fundamentalsystem haben, so ist das Vorgehen wie in Bemerkung 8.6, bzw. Bemerkung 8.9 (a). Man bekommt dann wegen  $\operatorname{Re}(e^{(1+i)t}) = e^t \operatorname{Re}(e^{it}) = e^t \cos(t)$  und  $\operatorname{Im}(e^{(1+i)t}) = e^t \operatorname{Im}(e^{it}) = e^t \sin(t)$  das reelle Fundamentalsystem

$$e^{-2t}, te^{-2t}, t^2e^{-2t}, e^t \cos(t), e^t \sin(t).$$

**Beispiel 8.15.** (Gedämpfter harmonischer Oszillator)

Berücksichtigt man beim harmonischen Oszillator, vgl. Beispiel 6.5, auch die Reibung des umgebenden Mediums, so bekommt man – wie immer unter geeigneten Annahmen – zur DGL

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0,$$

wobei  $c > 0$  die schon in Beispiel 6.5 diskutierte Materialkonstante ist und  $b > 0$  die Stärke der Dämpfung, d. h. der Reibung, modelliert. Das charakteristische Polynom ist hier  $\lambda^2 + b\lambda + c$  mit den Nullstellen  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})$ . Damit ergibt sich i. A. ein komplexes Fundamentalsystem.

Für die Bestimmung eines reellen Fundamentalsystems unterscheiden wir, ob die Eigenwerte reell oder komplex sind. Das führt zu qualitativ sehr verschiedenen Lösungen.

**1. Fall:**  $b^2 - 4c < 0$ . Dann sind beide Eigenwerte verschieden und wir erhalten nach Theorem 8.12 ein komplexes Fundamentalsystem zu  $e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}$ , d. h.

$$e^{-bt/2} e^{t\sqrt{b^2-4c}/2}, \quad e^{-bt/2} e^{-t\sqrt{b^2-4c}/2}. \quad (8.5)$$

Nun gilt  $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\omega$  mit  $\alpha = b/2$  und  $\omega = \sqrt{4c - b^2}/2$ . Wir bilden Real- und Imaginärteil der ersten Funktion unseres komplexen Fundamentalsystems und erhalten als reelles Fundamentalsystem

$$e^{-\alpha t} \cos(\omega t), \quad e^{-\alpha t} \sin(\omega t).$$

Das sind wie zu erwarten gedämpfte Schwingungen.

**2. Fall:**  $b^2 - 4c > 0$ . Dann sind die Eigenwerte reell und damit ist auch das Fundamentalsystem in (8.5) reell. Die Lösung ist dann eine Überlagerung von fallenden Exponentialfunktionen. Man beachte, dass wegen  $c > 0$  beide Eigenwerte dann immer negativ sind, da  $b > \sqrt{b^2 - 4c}$  gilt. Physikalisch bedeutet dieser Fall, dass die Dämpfung so stark ist, dass Sie die Schwingung unmöglich macht, da das Pendel z. B. in Honig steckt.

**3. Fall:**  $b^2 - 4c = 0$ . Dann haben wir einen doppelten Eigenwert  $\lambda = -b/2$  und die allgemeine Lösung ist von der Form

$$c_1 e^{-bt/2} + c_2 t e^{-bt/2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Auch hier gibt es keine Schwingung, man spricht auch vom *aperiodischen Grenzfall*.



# 9 Stabilitätstheorie autonomer Gleichungen

Wir wollen uns nun mit dem Langzeitverhalten globaler Lösungen beschäftigen.

**Definition 9.1.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^d$  erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung. Eine globale Lösung  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$  von

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > 0, \quad (9.1)$$

heißt

- (a) stabil, falls für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle Lösungen  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$  von (9.1) mit  $|v(0) - u(0)| < \delta$  gilt, dass für alle  $t > 0$  der Abstand  $|v(t) - u(t)| < \varepsilon$  bleibt.
- (b) instabil, falls sie nicht stabil ist.
- (c) attraktiv, falls es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle Lösungen  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$  von (9.1) mit  $|v(0) - u(0)| < \delta$  gilt, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} |v(t) - u(t)| = 0$ .
- (d) asymptotisch stabil, falls sie stabil und attraktiv ist.

**Bemerkung 9.2.** Achtung: Aus Attraktivität folgt i. A. nicht Stabilität, auch wenn es verführerisch so aussieht!

Von besonderem Interesse ist die Stabilität von Gleichgewichtszuständen des durch die DGL beschriebenen Systems, d. h. von konstanten Lösungen. Diese werden oft auch *stationäre Lösungen* genannt.

In dieser Vorlesung werden wir uns dabei auf die Behandlung von autonomen Gleichungen, d. h.  $y'(t) = f(y(t))$  beschränken. Diese haben u.a. den Vorteil, dass die stationären Lösungen sofort als die Nullstellen von  $f$  ablesbar sind, vgl. auch Beispiel 3.1.

**Definition 9.3.** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung.

- (a) Ein Punkt  $y_0 \in D$  mit  $f(y_0) = 0$  heißt kritischer Punkt von  $f$ .
- (b) Ein kritischer Punkt  $y_0$  von  $f$  heißt stabil/instabil/attraktiv/asymptotisch stabil, wenn die stationäre Lösung  $u(t) = y_0$ ,  $t \geq 0$ , von  $y'(t) = f(y(t))$  die jeweilige Eigenschaft hat.

## 9 Stabilitätstheorie autonomer Gleichungen

Das Ziel dieses Abschnittes wird es sein, Bedingungen an  $f$  zu formulieren, an denen man ablesen kann, welches Stabilitätsverhalten die kritischen Punkte von  $f$  haben.

Eine besonders einfache Klasse von DGLen, für die wir in dieser Situation sind, sind die homogenen linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten  $y'(t) = Ay(t)$  aus dem letzten Kapitel. Wir wollen zunächst die dortigen Ergebnisse nutzen und werden feststellen, dass sich in diesem Fall das gesamte Stabilitätsverhalten an den Eigenwerten der Matrix  $A$  ablesen lässt.

**Satz 9.4** (Stabilitätsverhalten linearer DGLen mit konstanten Koeffizienten).

Sei  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$  und  $s(A) := \max\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ .<sup>1</sup> Dann gilt für die Nulllösung  $o$  von  $y'(t) = Ay(t)$ :

- (a) Ist  $s(A) < 0$ , so ist  $o$  asymptotisch stabil.
- (b) Ist  $s(A) > 0$ , so ist  $o$  instabil.
- (c) Ist  $s(A) = 0$ , so ist  $o$  in keinem Fall asymptotisch stabil und ist genau dann stabil, wenn für alle Eigenwerte von  $A$  mit verschwindendem Realteil die geometrische gleich der algebraischen Vielfachheit ist.

*Beweis.* Alle diese Aussagen ergeben sich mittels Bemerkung 8.9 (b) aus Theorem 8.8. Demnach sind alle Lösungen unserer Gleichung von der Form

$$\sum_{i=1}^k e^{t\lambda_i} p_i(t), \quad (9.2)$$

wobei die  $\lambda_i$  die Eigenwerte von  $A$  sind und  $p_i$  in jeder Komponenten Polynome, deren Grad höchstens die Differenz von algebraischer und geometrischer Vielfachheit des Eigenwerts  $\lambda_i$  ist.

- (a) Sei  $s(A) < 0$ . Wir zeigen, dass es dann Konstanten  $M \geq 1$  und  $\omega > 0$  gibt mit

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t}, \quad t \geq 0. \quad (9.3)$$

Jede Spalte  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , von  $e^{tA}$  ist von der Form (9.2), es gibt also Vektoren von Polynomen  $p_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, d$ , mit

$$v_j(t) = \sum_{i=1}^k e^{t\lambda_i} p_{i,j}(t)$$

---

<sup>1</sup>Die Notation  $\sigma(A)$  steht für das *Spektrum* von  $A$ , d. h. die Menge aller Eigenwerte.

Da alle Normen auf  $\mathbb{C}^{d \times d}$  äquivalent sind, gibt es ein  $c \geq 0$  mit

$$\begin{aligned} \|e^{tA}\| &\leq c \max_{j=1}^d |v_j(t)| \leq c \max_{j=1}^d \sum_{i=1}^k |e^{t\lambda_i} p_{i,j}(t)| = c \max_{j=1}^d \sum_{i=1}^k e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)} |p_{i,j}(t)| \\ &\leq c \max_{j=1}^d \sum_{i=1}^k e^{ts(A)} |p_{i,j}(t)| = e^{ts(A)/2} \underbrace{c \max_{j=1}^d \sum_{i=1}^k e^{ts(A)/2} |p_{i,j}(t)|}_{\leq M} \end{aligned}$$

Da  $s(A)$  negativ ist, ist für  $t \geq 0$  der gesamte hintere Teil dieses Ausdrucks dank der Kraft der Exponentialfunktion beschränkt und es gilt (9.3) mit dieser Schranke  $M$  und  $\omega = -s(A)/2$ .

Damit gilt nun sogar für jede Lösung  $v$  von  $y'(t) = Ay(t)$

$$|v(t) - o(t)| = |e^{tA}v(0)| \leq \|e^{tA}\| |v(0)| \leq Me^{-\omega t} |v(0)| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Also ist die Nulllösung attraktiv.

Für die Stabilität erhalten wir zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  mit  $\delta := \varepsilon/M$  für jede Lösung  $v$  mit  $|v(0)| < \delta$  aus derselben Abschätzung

$$|v(t) - o(t)| \leq Me^{-\omega t} |v(0)| < M\delta = \varepsilon$$

für alle  $t \geq 0$ . Also ist die Nulllösung asymptotisch stabil.

- (b) Ist  $s(A) > 0$ , so hat  $A$  einen Eigenwert  $\lambda_0$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda_0) > 0$ . Sei  $w$  ein zugehöriger Eigenvektor mit  $|w| = 1/2$ . Nach Theorem 8.8 ist dann für jedes  $\delta > 0$  die Funktion  $v_\delta(t) = \delta e^{\lambda_0 t} w$  eine Lösung mit  $|v_\delta(0)| = \delta/2 < \delta$ . Aber es gilt

$$|v_\delta(t)| = \delta e^{\operatorname{Re}(\lambda_0)t} |w| = \frac{\delta}{2} e^{\operatorname{Re}(\lambda_0)t} \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty).$$

Also ist die Nulllösung instabil.

- (c) Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ , d. h.  $\lambda = i\mu$  mit  $\mu \in \mathbb{R}$ . Dann ist wie in (b) für jedes  $\delta > 0$  die Funktion  $v_\delta = \delta e^{i\mu t} w$  mit einem geeigneten Eigenvektor  $w$  eine Lösung mit  $|v_\delta(0)| < \delta$  und es ist

$$|v_\delta(t) - o(t)| = \delta |e^{i\mu t} w| = \delta |w|.$$

Also ist die Nulllösung nicht attraktiv und damit auch nicht asymptotisch stabil.

Für die Stabilität der Nulllösung sind die Summanden in (9.2) entscheidend, die zu den Eigenwerten mit verschwindendem Realteil gehören. Ist das Polynom hier nichtkonstant, d. h. ist die algebraische Vielfachheit von

## 9 Stabilitätstheorie autonomer Gleichungen

der geometrischen verschieden, so wächst die entsprechende Lösung polynomial an und kann wie eben schon zwei Mal vorgeführt mit  $\delta$  skaliert werden, um nachzuweisen, dass die Nulllösung dann nicht stabil ist.

Ist hingegen immer die algebraische gleich der geometrischen Vielfachheit, so sind wieder alle Lösungen und damit auch die Fundamentalmatrix  $e^{tA}$  beschränkt, denn für die Eigenwerte mit negativem Realteil kann man genauso argumentieren wie für  $v_j$  in (a) und für die rein imaginären Eigenwerte sind die Polynome alle konstant. Die Stabilität der Nulllösung folgt dann wie in (a).  $\square$

Da die Kenngröße  $s(A)$  sich in diesem Satz als so fundamental für das Stabilitätsverhalten erwiesen hat, bekommt diese einen eigenen Namen.

**Definition 9.5.** Sei  $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ . Die Zahl  $s(A) = \sup\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$  heißt Spektralschranke von  $A$ .

Die Bedeutung von Satz 9.4 führt weit über die Behandlung von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten hinaus. Wir werden ihn im Weiteren als Startpunkt nehmen, um Stabilitätsaussagen auch für kompliziertere nicht-lineare Gleichungen zu bekommen, deren Lösungen sich im Allgemeinen nicht mehr konkret angeben lassen.

Die Grundidee ist dabei für die rechte Seite  $f$  der DGL eine Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung um den kritischen Punkt  $y_0$  als Entwicklungsstelle zu machen, also<sup>2</sup>

$$y'(t) = f(y(t)) = \underbrace{f(y_0)}_{=0} + J_f(y_0)y(t) + g(y(t)), \quad t \geq 0. \quad (9.4)$$

mit einer Restfunktion  $g$  von der wir hoffen können, dass diese für kleine Werte von  $y(t) - y_0$  klein bleibt, und damit einen „untergeordneten“ Einfluss auf die Gleichung in der Nähe von  $y_0$  hat. Der (hoffentlich dominante) vordere Teil

$$y'(t) = J_f(y_0)y(t)$$

ist eine homogene lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten, von der wir das Stabilitätsverhalten dank Satz 9.4 exakt kennen. Tatsächlich gilt der folgende Stabilitätssatz, der uns gute Hoffnung macht, dass das Verfahren funktionieren könnte.

**Satz 9.6** (Stabilitätssatz). Es sei  $D \subset \mathbb{R}^d$  offen mit  $0 \in D$ ,  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  mit  $s(A) < 0$  und  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung, sowie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|g(x)|}{|x|} = 0. \quad (9.5)$$

---

<sup>2</sup>Die Bezeichnung  $J_f$  steht hier und im Folgenden für die *Jacobi-Matrix* von  $f$ .

Dann ist die Nulllösung von

$$y'(t) = Ay(t) + g(y(t)) \quad (9.6)$$

asymptotisch stabil.

*Beweis.* Zunächst mal ist die Nullfunktion eine Lösung von (9.6), denn nach Voraussetzung ist  $g$  stetig und es gilt insbesondere  $g(0) = \lim_{|x| \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

Die rechte Seite von (9.6) erfüllt dank der lokalen Lipschitz-Bedingung an  $g$  selbst eine lokale Lipschitz-Bedingung, d. h. das Anfangswertproblem aus (9.6) und  $y(0) = y_0$  ist für jedes  $y_0 \in D$  eindeutig lösbar.

Schließlich erinnern wir uns, dass dank der Bedingung  $s(A) < 0$  Konstanten  $M \geq 1$  und  $\omega > 0$  existieren mit

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t}, \quad (9.7)$$

vgl. (9.3)

Nach diesen Vorbetrachtungen sei nun  $0 < \varepsilon < \omega$  gegeben. Wegen der Grenzwertbedingung in (9.5) gibt es ein  $\tilde{\delta} > 0$ , so dass für alle  $x \in D$  mit  $|x| \leq \tilde{\delta}$  gilt

$$\frac{|g(x)|}{|x|} \leq \frac{\varepsilon}{M}, \quad \text{d. h.} \quad |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M}|x|. \quad (9.8)$$

Wir setzen nun  $\delta := \min\{\tilde{\delta}, \varepsilon\}$  und zeigen, dass es ein  $\alpha > 0$  gibt, so dass gilt:

$$y_0 \in D \text{ mit } |y_0| < \frac{\delta}{M} \implies |u(t)| < \delta e^{-\alpha t} \text{ für alle } t \geq 0, \quad (9.9)$$

wobei  $u$  die Lösung von (9.6) mit  $u(0) = y_0$  ist.

In (9.9) steckt alles was wir brauchen: Wegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta e^{-\alpha t} = 0$ , folgt sofort die Attraktivität der Nulllösung und, da wir  $\delta$  wohlweislich höchstens als  $\varepsilon$  gewählt haben, gilt dann auch  $|u(t)| < \delta e^{-\alpha t} \leq \delta \leq \varepsilon$  für alle  $t > 0$ , was uns die Stabilität der Nulllösung liefert.

Es bleibt noch (9.9) zu zeigen. Sei also  $y_0 \in D$  mit  $|y_0| < \delta/M$  gegeben und  $u$  die zugehörige Lösung des Anfangswertproblems. Dann gilt

$$u'(t) = Au(t) + g(u(t)), \quad u(0) = y_0.$$

Fasst man den Ausdruck  $g(u(t))$  als Inhomogenität auf, so bekommt man mit der Variation-der-Konstanten-Formel aus Satz 7.15

$$u(t) = e^{tA}y_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-sA}g(u(s)) \, ds = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(u(s)) \, ds. \quad (9.10)$$

Man beachte dabei, dass  $Z(t) = e^{tA}$  nach Satz 8.4 eine Fundamentalmatrix von  $y'(t) = Ay(t)$  ist mit  $Z(0) = E$  und  $Z(s)^{-1} = e^{-sA}$ , vgl. Lemma 8.3.

## 9 Stabilitätstheorie autonomer Gleichungen

Nun gilt mit (9.10):

$$|u(t)| \leq |e^{tA}y_0| + \int_0^t |e^{(t-s)A}g(u(s))| ds \leq \|e^{tA}\| \|y_0\| + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\| \|g(u(s))\| ds.$$

Für kleine  $s$  ist dank der Stetigkeit von  $u$  sicherlich  $|u(s)| \leq \delta$ , denn es ist  $|u(0)| < \delta/M \leq \delta$ . Gilt  $|u(s)| \leq \delta$  für alle  $s \in [0, t]$ , so gilt auch  $|u(s)| \leq \delta \leq \tilde{\delta}$ . Deshalb können wir für diese  $t$  mit (9.7), der Voraussetzung aus (9.9) und (9.8) weiter abschätzen und erhalten

$$|u(t)| < Me^{-\omega t} \frac{\delta}{M} + \int_0^t Me^{-\omega(t-s)} \frac{\varepsilon}{M} |u(s)| ds = \delta e^{-\omega t} + \int_0^t \varepsilon e^{-\omega(t-s)} |u(s)| ds,$$

bzw.

$$e^{\omega t} |u(t)| \leq \delta + \int_0^t \varepsilon e^{\omega s} |u(s)| ds.$$

Auf diese implizite Ungleichung für  $e^{\omega t} |u(t)|$  wenden wir nun das Gronwall-Lemma 5.8 an. Dabei setzen wir  $a := \delta$  und  $v(s) := \varepsilon$ . Das liefert uns

$$e^{\omega t} |u(t)| \leq \delta \exp\left(\int_0^t \varepsilon ds\right) = \delta e^{\varepsilon t}, \quad \text{also} \quad |u(t)| \leq \delta e^{(\varepsilon - \omega)t}.$$

Da wir oben die Vorkehrung  $\varepsilon < \omega$  getroffen hatten, ist  $\alpha := -(\varepsilon - \omega) > 0$  und wir sind bei der Abschätzung in (9.9). Der einzige Schönheitsfehler ist, dass unsere Rechnung bisher unter dem Vorbehalt steht, dass  $|u(s)| \leq \delta$  für alle  $s \in [0, t]$  gilt. Wir müssen also noch zeigen, dass dies für alle  $t \in [0, \infty)$  der Fall ist.

Dazu betrachten wir das Intervall  $J := \{t \geq 0 : |u(s)| \leq \delta \text{ für alle } s \in [0, t]\}$  der „braven“  $t$  und nehmen an die rechte Intervallgrenze von  $J$  wäre ein endliches  $T > 0$ . Dann sind alle  $t \in [0, T)$  brav, insbesondere erfüllen sie alle  $|u(t)| \leq \delta$ . Eingedenk der Stetigkeit von  $u$  ist dann aber auch  $|u(T)| \leq \delta$  und das bedeutet zusammen gerade, dass  $T$  selbst brav, d. h. in  $J$ , ist. Da  $T$  kein innerer Punkt von  $J$  ist, muss sogar  $|u(T)| = \delta$  gelten. Entscheidend ist, dass wir unsere Abschätzung von oben damit also (gerade noch) mit  $t = T$  machen dürfen. Das liefert schließlich den Widerspruch  $\delta = |u(T)| \leq \delta e^{(\varepsilon - \omega)T} < \delta$ .  $\square$

Es gibt ein analoges Instabilitätskriterium, dass wir hier jedoch nicht beweisen wollen.

**Satz 9.7** (Instabilitätssatz). *Sind  $D$  und  $g$  wie in Satz 9.6 und ist  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  mit  $s(A) > 0$ , so ist die Nulllösung von (9.6) instabil.*

Die beiden Sätze sind für den Spezialfall des kritischen Punktes Null formuliert. Das ist allerdings keine wirkliche Einschränkung, wie das nächste Lemma zeigt, dessen Beweis als Übung verbleibt.

**Lemma 9.8.** *Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung. Dann ist  $y_0 \in D$  genau dann ein stabiler/instabiler/attractiver/asymptotisch stabiler kritischer Punkt von  $f$ , wenn Null ein stabiler/instabiler/attractiver/asymptotisch stabiler kritischer Punkt von  $\tilde{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $\tilde{D} = D - y_0$  und  $\tilde{f}(x) = f(x + y_0)$ ,  $x \in \tilde{D}$ , ist.*

**Theorem 9.9** (Prinzip der linearisierten Stabilität). Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$  und  $J_f$  erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung. Ist  $y_0 \in D$  ein kritischer Punkt von  $f$ , so gilt:

(a) Ist  $s(J_f(y_0)) < 0$ , so ist  $y_0$  asymptotisch stabil.

(b) Ist  $s(J_f(y_0)) > 0$ , so ist  $y_0$  instabil.

*Beweis.* Mit Lemma 9.8 ziehen wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Fall  $y_0 = 0$  zurück. Da  $f$  stetig differenzierbar vorausgesetzt ist, können wir unser Problem in Anlehnung an (9.4) zerlegen in

$$y'(t) = f(y(t)) = J_f(0)y(t) + f(y(t)) - J_f(0)y(t) =: Ay(t) + g(y(t))$$

Die stetige Differenzierbarkeit von  $f$  liefert, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|g(x)|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - J_f(0)x|}{|x|} = 0$$

ist, und damit sind die Voraussetzungen der Sätze 9.6, bzw. 9.7 erfüllt. Diese liefern nun die Aussagen des Theorems.  $\square$

Das Theorem macht keine Aussage in dem Fall, dass  $s(A)$  genau Null ist. In diesem Fall hängt das Stabilitätsverhalten sehr sensibel von der Nichtlinearität  $g$  ab und kann bei identischen Eigenwerten des linearen Anteils alles zwischen instabil und asymptotisch stabil sein.

Leider sind gerade die in Anwendungen spannenden Gleichgewichtszustände oft solche, bei denen das Prinzip der linearisierten Stabilität keine Aussage macht. Wir wollen das an zwei Beispielen verdeutlichen.

**Beispiel 9.10.** (Mathematisches Pendel) Die Auslenkung aus der Ruhelage  $y(t)$  eines an einem Ende aufgehängten pendelnden Stocks genügt der Gleichung des mathematischen Pendels:

$$y''(t) + \sin(y(t)) = 0, \quad t \geq 0.$$

Umgeschrieben in ein System erster Ordnung erhalten wir mit  $v = (y, y')^T$

$$\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ -\sin(v_1(t)) \end{pmatrix} = f(v_1(t), v_2(t))$$

mit  $f(x, y) = (y, -\sin(x))$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Die kritischen Punkte sind offensichtlich  $(k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , von denen wir uns nur  $(0, 0)$  und  $(\pi, 0)$  anschauen müssen, denn die anderen entsprechen alle einem dieser beiden, da das Problem  $2\pi$ -periodisch ist.

## 9 Stabilitätstheorie autonomer Gleichungen

Die beiden kritischen Punkte entsprechen zum einen der Ruhelage  $(0, 0)$  des Pendels (Nullausschlag mit Null Geschwindigkeit) und dem senkrecht nach oben gerichteten Stock ( $\pi$  Ausschlag mit Null Geschwindigkeit). Unsere Alltagserfahrung sagt also, dass ersterer stabil und zweiterer instabil ist.

Es ist

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d. h.} \quad J_f(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte  $\pm 1$ , es ist also  $s(J_f(0, \pi)) = 1 > 0$  und der kritische Punkt  $(\pi, 0)$  tatsächlich instabil.

Betrachten wir aber die Ruhelage  $(0, 0)$ , so finden wir

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix hat die Eigenwerte  $\pm i$ . Wir sind also genau im dummen Fall  $s(J_f(0, 0)) = 0$  und können im Moment keine Aussage zur Stabilität dieses kritischen Punktes treffen.

**Beispiel 9.11.** (Lotka-Volterra-Gleichungen) Als zweites Beispiel kommen wir auf die Lotka-Volterra-Gleichungen der Populationsdynamik aus Beispiel 1.7 zurück:

$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x(t) - \beta y(t)x(t), \\ y'(t) &= -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t), \end{cases} \quad t \geq 0,$$

wobei  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$  die relevanten Geburts-, Sterbe- und Fressraten sind. Auch dieses ist ein nichtlineares autonomes System mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} (\alpha - \beta y)x \\ (\delta x - \gamma)y \end{pmatrix}.$$

Bei der Bestimmung der kritischen Punkte mit  $f(x, y) = 0$  erhält man zunächst für den Fall  $x = 0$  ein Gleichgewicht in  $(0, 0)$  (von der Modellierung her nicht wirklich überraschend) und im Fall  $x \neq 0$  liefert die erste Komponente von  $f$ , dass  $y = \alpha/\beta$  sein muss. Einsetzen in die zweite Komponente liefert dann

$$0 = (\delta x - \gamma)\alpha/\beta, \quad \text{also } x = \gamma/\delta.$$

Zur Betrachtung des Stabilitätsverhaltens der beiden kritischen Punkte  $(0, 0)$  und  $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$  bestimmen wir wieder

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten  $\alpha$  und  $-\gamma$ . Also ist  $s(J_f(0,0)) = \alpha > 0$  und der kritische Punkt  $(0,0)$  ist instabil. Das ist vernünftig, denn wenn eine kleine Population am Anfang vorhanden ist, wird diese sich vermehren und nicht aussterben.

Andererseits ist dieser Punkt nicht besonders spannend. Der andere kritische Punkt sieht interessanter aus, gibt es doch für diesen keine so offensichtliche Erklärung. Hier ist

$$J_f(\gamma/\delta, \alpha/\beta) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom

$$\lambda^2 + \frac{\beta\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta\alpha}{\beta} = \lambda^2 + \gamma\alpha.$$

Die Eigenwerte sind also  $\pm i\sqrt{\gamma\alpha}$ , es ist wieder  $s(J_f(\gamma/\delta, \alpha/\beta)) = 0$  und wir können im Moment keine Aussage treffen.



# 10 Lyapunov-Stabilität

**Beispiel 10.1.** (Lotka-Volterra-Gleichungen) Wir wollen uns nicht so schnell geschlagen geben und schauen uns die Lotka-Volterra-Gleichungen noch mal an:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta y(t)x(t), \\ y'(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t), \end{cases} \quad t \geq 0. \quad (10.1)$$

Die Idee ist nun durch irgendein auf die spezielle Struktur der Gleichungen angepasstes geschicktes Rungerechne zu weiteren Einsichten zu kommen. Das beste, was man tun kann, wenn die Theorie versagt und einem sonst nichts besseres einfällt. . .

Dazu gewinnen wir eine neue Gleichung aus den beiden, indem wir die erste Gleichung mit  $\delta$  multiplizieren, die zweite mit  $\beta$  und dann addieren. Das liefert

$$\delta x'(t) + \beta y'(t) = \alpha \delta x(t) - \delta \beta x(t)y(t) + \delta \beta x(t)y(t) - \beta \gamma y(t).$$

Die mittleren Terme fallen raus und wir erhalten

$$\delta x'(t) + \beta y'(t) = \alpha \delta x(t) - \beta \gamma y(t). \quad (10.2)$$

Gleiches Spielchen noch mal: Nun multiplizieren wir die erste Gleichung mit  $\gamma/x(t)$  und die zweite mit  $\alpha/y(t)$  und addieren wieder. Das ergibt

$$\gamma \frac{x'(t)}{x(t)} + \alpha \frac{y'(t)}{y(t)} = \gamma \alpha - \gamma \beta y(t) + -\alpha \gamma + \alpha \delta x(t) = \alpha \delta x(t) - \beta \gamma y(t). \quad (10.3)$$

Der Clou ist, dass die beiden Gleichungen in (10.2) und (10.3) nun die selbe rechte Seite haben. Es gilt also für alle  $t \geq 0$

$$\delta x'(t) + \beta y'(t) - \gamma \frac{x'(t)}{x(t)} - \alpha \frac{y'(t)}{y(t)} = 0.$$

Integrieren wir nun auf beiden Seiten erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{const} &= \delta \int x'(t) dt + \beta \int y'(t) dt - \gamma \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt - \alpha \int \frac{y'(t)}{y(t)} dt \\ &= \delta x(t) + \beta y(t) - \gamma \ln(x(t)) - \alpha \ln(y(t)). \end{aligned}$$

Diese Rechnung legt die folgende Behauptung nahe:

## 10 Lyapunov-Stabilität

Sei  $V : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$V(x, y) = \delta x + \beta y - \gamma \ln(x) - \alpha \ln(y).$$

Dann gilt für jede Lösung  $(x(t), y(t)) : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)^2$  von (10.1), dass die Funktion  $V(x(t), y(t))$ ,  $t \geq 0$ , konstant ist.

Das bedeutet die Lösung bleibt immer auf derselben Höhenlinie von  $V$ . Da wir uns die Höhenlinien von  $V$  visualisieren können, vgl. Bild 10.1, ist das eine sehr wertvolle Information.

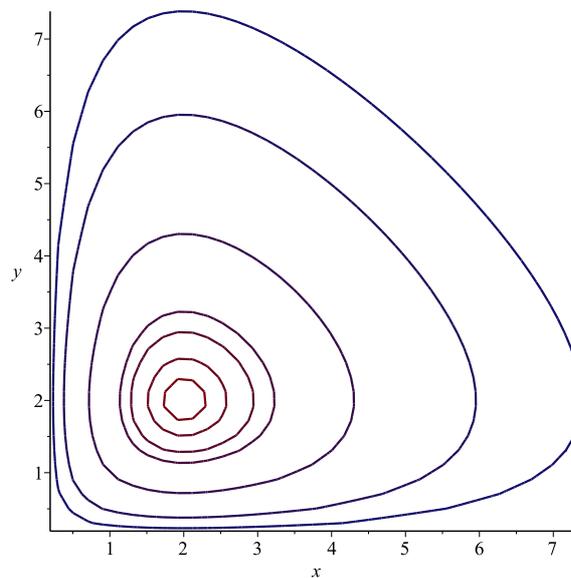


Abbildung 10.1: Einige Höhenlinien der Funktion  $V$  für  $\alpha = \gamma = 2$  und  $\beta = \delta = 1$ . In der Mitte liegt der kritische Punkt  $(\gamma/\delta, \alpha/\beta) = (2, 2)$ .

Es bleibt diese Behauptung sauber zu beweisen. Dazu seien  $x(t), y(t)$  positive Lösungen von (10.1). Dann gilt für alle  $t \geq 0$  wegen  $\nabla V(x, y) = (\delta - \gamma/x, \beta - \alpha/y)$  mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= \left(\delta - \frac{\gamma}{x(t)}\right)x'(t) + \left(\beta - \frac{\alpha}{y(t)}\right)y'(t) \\ &= \left(\delta - \frac{\gamma}{x(t)}\right)(\alpha - \beta y(t))x(t) + \left(\beta - \frac{\alpha}{y(t)}\right)(\delta x(t) - \gamma)y(t) \\ &= (\delta x(t) - \gamma)(\alpha - \beta y(t)) + (\beta y(t) - \alpha)(\delta x(t) - \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Also ist die Funktion konstant.

Betrachten wir noch mal die Höhenlinien in Bild 10.1, so drängt sich die Vermutung auf, dass der kritische Punkt  $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$  stabil, aber nicht asymptotisch

stabil ist. Das würde dann erklären, warum das Prinzip der linearisierten Stabilität hier nicht weiterhelfen konnte.

Können wir nun mit Hilfe unserer Funktion  $V$  streng nachweisen, dass der kritische Punkt stabil ist? Die Antwort ist ja und, noch schöner, dahinter steckt ein ganz allgemeines Prinzip, das wir jetzt entwickeln wollen.

Im Folgenden sei also wieder  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen mit  $0 \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $f(0) = 0$  erfülle eine lokale Lipschitzbedingung. Dann ist  $0$  ein kritischer Punkt von  $f$ . Wir ziehen uns dabei wieder auf den Spezialfall eines kritischen Punktes im Ursprung zurück, vgl. Lemma 9.8.

**Definition 10.2.** *Seien  $f$  und  $D$  wie gerade beschrieben. Eine Funktion  $L \in C^1(D, \mathbb{R})$  heißt Lyapunov-Funktion der Gleichung  $y'(t) = f(y(t))$ , wenn*

$$(a) \quad L(0) = 0 \text{ und } L(x) > 0 \text{ für alle } x \in D \setminus \{0\}.$$

$$(b) \quad \nabla L(x) \cdot f(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in D.$$

*Gilt zusätzlich  $\nabla L(x) \cdot f(x) < 0$  für alle  $x \in D \setminus \{0\}$ , so heißt  $L$  strikte Lyapunov-Funktion.*

**Bemerkung 10.3.** Die Idee einer Lyapunov-Funktion verallgemeinert unsere Funktion  $V$  aus Beispiel 10.1. Hat die DGL  $y'(t) = f(y(t))$  eine Lyapunov-Funktion  $L$ , so gilt nämlich für jede Lösung  $u$

$$\frac{d}{dt}L(u(t)) = \nabla L(u(t)) \cdot u'(t) = \nabla L(u(t)) \cdot f(u(t)) \leq 0, \quad (10.4)$$

d. h. der Wert von  $L$  nimmt entlang jeder Lösung ab oder bleibt zumindest konstant. Heuristisch bedeutet das, dass die Lösung sich dem kritischen Punkt nähert oder zumindest innerhalb der selben Höhenlinie von  $L$  bleibt, wie es in Beispiel 10.1 der Fall war.

**Theorem 10.4** (Lyapunov-Stabilitätssatz). *Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen mit  $0 \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung und  $f(0) = 0$ . Existiert eine Lyapunov-Funktion der Gleichung  $y'(t) = f(y(t))$ , so ist die Nulllösung stabil. Gibt es sogar eine strikte Lyapunov-Funktion, so ist sie asymptotisch stabil.*

*Beweis.* Da  $D$  offen und  $0 \in D$  ist, gibt es ein  $\varepsilon_0 > 0$  mit  $U_{\varepsilon_0}(0) \subseteq D$ . Wir wollen zunächst die Stabilität der Nulllösung zeigen. Sei dazu  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  gegeben. Wir müssen nun ein  $\delta > 0$  finden, so dass für alle Lösungen  $u$  mit  $|u(0)| < \delta$  gilt, dass  $|u(t)| < \varepsilon$  für alle  $t \geq 0$  ist.

Setze dazu  $m_\varepsilon := \min_{|x|=\varepsilon} L(x)$ . Dieses Minimum existiert, da die Menge der Punkte mit  $|x| = \varepsilon$  kompakt und  $L$  stetig ist. Da  $L$  auf dieser Menge als Lyapunov-Funktion außerdem strikt positiv ist, gilt auch  $m_\varepsilon > 0$ . Wiederum aus der Stetigkeit von  $L$  und  $L(0) = 0$  folgt nun, dass es ein  $\delta \in (0, \varepsilon)$  gibt mit  $L(x) < m_\varepsilon$  für alle  $x$  mit  $|x| < \delta$ .

## 10 Lyapunov-Stabilität

Sei nun also  $u$  eine Lösung mit  $|u(0)| < \delta$ . Dann gilt nach der Wahl von  $\delta$ , dass  $L(u(0)) < m_\varepsilon$  ist. Weiter gilt wegen

$$\frac{d}{dt}L(u(t)) = \nabla L(u(t)) \cdot f(u(t)) \leq 0, \quad t \geq 0,$$

vgl. (10.4), und der Eigenschaft (a) einer Lyapunov-Funktion, dass

$$0 \leq L(u(t)) \leq L(u(0)) < m_\varepsilon, \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad (10.5)$$

ist.

Nehmen wir nun an, es gäbe ein  $t_0 > 0$  mit  $|u(t_0)| \geq \varepsilon$ . Da  $|u(0)| < \delta < \varepsilon$  ist und  $u$  stetig, muss es dann ein  $t_* \in (0, t_0]$  geben mit  $|u(t_*)| = \varepsilon$ . Das liefert aber mit (10.5) den Widerspruch

$$L(u(t_*)) \geq \min_{|x|=\varepsilon} L(x) = m_\varepsilon > L(u(t_*)).$$

Also ist  $|u(t)| < \varepsilon$  für alle  $t \geq 0$ , d. h. die Nulllösung ist stabil.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass für eine strikte Lyapunov-Funktion die Nulllösung auch attraktiv ist, d. h. wir müssen ein  $\delta > 0$  finden, so dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0$  für alle Lösungen  $u$  mit  $|u(0)| < \delta$  gilt.

Wir wählen das  $\delta$  zu  $\varepsilon_0$  aus dem ersten Teil des Beweises. Dann haben wir dort bereits gezeigt, dass jede Lösung  $u$  mit  $|u(0)| < \delta$  für alle  $t \geq 0$  in der Kugel mit Radius  $\varepsilon_0$  bleibt und dass die Funktion  $L \circ u$  auf  $(0, \infty)$  monoton fällt. Wir zeigen nun die folgende

**Zwischenbehauptung:** Es gibt eine Folge  $(t_n) \subseteq (0, \infty)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_n) = 0$ .

Ist unsere Lösung  $u$  an einer Stelle selbst Null, so ist dank der eindeutigen Lösbarkeit des betrachteten Problems  $u$  die konstante Nulllösung. In diesem Fall ist die Zwischenbehauptung banalerweise richtig. Ist  $u$  an keiner Stelle Null, so nehmen wir an, die Zwischenbehauptung wäre falsch. Dann ist 0 kein Häufungspunkt der Trajektorie  $\{u(t) : t \geq 0\}$ , d. h. es existiert ein  $T > 0$  und ein  $r \in (0, \varepsilon_0)$ , so dass  $|u(t)| > r$  für alle  $t \geq T$  gilt. Nun ist der Kreisring  $K := \{x \in \mathbb{R}^d : r \leq |x| \leq \varepsilon_0\}$  kompakt und die Funktion  $x \mapsto \nabla L(x) \cdot f(x)$  nach den Eigenschaften einer strikten Lyapunov-Funktion auf dieser Menge strikt negativ und stetig. Also ist  $M := \max_{x \in K} \nabla L(x) \cdot f(x) < 0$ .

Sei nun  $t > T$ . Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf die reelle Funktion  $L \circ u$  ein  $\tau \in (T, t)$  mit

$$\begin{aligned} L(u(t)) - L(u(T)) &= (L \circ u)'(\tau)(t - T) = (t - T)\nabla L(u(\tau)) \cdot u'(\tau) \\ &= (t - T)\nabla L(u(\tau)) \cdot f(u(\tau)). \end{aligned}$$

Da  $\tau > T$  ist, gilt  $r \leq u(\tau) \leq \varepsilon_0$ , d. h.  $u(\tau) \in K$  und wir bekommen

$$L(u(t)) - L(u(T)) \leq (t - T)M \longrightarrow -\infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Also muss es ein  $t_0 > T$  geben mit  $L(u(t)) < 0$ , und das ist ein Widerspruch dazu, dass  $L$  eine Lyapunov-Funktion ist.

Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen. Man beachte, dass dank der Stetigkeit von  $L$  für diese Folge auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(u(t_n)) = L(0) = 0$$

gilt. Zu beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  betrachten wir nun den kompakten Kreisring  $K_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : \varepsilon \leq |x| \leq \varepsilon_0\}$ . Dann ist mit dem schon mehrfach bemühten Argument  $m_\varepsilon := \min_{x \in K_\varepsilon} L(x) > 0$ . Also gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $L(u(t_{n_0})) < m_\varepsilon$ . Da  $L \circ u$  monoton fallend ist, gilt dann  $L(u(t)) \leq L(u(t_{n_0})) < m_\varepsilon$  für alle  $t \geq t_{n_0}$ . Damit kann  $u(t)$  für  $t \geq t_{n_0}$  nicht in  $K_\varepsilon$  liegen, und, da wir schon wissen, dass  $|u(t)|$  immer in der Kugel mit Radius  $\varepsilon_0$  liegt, muss also  $|u(t)| < \varepsilon$  für alle  $t \geq t_{n_0}$  gelten. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, zeigt das genau  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ .  $\square$

Auch hier gibt es ein korrespondierendes Instabilitätsresultat, das wir wieder nicht beweisen wollen.

**Theorem 10.5** (Lyapunov-Instabilitätssatz). *Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen mit  $0 \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung, sowie  $f(0) = 0$ . Gibt es eine Funktion  $L \in C^1(D, \mathbb{R})$  mit*

- $L(0) = 0$ ,
- $\nabla L(x) \cdot f(x) > 0$  für alle  $x \in D \setminus \{0\}$  und
- es gibt eine Folge  $(x_j) \subseteq D$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0$  und  $L(x_j) > 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ ,

so ist die Nulllösung von  $y'(t) = f(y(t))$  instabil.

**Beispiel 10.6.** Betrachten wir uns in diesem Lichte noch mal unsere Funktion  $V$  für die Lotka-Volterra-Gleichungen aus Beispiel 10.1, so können wir daraus schnell eine Lyapunov-Funktion machen. (Genau genommen müssten wir das Problem noch so verschieben, dass unser kritischer Punkt  $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$  in den Ursprung kommt. . .) Dort hatten wir gesehen, dass für  $V(x, y) = \delta x + \beta y - \gamma \ln(x) - \alpha \ln(y)$  entlang jeder Lösung  $(x(t), y(t))$  der Ausdruck

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \nabla L(x(t), y(t)) \cdot f(x(t), y(t)) = 0$$

ist. Wir setzen also

$$L(x, y) = V(x, y) - V(\gamma/\delta, \alpha/\beta).$$

## 10 Lyapunov-Stabilität

Dann ist  $L(\gamma/\delta, \alpha/\beta) = 0$  und man kann mit den üblichen Methoden der Analysis II nachweisen, dass dieser Punkt ein striktes lokales Minimum von  $L$  ist. Also ist in einer hinreichend kleinen punktierten Umgebung des kritischen Punktes auch  $L(x, y) > 0$ . Schließlich ist Eigenschaft (b) aus der Definition einer Lyapunov-Funktion sogar mit „= 0“ erfüllt. Der kritische Punkt ist also tatsächlich stabil.

Die Lyapunov-Methode ist ein äußerst starkes Mittel zur Untersuchung von Stabilitätsfragen mit einem kleinen Nachteil: Zum Auffinden einer Lyapunov-Funktion für ein konkret gegebenes Problem gibt es kein allgemeines Verfahren. Hier ist gutes Raten, Erfahrung und Intuition gefragt und vor allem ein gutes Verständnis des durch die DGL modellierten physikalischen/chemischen/mechanischen/... Systems. Eine Lyapunov-Funktion misst in einem gewissen Sinne den Abstand einer Lösung zum Gleichgewichtszustand. Dieser ist üblicherweise ein Zustand, in dem eine charakteristische Größe, wie z. B. Energie minimal wird. Also ist die in einem Zustand  $y(t)$  „enthaltene“ Energie in jedem Fall ein guter Kandidat für eine Lyapunov-Funktion! Oft kann man also die Lyapunov-Funktion aus der Physik hinter der Gleichung erahnen.

Zur Illustration diene das folgende Beispiel, das eine Wiederaufnahme von Beispiel 9.10 ist.

**Beispiel 10.7.** (Mathematisches Pendel)

Wir betrachten wieder die Gleichung  $y''(t) + \sin(y(t)) = 0$  des mathematischen Pendels aus Beispiel 9.10. Das zugehörige System erster Ordnung hat die Form

$$\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ -\sin(v_1(t)) \end{pmatrix} = f(v_1(t), v_2(t))$$

mit  $f(x, y) = (y, -\sin(x))$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Wir zeigen, dass die Funktion  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$L(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x \sin(s) \, ds = \frac{1}{2}y^2 - \cos(x) + 1$$

eine Lyapunov-Funktion unseres Systems für die Nulllösung ist.

Die Frage, wie man bitteschön auf diese Funktion kommt, ist einfach zu beantworten:  $y = v_2(t)$  ist die Geschwindigkeit des Pendels und damit (bis auf Kleinigkeiten wie die Masse, die hier auf 1 normiert ist) ist der Ausdruck  $\frac{1}{2}y^2$  gerade die kinetische Energie des Pendels. Das Integral integriert die Größe  $\sin(s)$  von der Ruhelage 0 bis zur aktuellen Auslenkung  $x = v_1(t)$ . Das ergibt genau die potentielle Energie des Pendels, die zur Auslenkung um  $x$  gehört.  $L(x, y)$  ist also gerade im obigen Sinne die Gesamtenergie, die im Zustand  $(x, y)$  des Pendels steckt.

Tatsächlich gilt  $L(0, 0) = 0$ ,  $L(x, y) > 0$  in einer Umgebung von  $(0, 0)$ , außer in  $(0, 0)$  selbst und schließlich ist auch

$$\nabla L(x, y) \cdot f(x, y) = (\sin(x), y) \cdot \begin{pmatrix} y \\ -\sin(x) \end{pmatrix} = y \sin(x) - y \sin(x) = 0.$$

Damit ist  $L$  eine Lyapunov-Funktion und die Nulllösung ist stabil.

# Index

- Anfangswert, 2, 9
- Anfangswertproblem, 9
- aperiodischer Grenzfall, 71
- Arzelà-Ascoli, Satz von, 25
- asymptotisch stabile Lösung, 73
- attraktive Lösung, 73
- autonome DGL, 7
  
- Banachscher Fixpunktsatz, 33
- Blow-up, 11, 19
  
- charakteristisches Polynom, 70
  
- Daten, stetige Abhängigkeit von, 42
- diagonalisierbare Matrix, 65
- Diagonalmatrix, 64
- Differentialgleichung
  - autonome, 7
  - explizite, 7
  - gewöhnliche, iii, 7
  - höherer Ordnung, 45
  - homogene, 20
  - homogene lineare, 49, 50
  - inhomogene lineare, 49, 51
  - lineare, 49
    - homogene, 49, 50
    - inhomogene, 49, 51
  - Ordnung einer, 3, 7
  - skalare, 7
  - System von, 5
  - von getrennten Veränderlichen, 15, 16
- Duhamel'sche Formel, 51, 57
- eindeutige Lösung, 10
  
- einfaches Wachstumsmodell, 1, 8
- Existenzintervall, maximales, 10, 19, 41
- explizite DGL, 7
  
- Federpendel, 48
- Fixpunktsatz, Banachscher, 33
- Fortsetzung einer Lösung, 10
- freier Fall, 2
- Fundamentalmatrix, 54
- Fundamentalsystem, 54, 69
- Funktion, Lyapunov-, 85
  - strikte, 85
  
- gedämpfter harmonischer Oszillator, 70
- getrennte Veränderliche, 15, 16
- gewöhnliche Differentialgleichung, iii, 7
  
- Gleichgewicht, 73
- gleichgradig stetig, 24
- Gleichung
  - Lotka-Volterra-, 4, 80, 83
- globale Lipschitz-Bedingung, 33
- globale Lösung, 10, 45
- Gronwall, Lemma von, 36
  
- harmonischer Oszillator, 48
  - gedämpft, 70
- homogene DGL, 20
- homogene lineare DGL, 49, 50
  
- inhomogene lineare DGL, 49, 51
- instabile Lösung, 73
- Instabilitätssatz, 78

## Index

- Lyapunov-, 87
- Intervall, 7
- Jacobi-Matrix, 76
- Jordan-Normalform, 65
- kompakt, relativ, 24
- kompakt-gleichmäßig konvergent, 35
- kritischer Punkt, 73
- Langzeitverhalten, 73
- Leibniz-Formel, 59
- Lemma
  - von Gronwall, 36
  - von Zorn, 11
- Lifespan, 40
- lineare DGL, 49
  - homogene, 49, 50
  - inhomogene, 49, 51
- linearisierte Stabilität, Prinzip der, 79
- Lipschitz-Bedingung
  - globale, 33
  - lokale, 36
- logistisches Wachstumsmodell, 2, 8, 13, 14
- lokale Lipschitz-Bedingung, 36
- lokale Lösung, 10
- Lösung
  - asymptotisch stabile, 73
  - attraktive, 73
  - eindeutige, 10
  - einer DGL, 9
    - höherer Ordnung, 45
  - eines Anfangswertproblems, 10
    - höherer Ordnung, 45
  - Fortsetzung einer, 10
  - globale, 10, 45
  - instabile, 73
  - lokale, 10
  - maximale, 10, 11
  - Partikulär-, 52
  - spezielle, 52
  - stabile, 73
  - stationäre, 13, 73
- Lotka-Volterra-Gleichungen, 4, 80, 83
- Lyapunov-
  - Funktion, 85
    - strikte, 85
  - Instabilitätssatz, 87
  - Stabilität, 83
  - Stabilitätssatz, 85
- Mathematisches Pendel, 79, 88
- Matrix
  - diagonalisierbare, 65
  - exponentialfunktion, 64
  - Jordan-Normalform, 65
- maximale Lösung, 10, 11
- maximales Existenzintervall, 10, 19, 41
- Maximumsnorm, 24
- Ordnung einer DGL, 3, 7, 45
- Partikulärlösung, 52
- Peano, Satz von, 26
  - für höhere Ordnung, 47
- Pendel
  - Feder-, 48
  - mathematisches, 79, 88
- Picard-Iteration, 35
- Picard-Lindelöf, Satz von
  - globale Version, 33
  - für höhere Ordnung, 48
  - lokale Version, 39
- Polynom, charakteristisches, 70
- Prinzip der linearisierten Stabilität, 79
- Punkt, kritischer, 73
- relativ kompakt, 24
- Resonanz, 11
- Satz
  - Banachscher Fixpunkt-, 33
  - Instabilitäts-, 78
  - Lyapunov-Instabilitäts-, 87
  - Lyapunov-Stabilitäts-, 85

- Stabilitäts-, 76
  - von Arzelà-Ascoli, 25
  - von Peano, 26
    - für höhere Ordnung, 47
  - von Picard-Lindelöf
    - globale Version, 33, 48
    - lokale Version, 39
- skalare DGL, 7
- Spektralschranke, 76
- Spektrum, 74
- spezielle Lösung, 52
- stabile Lösung, 73
- Stabilität, 73
  - Lyapunov-, 83
  - Prinzip der linearisierten, 79
- Stabilitätssatz, 76
  - Lyapunov-, 85
- Startwert, 2
- stationäre Lösung, 13, 73
- stetige Abhängigkeit von Daten, 42
- Superpositionsprinzip, 53
- System von DGLen, 5
  - lineares, 49
- Trennung der Variablen, 16
- Variation der Konstanten, 51
- Variation-der-Konstanten-Formel, 51, 57
- Wachstumsmodell
  - einfaches, 1, 8
  - logistisches, 2, 8, 13, 14
- Wachstumsrate, 1
- Wronski-Determinante, 59
- Zorn, Lemma von, 11