Skript zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2022/23

Robert Haller

7. September 2022

Vorbemerkungen

Dieser Text enthält die Inhalte meiner Vorlesung Analysis I im Wintersemester 2022/23. Einige wenige Abschnitte werden aus Zeitgründen nicht behandelt. Das betrifft vor allem die Kapitel 14 und 34, aber auch einige längere Beweise, ein paar Sätze und einige wenige Teile von Beispielen. Alle diese Abschnitte sind mit einem Sternchen $^{(*)}$ kenntlich gemacht.
Trotz aller Sorgfalt lassen sich Fehler bei einem Text dieser Länge nicht vermeiden. Sollte Ihnen ein mathematischer oder auch ein einfacher Tippfehler auffallen, freue ich mich, wenn Sie mir das mitteilen (haller@mathematik.tu-darmstadt.de), damit ich die entsprechende Stelle korrigieren kann. Parallel zum laufenden Semester werde ich eine Errata-Liste mit allen mathematisch relevanten Fehlern pflegen und im Moodle bereitstellen.

Robert Haller

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Zahlen und Mengen

1. Grundlegende Begriffe

Bevor wir mit der Analysis anfangen, brauchen wir ein paar Grundbegriffe, um Mathematik sauber aufzuschreiben. Die in diesem Abschnitt eingeführten Konzepte haben also nicht primär etwas mit Analysis zu tun, sondern bilden das Grundvokabular, in dem eigentlich jeder mathematische Text geschrieben ist.
Wir beginnen mit folgender Übereinkunft zur Verwendung des Gleichheitszeichens:

- Das Zeichen „:=“ bedeutet „per Definition gleich“.
- Das Zeichen „=“ steht in der Gleichheits-Aussage.

1.1. Mengen

Den Begriff der Menge definieren wir hier nicht, sondern legen ihn naiv zu Grunde. Wir stellen uns damit auf den Standpunkt der naiven (und nicht der axiomatischen) Mengenlehre. Dazu dient die folgende, von Georg Cantor gegebene, Definition: „Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.“
Wenn wir Mengen bilden, ist unser Ausgangspunkt immer eine gegebene, unter Umständen sehr große Grundmenge G, aus der Elemente ausgesondert und zu neuen Mengen zusammengefasst werden.
Mengen kann man, solange sie klein genug sind, einfach durch das Aufzählen ihrer Elemente angeben, z. B.

$$M_1 := \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Es ist jedoch häufig angenehmer, sie durch die Angabe einer definierenden Eigenschaft, die genau für die Elemente der Menge, und nur für diese, wahr ist, zu beschreiben. Für unsere Menge M_1 könnte das so aussehen:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x < 6\} \quad \text{oder} \quad M_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x(x-6) < 0\}.$$

Allgemein schreibt man

$$M = \{x \in G : E(x)\}.$$

Dabei ist G die Grundmenge, aus der die Elemente der Menge M ausgesondert werden sollen und $E(x)$ ist eine *Aussageform*, die durch Einsetzen eines Elements aus G zu einer *Aussage* wird, d. h. zu einem Satz, der entweder wahr oder falsch ist. M enthält dann genau die Elemente, für die $E(x)$ eine wahre Aussage ist. Betrachtet man das weitere Beispiel

$$M_2 := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\},$$

so sieht man schnell den Vorteil dieser Methode gegenüber der reinen Aufzählung. Für die weiteren Betrachtungen in diesem Abschnitt ist stets eine Grundmenge G als gegeben anzunehmen.

Definition 1.1. *Es seien M und N Mengen. Dann verwenden wir die folgenden Notationen:*

(a) $a \in M$*: a ist in M enthalten;*

$a \notin M$*: a gehört nicht zu M.*

(b) $N \subseteq M$*: N ist eine* Teilmenge *von M, d. h. jedes Element von N ist auch in M enthalten. Eine solche Teilmengenbeziehung nennt man auch eine* Inklusion*.*

(c) $N \supseteq M$*: N ist* Obermenge *von M, d. h. M ist eine Teilmenge von N.*

(d) $N = M$*: Beide Mengen enthalten genau die gleichen Elemente.*

(e) $\emptyset$*: Dieses Symbol bezeichnet die* leere Menge*, d. h. eine Menge, die kein Element enthält.*

Bemerkung 1.2. Man beachte, dass zwei Mengen M und N gleich sind, wenn sowohl $M \subseteq N$ als auch $M \supseteq N$ gilt.

Definition 1.3. *Es seien M und N Mengen. Dann heißt*

(a) $M \cup N := \{x \in G : x \in M \text{ oder } x \in N\}$ *die* Vereinigung *von M und N.*

(b) $M \cap N := \{x \in G : x \in M \text{ und } x \in N\}$ *der* Durchschnitt *oder auch nur* Schnitt *der Mengen M und N.*

(c) $M^c := \{x \in G : x \notin M\}$ *das* Komplement *von M (in G).*

(d) $M \setminus N := \{x \in M : x \notin N\}$ *die* Mengendifferenz *von M und N.*

(e) $M \times N := \{(m, n) : m \in M \text{und } n \in N\}$ *das* kartesische Produkt *von M und N.*

Mit diesen Begriffen können wir nun schon etwas Mathematik betreiben. Wir sammeln die wichtigsten Regeln für obige Mengenoperationen in folgendem Satz.

Satz 1.4. *Es seien A, B und C Mengen. Dann gelten* *(a)* $A \cup B = B \cup A$ *und* $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativgesetze)*,*

(b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *und* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativgesetze)*,*

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *und* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivgesetze)*,*

(d) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *und* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Regeln von De Morgan)*.*

Beweis. Wir behandeln hier das erste Distributivgesetz und die erste Regel von De Morgan, die weiteren verbleiben als Übungsaufgabe. Für das Distributivgesetz zeigen wir zuerst (vgl. Bemerkung 1.2)

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

und zwar folgendermaßen: Sei $x \in A \cup (B \cap C)$. Dann ist also $x \in A$ oder $x \in B \cap C$. Betrachten wir zunächst den Fall $x \in A$. Dann gilt auch $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$, denn diese Mengen enthalten A. Also ist $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und wir sind fertig. Betrachten wir also den Fall $x \in B \cap C$. Dann ist $x \in B$ und $x \in C$, also gilt wieder $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$, dieses Mal, weil x sowohl in B als auch in C liegt. Daraus folgt wieder $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und wir haben $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ gezeigt.
Um die im ersten Distributivgesetz behauptete Gleichheit zu zeigen, müssen wir nun noch die umgekehrte Inklusion

$$A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

zeigen. Dazu sei $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dann ist x sowohl in $A \cup B$ als auch in $A \cup C$. Wir betrachten die beiden Fälle $x \in A$ und $x \notin A$. Man beachte, dass wir dann alle möglichen Fälle berücksichtigt haben! Ist $x \in A$, so haben wir sofort auch $x \in A \cup (B \cap C)$, was unser Ziel war. Es bleibt also der Fall $x \notin A$. Da dann x in $A \cup B$ ist, ohne in A zu sein, muss x zwangsläufig in B sein, denn wie sollte es sonst da hineinkommen? Genauso folgt $x \in C$ aus $x \in A \cup C$. Also ist x in $B \cap C$ und damit auch $x \in A \cup (B \cap C)$ und wir haben auch die zweite Inklusion und damit die Gleichheit

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$$

gezeigt.

Für die erste Regel von De Morgan zeigen wir wieder zuerst

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c.$$

Sei dazu $x \in (A \cup B)^c$. Dann ist $x \notin A \cup B$, d. h. x ist nicht in der Vereinigung von A und B enthalten. Damit kann x weder in A noch in B sein, denn sonst würde

es ja in dieser Vereinigung liegen. Es ist also $x \notin A$ und $x \notin B$, d. h. $x \in A^c$ und $x \in B^c$, was schließlich $x \in A^c \cap B^c$ nach sich zieht.
Die zweite Inklusion

$$(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$$

zeigt man folgendermaßen: Es sei $x \in A^c \cap B^c$. Dann ist $x \in A^c$ und $x \in B^c$. Also ist x nicht in A und nicht in B, es ist also auch nicht in der Vereinigung von A und B, was genau $x \in (A \cup B)^c$ bedeutet. □

Definition 1.5. *Ist I eine Menge (Man nennt I in diesem Zusammenhang* Indexmenge*) und ist für jedes $i \in I$ eine Menge M_i gegeben, so ist*

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \in G : \text{ es gibt ein } j \in I \text{ mit } x \in M_j\} \quad \text{und}$$
$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \in G : x \in M_j \text{ für alle } j \in I\}.$$

Ist $I = \mathbb{N}$, so schreibt man auch oft $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ bzw. $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ statt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$.

1.2. Zeichenerklärung für die logischen Symbole

All- und Existenzquantor

Oft werden in mathematischen Texten die folgenden Symbole verwendet:

- Der *Allquantor* $\forall$ bedeutet „für alle“.

  Beispiel: „$\forall n \in \mathbb{N} : 2n$ ist eine gerade Zahl“ ist eine wahre Aussage.

- Der *Existenzquantor* $\exists$ steht für „es existiert“.

  Beispiel: „$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$“ ist eine falsche Aussage.

Beispiel 1.6. Für ein Beispiel, das die beiden Quantoren kombiniert, definieren wir S als die Menge aller Städte und W als die Menge aller Wege auf der Erde und betrachten die bekannte Aussage

$$\exists s \in S \; \forall w \in W : w \text{ führt nach } s. \tag{1.1}$$

Übersetzung: Es gibt eine Stadt (meist Rom genannt), zu der alle Wege hinführen. Gesucht ist die Verneinung dieser Aussage, d. h. eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn (1.1) falsch ist und genau dann falsch ist, wenn (1.1) wahr ist.
Es gilt die folgende *Regel zum Verneinen von Aussagen*:

Jedes $\exists$ wird ein $\forall$, jedes $\forall$ ein $\exists$ und die Bedingung am Ende wird verneint.

Im obigen Beispiel also

$$\forall s \in S\ \exists w \in W : w \text{ führt nicht nach } s,$$

d. h. für jede Stadt gibt es einen Weg, der nicht zu ihr führt. Für den Spezialfall Rom ergibt sich: Es gibt einen Weg, der nicht nach Rom führt.

Implikation und Äquivalenz

Sind A und B zwei Aussagen, so bezeichnet man mit

- „$A \Longrightarrow B$" die Aussage „Aus A folgt B" oder „A impliziert B" (*Implikation*).
- „$A \iff B$" die Aussage „A gilt genau dann, wenn B gilt" oder „A ist äquivalent zu B" (*Äquivalenz*).

Die Wahrheitswerte solcher zusammengesetzter Aussagen kann man durch eine *Wahrheitstafel* angeben. Für den Wahrheitsgehalt der Aussagen A und B gibt es vier verschiedene Fälle (beide wahr, A wahr und B falsch, A falsch und B wahr sowie beide falsch). Eine Wahrheitstafel gibt nun in jedem dieser Fälle den Wahrheitsgehalt der zusammengesetzten Aussage an. Für Implikation und Äquivalenz ergibt das:

A	B	$A \Longrightarrow B$	$A \iff B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
f	f	w	w

Oft hat man in Beweisen die Äquivalenz zweier Aussagen A und B nachzuweisen. Dazu ist es meist von Vorteil, diese Aufgabe in die beiden Teilprobleme „$A \Longrightarrow B$" und „$B \Longrightarrow A$" aufzuteilen und diese beiden Implikationen getrennt zu beweisen.

Übungsaufgabe 1.7. Machen Sie sich anhand einer Wahrheitstafel klar, dass die beiden Aussagen „$A \iff B$" sowie „$A \Longrightarrow B$ und $B \Longrightarrow A$" tatsächlich die gleichen Wahrheitswerte haben.

Hat man sogar „$A \iff B \iff C \iff D \iff \cdots \iff Q$" zu beweisen, so hilft das Prinzip des *Ringschlusses*: Man zeigt „$A \Longrightarrow B$, $B \Longrightarrow C, \ldots, P \Longrightarrow Q$ und $Q \Longrightarrow A$". Machen Sie sich auch hier klar, dass damit wirklich die obige Aussage gezeigt ist!

Warnung 1.8. Hüten Sie sich vor dem Umkehrschluss: Wenn die Aussage „$A \Longrightarrow B$" wahr ist, kann man daraus nicht folgern, dass auch „$B \Longrightarrow A$" stimmt. Dieser Fehlschluss wird auch oft in folgender Version gemacht: Aus „$A \Longrightarrow B$" wird gefolgert, dass, wenn A falsch ist, auch B falsch sein muss. Ein Blick in obige Wahrheitstafel zeigt sofort, dass das nicht stimmt. Trotzdem passiert es immer wieder.

Bemerkung 1.9. Eine zur Implikation „$A \implies B$“ äquivalente Aussage ist dagegen die *Kontraposition* „nicht $B \implies$ nicht A“, wie man der folgenden Wahrheitstafel entnehmen kann:

A	B	$A \implies B$	nicht B	nicht A	nicht $B \implies$ nicht A
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Im sogenannten *Beweis durch Kontraposition* wird dieser Zusammenhang genutzt.

1.3. Abbildungen

Wir betrachten nun den für alle Teilbereiche der Mathematik wichtigen Begriff der Abbildung (oder auch Funktion).

Definition 1.10. *Es seien D und Z Mengen und es sei jedem Element d aus D genau ein Element $f(d)$ in Z zugeordnet. Diese Zuordnung nennt man dann eine* Abbildung *oder auch* Funktion *f und schreibt*

$$f : D \to Z, \quad d \mapsto f(d) \qquad \text{oder} \qquad f : \begin{cases} D \to Z \\ d \mapsto f(d). \end{cases}$$

Dabei heißt D die Definitionsmenge *und Z die* Zielmenge *von f.*
Weiter nennt man ein Element $d \in D$ auch Argument *von f, $f(d)$ das* Bild *von d unter f und ist $z \in Z$, so heißt jedes $d \in D$ mit $f(d) = z$ ein* Urbild *von z.*
Schließlich ist für jedes $A \subseteq D$ das Bild, *auch* Bildmenge *genannt, von A unter f gegeben durch*

$$f(A) := \{f(a) : a \in A\}$$

und für jede Teilmenge B von Z ist

$$f^{-1}(B) := \{d \in D : f(d) \in B\}$$

das Urbild *bzw. die* Urbildmenge *der Menge B.*

Beispiel 1.11. Im weiteren Verlauf werden wir es vor allem mit Funktionen zu tun haben, die zwischen Mengen von Zahlen definiert sind. Beispiele wären hier das Potenzieren mit zwei in den reellen Zahlen:[1]

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

[1] Rein formal betrachtet können wir diese Beispiele hier noch nicht betrachten, da wir die reellen Zahlen noch nicht eingeführt haben. Es sei also vorübergehend an Ihr Schulwissen appeliert.

oder die Wurzelfunktion

$$\sqrt{} : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Im Folgenden definieren wir die Verkettung, d. h. die Nacheinanderausführung von Abbildungen.

Definition 1.12. *Es seien A, B und C Mengen und $f : A \to B$ sowie $g : B \to C$ Funktionen. Dann heißt die Funktion $g \circ f$ (lies „g* nach *f“), gegeben durch*

$$g \circ f : A \to C, \quad a \mapsto (g \circ f)(a) := g(f(a)),$$

die Verkettung *oder auch* Komposition *von g mit f.*

Wir wollen einigen besonders schönen Eigenschaften von Funktionen einen Namen geben.

Definition 1.13. *Es seien D und Z Mengen sowie $f : D \to Z$ eine Funktion. Dann heißt f*

(a) surjektiv, *wenn $f(D) = Z$ gilt.*

(b) injektiv, *wenn für alle $x, y \in D$ mit $f(x) = f(y)$ stets $x = y$ gilt.*

(c) bijektiv, *wenn f injektiv und surjektiv ist.*

Bijektive Abbildungen sind deshalb besonders wichtig, weil sie sich rückgängig machen lassen. Das konkretisieren wir im folgenden Satz.

Satz 1.14. *Es seien D, Z Mengen und $f : D \to Z$ eine Funktion. Dann ist f genau dann bijektiv, wenn es für jedes $b \in Z$ genau ein $a \in D$ gibt, sodass $f(a) = b$ gilt. In diesem Fall existiert eine Abbildung $f^{-1} : Z \to D$ mit*

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \text{für alle } a \in D \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(b)) = b \quad \text{für alle } b \in Z.$$

Beweis. **1. Schritt:** Wir zeigen: f bijektiv $\Longrightarrow$ für alle $b \in Z$ existiert genau ein $a \in D$ mit $f(a) = b$.

Da f surjektiv ist, gibt es zu jedem $b \in Z$ mindestens ein $a \in D$ mit $f(a) = b$. Sind $a_1, a_2 \in D$ mit $f(a_1) = b = f(a_2)$ gegeben, so folgt aus der Injektivität von f sofort $a_1 = a_2$, es kann also nur genau ein solches $a \in D$ geben.

2. Schritt: Wir zeigen: Für alle $b \in Z$ existiert genau ein $a \in D$ mit $f(a) = b \Longrightarrow f$ bijektiv.

Nach Voraussetzung sind alle $b \in Z$ in $f(D)$ enthalten, also ist f surjektiv. Seien nun $a_1, a_2 \in D$ mit $f(a_1) = f(a_2)$ gegeben. Da jedes $b \in Z$ nur genau ein Urbild hat, muss dann $a_1 = a_2$ sein, d. h. f ist auch injektiv.

3. Schritt: Wir zeigen: f bijektiv $\Longrightarrow$ es existiert $f^{-1}: Z \to D$ mit $f^{-1}(f(a)) = a$ für alle $a \in D$ und $f(f^{-1}(b)) = b$ für alle $b \in Z$.

Für jedes $b \in Z$ definieren wir $f^{-1}(b) := a$, wobei $a \in D$ das nach dem ersten Schritt eindeutig bestimmte Element mit $f(a) = b$ ist. Dann ist $f^{-1}(f(a))$ das Element von D, das in f eingesetzt $f(a)$ ergibt, also $f^{-1}(f(a)) = a$ für alle $a \in D$. Sei nun $b \in Z$. Dann ist $f^{-1}(b)$ das Element von D mit $f(f^{-1}(b)) = b$ und wir sind fertig. □

Definition 1.15. *Es seien D, Z zwei Mengen und $f: D \to Z$ bijektiv. Dann heißt die Abbildung $f^{-1}: Z \to D$ aus Satz 1.14* Umkehrfunktion *von f.*

Beispiel 1.16. Betrachten wir noch einmal die beiden Abbildungen aus Beispiel 1.11, so ist die erste Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

weder injektiv (denn $f(1) = f(-1)$, aber $1 \neq -1$) noch surjektiv (denn $-1 \notin f(\mathbb{R})$). Betrachten wir dagegen

$$\widetilde{f}: \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad x \mapsto x^2,$$

so ist diese nun surjektiv, denn jede positive reelle Zahl ist das Quadrat einer reellen Zahl, aber weiterhin nicht injektiv, denn das Problem mit $\widetilde{f}(1) = \widetilde{f}(-1)$ bleibt bestehen. Das können wir lösen, indem wir nun noch den Definitionsbereich einschränken, d. h. wir betrachten

$$\widehat{f}: \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad x \mapsto x^2.$$

Nun ist $\widehat{f}$ tatsächlich bijektiv und die oben erwähnte Wurzelfunktion ist die Umkehrabbildung.

Wie in obigem Beispiel will man oft eine gegebene Funktion nur auf einem Teil ihres Definitionsbereiches untersuchen. Dazu vereinbaren wir die folgende Notation.

Definition 1.17. *Seien D, Z Mengen, $f: D \to Z$ eine Funktion und $M \subseteq D$. Dann ist $f|_M$ die* Einschränkung von f auf M*, d. h. $f|_M: M \to Z$ ist gegeben durch $f|_M(x) = f(x)$ für $x \in M$.*

2. Reelle Zahlen

Die Grundmenge der Analysis ist die Menge der reellen Zahlen, geschrieben $\mathbb{R}$. Diese führen wir *axiomatisch* ein, d. h. wir postulieren eine gewisse Anzahl von Grundannahmen, genannt Axiome, deren Gültigkeit wir ohne Beweis zu Grunde legen.

Körperaxiome

In $\mathbb{R}$ sind zwei Abbildungen („Verknüpfungen“) $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, genannt *Addition* und *Multiplikation*, die jedem Paar von Elementen $a, b \in \mathbb{R}$ ein $a + b \in \mathbb{R}$, bzw. ein $a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen. Dabei sollen die folgenden Axiome gelten.

(A1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (*Assoziativgesetz der Addition*).

(A2) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, sodass $a+0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ ist (*Nullelement*).

(A3) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $-a \in \mathbb{R}$, sodass $a + (-a) = 0$ gilt (*additives inverses Element*).

(A4) $a + b = b + a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ (*Kommutativgesetz der Addition*).

(A5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (*Assoziativgesetz der Multiplikation*).

(A6) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq 0$, sodass $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ ist (*Einselement*).

(A7) Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es ein $a^{-1} \in \mathbb{R}$, sodass $a \cdot a^{-1} = 1$ gilt (*multiplikatives inverses Element*).

(A8) $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ (*Kommutativgesetz der Multiplikation*).

(A9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (*Distributivgesetz*).

Bemerkung 2.1. Alle bekannten Rechenregeln für „+“ und „·“ lassen sich aus (A1) – (A9) ableiten.

Wir betrachten die folgenden Aussagen als Beispiele:

Satz 2.2. *(a) Es gibt genau ein Nullelement in* $\mathbb{R}$.

(b) $a \cdot 0 = 0$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$.

(c) Gilt $a \cdot b = 0$ für zwei reelle Zahlen a, b, so ist $a = 0$ oder $b = 0$.

Beweis. (a) Sei $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ ein weiteres Nullelement, d. h. für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $a + \tilde{0} = a$. Insbesondere gilt also für $a = 0$ damit $0 + \tilde{0} = 0$. Mit (A2) für $a = \tilde{0}$ haben wir außerdem $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. Also können wir mit Hilfe von (A4) folgern:

$$\tilde{0} = \tilde{0} + 0 = 0 + \tilde{0} = 0.$$

(b) Nach (A2) gilt $0 + 0 = 0$. also ist auch für jedes $a \in \mathbb{R}$ unter Zuhilfenahme von (A9)

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\text{(A3)}}{=} a \cdot 0 + \big(-(a \cdot 0)\big) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + \big(-(a \cdot 0)\big) \\ &\overset{\text{(A1)}}{=} a \cdot 0 + \big(a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))\big) \overset{\text{(A3)}}{=} a \cdot 0 + 0 \overset{\text{(A2)}}{=} a \cdot 0, \end{aligned}$$

also $a \cdot 0 = 0$.

(c) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot b = 0$. Im Falle $a = 0$ sind wir fertig, wir betrachten also den Fall $a \neq 0$. Dann gibt es nach (A7) ein Element $a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$. Also ist in diesem Fall

$$b \overset{\text{(A6)}}{=} b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot a^{-1}) \overset{\text{(A5)}}{=} (b \cdot a) \cdot a^{-1} \overset{\text{(A8)}}{=} (a \cdot b) \cdot a^{-1} = 0 \cdot a^{-1} \overset{\text{(b)}}{=} 0,$$

d. h. $b = 0$. Damit folgt die Behauptung. □

Definition 2.3. *(a) Den „$\cdot$“ für die Multiplikation lassen wir meist weg und schreiben einfach „ab“ statt „$a \cdot b$“.*

(b) Wir setzen $a - b := a + (-b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ (Subtraktion).

(c) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und gilt $b \neq 0$, so schreiben wir $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$ (Division).

Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ ist eine Relation $\leq$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben.

(A10) Für jede Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ gilt stets $a \leq b$ oder $b \leq a$ (*Totalordnung*).

(A11) Gelten für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ die beiden Aussagen $a \leq b$ und $b \leq a$, so ist $a = b$ (*Antisymmetrie*).

(A12) Wenn für drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ sowohl $a \leq b$ als auch $b \leq c$ gilt, so ist auch $a \leq c$ (*Transitivität*).

(A13) Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ und gilt $a \leq b$, so ist auch $a + c \leq b + c$.

(A14) Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ und gilt $a \leq b$ und $0 \leq c$, so ist auch $ac \leq bc$.

Definition 2.4. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir setzen*

(a) $a \geq b$, *wenn* $b \leq a$ *ist,*

(b) $a < b$, *wenn* $a \leq b$ *und* $a \neq b$ *ist,*

(c) $a > b$, *wenn* $b < a$ *ist.*

Definition 2.5. *Eine reelle Zahl a heißt*

(a) positiv*, falls* $a \geq 0$ *und* strikt positiv*, wenn* $a > 0$ *gilt.*

(b) negativ*, falls* $a \leq 0$ *und* strikt negativ*, wenn* $a < 0$ *gilt.*

Bemerkung 2.6. Alle Regeln für Ungleichungen lassen sich aus den Axiomen (A1) – (A14) ableiten.

Wir betrachten wieder einige Beispiele.

Satz 2.7. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(a) Ist $a \leq b$, so gilt $-a \geq -b$.

(b) Sind $a \leq b$ und $c \leq 0$, so folgt $ac \geq bc$.

(c) $1 > 0$.

Beweis. (a) Nach (A13) mit $c := -a$ bekommen wir aus $a \leq b$ die Ungleichung $0 = a+(-a) \leq b+(-a)$. Wenden wir auf diese Ungleichung dasselbe Axiom mit $c := -b$ an, erhalten wir

$$-b \leq b + (-a) + (-b) = -a$$

und sind fertig.

(b) Nach Teil (a) gilt $-c \geq -0 = 0$, also liefert (A14)

$$-ac = a \cdot (-c) \leq b \cdot (-c) = -bc.$$

Eine erneute Anwendung von Teil (a) ergibt dann

$$ac = -(-ac) \geq -(-bc) = bc.$$

(c) Die Annahme $1 \leq 0$ führt nach Teil (b) mit $a := c := 1$ und $b := 0$ sofort auf den Widerspruch $1 = ac \geq bc = 0$. □

Wir definieren nun die Betragsfunktion, ein fundamentales Hilsmittel in der gesamten Analysis.

Definition 2.8. *Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist der* Betrag *von a, symbolisiert durch $|a|$, gegeben durch*

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Satz 2.9. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

(a) $|a| \geq 0$

(b) $|a| = |-a|$,

(c) $\pm a \leq |a|$,

(d) $|ab| = |a| \cdot |b|$,

(e) $|a| = 0$ *genau dann, wenn* $a = 0$,

(f) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung),

(g) $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung).

Beweis. Die Teile (a) bis (d) verbleiben als Übungsaufgabe.

(e) Zu zeigen ist: $|a| = 0 \iff a = 0$. Die Implikation „$\Longleftarrow$“ folgt direkt aus der Definition des Betrages. Für die umgekehrte Implikation beobachten wir, dass für alle $a > 0$ auch $|a| = a > 0$ ist und dass für alle $a < 0$ genauso $|a| = -a > 0$ ist. Also gilt $|a| = 0$ nur für $a = 0$.

(f) Wir betrachten zunächst den Fall $a + b \geq 0$. Dann gilt nach Definition des Betrags $|a + b| = a + b$ und mit Hilfe von (c) ist $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$.

Ist dagegen $a + b < 0$, so gilt $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b)$, woraus mit (c) wieder $|a + b| \leq |a| + |b|$ folgt.

(g) Mit Hilfe von (f) gilt $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ und damit haben wir $|a| - |b| \leq |a - b|$. Analog erhält man durch Vertauschen der Rollen von a und b die Ungleichung $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$. Da $|b| - |a| = -(|a| - |b|)$ ist, sehen wir damit $|a| - |b| \leq |a - b|$ und $-(|a| - |b|) \leq |a - b|$, woraus nach der Definition des Betrages die Behauptung folgt. □

Definition 2.10. *Es seien zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Dann heißen*

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall,
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall,
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ *und*
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ halboffene Intervalle.

Um auch die Fälle von Halbstrahlen abzudecken, definieren wir weiter:

- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$,
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$,
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$,
- $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Als Vorbereitung für das 15. Axiom führen wir einige Schreibweisen und Begriffe ein, die bei der Untersuchung von Teilmengen von $\mathbb{R}$ nützlich sind.

Definition 2.11. *Es sei M eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

(a) M heißt nach oben beschränkt*, wenn ein $C \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $x \leq C$ für alle $x \in M$ gilt.*

In diesem Fall heißt C eine obere Schranke *von M.*

(b) M heißt nach unten beschränkt*, wenn ein $C \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $x \geq C$ für alle $x \in M$ gilt.*

In diesem Fall heißt C eine untere Schranke *von M.*

(c) M heißt beschränkt*, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.*

(d) Ist C eine obere Schranke von M und für jede weitere obere Schranke $\widetilde{C}$ von M gilt $C \leq \widetilde{C}$, so heißt C Supremum *von M. Wir bezeichnen es mit* $\sup M$.

(e) Ist C eine untere Schranke von M und für jede weitere untere Schranke $\widetilde{C}$ von M gilt $C \geq \widetilde{C}$, so heißt C Infimum *von M. Wir bezeichnen es mit* $\inf M$.

Wir überlegen uns kurz, dass das Supremum und das Infimum einer Menge, wenn es denn existiert, eindeutig bestimmt ist.

Satz 2.12. *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für das Supremum, das Argument für das Infimum geht analog.
Es sei M ein Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit zwei Suprema C_1 und C_2. Dann sind sowohl C_1 als auch C_2 obere Schranken von M. Da also C_1 ein Supremum und C_2 eine obere Schranke von M ist, gilt nach der Definition des Supremums $C_1 \leq C_2$. Umgekehrt ist aber auch C_2 ein Supremum und C_1 eine obere Schranke von M. Also gilt $C_2 \leq C_1$. Damit ist $C_2 = C_1$. □

Das ermöglicht die nachstehende Definition.

Definition 2.13. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \emptyset$.*

(a) Existiert $\sup M$ *und gilt* $\sup M \in M$*, so heißt* $\sup M$ *das* Maximum *von M. Wir bezeichnen es mit* $\max M$*.*

(b) Existiert $\inf M$ *und gilt* $\inf M \in M$*, so heißt* $\inf M$ *das* Minimum *von M. Wir bezeichnen es mit* $\min M$*.*

Beispiel 2.14. (a) Wir betrachten $M = (0, 1]$. Dann ist M nach oben und nach unten beschränkt, also beschränkt. Eine obere Schranke ist 17, eine untere ist 0. Weiter gilt $\sup M = \max M = 1$ und $\inf M = 0$. M hat aber kein Minimum, denn $0 \notin M$!

(b) Nun sei $M = (-\infty, -1)$. Dann ist M nach oben aber nicht nach unten beschränkt. Weiter gilt $\sup M = -1$, aber M hat kein Maximum. Da M kein Infimum hat, erübrigt sich die Suche nach einem Minimum.

Wir kommen nun zum letzten Axiom der reellen Zahlen.

Vollständigkeitsaxiom

(A15) Jede Teilmenge M von $\mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$, die nach oben beschränkt ist, besitzt ein Supremum.

Wir können damit die entsprechende Aussage über das Infimum beweisen.

Satz 2.15. *Ist $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und M nach unten beschränkt, so existiert* $\inf M$*.*

Beweis$^{(*)}$. Wir setzen $\widetilde{M} := \{-x : x \in M\}$. Nach Voraussetzung existiert eine untere Schranke C_* von M. Für diese gilt also $C_* \leq x$ für alle $x \in M$. Damit ist $-x \leq -C_*$ für alle $x \in M$, also ist $-C_*$ eine obere Schranke von $\widetilde{M}$. Nach Axiom (A15) existiert also $s := \sup \widetilde{M}$. Weiter gilt $-x \leq s$ für alle $x \in M$, also ist $-s \leq x$ für alle diese x. Das bedeutet, dass $-s$ eine untere Schranke von M ist. Wir müssen noch zeigen, dass $-s$ die größte untere Schranke von M ist. Sei also σ eine weitere untere Schranke von M. Dann ist wie oben $-\sigma$ eine obere Schranke von $\widetilde{M}$. Da s das Supremum von $\widetilde{M}$ ist, muss also $s \leq -\sigma$, und damit $\sigma \leq -s$ gelten. Also ist $-s = \inf M$. □

Wir sammeln einige elementare Eigenschaften von Supremum und Infimum.

Satz 2.16. *(a) Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leer und beschränkt, so gilt* $\inf M \leq \sup M$*.*

(b) Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben (bzw. unten) beschränkt und $N \subseteq M$ nicht-leer, so ist auch N nach oben (bzw. unten) beschränkt und es gilt $\sup N \leq \sup M$ *(bzw.* $\inf N \geq \inf M$*).*

Beweis. Zum Beweis von (a) sei $x \in M$ beliebig gewählt. Man beachte dazu, dass $M \neq \emptyset$ vorausgesetzt ist. Nun gilt $x \geq \inf M$ und $x \leq \sup M$. Also ist $\inf M \leq x \leq \sup M$.
Wir wenden uns dem Beweis von (b) zu. Für jedes $x \in N$ gilt $x \in M$ und damit $x \leq \sup M$ (bzw. $x \geq \inf M$). Also ist N nach oben (bzw. unten) beschränkt und $\sup M$ (bzw. $\inf M$) ist eine obere (bzw. untere) Schranke von N. Das impliziert $\sup N \leq \sup M$ (bzw. $\inf N \geq \inf M$). □

Zum Abschluss dieses Kapitels beweisen wir noch einen Satz, der es oft ermöglicht, die Qualität, dass eine Zahl ein Supremum (oder Infimum) ist, in einem Beweis gewinnbringend umzuformulieren.

Satz 2.17. *Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leer und C eine obere (bzw. untere) Schranke von M, so ist $C = \sup M$ (bzw. $C = \inf M$) genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ existiert, für das $x > C - \varepsilon$ (bzw. $x < C + \varepsilon$) gilt.*

Beweis. Wir beweisen diese Aussage nur für den „sup"-Fall.

„⇒" Sei $C = \sup M$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $C - \varepsilon$ kleiner als das Supremum von M, also keine obere Schranke von M. Damit existiert ein $x \in M$, sodass $x > C - \varepsilon$ ist.

„⇐" Wir müssen zeigen, dass für jede andere obere Schranke $\widetilde{C}$ von M gilt $C \leq \widetilde{C}$. Sei also $\widetilde{C}$ eine weitere solche Schranke und wir nehmen an, es gelte $C > \widetilde{C}$. Dann ist $\varepsilon := C - \widetilde{C} > 0$. Nach Voraussetzung existiert zu diesem ε nun ein $x \in M$, sodass $x > C - \varepsilon$ ist. Wir haben aber $C - \varepsilon = C - (C - \widetilde{C}) = \widetilde{C}$, also $x > \widetilde{C}$. Dann kann aber $\widetilde{C}$ keine obere Schranke von M sein. Widerspruch. □

Übungsaufgabe 2.18. Beweisen Sie die folgende Aussage: Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$ ist genau dann beschränkt, wenn es ein $C > 0$ gibt, sodass $|x| \leq C$ für alle $x \in M$ gilt.

3. Natürliche Zahlen

In diesem Kapitel wird die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ definiert und mit deren Hilfe auch die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Die Definition der natürlichen Zahlen ist dabei so gewählt, dass wir das wichtige Beweisverfahren der vollständigen Induktion leicht daraus ableiten können. Als Hilfskonstrukt definieren wir dazu zunächst den folgenden Begriff.

Definition 3.1. *Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt* Induktionsmenge, *falls gilt*

(a) $1 \in A$ *und*

(b) ist $x \in A$, so ist auch stets $x + 1 \in A$.

Beispiel 3.2. Beispiele von Induktionsmengen sind $\mathbb{R}$ oder $\{1\} \cup [2, \infty)$.

Satz 3.3. *Ist I eine Indexmenge und ist für jedes $i \in I$ eine Induktionsmenge $A_i \subseteq \mathbb{R}$ gegeben, so ist auch deren Durchschnitt $A := \bigcap_{i \in I} A_i$ eine Induktionsmenge.*

Beweis. Da die Eins in jeder Induktionsmenge liegt, muss sie in jedem A_i liegen und damit auch in deren Durchschnitt A. Damit ist Bedingung (a) aus der Definition einer Induktionsmenge gezeigt.
Für den Nachweis der zweiten Bedingung sei $x \in A$. Nach Definition von A gilt dann $x \in A_i$ für jedes $i \in I$. Da die Mengen A_i alle Induktionsmengen sind, muss dann aber für jedes $i \in I$ auch $x + 1 \in A_i$ gelten. Damit erhalten wir schließlich $x + 1 \in A$ und sind fertig. □

Definition 3.4. *Den Durchschnitt aller Induktionsmengen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$. Das ist die Menge der* natürlichen Zahlen.
Weiter setzen wir

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \textit{und}$$
$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{(ganze Zahlen).}$$

Wir sammeln ein paar grundlegende Eigenschaften von $\mathbb{N}$.

Satz 3.5. *(a) $\mathbb{N}$ ist eine Induktionsmenge.*

(b) Ist A eine Induktionsmenge und $A \subseteq \mathbb{N}$, so ist $A = \mathbb{N}$ (Prinzip der vollständigen Induktion).

(c) $\mathbb{N}$ *ist nicht nach oben beschränkt* (Satz von Archimedes).

(d) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $x < n$.

(e) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x > 0$ *gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$*, sodass* $1/n < x$ *ist.*

Beweis. (a) Das folgt sofort aus Satz 3.3.

(b) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Induktionsmenge. Da $\mathbb{N}$ der Schnitt aller Induktionsmengen ist, gilt $\mathbb{N} \subseteq A$. Zusammen mit der Voraussetzung $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt also $A = \mathbb{N}$.

(c) Wir nehmen an, $\mathbb{N}$ wäre nach oben beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert also das Supremum $s := \sup \mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Dann liefert Satz 2.17 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - 1$. (Wähle dort $\varepsilon = 1$.) Wir haben damit $n + 1 > s$ und da $\mathbb{N}$ nach (a) eine Induktionsmenge ist, gilt $n + 1 \in \mathbb{N}$. Das heißt wiederum, dass $n + 1 \leq \sup \mathbb{N} = s$ gelten muss, sodass wir bei einem Widerspruch enden.

(d) Wir nehmen an, es gäbe ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann wäre x eine obere Schranke von $\mathbb{N}$, was im Widerspruch zu (c) steht.

(e) Sei $x > 0$. Dann gibt es nach (d) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/x < n$. Für dieses n gilt $1/n < x$. □

Dieses Wissen können wir nun nutzen, um zu zeigen, dass die so definierte Menge $\mathbb{N}$ mit unserer Vorstellung der natürlichen Zahlen übereinstimmt.

Satz 3.6. *(a) Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $n \geq 1$.

(b) *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *ist die Menge* $A_n := (\mathbb{N} \cap [1, n]) \cup [n + 1, \infty)$ *eine Induktionsmenge.*

(c) *Es seien* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $n < x < n + 1$ *gegeben. Dann gilt* $x \notin \mathbb{N}$.

Beweis. (a) Wir setzen $A := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Dann gilt $1 \in A$ und wenn $n \in A$ ist, so gilt wegen $n \geq 1$ auch $n + 1 \geq 1 + 1 \geq 1$, also ist auch $n + 1 \in A$ und damit A eine Induktionsmenge. Wegen $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt wegen Satz 3.5 (b) sofort $A = \mathbb{N}$.

(b) Wir setzen $A := \{n \in \mathbb{N} : A_n \text{ ist eine Induktionsmenge}\}$. Der Beweis verläuft nun in drei Schritten:

Induktionsanfang (1 ist in A): Nach Beispiel 3.2 ist $A_1 = \{1\} \cup [2, \infty)$ eine Induktionsmenge. Also ist $1 \in A$.

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in A$, d. h. wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$, sodass A_n eine Induktionsmenge ist.

Induktionsschluss (zeige, dass auch $n+1 \in A$ gilt): Es ist $A_{n+1} = (\mathbb{N} \cap [1, n+1]) \cup [n+2, \infty)$. Also ist $1 \in A_{n+1}$. Sei nun $x \in A_{n+1}$. Es können dann zwei Fälle auftreten. Im ersten Fall ist $x \geq n+2$. Dann gilt $x+1 \geq n+3 \geq n+2$, also haben wir sofort $x+1 \in A_{n+1}$.

Im zweiten Fall ist $x \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq x \leq n+1$. Dann machen wir uns zunutze, dass A_n eine Induktionsmenge ist (Induktionsvoraussetzung!) und deshalb $\mathbb{N} \subseteq A_n$ gilt. Das liefert uns, dass $x \in A_n$ ist. Damit ist entweder $1 \leq x \leq n$ oder $x \geq n+1$, d. h. entweder wir haben $2 \leq x+1 \leq n+1$ oder $x+1 \geq n+2$. Also ist $x+1 \in A_{n+1}$.

(c) Wir nehmen an, es wäre doch $x \in \mathbb{N}$. Da nach (b) $\mathbb{N} \subseteq A_n$ gilt, hätten wir dann $x \in A_n$. Das impliziert aber $x \leq n$ oder $x \geq n+1$. Widerspruch. □

Die Menge A wird üblicherweise bei einem Induktionsbeweis nicht mehr erwähnt, da die Methode immer die gleiche ist. Wir wollen uns das an einem weiteren, sehr typischen Beispiel für einen Induktionsbeweis anschauen.

Satz 3.7. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis.
Induktionsanfang: Es gilt $1 = {}^{1\cdot(1+1)}/_{2}$, also ist die Aussage für $n = 1$ richtig.
Induktionsvoraussetzung: Die Aussage des Satzes sei für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ richtig, d. h. es gilt

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

für dieses $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss: Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Also stimmt die Aussage auch für $n + 1$. □

Bemerkung 3.8. (a) Die Pünktchen-Schreibweise im obigen Beweis für die Summation von n Zahlen ist reichlich schwerfällig und führt oft zu unpräzisen Formulierungen. Deshalb hat sich dafür eine sehr praktische Schreibweise eingebürgert. Sind $n, N \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq N$ und reelle Zahlen $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_N$ gegeben, so schreiben wir

$$\sum_{k=n}^{N} a_k := a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{N-1} + a_N$$

mit dem sogenannten *Summenzeichen*. Die Aussage von Satz 3.7 lässt sich damit z. B. so hinschreiben:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Analog verwendet man das *Produktzeichen*

$$\prod_{k=n}^{N} a_k := a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{N-1} \cdot a_N$$

mit $n, N \in \mathbb{Z}$ und $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ wie oben.

Im nächsten Satz zeigen wir, dass $\mathbb{N}$ eine sogenannte *wohlgeordnete* Menge ist, d. h. jede nicht-leere Teilmenge besitzt ein Minimum.

Satz 3.9 (Wohlordnungsprinzip)**.** *Ist $M \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, so existiert $\min M$.*

Beweis. Nach Satz 3.6 (a) ist eins eine untere Schranke von $\mathbb{N}$ und damit auch von M. Also ist

$$1 \in A := \{\nu \in \mathbb{N} : \nu \text{ ist untere Schranke von } M\}.$$

und diese Menge damit nicht leer. Andererseits ist A durch jedes Element von M (beachte $M \neq \emptyset$) nach oben beschränkt, also ist A nach Satz 3.5 (c) eine echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ und damit insbesondere keine Induktionsmenge. Da $1 \in A$ gilt, bedeutet dies, dass es ein $\nu_0 \in A$ geben muss, für das $\nu_0 + 1 \notin A$ gilt. Nach der Definition von A sind ν_0 und damit auch $\nu_0 + 1$ in $\mathbb{N}$, ν_0 ist eine untere Schranke von M, aber $\nu_0 + 1$ ist keine. Es gibt also ein $n_0 \in M$ mit $\nu_0 \leq n_0 < \nu_0 + 1$. Da aber alle drei beteiligten Zahlen in dieser Ungleichungskette in $\mathbb{N}$ liegen, gilt nach Satz 3.6 (c) sogar $n_0 = \nu_0$. Damit ist $n_0 = \nu_0$ eine untere Schranke von M, die in M liegt, also das Minimum von M. □

Zum Abschluss dieses Kapitels führen wir noch ein paar wichtige Schreibweisen und Rechenoperationen, wie z. B. das Potenzieren mit ganzzahligen Exponenten, ein und beweisen einige wichtige Ungleichungen und Identitäten.

Definition 3.10. *(a) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir für die* Potenzen

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = \prod_{k=1}^{n} a.$$

Weiter setzen wir $a^0 := 1$.

Ist außerdem $a \neq 0$, so schreiben wir

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

(b) *Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die* Fakultät *von n als*

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

und wir vereinbaren $0! := 1$.

(c) *Schließlich ist für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le k \le n$ der* Binomialkoeffizient *gegeben durch*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Satz 3.11. (a) *Ist $x \ge -1$ und $n \in \mathbb{N}$ so gilt*

$$(1+x)^n \ge 1 + nx \qquad \text{(Bernoullische Ungleichung)}.$$

(b) *Für die Binomialkoeffizienten gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k \le n$ die folgenden Identitäten:*

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}, \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

(c) *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

(d) *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die* Binomialformel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis. (a) Wir führen einen Induktionsbeweis.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ lautet die behauptete Ungleichung $1 + x \ge 1 + x$ und ist offensichtlich wahr.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $(1+x)^n \ge 1 + nx$ für alle $x \ge -1$.

Induktionsschluss: Für $x \ge -1$ gilt $1 + x \ge 0$, also können wir mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung folgern

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \ge (1+x)(1+nx).$$

Multiplizieren wir nun aus und lassen den (positiven!) Term mit x^2 weg, so erhalten wir

$$(1+x)^{n+1} \ge 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \ge 1 + (n+1)x$$

und sind fertig.

(b) Es gilt $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$ und $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$ sowie

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k &= a\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k - b\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^{n-k+1}b^k - \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^{k+1}.\end{aligned}$$

Schreibt man beide Summen aus:

$$\begin{aligned}&= a^{n+1} + a^n b + a^{n-1}b^2 + \cdots + a^2b^{n-1} + ab^n \\ &\quad - \left(a^n b + a^{n-1}b^2 + \cdots + a^2b^{n-1} + ab^n + b^{n+1}\right),\end{aligned}$$

so erkennt man, dass sich die meisten Summanden wegheben. Das kann man auch mit dem Summenzeichen herausarbeiten. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k &= \sum_{k=0}^{n} a^{n-k+1}b^k - \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k+1}b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^{k+1} - b^{n+1}. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Wir machen nun einen sogenannten *Indexshift*. In der ersten Summe ersetzen wir $\ell := k-1$. Wenn k von 1 bis n gezählt wird, läuft also ℓ von 0 bis $n-1$ und wir bekommen

$$\begin{aligned}&= a^{n+1} + \sum_{\ell=0}^{n-1} a^{n-\ell}b^{\ell+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^{k+1} - b^{n+1} \qquad (3.2) \\ &= a^{n+1} - b^{n+1}.\end{aligned}$$

(Eine solche Summe, bei der sich jeweils aufeinanderfolgende Summanden so wegheben, dass nur am Anfang und am Ende etwas übrigbleibt, nennt man *Teleskopsumme*.)

(d) Wir verwenden wieder vollständige Induktion.

Induktionsanfang ($n = 1$):

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a + b = (a+b)^1.$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Induktionsschluss: Es gilt

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Erneut machen wir einen Indexshift. Dieses Mal ersetzen wir in der zweiten Summe $\ell := k + 1$. Das liefert

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell - 1} a^{n+1-\ell} b^\ell + \binom{n}{n} b^{n+1}.$$

Nun können wir die Zählvariable in der zweiten Summe auch wieder k nennen und erhalten

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1}.$$

Damit können wir die beiden Summen zu einer zusammenfassen und mit Hilfe der Formeln aus (b) folgt

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

Das ist genau die behauptete Formel für $n+1$ statt n. $\square$

Satz 3.12 (Geometrische Summenformel)**.** *Es sei* $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$*. Dann gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Beweis. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \neq 1$

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = q^0 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}.\end{aligned}$$

Da $q \neq 1$ ist, liefert Division durch $1-q$ die Behauptung. $\square$

4. Rationale Zahlen und Wurzeln

Nun, da wir die natürlichen Zahlen im Griff haben, können wir ohne weitere Umschweife die rationalen Zahlen definieren. Das Hauptthema dieses Abschnitts wird dann sein, das Potenzieren auf rationale Exponenten auszuweiten, d. h. Wurzeln einzuführen.

Definition 4.1. *Wir definieren die* rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ *als die Teilmenge der reellen Zahlen mit*

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Die rationalen Zahlen haben eine bemerkenswerte Eigenschaft, die wir im folgenden Satz herausarbeiten wollen.

Satz 4.2. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $|x - q| < \varepsilon$.*

Beweis. **1. Fall $x \geq 0$:** Nach dem Satz von Archimedes 3.5 (e) gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $0 < 1/m < \varepsilon$. Weiter hat dank des Wohlordnungsprinzips aus Satz 3.9 die Menge $M := \{k \in \mathbb{N} : k/m > x\}$ ein Minimum $n := \min M$. Wegen $n \in M$ haben wir $n/m > x$ und, da $n - 1$ nicht mehr zu M gehört, gilt $n-1/m \leq x$. Das liefert

$$-\varepsilon < 0 \leq x - \frac{n-1}{m} < \frac{n}{m} - \frac{n-1}{m} = \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

wir können also $q := n-1/m$ setzen und erhalten $|x - q| < \varepsilon$.
2. Fall $x < 0$: Da $|x| > 0$ ist, gibt es nach den Überlegungen im 1. Fall ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq |x| - q < \varepsilon$. Nun gilt für $\tilde{q} = -q \in \mathbb{Q}$

$$x - \tilde{q} = -|x| + q = -(|x| - q) \in (-\varepsilon, 0], \quad \text{d. h.} \quad |x - \tilde{q}| < \varepsilon. \qquad \square$$

Diese Eigenschaft bekommt einen eigenen Namen.

Definition 4.3. *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt* dicht *in $\mathbb{R}$, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $y \in M$ existiert mit $|x - y| < \varepsilon$.*

Zur Definition von Wurzeln benötigen wir zunächst den folgenden Hilfssatz.

Lemma 4.4. *Sind $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $x^n \leq y^n$ ist.*

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir nach Satz 3.11 (c)

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k.$$

Da $x, y \geq 0$ sind, ist die Summe auf der rechten Seite positiv, also gilt

$$x \leq y \iff x - y \leq 0 \iff x^n - y^n \leq 0 \iff x^n \leq y^n. \qquad \square$$

Wir beweisen nun die Existenz und Eindeutigkeit einer positiven n-ten Wurzel von positiven reellen Zahlen.

Satz 4.5. *Es sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $x \in [0, \infty)$, sodass $x^n = a$ gilt.*

Beweis$^{(*)}$. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Seien also $x, y \geq 0$ gegeben, sodass $x^n = a = y^n$ gilt. Dann gilt insbesondere $x^n \leq y^n$ und $y^n \leq x^n$ und mit Lemma 4.4 folgt dann $x \leq y$ und $y \leq x$, also $x = y$.
Für die Existenz stellen wir zunächst fest, dass die Sache für $a = 0$ durch $x = 0$ gelöst wird. Sei also $a > 0$. Wir betrachten die Menge

$$M := \{x \in [0, \infty) : x^n \leq a\}.$$

Dann ist in jedem Fall $0 \in M$, also $M \neq \emptyset$. Da $n \in \mathbb{N}$ ist, gilt $a \leq na \leq 1+na$ und daher mit der Bernoullischen Ungleichung, vgl. Satz 3.11 (a), auch $a \leq (1+a)^n$. Damit folgern wir nun für alle $x \in M$ die Abschätzung $x^n \leq a \leq (1+a)^n$, aus der mit Lemma 4.4 sofort $x \leq 1 + a$ folgt. Also ist M nach oben beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert damit $s := \sup M$. Wir nehmen an, es wäre $s^n \neq a$ und unterscheiden zwei Fälle.
1. Fall $s^n < a$: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt mit der Binomialformel aus Satz 3.11 (d)

$$\begin{aligned}\Big(s + \frac{1}{m}\Big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^{n-k} \frac{1}{m^k} = s^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} s^{n-k} \underbrace{\frac{1}{m^k}}_{\leq 1/m} \\ &\leq s^n + \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} s^{n-k} =: s^n + \frac{1}{m}r. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Man beachte, dass das so definierte r in jedem Fall größer null ist.
Nach dem Satz von Archimedes (Satz 3.5 (e)) und da nach Annahme $a - s^n > 0$ gilt, existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $1/m_0 < {a-s^n}/r$. Dann gilt $s^n + r/m_0 < a$, also ist mit Hilfe von (4.1), wobei wir $m = m_0$ wählen,

$$\Big(s + \frac{1}{m_0}\Big)^n \leq s^n + \frac{1}{m_0}r < a.$$

Das liefert uns $s + 1/m_0 \in M$, und da s das Supremum dieser Menge war, gilt $s + 1/m_0 \leq s$, d. h. $1/m_0 \leq 0$. Widerspruch!
2. Fall $s^n > a$: Wir rechnen für jedes $m \in \mathbb{N}$ (man beachte, dass $s \neq 0$ sein muss, da sonst $s^n = 0 < a$ wäre)

$$\left(s - \frac{1}{m}\right)^n = \left[s\left(1 - \frac{1}{ms}\right)\right]^n = s^n\left(1 - \frac{1}{ms}\right)^n.$$

Nach dem Satz von Archimedes können wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1/m \leq s$ finden. Dann gilt $-1/ms \geq -1$, wir können folglich die Bernoullische Ungleichung aus Satz 3.11 (a) anwenden und erhalten

$$\geq s^n\left(1 - \frac{n}{ms}\right). \tag{4.2}$$

Wir machen nun bei Bedarf unser m noch einmal größer, damit $1/m \leq s$ und $1/m < s(s^n-a)/ns^n$ gilt. Da nach Annahme $s^n - a > 0$ ist, haben wir für ein solches m

$$\frac{1}{m} < \frac{s(s^n - a)}{ns^n} \Longrightarrow \frac{ns^n}{ms} < s^n - a \Longrightarrow a < s^n - \frac{ns^n}{ms} = s^n\left(1 - \frac{n}{ms}\right)$$

und nehmen wir dies mit (4.2) zusammen, so folgt

$$\left(s - \frac{1}{m}\right)^n \geq s^n\left(1 - \frac{n}{ms}\right) > a.$$

Da s das Supremum von M ist, gibt es nach Satz 2.17 ein $x_0 \in M$ mit $x_0 > s - 1/m$. Nach Lemma 4.4 gilt dann auch

$$x_0^n \geq \left(s - \frac{1}{m}\right)^n > a,$$

was im Widerspruch zu $x_0 \in M$ steht. □

Definition 4.6. *Zu gegebenen $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die nach obigem Satz eindeutig existierende Zahl x, für die $x^n = a$ gilt, als n-te* Wurzel von a *und schreiben*

$$\sqrt[n]{a} := a^{1/n} := x.$$

Ist $n = 2$, so sagt man einfach Wurzel von a *und schreibt kurz $\sqrt{a}$.*
Außerdem setzen wir für $a > 0$ wieder

$$a^{-1/n} := \frac{1}{a^{1/n}}.$$

Wir wissen nun für $a > 0$, was $a^{\pm n}$ und $a^{\pm 1/n}$ ist. Im nächsten Schritt wollen wir uns mit a^q für beliebige rationale Zahlen q befassen. Für $q = m/n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ ist die naheliegende Definition $a^q := (\sqrt[n]{a})^m$. Damit das wohldefiniert ist, muss aber

zunächst geklärt werden, dass dieser Wert nicht von der speziellen Darstellung von q als Bruch abhängt.
Seien also $m, n, p, r \in \mathbb{N}$, sodass $q = {}^m/_n = {}^p/_r$ ist. Dann gilt $mr = np$ und es folgt für jedes $a \geq 0$

$$\begin{aligned} \big((\sqrt[n]{a})^m\big)^r &= (\sqrt[n]{a})^{mr} = (\sqrt[n]{a})^{np} = \big((\sqrt[n]{a})^n\big)^p = a^p \quad \text{und} \\ \big((\sqrt[r]{a})^p\big)^r &= (\sqrt[r]{a})^{pr} = \big((\sqrt[r]{a})^r\big)^p = a^p. \end{aligned}$$

Also ist dank der Eindeutigkeit der Wurzel $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[r]{a})^p$. Damit ist die folgende Definition gerechtfertigt.

Definition 4.7. *Es sei $a \geq 0$, $q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ und $q = {}^m/_n$ $(m, n \in \mathbb{N})$. Dann setzen wir*

$$a^q := (\sqrt[n]{a})^m,$$

und falls $a > 0$ gilt, definieren wir für $q < 0$

$$a^q := \frac{1}{a^{-q}}.$$

Übungsaufgabe 4.8. Es gelten die bekannten Rechenregeln für rationale Exponenten, d. h. für alle $a, b \geq 0$ und alle $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt

- $a^p a^q = a^{p+q}$
- $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
- $a^p b^p = (ab)^p$
- $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$
- $(a^p)^q = a^{pq}$

Teil II.

Folgen und Reihen

5. Folgen und Abzählbarkeit

Dieses Kapitel führt den für die Analysis fundamentalen Begriff der Folge ein und beginnt erste Untersuchungen des Unendlichen, indem wir uns die Anzahl der Elemente von endlichen und unendlichen Mengen genauer anschauen.

Definition 5.1. *Sei X eine nicht-leere Menge. Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to X$ heißt eine* Folge in X.
Bei Folgen schreibt man traditionell a_n statt $a(n)$, $n \in \mathbb{N}$, für das n-te Folgenglied. *Die gesamte Folge wird üblicherweise mit (a_n) oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\geq 1}$ oder $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ bezeichnet.*

Beispiel 5.2. (a) Ist $X = \mathbb{R}$, so spricht man von einer *reellen Folge*. Ein Beispiel einer solchen Folge ist

$$a_n := \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ bzw. } (a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right).$$

(b) Für $X = \{0, 1\}$ sind $(a_n) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ oder $(b_n) = (1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ Beispiele für Folgen in $\{0, 1\}$.

Mit Hilfe von Folgen können wir Begriffe einführen, um die „Größe“ unendlich großer Mengen zu klassifizieren. Ein erster Schritt zur Beschreibung der Unendlichkeit.

Definition 5.3. *Eine Menge $X \neq \emptyset$ heißt*

(a) endlich, *wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Funktion $f : \{1, 2, \dots, n\} \to X$ existieren.*

In diesem Fall ist $X = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ und man sagt, dass M die Mächtigkeit *n hat bzw. n Elemente besitzt.*

(b) unendlich, *wenn X nicht endlich ist.*

(c) abzählbar, *wenn eine Folge (a_n) in X existiert, die surjektiv ist, d. h. es gilt $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

(d) abzählbar unendlich, *wenn X unendlich und abzählbar ist.*

(e) überabzählbar, *wenn X nicht abzählbar ist.*

Bemerkung 5.4. Beachten Sie, dass nach dieser Definition auch endliche Mengen abzählbar sind.

Beispiel 5.5. (a) Die natürlichen Zahlen sind abzählbar unendlich, denn $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $(a_n) = (n)$ und wegen des Satzes von Archimedes 3.5 ist $\mathbb{N}$ nicht endlich.

(b) Die ganzen Zahlen sind ebenfalls abzählbar unendlich, denn es ist $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ mit $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ a_4 = 2, a_5 = -2, \dots$, also $a_{2n} = n$ und $a_{2n-1} = -n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Abzählbarkeit bleibt bei Teilmengenbildung und für abzählbare Vereinigungen erhalten. Diese wichtigen Eigenschaften halten wir im folgenden Satz fest.

Satz 5.6. *(a) Ist A eine abzählbare Menge und $B \subseteq A$ nicht-leer, so ist auch B abzählbar.*

(b) Sei I eine abzählbare Indexmenge und für jedes $j \in I$ sei A_j eine abzählbare Menge. Dann ist auch $\bigcup_{j \in I} A_j$ abzählbar.

Beweis. (a)(*) Da A abzählbar ist, gibt es eine Folge (a_n) in A mit $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wähle nun ein beliebiges $b \in B$ aus. Damit definieren wir die Folge

$$b_n := \begin{cases} b, & \text{falls } a_n \notin B, \\ a_n, & \text{falls } a_n \in B, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sei $x \in B$. Dann gilt nach Voraussetzung $x \in A$, also gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, für das $x = a_m$ ist. Insbesondere ist $a_m \in B$, womit $b_m = a_m = x$ gilt, denn so war (b_n) definiert. Damit ist $x \in \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ und wir haben $B \subseteq \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ gezeigt. Da aber auch offensichtlich $B \supseteq \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ gilt, ist damit $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Da I abzählbar ist, gibt es eine surjektive Folge (j_n) in I. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist wiederum die Menge A_{j_n} abzählbar, kann also geschrieben werden als $A_{j_n} = \{a_1^{(j_n)}, a_2^{(j_n)}, a_3^{(j_n)}, \dots\}$ mit einer Folge $(a_k^{(j_n)})_{k \in \mathbb{N}}$. Wir schreiben alle diese Elemente als zweidemensionales Raster auf:

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_1^{(j_1)} & \rightarrow & a_2^{(j_1)} & & a_3^{(j_1)} & \rightarrow & a_4^{(j_1)} & & a_5^{(j_1)} & \rightarrow \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
a_1^{(j_2)} & & a_2^{(j_2)} & & a_3^{(j_2)} & & a_4^{(j_2)} & & a_5^{(j_2)} & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
a_1^{(j_3)} & & a_2^{(j_3)} & & a_3^{(j_3)} & & a_4^{(j_3)} & & a_5^{(j_3)} & \dots \\
& \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
a_1^{(j_4)} & & a_2^{(j_4)} & & a_3^{(j_4)} & & a_4^{(j_4)} & & a_5^{(j_4)} & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
a_1^{(j_5)} & \dots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}$$

und nummerieren entlang der Pfeilkette durch. Dank der Surjektivität der Folge (j_n) und da jeweils alle Elemente von A_{j_n} von den Folgen $(a_k^{(j_n)})_{k\in\mathbb{N}}$ erfasst werden, liefert das eine Folge, deren Folgenglieder alle Elemente der Menge $\bigcup_{j\in I} A_j$ durchlaufen. □

Mit dem eben bewiesenen Satz können wir zeigen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Satz 5.7. *Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.*

Beweis. Für jedes feste $m \in \mathbb{Z}$ ist die Menge

$$M_m := \left\{ \frac{m}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

abzählbar, z. B. mit Hilfe der Abzählung $({}^m\!/\!{}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt

$$\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} M_m = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{m}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{Q}.$$

Da nach Beispiel 5.5 (b) die Menge $\mathbb{Z}$ abzählbar ist, sind damit die rationalen Zahlen eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen, d. h. sie sind nach Satz 5.6 (b) abzählbar. □

Zum Abschluss geben wir ein erstes Beispiel einer überabzählbaren Menge an.

Beispiel 5.8. Die Menge F aller Folgen in $\{0, 1\}$ ist überabzählbar. Um das zu beweisen, nehmen wir an, F wäre abzählbar, d. h. $F = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$, wobei $f_j = (a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, a_3^{(j)}, \dots)$ und $a_k^{(j)} \in \{0, 1\}$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$.
Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{0, 1\}$ wie folgt:

$$a_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } a_n^{(n)} = 0, \\ 0, & \text{falls } a_n^{(n)} = 1, \end{cases}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F, also gibt es nach Annahme ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = f_m$ gilt. Damit stimmen insbesondere die m-ten Folgenglieder dieser beiden Folgen überein, d. h. $a_m = a_m^{(m)}$. Das ist ein Widerspruch, denn wir haben die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eben so konstruiert, dass dies nicht gilt.

Das Beweisverfahren dieses Überabzählbarkeitsbeweises heißt *Cantorsches Diagonalverfahren*. Man kann damit auch die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ nachweisen, s. Abschnitt 14.

6. Konvergente Folgen

Wir wollen uns nun dem zentralen Thema der Analysis zuwenden, der mathematisch exakten Behandlung des unendlich Kleinen und unendlich Großen. Dazu führen wir den für alles Weitere zentralen Begriff der Konvergenz ein.

Definition 6.1. *Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt* konvergent *gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$|a_n - a| < \varepsilon \textit{ für alle } n \geq n_0.$$

In diesem Fall heißt a Grenzwert *oder* Limes *der Folge (a_n). Man schreibt dafür*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \textit{oder} \quad a_n \to a \ (n \to \infty).$$

Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie divergent*.*

Für eine Umformulierung dieser Definition benötigen wir die folgenden Begriffe.

Definition 6.2. *(a) Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann heißt die Menge*

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

ε-Umgebung *von x_0.*

(b) Es sei $A(n)$ eine für jedes $n \in \mathbb{N}$ definierte Aussage. Wir sagen, $A(n)$ gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, *wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A(n)$ für alle $n \geq m$ richtig ist.*

Damit können wir nun sagen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist, genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : a_n \in U_\varepsilon(a)$$

bzw. in Worte gefasst:

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aus der letzten Formulierung ist gut ersichtlich, dass es für die Konvergenz einer Folge auf endlich viele Folgenglieder nicht ankommt. Das formalisieren wir in der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 6.3. (a) Sind (a_n) und (b_n) reelle Folgen mit $a_n = b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist (a_n) konvergent genau dann, wenn (b_n) konvergiert, und in diesem Fall gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(b) Eine konvergente Folge mit Grenzwert null wird auch oft kurz eine *Nullfolge* genannt.

Beispiel 6.4. (a) Sei $a_n := {}^1\!/_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: (a_n) ist konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Satz von Archimedes (Satz 3.5 (e)) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit ${}^1\!/_{n_0} < \varepsilon$. Damit ist für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - a| = |a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \qquad \square$$

(b) Sei $a_n := {}^{(-1)^n}\!/_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: (a_n) ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis. Es gilt $|a_n - 0| = |{}^{(-1)^n}\!/_n| = {}^1\!/_n$. Wir können also ab jetzt den Beweis aus (a) übernehmen. $\square$

(c) Sei $a_n := \dfrac{2n^2 - n + 5}{n^2 + 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: (a_n) konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Beweis. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n^2 - n + 5 - 2n^2 - 2}{n^2 + 1}\right| = \frac{|3 - n|}{n^2 + 1} \leq \frac{|3 - n|}{n^2} \leq \frac{n + 3}{n^2}, \tag{6.1}$$

wobei wir bei der letzten Abschätzung die Dreiecksungleichung angewendet haben. Nun verwenden wir noch, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n+3 \leq n+3n = 4n$ und erhalten damit

$$|a_n - 2| \leq \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}. \tag{6.2}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach dem Satz von Archimedes existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass ${}^1\!/_{n_0} < {}^\varepsilon\!/_4$ gilt. Dann haben wir nach obiger Abschätzung für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - 2| \leq \frac{4}{n} \leq \frac{4}{n_0} < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \qquad \square$$

(d) Sei $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: Die Folge (a_n) divergiert.

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für jedes $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n - a| < 1$ gilt. Für $n \geq n_0$ gilt dann aber mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 1 + 1 = 2.$$

Also folgt $2 < 2$, ein Widerspruch. □

Satz 6.5. *Jede Folge in* $\mathbb{R}$ *hat höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$, sodass (a_n) sowohl gegen a als auch gegen b konvergiert. Dann ist $\varepsilon := {|a-b|}/{2} > 0$ und es gilt $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$. Nach der Definition des Grenzwertes existiert aber ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \in U_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Also gilt $a_n \in U_\varepsilon(b)$ nur für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Damit kann (a_n) nicht gegen b konvergieren. □

Definition 6.6. *Eine reelle Folge* (a_n) *heißt* beschränkt*, wenn die Menge der Folgenglieder* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ *beschränkt ist. Diese Menge besitzt dann ein Infimum und ein Supremum. Wir schreiben dafür*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$
$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Beachten Sie, dass eine Folge (a_n) genau dann beschränkt ist, wenn ein $C \geq 0$ existiert, sodass $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, vgl. Übungsaufgabe 2.18.

Satz 6.7. *Jede konvergente Folge in* $\mathbb{R}$ *ist beschränkt.*

Beweis. Es sei (a_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ und $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Nach Definition der Konvergenz existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Wir setzen

$$C := \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}.$$

Dann gilt zum einen für alle $n < n_0$ sofort $|a_n| \leq C$ und zum anderen auch für alle $n \geq n_0$, denn für diese Indizes gilt

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq C. \tag{6.3}$$

Zusammengenommen gilt $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit die Behauptung. □

Warnung 6.8. Die Umkehrung von Satz 6.7 ist falsch! Es gibt durchaus beschränkte Folgen, die nicht konvergieren, beispielsweise die Folge $((-1)^n)$ aus Beispiel 6.4 (d).

Man ist zuweilen versucht zu sagen, dass eine Folge „gegen unendlich geht“. Das ist mit unserem bisherigen Konvergenzbegriff aus gutem Grunde nicht möglich. Wir können aber die folgende Sprechweise einführen.

Definition 6.9. *Eine reelle Folge* (a_n)

(a) divergiert bestimmt gegen ∞, *falls für jedes* $C > 0$ *ein* $n_0 = n_0(C) \in \mathbb{N}$ *existiert, sodass* $a_n \geq C$ *für alle* $n \geq n_0$ *gilt.*

In diesem Fall schreiben wir analog zum Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \textit{oder} \quad a_n \to \infty \ (n \to \infty).$$

(b) divergiert bestimmt gegen $-\infty$, *falls für jedes* $C > 0$ *ein* $n_0 = n_0(C) \in \mathbb{N}$ *existiert, sodass* $a_n \leq -C$ *für alle* $n \geq n_0$ *gilt.*

Auch hier schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \textit{oder} \quad a_n \to -\infty \ (n \to \infty).$$

Übungsaufgabe 6.10. (a) Zeigen Sie: Ist (a_n) eine bestimmt divergente Folge gegen plus oder minus unendlich, so gilt $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem ist die Folge $(1/a_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ für ein geeigenetes $k \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge.

(b) Achtung: ist (b_n) eine Nullfolge mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $(1/b_n)$ im Allgemeinen nicht bestimmt divergent. Geben Sie hierzu ein Beispiel an.

(c) Beweisen Sie, dass für jede Nullfolge (b_n) mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(1/|b_n|)$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

7. Grenzwertsätze

In diesem Abschnitt wollen wir die Berechnung von komplizierteren Grenzwerten angehen. Dabei werden wir auch einige wichtige Beispiele von konvergenten Folgen sehen, die im weiteren Verlauf immer wieder benötigt werden.

Satz 7.1. *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.*

(a) Die Folge (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Folge $(|a_n - a|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen null konvergiert.

(b) Ist $a \in \mathbb{R}$ und (β_n) eine Nullfolge mit $|a_n - a| \leq \beta_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Beweis. (a) Wegen $|a_n - a| = \big||a_n - a| - 0\big|$ gilt nach der Definition von Konvergenz

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n = a &\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \big||a_n - a| - 0\big| < \varepsilon \\ &\iff \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0.\end{aligned}$$

(b) Nach Voraussetzung gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| \leq \beta_n$ für alle $n \geq m$ gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert dank der Konvergenz von (β_n) ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq \beta_n < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$. Wir wählen $n_0 := \max\{m, n_1\}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|a_n - a| \leq \beta_n < \varepsilon$. □

Bemerkung 7.2. Von besonderer Bedeutung ist die Aussage von Satz 7.1 (a) im Fall $a = 0$. Demnach ist jede reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ schon selbst eine Nullfolge.

Die folgenden sogenannten *Grenzwertsätze* enthalten äußerst wichtige Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen. Mit ihnen ist es oft möglich, die Frage nach Konvergenz einer komplizierten Folge auf die Untersuchung von mehreren, aber dafür einfacheren Folgen zurückzuführen.

Satz 7.3 (Grenzwertsätze)**.** *Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt:*

(a) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

(c) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

(e) Ist zusätzlich $a_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $a \neq 0$*, so ist* $\lim_{n\to\infty} {}^1\!/_{a_n} = {}^1\!/_a$.

Beweis. (a) Nach der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| =: \beta_n.$$

Da (a_n) gegen a konvergiert, konvergiert nach Satz 7.1 (a) die Folge (β_n) gegen null. Also können wir mit Satz 7.1 (b) folgern, dass $(|a_n|)$ gegen $|a|$ konvergiert.

(b)-(d) Übungsaufgabe

(e) Nach Teil (a) konvergiert die Folge $(|a_n|)$ gegen $|a|$ und nach Voraussetzung ist $|a| > 0$. Also gibt es zu $\varepsilon := {}^{|a|}\!/_2 > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $||a_n| - |a|| < {}^{|a|}\!/_2$ für alle $n \geq m$. Damit gilt für alle diese n auch

$$|a_n| = |a| - \big(|a| - |a_n|\big) \geq |a| - \big||a| - |a_n|\big| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}.$$

Also ist ${}^1\!/_{|a_n|} < {}^2\!/_{|a|}$ für alle $n \geq m$ und wir können für diese n abschätzen:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_n a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} \leq \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} = \frac{2}{a^2}|a_n - a| =: \beta_n. \qquad (7.1)$$

Nach (c) und Satz 7.1 (a) gilt nun wieder $\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und damit folgt mit Hilfe von Satz 7.1 (b) die Behauptung. □

Das folgende Beispiel zeigt, wie mit Hilfe dieses Satzes schon ein bisschen kompliziertere Grenzwerte angegangen werden können.

Beispiel 7.4. (a) Sei $p \in \mathbb{N}$ fest gewählt und $a_n := {}^1\!/_{n^p}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen aus Beispiel 6.4 (a), dass die Folge $({}^1\!/_n)$ gegen null konvergiert. Also gilt mit p-maliger Anwendung von Satz 7.3 (d)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^p = 0^p = 0.$$

(b) Wir untersuchen

$$a_n := \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dazu kürzen wir den Bruch mit der höchsten auftretenden Potenz:

$$a_n = \frac{n^2+2n+3}{n^2+3} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}.$$

Nun gilt $\lim_{n\to\infty} {}^2\!/_n = 0$ nach Beispiel 6.4 (a) und Satz 7.3 (c) sowie $\lim_{n\to\infty} {}^3\!/_{n^2} = 0$ dank (a) mit $p = 2$ und wieder Satz 7.3 (c). Das bedeutet für die Folge im Zähler mit Hilfe von Satz 7.3 (b)

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\Big) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2} = 1+0+0 = 1$$

und genauso für die Folge im Nenner $\lim_{n\to\infty}(1+{}^3\!/_{n^2}) = 1$. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 7.3 (e) erfüllt und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n^2})} = \frac{1}{1} = 1.$$

Das liefert schließlich mit einer Anwendung von Satz 7.3 (d)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dieses Kürzen mit der höchsten auftretenden Potenz ist bei allen Grenzwerten der Form „Polynom in n geteilt durch Polynom in n“ Erfolg versprechend.

Ein weiteres wichtiges Werkzeug für Konvergenzuntersuchungen von reellen Folgen ist der folgende Satz, der zeigt, dass sich die Grenzwertbildung gut mit der Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ verträgt.

Satz 7.5. *Es seien (a_n), (b_n) und (c_n) reelle Folgen und (a_n) und (b_n) seien konvergent.*

(a) Ist $a_n \le b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$.

(b) Ist $a_n \le c_n \le b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$, so ist auch die Folge (c_n) konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ (Sandwich-Theorem).

Beweis. (a) Wir nehmen an, es wäre $\lim_{n\to\infty} a_n =: a > b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann ist $\varepsilon := {}^{a-b}\!/_2 > 0$ und dank der Konvergenz von (a_n) und (b_n) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass sowohl $b_n \in U_\varepsilon(b) = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ als auch $a_n \in U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für alle $n \ge n_0$ gilt. Da

$$b+\varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2}+\frac{b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a-\varepsilon$$

gilt, haben wir also für diese n auch $b_n < b+\varepsilon = a-\varepsilon < a_n$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ sowohl $a_n \leq c_n \leq b_n$ als auch $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - a| < \varepsilon$ gilt. Hieraus folgern wir für alle diese n

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon.$$

Also ist $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$ oder, anders ausgedrückt, $-\varepsilon < c_n - a < \varepsilon$, d. h. $|c_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und damit konvergiert die Folge (c_n) gegen a. □

Satz 7.6. *Es sei (a_n) eine konvergente reelle Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $p \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

Beweis. Sei $p \in \mathbb{N}$ beliebig und $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Wir betrachten zunächst den Fall $a = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt auch $\varepsilon^p > 0$, also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n < \varepsilon^p$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit ist nach Lemma 4.4 für diese n auch $\sqrt[p]{a_n} < \varepsilon$, also $|\sqrt[p]{a_n} - 0| < \varepsilon$ und wir sind fertig.
Ab jetzt sei also $a > 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Satz 3.11 (c) (setze dort $n := p - 1$)

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left|(\sqrt[p]{a_n})^p - (\sqrt[p]{a})^p\right| = \left|\left(\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}\right) \sum_{k=0}^{p-1} (\sqrt[p]{a_n})^{p-1-k} (\sqrt[p]{a})^k\right| \\ &= \left|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}\right| \sum_{k=0}^{p-1} (\sqrt[p]{a_n})^{p-1-k} (\sqrt[p]{a})^k. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass wir bei der Summe die Beträge weglassen können, da alle Summanden positiv sind, die Summe also in jedem Fall positiv ist. Da auch unser Gesamtausdruck dank des Betrages positiv ist, können wir diesen kleiner machen, indem wir in der Summe alle Summanden bis auf den letzten für $k = p-1$ weglassen. Das ist zugegebenermaßen eine grobe Abschätzung, aber, wie wir sehen werden, reicht das aus. Damit erhalten wir

$$|a_n - a| \geq \left|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}\right| (\sqrt[p]{a})^{p-1}.$$

Setzen wir $c := (\sqrt[p]{a})^{p-1}$, so haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}\right| \leq \frac{1}{c} |a_n - a| =: \beta_n. \tag{7.2}$$

Man beachte, dass $c > 0$ ist, sodass diese Umformung erlaubt ist.
Die Folge $(|a_n - a|)$ konvergiert nach Satz 7.1 (a) gegen null. Also ist (β_n) dank Satz 7.3 (c) eine Nullfolge. Damit folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$ aus Satz 7.1 (b). □

Beispiel 7.7. (a) Wir betrachten

$$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mit Hilfe der dritten binomischen Formel

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Kürzen mit $\sqrt{n}$ und anschließende Anwendung der Grenzwertsätze zusammen mit Satz 7.6 liefert

$$a_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \longrightarrow \frac{0}{1+1} = 0 \quad (n \to \infty).$$

(b) Wir wandeln (a_n) leicht ab und betrachten

$$b_n := \sqrt{n}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) = \sqrt{n} \cdot a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt wie oben

$$b_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} \longrightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad (n \to \infty).$$

Im folgenden Satz betrachten wir Folgen mit n-ten Wurzeln.

Satz 7.8. *Es ist* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ *und für jedes* $c > 0$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1^n = 1 \leq n$ und damit $1 \leq \sqrt[n]{n}$ nach Lemma 4.4. Also ist $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ mit einer Folge (a_n), für die $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir untersuchen nun die Folge (a_n) auf Konvergenz und erledigen damit sofort auch $(\sqrt[n]{n})$. Es ist für $n \geq 2$ mit Hilfe der Binomialformel

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1+a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Dabei haben wir alle Summanden, bis auf den mit $k = 2$, weggelassen. Wir formen um und erhalten $a_n^2 \leq {}^2/_{n-1}$ für alle $n \geq 2$. Damit gilt für diese n

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} {}^2/_{n-1} = 0$ ist, konvergiert nach Satz 7.6 mit $p = 2$ die rechte Seite obiger Ungleichungskette ebenfalls gegen null. Das Sandwich-Theorem 7.5 (b) liefert damit $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und daher $\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n \to \infty)$.

Bei der Betrachtung des zweiten Grenzwertes unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $c \geq 1$, so wählen wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq c$ (dieses existiert nach dem Satz von Archimedes 3.5 (c)). Dann gilt nach Lemma 4.4

$$1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{m} \leq \sqrt[n]{n}$$

für alle $n \geq m$. Da wir den Grenzwert von $\sqrt[n]{n}$ oben schon zu 1 bestimmt haben, liefert das Sandwich-Theorem $\sqrt[n]{c} \to 1$ $(n \to \infty)$.
Ist hingegen $0 < c < 1$, so ist $1/c > 1$, wofür wir eben

$$\frac{1}{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[n]{\frac{1}{c}} \longrightarrow 1 \ (n \to \infty)$$

gezeigt haben. Mit Hilfe von Satz 7.3 (e) ist damit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$. □

Einen weiteren wichtigen Grenzwert behandelt der folgende Satz.

Satz 7.9. *Sei $q \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent, wenn $q \in (-1, 1]$ ist und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 1, & \textit{falls } q = 1, \\ 0, & \textit{falls } q \in (-1, 1). \end{cases}$$

Beweis. Wir betrachten zunächst die einfachen Fälle $q \in \{-1, 0, 1\}$. Ist $q = 0$, so ist $q^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Folge konvergiert also gegen null. Im Falle $q = 1$ findet man genauso wegen $q^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Konvergenz gegen eins. Für $q = -1$ erhalten wir die schon aus Beispiel 6.4 (d) bekannte divergente Folge $((-1)^n)$.
Als Nächstes wollen wir die Divergenz der Folge im Fall $|q| > 1$ zeigen. Wir setzen dazu $p := |q| - 1 > 0$ und schätzen mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung ab:

$$|q^n| = |q|^n = (1 + p)^n \geq 1 + np \geq np.$$

Damit ist die Folge (q^n) nicht beschränkt, denn gäbe es ein $M \geq 0$ mit $|q^n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so wäre $n \leq |q^n|/p \leq M/p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\mathbb{N}$ beschränkt. Nach Satz 6.7 kann damit (q^n) nicht konvergieren.
Schließlich zeigen wir Konvergenz für $0 < |q| < 1$. Dann ist $1/|q| > 1$, also haben wir wieder $1/|q| = 1 + p$ für ein $p > 0$. Die Bernoullische Ungleichung zeigt uns

$$\frac{1}{|q^n|} = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1 + p)^n \geq 1 + np \geq np.$$

Also ist $|q^n| \leq 1/np$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und da $(1/np)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert nach Satz 7.1 (a) die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen null. □

8. Monotonie-Kriterium und Eulersche Zahl e

In diesem Abschnitt definieren wir die nötigen Begriffe, um über das Monotonie-Verhalten von Folgen zu sprechen. Damit werden wir ein neues wichtiges Konvergenzkriterium herleiten, mit dem wir am Ende die Eulersche Zahl e definieren können.

Definition 8.1. *Eine reelle Folge* (a_n) *heißt*

(a) monoton wachsend*, wenn* $a_{n+1} \geq a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

(b) monoton fallend*, wenn* $a_{n+1} \leq a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

(c) streng monoton wachsend*, wenn* $a_{n+1} > a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

(d) streng monoton fallend*, wenn* $a_{n+1} < a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

(e) (streng) monoton*, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.*

Damit können wir folgendes Konvergenzkriterium beweisen.

Satz 8.2 (Monotonie-Kriterium)**.** *Eine monotone reelle Folge* (a_n) *ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. In diesem Fall gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, & \textit{wenn } (a_n) \textit{ monoton wachsend ist,} \\ \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n, & \textit{wenn } (a_n) \textit{ monoton fallend ist.} \end{cases}$$

Beweis. Da jede konvergente Folge nach Satz 6.7 beschränkt ist, müssen wir für die behauptete Äquivalenz nur zeigen, dass jede monotone und beschränkte Folge konvergent ist. Dazu betrachten wir den Fall, dass (a_n) monoton wächst, der Beweis für monoton fallende Folgen geht dann analog.
Sei $\varepsilon > 0$ und wir setzen $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Dann existiert nach Satz 2.17 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Damit gilt für alle $n \geq n_0$ wegen der Monotonie und der Beschränktheit von (a_n)

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Das bedeutet $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und damit genau die Konvergenz von (a_n) gegen a. □

Beispiel 8.3. Wir betrachten eine *rekursiv definierte* Folge, die gegeben ist durch

$$a_1 := \sqrt[3]{6} \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n}, \; n \geq 1.$$

Bei einer in dieser Weise gegebenen Folge ist keine explizite Rechenvorschrift für das n-te Folgenglied gegeben, sondern nur ein Startwert a_1 und dann eine Formel, wie man aus einem Folgenglied das jeweils nächste berechnen kann. Auch dadurch ist die Folge eindeutig bestimmt.
Hier erhält man für die ersten Folgenglieder

$$a_2 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}, \quad a_3 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}}, \quad a_4 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}}}}, \; \ldots .$$

Um das Monotoniekriterium anzuwenden, prüfen wir die Voraussetzungen nach, d. h. wir zeigen, dass (a_n) nach oben beschränkt und monoton wachsend ist. Genauer gesagt beweisen wir

(a) $a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) (a_n) konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Beweis. (a) Wir gehen induktiv vor.

Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2$ und $a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} > \sqrt[3]{6} = a_1$, da $a_1 > 0$ ist. Also ist die Aussage für $n = 1$ richtig.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n < 2$ und $a_{n+1} > a_n$.

Induktionsschritt: Es ist mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} < \sqrt[3]{6 + 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

und

$$a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} > \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}.$$

(b) Nach Satz 8.2 wissen wir nun, dass (a_n) konvergiert, und dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq 2$ ist, denn 2 ist eine obere Schranke der Folge. Außerdem wissen wir, dass $a_{n+1}^3 = 6 + a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach den Rechenregeln für Grenzwertbildung aus Satz 7.3 konvergieren bei dieser Gleichung die Folgen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens. Gehen wir zum Limes über, erhalten wir für $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ die Beziehung $a^3 = 6 + a$ bzw. $a^3 - a - 6 = 0$.

Eine Lösung dieser Gleichung ist $a = 2$. Polynomdivision liefert $(a-2)(a^2 + 2a + 3) = 0$ und $a^2 + 2a + 3 = (a + 1)^2 + 2 = 0$ hat keine weiteren reellen Lösungen. Also muss $a = 2$ sein. □

Wir wenden uns nun zwei besonders wichtigen Folgen zu, die harmlos aussehen, aber viel Zündstoff enthalten:

$$\begin{aligned} a_n &:= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n, && n \in \mathbb{N}, \\ b_n &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, && n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Warnung 8.4. Die Folge (a_n) bietet eine gute Gelegenheit, vor einem verbreiteten Fehler bei der Bestimmung von Grenzwerten zu warnen. Man könnte auf die Idee kommen, die Stellen, an denen das n vorkommt, nacheinander zu bearbeiten. Dazu benennen wir z. B. das n im Exponenten in k um und lassen zunächst das n und danach dann das k gegen unendlich laufen. Das liefert

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^k = \lim_{k\to\infty} 1^k = 1.$$

Wenn das ein gültiges Verfahren wäre, sollte es aber natürlich auch andersherum funktionieren. Bilden wir zunächst den Grenzwert für k gegen unendlich und dann den für n, so finden wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^k$$

nicht existiert. Wir werden gleich sehen, dass der Grenzwert von (a_n) existiert und nicht 1 ist. Beide Betrachtungen führen also in die Irre.
Das ist ein Beispiel für eine Grundschwierigkeit in der Analysis und führt gleich zu einer weiteren Warnung: Grenzwerte lassen sich im Allgemeinen nicht vertauschen! Das gilt sogar, wenn alle beteiligten Grenzwerte existieren, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^n &= \lim_{n\to\infty} \Big(\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}\Big)^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1, \\ \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^n &= \lim_{k\to\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns jetzt der Behandlung der beiden oben angegebenen Folgen zu.

Satz 8.5. *Die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren und* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Beweis. Wir beginnen damit, die Konvergenz von (b_n) mit Hilfe des Monotoniekriteriums zu beweisen. Da $m! > 0$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt, sehen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n.$$

Die Folge (b_n) ist also streng monoton wachsend und es bleibt noch Beschränktheit zu zeigen. Dazu schreiben wir b_n aus

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$$

und beobachten, dass wir den Ausdruck größer machen, wenn wir in den Nennern alle Faktoren, die größer als 2 sind, durch 2 ersetzen:

$$\begin{aligned} &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun die geometrische Summenformel aus Satz 3.12 und erhalten für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_n < 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 3.$$

Also ist mit Hilfe des Monotoniekriteriums aus Satz 8.2 die Folge (b_n) konvergent und für $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ gilt $b \leq 3$.

Wir wenden uns der Folge (a_n) zu. Um für diese Folge Monotonie nachzuweisen, betrachten wir den Quotienten zweier benachbarter Folgenglieder. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n. \end{aligned}$$

Mit der Bernoullischen Ungleichung finden wir dafür die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2} - \frac{n}{(n+1)^3} \\ &= 1 + \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - n - n}{(n+1)^3} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, da alle Folgenglieder positiv sind, sofort $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist auch die Folge (a_n) streng monoton wachsend. Die Beschränktheit dieser Folge spielen wir nun auf die Beschränktheit von (b_n)

zurück. Nach der Binomialformel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}.
\end{aligned}$$

Im hinteren Bruch können wir nun ein n kürzen. Dann bleiben sowohl im Zähler als auch im Nenner genau $k-1$ Faktoren übrig:

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}. \tag{8.1}$$

Schließlich beobachten wir, dass jeder dieser Faktoren kleiner als 1 ist und erhalten

$$\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = b_n.$$

Also haben wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ nun $a_n \leq b_n < 3$ und damit ist auch die Folge (a_n) beschränkt und zusammen mit der oben gezeigten Monotonie folgt damit die Konvergenz. Wir setzen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$.
Es bleibt nun noch $a = b$ zu zeigen. Da wir schon $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt haben, wissen wir wegen Satz 7.5 (a) bereits $a \leq b$. Es bleibt also nur die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Sei dazu ein $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geq 2$ fest gewählt und $n \geq j$. Dann gilt wegen (8.1)

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \\
&\geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Wir gehen nun in dieser Ungleichung auf beiden Seiten zum Grenzwert $n \to \infty$ über. Man beachte, dass wir es dabei nicht mit Schwierigkeiten wie unendlicher Summierung oder unendlichen Produkten zu tun bekommen. Wir haben „lediglich“ eine endliche Summe von einem endlichen Produkt von Folgen, die alle konvergieren, Satz 7.3 ist also hier anwendbar.
Da jeder einzelne Klammerausdruck gegen 1 strebt, geht jeder Summand gegen $1/k!$ und damit strebt der gesamte Ausdruck auf der rechten Seite genau gegen $1 + 1 + \sum_{k=2}^{j} 1/k! = b_j$. Wir erhalten somit aus unserer Ungleichung $a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq b_j$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geq 2$. Nun können wir schließlich den Grenzübergang $j \to \infty$ durchführen und erhalten $a \geq \lim_{j\to\infty} b_j = b$. □

Der Grenzwert dieser beiden Folgen ist so wichtig, dass wir ihm einen eigenen Namen verpassen.

Definition 8.6. *Die Zahl*

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

heißt Eulersche Zahl.

9. Teilfolgen und Häufungswerte

Auch divergente Folgen enthalten unter Umständen so etwas wie konvergente Anteile. Die zu deren Beschreibung nützlichen Begriffe wollen wir in diesem Abschnitt herausarbeiten.

Definition 9.1. *Sei (a_n) eine Folge, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Funktion und $b_n := a_{\varphi(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Folge (b_n)* Teilfolge *von (a_n).*

Diese Definition sieht etwas sperrig aus, tut aber genau das, wonach der Name sich anhört: Einen Teil der Folge herauspicken. Man sucht eine gewisse (unendliche) Auswahl von Folgengliedern heraus, ohne deren Reihenfolge zu ändern. Um diesen zweiten Punkt zu gewährleisten, muss φ streng monoton wachsend sein. Wir betrachten zwei Beispiele.

Beispiel 9.2. (a) Für $\varphi(k) := 2k$, $k \in \mathbb{N}$, haben wir $b_k = a_{2k}$, also $(b_n) = (a_2, a_4, a_6, a_8, \dots)$ und wir haben so die Teilfolge der Folgenglieder mit geradem Index ausgewählt.

(b) Ist $\varphi(k) := k^2$ für $k \in \mathbb{N}$, so ist $(b_n) = (a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots)$.

Bemerkung 9.3. Zur Notation von Teilfolgen wird oft statt der Funktionsnotation wieder die Indexnotation wie bei Folgen üblich verwendet. Man setzt $n_k := \varphi(k)$ für $k \in \mathbb{N}$ und schreibt für die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese entsteht also aus (a_n), indem die Indizes $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ausgewählt werden.

Definition 9.4. *Es sei (a_n) eine reelle Folge. Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt* Häufungswert *von (a_n), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(\alpha)\}$ unendlich viele Elemente enthält.*
Weiter definieren wir die Menge aller Häufungswerte der Folge als

$$\mathrm{HW}(a_n) := \big\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \textit{ ist Häufungswert von } (a_n)\big\}.$$

Bemerkung 9.5. Diese Definition sieht unserer Umformulierung der Konvergenz-Definition aus Kapitel 6 ähnlich. Wir stellen die beiden gegenüber:

- Es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls

$$\text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Es ist $a \in \mathrm{HW}(a_n)$, falls

$$\text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

Nun sieht man deutlich, dass die Anforderung an einen Häufungswert schwächer ist als an einen Grenzwert.

Beispiel 9.6. (a) Wir zeigen, dass $(a_n) = ((-1)^n)$ genau zwei Häufungswerte hat, nämlich 1 und -1.

Für jedes gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = 1$, also liegen für jedes $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder mit geradem Index in $U_\varepsilon(1)$ und da das unendlich viele sind, ist 1 ein Häufungswert. Genauso sieht man durch Betrachtung der Folgenglieder mit ungeradem Index, dass -1 ein Häufungswert ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass alle anderen reellen Zahlen keine Häufungswerte sind. Sei dazu $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta \neq 1$ und $\beta \neq -1$. Wähle dann $\varepsilon_0 > 0$ so klein, dass $1, -1 \notin U_{\varepsilon_0}(\beta)$ gilt. Das geht, da β sowohl von 1 als auch von -1 einen echt positiven Abstand hat. Dann gilt $a_n \in U_{\varepsilon_0}(\beta)$ für gar kein $n \in \mathbb{N}$. Also kann β kein Häufungswert sein.

(b) Die Folge $(a_n) = (n)$ hat gar keinen Häufungswert, denn für jedes $\beta \in \mathbb{R}$ gilt $a_n > \beta + 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Wie wir in Satz 5.7 gesehen haben, ist $\mathbb{Q}$ abzählbar. Es gibt also eine Folge (a_n), sodass $\mathbb{Q} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ gilt. Sei nun $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Dann liegen im Intervall $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ unendlich viele rationale Zahlen, d. h. α ist ein Häufungswert der Folge (a_n). Wir haben eine Folge gefunden, für die *jede* reelle Zahl ein Häufungswert ist.

Der folgende Satz befasst sich mit den Zusammenhängen zwischen Teilfolgen, Häufungswerten und Konvergenz.

Satz 9.7. *Es sei (a_n) eine reelle Folge. Dann gilt*

(a) Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert von (a_n), genau dann wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (a_n) existiert, die gegen α konvergiert.

(b) Ist (a_n) konvergent und $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n), so ist auch $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = \lim_{n \to \infty} a_n$.

(c) Ist (a_n) konvergent, so hat (a_n) genau einen Häufungswert, nämlich den Grenzwert $\lim_{n \to \infty} a_n$.

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst die Richtung von links nach rechts. Sei also α ein Häufungswert von (a_n). Dann existiert für $\varepsilon = 1$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_1} - \alpha| < 1$. Da es auch für $\varepsilon = 1/2$ unendlich viele Folgenglieder von (a_n) in der $1/2$-Umgebung von α gibt, muss es auch ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_1$ geben, sodass $|a_{n_2} - \alpha| < 1/2$ gilt. Genauso finden wir ein $n_3 \in \mathbb{N}$ mit $n_3 > n_2$, sodass $|a_{n_3} - \alpha| < 1/3$ gilt.

Verfahren wir so immer weiter, erhalten wir schließlich eine Folge von Indizes $n_1, n_2, n_3, \ldots$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, sodass

$$|a_{n_k} - \alpha| \leq \frac{1}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{9.1}$$

Damit ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, eine Teilfolge von (a_n), von der noch zu zeigen ist, dass sie gegen α konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass ${}^1/_{k_0} < \varepsilon$ ist und mit (9.1) gilt für alle $k \geq k_0$

$$|a_{n_k} - \alpha| \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} < \varepsilon.$$

Wir wenden uns nun der Richtung von rechts nach links zu. Sei also $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n) mit $a_{n_k} \to \alpha$ $(k \to \infty)$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$ gilt. Damit ist aber $a_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha)$ für alle $k \geq k_0$, also für unendlich viele Indizes. D. h. α ist ein Häufungswert von (a_n).

(b) Wir setzen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und geben ein $\varepsilon > 0$ vor. Dann gibt es ob der Konvergenz von (a_n) ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Nun wählen wir $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $n_{k_0} \geq n_0$ gilt. Dann ist für alle $k \geq k_0$ nämlich $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$, weshalb $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$ folgt.

(c) Zunächst ist $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ ein Häufungswert von (a_n), denn in jeder ε-Umgebung liegen fast alle (also insbesondere unendlich viele) Folgenglieder. Wir zeigen, dass es keine weiteren Häufungswerte geben kann. Sei dazu $\beta \in \mathbb{R}$ ein Häufungswert von (a_n). Dann gibt es wegen (a) eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (a_n), die gegen β konvergiert. Nach (b) gilt dann aber $\beta = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, also ist a der einzige mögliche Häufungswert. $\square$

Übungsaufgabe 9.8. Es sei (a_n) eine reelle Folge und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie

$$\mathrm{HW}(\lambda a_n) = \{\lambda\alpha : \alpha \in \mathrm{HW}(a_n)\}.$$

10. Beschränkte Folgen

Beschränkte reelle Folgen sind im Allgemeinen nicht konvergent, aber mit den im letzten Abschnitt eingeführten Werkzeugen „Teilfolge“ und „Häufungswert“ haben wir gute Mittel in der Hand diese genauer zu untersuchen. Zunächst zeigen wir, dass beschränkte Folgen zumindest immer einen Häufungswert und damit auch eine konvergente Teilfolge besitzen.

Satz 10.1 (Satz von Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat mindestens einen Häufungswert.*

Beweis. Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und $C \geq 0$ so gewählt, dass $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir betrachten die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Diese ist wegen $C \in M$ nicht-leer. Ist außerdem $x < -C$, so gibt es gar keinen Index n mit $a_n \leq x$, also kann ein solches x nicht in M liegen. Das zeigt uns, dass M durch $-C$ nach unten beschränkt ist. Damit existiert $\alpha := \inf M$ nach Satz 2.15. Wir zeigen nun, dass α ein Häufungswert von (a_n) ist.
Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Satz 2.17 ein $x_\varepsilon \in [\alpha, \alpha + \varepsilon)$, das in M liegt, d. h. für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$. Damit liegen höchstens endlich viele Folgenglieder oberhalb von $\alpha + \varepsilon$. Andererseits ist $\alpha - \varepsilon$ nicht in M, d. h. es gibt unendlich viele a_n, die oberhalb von $\alpha - \varepsilon$ liegen.
Zusammengenommen bedeutet das, dass unendlich viele Folgenglieder im Intervall $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ liegen müssen und wir sind fertig. □

Satz 9.7 ermöglicht sofort die folgende Umformulierung des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

Korollar 10.2 (Satz von Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge.*

Man kann über die Häufungswerte einer beschränkten Folge sogar noch mehr sagen.

Satz 10.3. *Es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.*

(a) Für alle $\alpha \in \mathrm{HW}(a_n)$ gilt $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq \alpha \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

(b) Die Menge $\mathrm{HW}(a_n)$ hat ein Minimum und ein Maximum.

Beweis. (a) Sei $\alpha > \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Dann ist $\varepsilon := \alpha - \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|\alpha - a_n| = \alpha - a_n \geq \alpha - \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \varepsilon.$$

Also liegt kein Folgenglied unserer Folge in $U_{\varepsilon/2}(\alpha)$ und damit kann α kein Häufungswert von (a_n) sein.

Analog zeigt man, dass jedes $\alpha < \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$ kein Häufungswert ist.

(b) Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ist $\mathrm{HW}(a_n) \neq \emptyset$ und nach Teil (a) ist diese Menge auch beschränkt. Also hat sie ein Supremum und ein Infimum. Wir zeigen, dass auch $\alpha := \sup \mathrm{HW}(a_n)$ ein Häufungswert von (a_n) und damit das Maximum dieser Menge ist. Ein analoges Argument für das Infimum liefert dann die Behauptung.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 2.17 gibt es ein $\beta \in \mathrm{HW}(a_n)$ mit $\alpha - \varepsilon < \beta \leq \alpha$. Wählen wir nun ein $\delta \in (0, \varepsilon - (\alpha - \beta))$, so gilt $U_\delta(\beta) \subseteq U_\varepsilon(\alpha)$. (Malen Sie sich ein Bild!) Da β ein Häufungswert der Folge ist, liegen unendlich viele Folgenglieder in $U_\delta(\beta)$ und damit auch in $U_\varepsilon(\alpha)$. Also ist α ein Häufungswert von (a_n). □

Das ermöglicht uns die folgende Definition.

Definition 10.4. *Es sei* (a_n) *eine beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$. *Dann heißt*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \max \mathrm{HW}(a_n) \text{ oberer Limes } \textit{oder} \text{ Limes superior } \textit{von } (a_n),$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min \mathrm{HW}(a_n) \text{ unterer Limes } \textit{oder} \text{ Limes inferior } \textit{von } (a_n).$$

Beispiel 10.5. In Beispiel 9.6 haben wir gesehen, dass die Folge $((-1)^n)$ genau die Häufungswerte 1 und -1 hat. Also gilt hier

$$\liminf_{n\to\infty} (-1)^n = -1 \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1.$$

Bemerkung 10.6. (a) Etwas allgemeiner als in Definition 10.4 kann man den Limes superior einer Folge auch definieren, wenn die Folge nur nach oben beschränkt ist und für den Limes inferior reicht Beschränkheit nach unten aus.

(b) Für jede konvergente Folge (a_n) ist $\mathrm{HW}(a_n)$ nach Satz 9.7 (c) einelementig. Also ist in diesem Fall

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Für beschränkte Folgen gilt in Teil (b) sogar die Umkehrung. Das ist ein Teil des folgenden Satzes, der einige unserer Erkenntnisse aus diesem und dem vorigen Kapitel für beschränkte Folgen zusammenfasst.

Satz 10.7. *Es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) (a_n) *ist konvergent.*

(b) (a_n) *hat genau einen Häufungswert.*

(c) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Ist eine dieser Aussagen erfüllt, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis. Die Äquivalenz „(b)⇔(c)“ ergibt sich direkt aus der Definition von Limes inferior und Limes superior. Außerdem ist die Implikation „(a)⇒(b)“ die Aussage von Satz 9.7 (c). Es bleibt uns also nur noch die Implikation „(b)⇒(a)“ zu zeigen. Sei dazu (a_n) eine beschränkte Folge mit genau einem Häufungswert α und wir nehmen an, diese sei nicht konvergent. Da dann (a_n) insbesondere nicht gegen α konvergiert, gibt es ein $\varepsilon > 0$, für das außerhalb von $U_\varepsilon(\alpha)$ unendlich viele Folgenglieder liegen. Fassen wir diese zu einer Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ zusammen, so ist diese als Teilfolge der beschränkten Folge (a_n) ebenfalls beschränkt. Sie besitzt also nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 10.1 eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$. Da $(a_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ insbesondere eine Teilfolge der ursprünglichen Folge (a_n) ist, ist ihr Grenzwert nach Satz 9.7 (a) ein Häufungswert von (a_n). Also muss $\lim_{\ell\to\infty} a_{n_{k_\ell}} = \alpha$ sein. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $a_{n_{k_\ell}} \notin U_\varepsilon(\alpha)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt. □

Man beachte, dass eine Folge durchaus einmal größer als der Limes superior oder kleiner als der Limes inferior werden kann. Es gibt dabei aber Grenzen. Das formulieren wir exakter im folgenden Satz.

Satz 10.8. *Ist (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < \liminf_{n\to\infty} a_n$ und $b > \limsup_{n\to\infty} a_n$, so gilt $a_n \in (a, b)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe unendlich viele Folgenglieder, die größer oder gleich b sind. Dann können wir diese als eine Teilfolge von (a_n) auffassen. Dank der Beschränktheit der gesamten Folge ist diese Teilfolge ebenfalls beschränkt, sodass sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 10.1 wiederum eine konvergente Teilfolge hat. Diese Teilfolge der Teilfolge ist weiterhin eine Teilfolge der Ausgangsfolge (a_n) und wir bezeichnen sie mit $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Der Grenzwert $\beta := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ ist zum einen nach Satz 9.7 (a) ein Häufungswert der Folge (a_n), zum anderen haben wir durch unsere Konstruktion sichergestellt, dass $a_{n_k} \geq b$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt. Damit erhalten wir dank der Monotonie des Grenzwerts, vgl. Satz 7.5 (a),

$$\beta = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \geq b.$$

Das führt aber auf den Widerspruch

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max HW(a_n) \geq \beta \geq b > \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Die Annahme, es gäbe unendlich viele Folgenglieder, die kleiner oder gleich a sind, führt man analog zu einem Widerspruch. □

Wir beweisen nun die den Grenzwertsätzen entsprechenden Aussagen für Limes superior und inferior.

Satz 10.9. *Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt*

(a) $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

(b) Ist $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \textit{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

(c) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$ *und*
$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$.

(d) Ist $\lambda \geq 0$, so gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \limsup_{n\to\infty} a_n,$$
$$\liminf_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

(e) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n \quad$ *und* $\quad \liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$.

Beweis. Wir beweisen in (b) bis (e) jeweils nur die Aussagen für den Limes superior.

(a) Nach der Definition des oberen und unteren Limes gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf \mathrm{HW}(a_n) \leq \sup \mathrm{HW}(a_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(b) Sei $\alpha := \limsup_{n\to\infty} a_n$. Dann ist $\alpha \in \mathrm{HW}(a_n)$, also gibt es nach Satz 9.7 (a) eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen α konvergiert. Betrachten wir die analog gebildete Teilfolge $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (b_n), so ist diese ebenfalls beschränkt, hat also nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 10.1 wiederum eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$, deren Grenzwert β nach Satz 9.7 (a) ein Häufungswert von (b_n) ist. Da nach Voraussetzung $a_{n_{k_\ell}} \leq b_{n_{k_\ell}}$ für fast alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt, folgt mit Hilfe von Satz 9.7 (b) und Satz 7.5 (a)

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{\ell\to\infty} a_{n_{k_\ell}} \le \lim_{\ell\to\infty} b_{n_{k_\ell}} = \beta.$$

Also ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha \le \beta \le \max \mathrm{HW}(b_n) = \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(c) Sei $\alpha := \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ und $\varepsilon > 0$. Da α ein Häufungswert von $(a_n + b_n)$ ist, gibt es nach Satz 9.7 (a) eine Teilfolge $(a_{n_k} + b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n + b_n)$, die gegen α konvergiert. Weiter gilt nach Satz 10.8 für fast alle $k \in \mathbb{N}$

$$a_{n_k} \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad b_{n_k} \le \limsup_{n\to\infty} b_n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit können wir aus der Monotonie des Grenzwertes in Satz 7.5 (a)

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{k\to\infty}(a_{n_k} + b_{n_k}) \le \lim_{k\to\infty}\Big(\limsup_{n\to\infty} a_n + \frac{\varepsilon}{2} + \limsup_{n\to\infty} b_n + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\\ &= \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n + \varepsilon\end{aligned}$$

folgern. Insbesondere gilt damit für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ mit der Wahl $\varepsilon = {}^1\!/\!_\ell$

$$\alpha \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n + \frac{1}{\ell}.$$

Die Ausdrücke auf beiden Seiten dieser Ungleichung konvergieren für $\ell \to \infty$, also liefert uns Satz 7.5 (a)

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha = \lim_{\ell\to\infty} \alpha &\le \lim_{\ell\to\infty}\Big(\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n + \frac{1}{\ell}\Big)\\ &= \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

(d),(e) Übungsaufgabe. □

Wir verdeutlichen durch ein Beispiel, dass in (c) im Allgemeinen nicht „=“ gilt.

Beispiel 10.10. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $a_n := (-1)^n$ und $b_n := (-1)^{n+1}$. Dann gilt $a_n + b_n = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also ist auch der Limes superior und der Limes inferior der Summenfolge 0. Aber es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = 2$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n = -2$.

Übungsaufgabe 10.11. Es seien (a_n) eine beschränkte und (b_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n \ge 0$. Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \limsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{und}$$
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Gilt für zwei beschränkte Folgen (a_n) und (b_n) in $\mathbb{R}$ auch

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n?$$

Als weitere Anwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß können wir nun das Cauchy-Kriterium beweisen. Dieses Konvergenzkriterium hat vor allem in theoretischen Betrachtungen eine hohe Relevanz. Sein entscheidender Vorteil ist, dass es die Konvergenz einer reellen Folge nur anhand der Abstände der Folgenglieder untereinander, d. h. insbesondere auch ohne Kenntnis des Grenzwerts, charakterisiert.
Um ein solches Kriterium herzuleiten, beginnen wir andersherum und überlegen uns, wie sich der Abstand zweier weit draußen liegender Folgenglieder bei einer konvergenten Folge verhält.
Sei also (a_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert a. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Wählen wir nun einen weiteren beliebigen Index $m \geq n_0$, so gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{10.1}$$

Diese wichtige Eigenschaft gießen wir nun in eine Definition.

Definition 10.12. *Eine reelle Folge (a_n) heißt* Cauchy-Folge*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \textit{für alle } n, m \geq n_0. \tag{10.2}$$

Satz 10.13 (Cauchy-Kriterium)**.** *Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Den Beweis, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, haben wir schon in obiger Vorüberlegung erbracht. Wir wenden unser Augenmerk also der anderen Beweisrichtung zu.
Sei dazu (a_n) eine Cauchy-Folge. Wir überlegen uns zunächst, dass diese Folge beschränkt sein muss. Nach der Definition einer Cauchy-Folge gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a_m| < 1$ für alle $n, m \geq n_0$ ist. Insbesondere haben wir für den Spezialfall $m = n_0$ die Ungleichung $|a_n - a_{n_0}| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Also gilt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|.$$

Damit haben wir alle bis auf endlich viele Folgenglieder beschränkt, d. h. es gilt

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

womit die gesamte Folge (a_n) beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 10.1 hat die Folge (a_n) einen Häufungswert α. Wir zeigen, dass dieser sogar der Grenzwert der Folge ist, und geben dafür ein $\varepsilon > 0$ vor. Da (a_n) eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ für alle $n, m \geq n_0$. Außerdem liegen in $U_{\varepsilon/2}(\alpha)$ unendlich viele Folgenglieder von (a_n), also gibt es ein $n_* \geq n_0$ mit $|a_{n_*} - \alpha| < \varepsilon/2$. Für alle $n \geq n_0$ gilt damit

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n_*}| + |a_{n_*} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und das bedeutet, dass (a_n) gegen α konvergiert. □

Bemerkung 10.14. (a) Man kann das Cauchy-Kriterium auch folgendermaßen umformulieren: Eine reelle Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge, genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall k \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

(b) Die Richtigkeit der Aussage, dass jede Cauchy-Folge konvergiert, ist eng mit dem Vollständigkeitsaxiom verknüpft. So ist diese Aussage z. B. in $\mathbb{Q}$ falsch! Machen Sie sich das anhand einer Folge in $\mathbb{Q}$, die gegen eine irrationale Zahl strebt, klar.

Ein erstes Anwendungsbeispiel für das Cauchy-Kriterium bietet der folgende Satz.

Satz 10.15 (Prinzip der Intervallschachtelung)**.** *Seien I_n, $n \in \mathbb{N}$, abgeschlossene und nicht-leere Intervalle in $\mathbb{R}$ mit $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$, sodass die Länge von I_n für n gegen unendlich gegen null strebt. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x_*\}$ für ein $x_* \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir den linken Randpunkt des Intervalls I_n mit a_n und den rechten mit b_n, sodass $I_n = [a_n, b_n]$ ist. Dann gilt nach Voraussetzung $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.
Zunächst überlegen wir uns, dass der Schnitt aller Intervalle höchstens einen Punkt enthalten kann. Sind $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, so sind beide in jedem Intervall I_n, also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x - y| \leq b_n - a_n \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit ist $|x - y| = 0$, d. h. es gilt $x = y$.
Es bleibt noch auszuschließen, dass der betrachtete Schnitt leer ist. Dazu zeigen wir als Erstes, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist.
Sei $\varepsilon > 0$. Da die Länge der Intervalle I_n gegen null konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Wählen wir nun $n, m \geq n_0$, so gilt nach Voraussetzung $a_n \in I_n \subseteq I_{n_0}$ und $a_m \in I_m \subseteq I_{n_0}$. Der Abstand von a_n zu a_m kann also nicht größer werden als die Länge des Intervalls I_{n_0} und das bedeutet

$$|a_n - a_m| \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon.$$

Folglich ist (a_n) eine Cauchy-Folge und damit nach Satz 10.13 konvergent. Wir nennen den Grenzwert a und zeigen, dass $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ gilt.
Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt für alle $n \geq k$ nach Voraussetzung $I_n \subseteq I_k$ und deshalb $a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k$. Dank der Konvergenz von (a_n) und der Monotonie des Grenzwerts folgt $a_k \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq b_k$, also gilt $a \in I_k$. □

11. Konvergenz von Reihen

Will man unendlich viele Zahlen addieren, bekommt man es wieder mit einem Grenzwert zu tun. Das führt auf den Begriff einer *Reihe*, mit dem wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen.

Definition 11.1. *Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.*

(a) *Wir setzen $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, und nennen s_n die n-te* Partialsumme. *Weiter heißt die Folge (s_n)* (unendliche) Reihe *und wir schreiben dafür*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

(b) *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt* konvergent *(bzw.* divergent *bzw.* bestimmt divergent *gegen $\pm\infty$), wenn die Folge (s_n) konvergiert (bzw. divergiert bzw. bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert).*

(c) *Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so heißt $\lim_{n\to\infty} s_n$ der* Reihenwert *und wir schreiben*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Bemerkung 11.2. (a) Beachten Sie, dass das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nun zwei Bedeutungen hat. Es steht zum einen für die Folge der Partialsummen und ist damit ein abstraktes Zeichen, das unabhängig davon sinnvoll ist, ob die Partialsummen konvergieren. Zum anderen symbolisiert es den Reihenwert, und bevor man es in dieser Bedeutung verwendet, muss zunächst geklärt werden, ob die Folge (s_n) konvergiert.

Diese Doppelbelegung hat sich fest eingebürgert, daher machen wir uns diesen Sprachgebrauch im Folgenden ebenfalls zu eigen.

(b) Der Name des Summationsindexes spielt für die Bedeutung des Symbols keine Rolle, d. h. es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu.$$

Bei der Behandlung von Reihen ist es unpraktisch, dass wir durch unsere Definition einer Folge darauf festgelegt sind, die Summation immer mit eins als Index zu beginnen. Deshalb erweitern wir unseren Folgenbegriff ein wenig.

Definition 11.3. *Es sei $p \in \mathbb{Z}$ und $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung*

$$a : \{p + n : n \in \mathbb{N}_0\} \longrightarrow X$$

nennen wir in Erweiterung von Definition 5.1 ebenfalls Folge in X *und bezeichnen diese mit $(a_n)_{n=p}^\infty$. Ist $p = 1$, so schreiben wir weiterhin (a_n) für $(a_n)_{n=1}^\infty$.*

Bemerkung 11.4. (a) Für eine Folge $(a_n)_{n=p}^\infty$ können wir durch $b_n := a_{n+p-1}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge (b_n) konstruieren, die unserer alten Definition entspricht. Alle Erkenntnisse aus den letzten Kapiteln lassen sich damit problemlos auf diesen verallgemeinerten Folgenbegriff übertragen.

(b) Ist $p \in \mathbb{Z}$ und $(a_n)_{n=p}^\infty$ eine Folge, so definiert man für die Reihe über diese Folge entsprechend die Folge der Partialsummen als $s_n := \sum_{k=p}^n a_k$ für alle $n \geq p$ und schreibt für die Folge $(s_n)_{n=p}^\infty$ wieder $\sum_{k=p}^\infty a_k$, genau so wie für den Reihenwert, falls dieser existiert.

Auch im Folgenden werden Definitionen und Sätze immer für den Fall $p = 1$ angeben, um nicht zu viele Notationen zu produzieren. Diese gelten dann stets in diesem Sinne auch für allgemeines $p \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 11.5. Wir betrachten einige wichtige Reihen, untersuchen diese auf Konvergenz und bestimmen die Reihenwerte.

(a) Wir haben in Kapitel 8 bereits eine Reihe kennengelernt, nämlich $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}$ mit

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

In Satz 8.5 haben wir gesehen, dass $\lim_{n\to\infty} s_n = \mathrm{e}$ ist. Also ist dieses nach Definition eine konvergente Reihe mit Reihenwert

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

(b) Die *geometrische Reihe* ist für $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\sum_{k=0}^\infty x^k \quad \text{(geometrische Reihe).}$$

In Satz 3.12 haben wir schon gesehen, dass für die Partialsummen dieser Reihe

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, & \text{falls } x \neq 1, \\ n + 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

gilt.

Für $x = 1$ konvergiert diese Folge offensichtlich nicht und nach Satz 7.9 konvergiert die Folge (x^{n+1}) genau dann, wenn $x \in (-1, 1]$ ist und dann ist der Grenzwert 0, falls $x \neq 1$ ist. Fazit: Unsere Folge (s_n) und damit die geometrische Reihe konvergiert, genau dann wenn $|x| < 1$ ist und in diesem Fall gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

(c) Um die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

zu untersuchen, beobachten wir, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Also bekommen wir für die zugehörigen Partialsummen für alle $n \geq 2$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

dank einer freundlichen Teleskopsumme. Für $n \to \infty$ folgt $s_n \to 1$ und damit haben wir auch hier eine konvergente Reihe mit Reihenwert 1, in Formeln

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

(d) Abschließend betrachten wir die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \quad \text{(harmonische Reihe).}$$

Für diese Reihe gilt

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = s_n + \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\geq 1/2n} \geq s_n + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = s_n + n \cdot \frac{1}{2n} = s_n + \frac{1}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nehmen wir an, die Folge (s_n), und damit die harmonische Reihe, wäre konvergent, so existiert $s := \lim_{n\to\infty} s_n$. Da dann aber nach Satz 9.7 (b) auch die Teilfolge (s_{2n}) gegen s konvergiert, liefert uns obige Ungleichung den Widerspruch $s \geq s + 1/2$. Also ist die harmonische Reihe divergent.

Wir beweisen nun die ersten Aussagen über Konvergenz von Reihen. Dazu übertragen wir einige unserer Konvergenzkriterien für Folgen auf den Fall von Reihen.

Satz 11.6. *Es sei (a_n) eine reelle Folge und $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

(a) Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge (s_n) nach oben beschränkt, so ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent. (Monotonie-Kriterium)

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ist genau dann konvergent, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \Big| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } m > n > n_0$$

gilt. (Cauchy-Kriterium)

Beweis. (a) Da alle a_n positiv sind, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n,$$

die Folge (s_n) ist also monoton wachsend. Da sie nach Voraussetzung auch beschränkt ist, folgt die Behauptung direkt aus dem Monotonie-Kriterium für Folgen, Satz 8.2.

(b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n < m$. Dann gilt

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| = \Big| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \Big|.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Ist der linke Ausdruck in dieser Gleichheit für alle großen n, m kleiner als ε, so auch der rechte und umgekehrt. Entsprechend folgt die Behauptung aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen in Satz 10.13. □

Auch die Linearität des Grenzwerts überträgt sich auf Reihen.

Satz 11.7. *Es seien $\sum_{k=1}^\infty a_k$ und $\sum_{k=1}^\infty b_k$ zwei konvergente Reihen in $\mathbb{R}$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^\infty (\alpha a_k + \beta b_k)$ mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ und $t_n := \sum_{k=1}^n b_k$ sowie $r_n := \sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k)$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k = \alpha s_n + \beta t_n. \tag{11.1}$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \lim_{n\to\infty} r_n = \alpha \lim_{n\to\infty} s_n + \beta \lim_{n\to\infty} t_n = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

nach den Grenzwertsätzen für Folgen in Satz 7.3. $\square$

Außerdem gelten für konvergente Reihen die folgenden Aussagen.

Satz 11.8. *Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) Für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{k=\nu}^{\infty} a_k$ ebenfalls konvergent.

(b) Die Folge $r_\nu := \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k$, $\nu \in \mathbb{N}$, ist eine Nullfolge.

(c) Die Folge (a_n) konvergiert gegen 0.

Beweis. Wir setzen wieder $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, und $s := \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(a) Sei $\nu \in \mathbb{N}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \nu$ betrachten wir die Partialsummen $\sigma_m = \sum_{k=\nu}^{m} a_k$ von $\sum_{k=\nu}^{\infty} a_k$. Dann gilt

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{\nu-1} a_k = s_m - s_{\nu-1}.$$

Die Folge auf der rechten Seite der Gleichung ist für $m \to \infty$ konvergent, also konvergiert auch (σ_m) mit $\sigma_m \to s - s_{\nu-1}$ $(m \to \infty)$.

(b) Nach dem vorherigen Punkt gilt $r_\nu = s - s_{\nu-1}$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}$. Da $\lim_{\nu\to\infty} s_{\nu-1} = s$ gilt, ist damit (r_ν) eine Nullfolge.

(c) Hierzu beobachten wir, dass $a_n = s_n - s_{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$. $\square$

Warnung 11.9. In (c) im obigen Satz gilt die Umkehrung *nicht*, wie das Beispiel der harmonischen Reihe, vgl. Beispiel 11.5 (d), zeigt.

12. Der Riemannsche Umordnungssatz

Im Folgenden betrachten wir Reihen, deren Summanden teils positives und teils negatives Vorzeichen haben. Diese haben es leichter zu konvergieren als Reihen, deren Summanden ein konstantes Vorzeichen haben, da sich Beiträge der positiven und der negativen Summanden gegenseitig wegheben können. Wird dieser Effekt sehr stark, können allerdings Überraschungen passieren. Diese guten und schlechten Eigenschaften solcher Reihen wollen wir in diesem Abschnitt beleuchten.
Als Modellfall betrachten wir sogenannte *alternierende Reihen*, bei denen die Summanden abwechselnd positiv und negativ sind.

Beispiel 12.1. Durch Einbauen von alternierenden Vorzeichen in die harmonischen Reihe, s. Beispiel 11.5 (d), ergibt sich die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots .$$

Abbildung 12.1 zeigt die ersten Partialsummen dieser Reihe. Das sieht sehr konvergent aus und wir wollen im Folgenden zeigen, dass die alternierende harmonische Reihe im Gegensatz zur harmonischen Reihe tatsächlich konvergent ist.

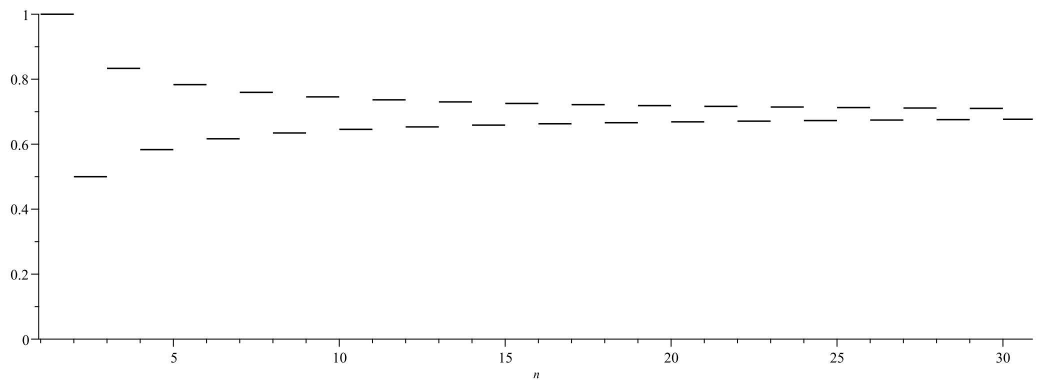

Abbildung 12.1.: Die ersten dreißig Partialsummen der alternierenden harmonischen Reihe.

Wir setzen dazu $a_n := {}^{(-1)^{n+1}}/_{n}$ und $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Betrachten wir nur die geraden n, so finden wir

$$s_{n+2} = s_n + a_{n+1} + a_{n+2} = s_n + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}_{\geq 0} \geq s_n.$$

Die Teilfolge (s_{2n}) von (s_n) ist also monoton wachsend. Analog erkennen wir, dass die Teilfolge (s_{2n-1}) der ungeraden Folgenglieder monoton fällt. Außerdem gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \geq s_{2n},$$

d. h. die ungeraden Folgenglieder liegen immer oberhalb des vorhergehenden geraden Folgenglieds. Setzen wir diese beiden Einsichten zusammen, bekommen wir für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$s_2 \leq s_4 \leq \ldots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1.$$

Somit sind beide Teilfolgen auch beschränkt, die der geraden Folgenglieder nach oben durch s_1 und die der ungeraden nach unten durch s_2. Nach dem Monotonie-Kriterium sind daher beide Teilfolgen konvergent. Wir setzen $s := \lim_{n\to\infty} s_{2n}$ und $\sigma := \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$.
Nehmen wir uns noch einmal die Identität $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ vor und lassen darin n nach ∞ streben, so gelangen wir wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ zu der Erkenntnis $\sigma = s + 0$, also $\sigma = s$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt für fast alle $k \in \mathbb{N}$ sowohl $s_{2k} \in U_\varepsilon(s)$ als auch $s_{2k-1} \in U_\varepsilon(s)$. Da aber jede natürliche Zahl entweder gerade oder ungerade ist, liegt damit $s_k \in U_\varepsilon(s)$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ und wir haben gezeigt, dass (s_n) und damit auch die Reihe konvergent ist.

Schaut man sich die Argumentation in obigem Beispiel an, so stellt man fest, dass die konkrete Formel für die Folgenglieder a_n gar nicht verwendet wurde, sodass diese Vorgehensweise ohne Mühe auf viele andere alternierende Reihen übertragen werden kann. In diesem Sinne können Sie den Beweis des folgenden Konvergenzkriteriums für Reihen mit alternierenden Vorzeichen selbst führen.

Satz 12.2 (Leibniz-Kriterium)**.** *Es sei (a_n) eine monotone Folge und es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent.*

Als Nächstes wollen wir untersuchen, ob und wie sich das Umordnen von Folgengliedern auf die Konvergenz einer Folge und der zugehörigen Reihe auswirkt. Wir definieren zunächst, was mit Umordnen gemeint ist.

Definition 12.3. *Es sei (a_n) eine reelle Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Wir setzen $b_n := a_{\varphi(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Folge (b_n) eine* Umordnung *von (a_n) und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine* Umordnung *von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Bemerkung 12.4. Wegen der Bijektivität der Abbildung φ existiert die Umkehrabbildung φ^{-1} mit $\varphi(\varphi^{-1}(n)) = n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Damit lässt sich jede Umordnung rückgängig machen. Außerdem ist $b_{\varphi^{-1}(n)} = a_{\varphi(\varphi^{-1}(n))} = a_n$, d. h. wann immer (b_n) eine Umordnung von (a_n) ist, ist auch (a_n) eine Umordnung von (b_n).

An der Konvergenz von Folgen ändert Umsortieren nichts, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 12.5. *Es sei (a_n) eine konvergente reelle Folge und (b_n) eine Umordnung von (a_n). Dann ist auch (b_n) konvergent und es gilt* $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Beweis. Es sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die zur Umordnung gehörige bijektive Abbildung, d. h. es gilt $b_n = a_{\varphi(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und geben ein $\varepsilon > 0$ vor. Dann gibt es ein $n_* \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_*$ gilt.
Nun muss es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben mit $\varphi(n) \geq n_*$ für alle $n \geq n_0$, denn wäre das nicht der Fall, so gäbe es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n) \in \{1, 2, \ldots, n_* - 1\}$ und das stünde im Widerspruch zur Bijektivität von φ. Nehmen wir uns ein solches n_0 her, so haben wir für alle $n \geq n_0$, dass $\varphi(n) \geq n_*$ ist, und damit ist für alle $n \geq n_0$

$$|b_n - a| = |a_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon.$$

Also konvergiert (b_n) ebenfalls gegen a. □

Wir geben Reihen, deren Konvergenz von der Reihenfolge der Summanden unabhängig ist, eine eigene Bezeichnung.

Definition 12.6. *Eine konvergente Reihe heißt* unbedingt konvergent*, wenn jede ihrer Umordnungen auch konvergent ist und alle Umordnungen denselben Reihenwert besitzen.*
Ist eine konvergente Reihe nicht unbedingt konvergent, so heißt sie bedingt konvergent.

Wir werden gleich sehen, dass es bedingt konvergente Reihen gibt. Dazu brauchen wir eine kleine Vorüberlegung.

Lemma 12.7.$^{(*)}$ *Es sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine konvergente Reihe, für die $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ divergent ist. Setzen wir $a_{n,+} := \max\{a_n, 0\}$ und $a_{n,-} := \min\{a_n, 0\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so divergiert $\sum_{n=1}^\infty a_{n,+}$ bestimmt gegen ∞ und $\sum_{n=1}^\infty a_{n,-}$ bestimmt gegen $-\infty$.*

Beweis$^{(*)}$. Wir beobachten zuerst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n - a_{n,+} = \left\{ \begin{array}{rl} 0, & \text{falls } a_n \geq 0, \\ a_n, & \text{falls } a_n < 0, \end{array} \right\} = a_{n,-} \tag{12.1}$$

und

$$a_{n,+} - a_{n,-} = \left\{ \begin{array}{rl} a_n, & \text{falls } a_n \geq 0, \\ -a_n & \text{falls } a_n < 0, \end{array} \right\} = |a_n|. \tag{12.2}$$

Wir nehmen an, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,+}$ nicht bestimmt gegen ∞ divergiert. Da alle Summanden dieser Reihe positiv sind, ist die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=1}^{N} a_{n,+})_{N\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Die Annahme sagt uns dann, dass diese beschränkt ist, sodass das Monotoniekriterium für Reihen aus Satz 11.6 (a) die Konvergenz dieser Reihe liefert.
Nach Satz 11.7 ist dann wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und dank (12.1) auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,-} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n,+}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,+} \tag{12.3}$$

konvergent. Nochmals Satz 11.7 zusammen mit (12.2) liefert daraus die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,+} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,-} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n,+} - a_{n,-}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \tag{12.4}$$

aber das war ja gerade ausgeschlossen. Also divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,+}$ bestimmt gegen ∞.
Nimmt man an, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,-}$ nicht bestimmt gegen $-\infty$ divergiert, kommt man analog zu einem Widerspruch. □

Satz 12.8 (Riemannscher Umordnungssatz). *Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe, für die $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergiert. Dann gibt es für jedes $S \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ eine Umordnung (b_n) von (a_n) mit $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$.*

Bemerkung 12.9. (a) Der Satz besagt nicht nur, dass man beim betrachteten Typ von Reihen durch Umordnen den Reihenwert ändern kann, sondern dass man allein durch Umordnen *jeden beliebigen* Reihenwert ansteuern kann, ja sogar eine divergente Reihe erzeugen kann. Außerdem bedeutet dieser Satz, dass es bedingt konvergente Reihen gibt, z. B. die alternierende harmonische Reihe aus Beispiel 12.1.

(b) Der Beweis dieses Satzes ist deutlich länger als alle bisherigen und reichlich technisch. Beim ersten Lesen kann er gefahrlos überblättert werden. Dabei ist die Beweisidee recht schön zu erklären:

Wir wollen die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ so umordnen, dass als Grenzwert S herauskommt und konzentrieren uns auf den Fall $S \in [0, \infty)$. Wegen Lemma 12.7 muss unsere Reihe sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele strikt negative Summanden haben. Dementsprechend können wir die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ aller positiven Summanden und die Teilfolge $(a_{m_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$

der strikt negativen Summanden betrachten. Für diese gilt mit der Notation aus Lemma 12.7

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,+} \qquad \text{und} \qquad \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{m_\ell} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,-},$$

sodass nach ebendiesem Lemma beide Reihen bestimmt divergieren, und zwar gegen ∞ bzw. $-\infty$. Insbesondere gibt es jeweils unendlich viele strikt positive und strikt negative Summanden und wir können jede beliebige positive Zahl durch Addition endlich vieler positiver Summanden übertreffen, sowie jede beliebige negative Zahl durch Addition endlich vieler negativer Summanden unterbieten.

Das machen wir uns zu Nutze, um genau den Grenzwert S zu erreichen. Man addiert zunächst die ersten positiven Summanden, solange bis S zum ersten Mal überboten ist. Dann addiert man die ersten negativen Summanden so lange, bis man zum ersten Mal wieder unterhalb von S ist. Wir haben schon endlich viele positive Summanden verbraucht, aber auch die verbliebene Restreihe der noch nicht verwendeten positiven Summanden muss noch bestimmt gegen ∞ divergieren, denn sonst wäre auch die gesamte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,+}$ konvergent gewesen. Also haben wir noch beliebig viel positives „Baumaterial" übrig und können wieder solange davon addieren, bis wir zum ersten Mal wieder über S liegen. Auch das ist nach endlich vielen Summanden der Fall.

So wechselt man immer Blöcke von positiven und negativen Summanden ab und pendelt sich dabei immer näher auf S ein. Letzteres liegt daran, dass nach Satz 11.8 (c) die Folge (a_n) eine Nullfolge sein muss. Da im Verlauf unserer Umordnerei die Summanden also betragsmäßig immer kleiner werden, wird der Wert, um den wir S in jedem Block über- bzw. unterbieten, immer näher an null rutschen.

Will man die Reihe so umordnen, dass sie bestimmt gegen ∞ divergiert, so behält man die Grundkonstruktion bei. Man summiert aber in jedem Schritt nicht, bis man über bzw. unter S ist, sondern man verschiebt diese Marke im Verlauf der Zeit nach oben. Beispielsweise kann man addieren, bis man über zwei ist, dann abziehen bis unter eins, addieren bis über drei, abziehen bis unter zwei, addieren bis über vier, usw.

(c) Wenn Sie den folgenden Beweis genau durcharbeiten, werden Sie feststellen, dass Summen auftreten können, bei denen die obere Grenze der Zählvariable echt kleiner als die untere ist, wie z. B. in „$\sum_{k=1}^{0} a_k$". Solche sogenannten „leeren Summen" sind hier als null zu lesen. Dann gehen alle Rechnungen auf und das entspricht auch einer weitverbreiteten notationellen Tradition.

Ganz analog sind leere Produkte wie z. B. „$\prod_{k=1}^{0} a_k$" üblicherweise als eins zu lesen.

Beweis von Satz 12.8(*). Der Beweis wird hier für den Fall $S \in [0, \infty)$ vorgeführt und am Ende werden die nötigen Modifikationen für den Fall $S = \infty$ aufgeführt. Für $S < 0$ kann man eine analoge Argumentation führen.
Unser Ziel ist es, eine Umordnung von (a_n) zu finden, d. h. eine bijektive Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ gegen S konvergiert. Nehmen wir an, (a_n) hätte nur endlich viele positive Folgenglieder, so hätte in der Notation aus Lemma 12.7 die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,+}$ nur endlich viele von null verschiedene Summanden und wäre damit im Widerspruch zu diesem Lemma konvergent. Es gibt also unendlich viele positive Summanden und mit einem analogen Argument ergibt sich, dass unendlich viele Folgenglieder von (a_n) strikt negativ sind. Wir können also die Teilfolgen $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ aller positiven Folgenglieder von (a_n) betrachten und genauso die Teilfolge $(a_{m_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ aller strikt negativen Folgenglieder. Da jedes a_n entweder positiv oder strikt negativ ist, findet sich jeder Summand unserer Reihe in genau einer dieser Teilfolgen wieder.

1. Schritt: Konstruktion der Umordnung φ.

Nach Lemma 12.7 gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty$, also gibt es ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=1}^{k_1 - 1} a_{n_k} \leq S < \sum_{k=1}^{k_1} a_{n_k} =: s_1^+.$$

Dabei hebt uns der letzte Summand $a_{n_{k_1}}$ so eben über S, es gilt also $0 < s_1^+ - S \leq a_{n_{k_1}}$.
Diese ersten k_1 positiven Summanden bilden die ersten Summanden unserer umgeordneten Reihe, wir setzen also

$$\varphi(j) := n_j \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, k_1.$$

Dann haben wir

$$s_1^+ = \sum_{j=1}^{k_1} a_{n_j} = \sum_{j=1}^{k_1} a_{\varphi(j)}.$$

Es wird Zeit die ersten strikt negativen Summanden zu verwenden. Hier sagt uns Lemma 12.7, dass $\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{m_\ell} = -\infty$ ist. Also gibt es ein $\ell_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$s_1^+ + \sum_{\ell=1}^{\ell_1 - 1} a_{m_\ell} \geq S > s_1^+ + \sum_{\ell=1}^{\ell_1} a_{m_\ell} =: s_1^-.$$

und es ist $0 < S - s_1^- \leq a_{m_{\ell_1}}$.
Diese ℓ_1 Summanden kommen in unserer Umordnung als Nächstes, wir setzen also

$$\varphi(j) := m_{j-k_1}, \quad \text{für} \quad j = k_1 + 1, k_1 + 2, \ldots, k_1 + \ell_1.$$

Dann haben wir

$$s_1^- = s_1^+ + \sum_{j=1}^{\ell_1} a_{m_j} = s_1^+ + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+\ell_1} a_{m_{j-k_1}} = s_1^+ + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+\ell_1} a_{\varphi(j)} = \sum_{j=1}^{k_1+\ell_1} a_{\varphi(j)}.$$

Wir addieren wieder positive Summanden. Wäre $\sum_{k=k_1+1}^{\infty} a_{n_k}$ endlich, so gälte dasselbe für die gesamte Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, was nach Lemma 12.7 nicht sein kann. Also gibt es ein $k_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$s_1^- + \sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} a_{n_k} \leq S < s_1^- + \sum_{k=k_1+1}^{k_2} a_{n_k} =: s_2^+.$$

Damit gilt $0 < s_2^+ - S \leq a_{n_{k_2}}$ und wir setzen

$$\varphi(j) := n_{j-\ell_1}, \quad \text{für} \quad j \in \{k_1+1+\ell_1, k_1+2+\ell_1, \ldots, k_2+\ell_1\}.$$

Auch jetzt folgt wieder

$$s_2^+ = s_1^- + \sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_{n_j} = s_1^- + \sum_{j=k_1+1+\ell_1}^{k_2+\ell_1} a_{n_{j-\ell_1}} = s_1^- + \sum_{j=k_1+1+\ell_1}^{k_2+\ell_1} a_{\varphi(j)} = \sum_{j=1}^{k_2+\ell_1} a_{\varphi(j)}.$$

Iteriert man dieses Vorgehen, erhält man zwei streng monoton wachsende Folgen $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(\ell_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen. Diese ergänzen wir, damit im Folgenden die Notation aufgeht, um die Setzungen $k_0 := \ell_0 := 0$. Die k_i und ℓ_i sind dabei so gewählt, dass mit

$$\varphi(j) := \begin{cases} n_{j-\ell_i}, & \text{für } j \in A_i := \{k_i+1+\ell_i, k_i+2+\ell_i, \ldots, k_{i+1}+\ell_i\},\ i \in \mathbb{N}_0 \\ m_{j-k_{i+1}}, & \text{für } j \in B_i := \{k_{i+1}+\ell_i+1, k_{i+1}+\ell_i+2, \ldots, k_{i+1}+\ell_{i+1}\}, \\ & \hfill i \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

und

$$s_i^+ := \sum_{j=1}^{k_i+\ell_{i-1}} a_{\varphi(j)} \quad \text{und} \quad s_i^- := \sum_{j=1}^{k_i+\ell_i} a_{\varphi(j)}, \quad i \in \mathbb{N},$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 < s_i^+ - S \leq a_{n_{k_i}} \quad \text{und} \quad 0 < S - s_i^- \leq a_{m_{\ell_i}}. \tag{12.5}$$

Es bleibt nun zum einen zu zeigen, dass φ eine gültige Umordnung produziert, d. h. wir müssen die Bijektivität dieser Abbildung sicherstellen. Zum anderen bleibt zu beweisen, dass die durch φ umgeordnete Reihe gegen S konvergiert.

2. Schritt: φ ist injektiv

Es seien $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(p) = \varphi(q)$ und wir dürfen annehmen, dass $p \leq q$ ist. Anderenfalls tauschen wir die Bezeichnungen. Da die Indexfolgen (n_k) und (m_ℓ) keine gemeinsamen Folgenglieder haben, muss es dann $i_p, i_q \in \mathbb{N}_0$ geben mit entweder

$$p \in A_{i_p} \text{ und } q \in A_{i_q}, \text{ d. h. } \varphi(p) = n_{p-\ell_{i_p}} = n_{q-\ell_{i_q}} = \varphi(q)$$

oder

$$p \in B_{i_p} \text{ und } q \in B_{i_q}, \text{ d. h. } \varphi(p) = m_{p-k_{i_p+1}} = m_{q-k_{i_q+1}} = \varphi(q).$$

Wir betrachten hier nur den ersten Fall, der zweite kann analog behandelt werden. Da $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n) ist, ist die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend. Insbesondere folgt aus $n_{p-\ell_{i_p}} = n_{q-\ell_{i_q}}$ sofort $p - \ell_{i_p} = q - \ell_{i_q}$ und somit $p - q = \ell_{i_p} - \ell_{i_q}$. Damit bekommen wir im Falle, dass $i_p = i_q$ ist, sofort $p = q$.
Wir nehmen nun an, es wäre $i_p \neq i_q$. Da (ℓ_i) eine monoton wachsende Folge ist und $p \leq q$ ist, muss dann $i_p < i_q$ sein. Da weiter (k_i) ebenfalls monoton wächst, folgt $k_{i_p+1} \leq k_{i_q}$. Nutzen wir aus, dass p in A_{i_p} und q in A_{i_q} liegt, so folgt

$$p - q \leq k_{i_p+1} + \ell_{i_p} - k_{i_q} - 1 - \ell_{i_q} \leq \ell_{i_p} - 1 - \ell_{i_q} < \ell_{i_p} - \ell_{i_q},$$

was im Widerspruch zu $p - q = \ell_{i_p} - \ell_{i_q}$ liegt.

3. Schritt: Surjektivität von φ.

Sei $a \in \mathbb{N}$. Gesucht ist ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(j) = a$. Da jede natürliche Zahl entweder in $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ oder in $(m_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ auftaucht, gibt es entweder ein $p \in \mathbb{N}$ mit $a = n_p$ oder ein $q \in \mathbb{N}$ mit $a = m_q$. Wir führen wieder nur den ersten Fall, also $a = n_p$ aus. Da $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen ist, gibt es einen Index $i_p \in \mathbb{N}_0$ mit $k_{i_p} < p \leq k_{i_p+1}$. Das bedeutet, dass

$$j := p + \ell_{i_p} \in \{k_{i_p} + 1 + \ell_{i_p}, k_{i_p} + 2 + \ell_{i_p}, \ldots, k_{i_p+1} + \ell_{i_p}\} = A_{i_p}$$

gilt und das liefert

$$\varphi(j) = \varphi(p + \ell_{i_p}) = n_{p+\ell_{i_p}-\ell_{i_p}} = n_p = a.$$

4. Schritt: Konvergenz der umgeordneten Reihe gegen S.

Wir betrachten die Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)}$ für $N \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $i_N \in \mathbb{N}_0$, sodass entweder $N \in A_{i_N}$ oder $N \in B_{i_N}$ gilt.
Wir betrachten als erstes den Fall, dass $N \in A_{i_N}$ gilt. Ist dabei speziell $N = k_{i_N+1} + \ell_{i_N}$, d. h. wir betrachten den letzten positiven Summanden in diesem Block, so gilt $\sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{k_{i_N+1}+\ell_{i_N}} a_{\varphi(n)} = s^+_{i_N+1}$.
Nach (12.5) gilt also in diesem speziellen Fall

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} - S\right| = |s^+_{i_N+1} - S| \leq a_{n_{k_{i_N+1}}}.$$

Für alle anderen $N \in \{k_{i_N}+1+\ell_{i_N}, k_{i_N}+2+\ell_{i_N}, \ldots, k_{i_N+1}-1+\ell_{i_N}\}$ ist unsere Partialsumme zum Index N kleiner oder gleich S. Das bedeutet

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} - S\Big| = S - \sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)}.$$

Daraus bekommen wir durch Weglassen einiger (positiver!) Summanden und wiederum mit Hilfe von (12.5)

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} - S\Big| = S - \sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} \leq S - \sum_{n=1}^{k_{i_N}+\ell_{i_N}} a_{\varphi(n)} = S - s_{i_N}^{-} \leq a_{m_{\ell_{i_N}}}.$$

Liegt unser N dagegen in B_{i_N} befinden wir uns in einem Block von negativen Summanden. Auch hier betrachten wir zuerst den Fall des letzten Index im Block $N = k_{i_N+1} + \ell_{i_N+1}$ gesondert. Dann ist $\sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{k_{i_N+1}+\ell_{i_N+1}} a_{\varphi(n)} = s_{i_N+1}^{-}$ und wir bekommen erneut mit (12.5)

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} - S\Big| = |s_{i_N+1}^{-} - S| \leq a_{m_{\ell_{i_N+1}}}.$$

Schließlich ist für alle $N \in \{k_{i_N+1}+\ell_{i_N}+1, k_{i_N+1}+\ell_{i_N}+2, \ldots, k_{i_N+1}+\ell_{i_N+1}-1\}$ die Partialsumme größer als S und somit gilt

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} - S\Big| = \sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} - S.$$

Für alle $n \in \{k_{i_N+1}+\ell_{i_N}+1, \ldots, N\}$ ist $\varphi(n) = m_{n-k_{i_N+1}}$, d. h. $a_{\varphi(n)}$ ist negativ. Lassen wir alle diese negativen Summanden in der zuletzt verbliebenen Summe weg, machen wir den Gesamtausdruck also größer und erhalten ein letztes Mal mit Hilfe von (12.5)

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} - S\Big| \leq \sum_{n=1}^{k_{i_N+1}+\ell_{i_N}} a_{\varphi(n)} - S = s_{i_N+1}^{+} - S \leq a_{n_{k_{i_N+1}}}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, gilt nach Satz 11.8 (c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Nun sind $(k_i)_{i\geq 0}$ und $(\ell_i)_{i\geq 0}$ streng monoton wachsende Folgen von natürlichen Zahlen. Das bedeutet, dass es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für $i \geq i_0$ sowohl $k_i \geq n_0$ als auch $\ell_i \geq n_0$ ist.

Wählen wir schließlich ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $N \geq N_0$ das zugehörige i_N vom Anfang des vierten Schritts größer als i_0 wird, so sind für diese N die

Werte von $a_{n_{k_{i_N+1}}}$, $a_{m_{\ell_{i_N}}}$ und $a_{m_{\ell_{i_N+1}}}$ kleiner als ε und wir bekommen für all diese N dank obiger Fallunterscheidung

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} - S\Big| < \varepsilon.$$

Das bedeutet, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ gegen S konvergiert.

5. Schritt: Der Fall $S = \infty$.

Wie schon in Bemerkung 12.9 beschrieben, bleibt die Beweisidee gleich. Man wählt allerdings die Folgen (k_i) und (ℓ_i) so, dass anstatt (12.5)

$$0 < s_i^+ - i \leq a_{n_{k_i}} \quad \text{und} \quad 0 < i - 1 - s_i^- \leq a_{m_{\ell_i}}$$

gilt. Dann werden s_i^+ und s_i^- mit wachsendem i beliebig groß, was die bestimmte Divergenz gegen ∞ liefert. □

Beispiel 12.10. Wir betrachten die Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe, die man bekommt, wenn man immer einen positiven und zwei negative Summanden abwechseln lässt, also

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots.$$

Das Schöne an dieser speziellen Umordnung ist, dass man „nachrechnen“ kann, wie der Reihenwert dadurch modifiziert wird. Jeder Dreierblock ist von der Form

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k-1)+2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\Big) \tag{12.6}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Damit bekommen wir für diese Umordnung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k-1)+2}\Big) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\Big)\\ = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\Big) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Durch diese spezielle Umordnung wird der Wert der alternierenden harmonischen Reihe damit halbiert.

13. Absolute Konvergenz

In diesem Abschnitt werden wir feststellen, dass es auch unbedingt konvergente Reihen gibt, und diese näher untersuchen. Im weiteren Verlauf sammeln wir wichtige Konvergenzkriterien für Reihen.
Schaut man sich den Riemannschen Umordnungssatz an, so stellt man fest, dass dieser damit steht und fällt, ob die Reihe über die Beträge der Summanden divergiert. Um solche Reihen auszuschließen, geben wir die folgende Definition.

Definition 13.1. *Eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *heißt* absolut konvergent, *wenn die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergiert.*

Wir zeigen zunächst, dass absolute Konvergenz ein stärkerer Begriff als Konvergenz ist.

Satz 13.2. *Es sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine absolut konvergente Reihe. Dann ist sie konvergent und es gilt die* verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \tag{13.1}$$

Beweis. Wir verwenden das Cauchy-Kriterium aus Satz 11.6. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es dank der absoluten Konvergenz ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n > n_0$ gilt $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Mit der Dreiecksungleichung gilt dann sofort für alle $m > n > n_0$ auch

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon.$$

Also ist die Reihe nach dem Cauchy-Kriterium konvergent.
Setzen wir $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir wie oben mit der Dreiecksungleichung $|s_n| \leq \sigma_n$ für alle n und damit im Grenzwert $n \to \infty$

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big| = \big|\lim_{n\to\infty} s_n\big| = \lim_{n\to\infty} |s_n| \leq \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \qquad \square$$

Bemerkung 13.3. (a) Jede absolut konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ ist konvergent, aber die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe zeigt.

(b) Ist (a_n) eine Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ist die Reihe über (a_n) konvergent, so ist sie auch absolut konvergent.

(c) Mit diesem neuen Begriff lässt sich auch die Voraussetzung des Riemannschen Umordnungssatzes 12.8 einfacher hinschreiben. Seine Aussage gilt für alle Reihen, die konvergent, aber nicht absolut konvergent sind.

Der nächste Satz bestätigt, dass absolut konvergente Reihen unbedingt konvergent sind.

Satz 13.4. *Eine Reihe ist genau dann unbedingt konvergent, wenn sie absolut konvergent ist.*

Beweis$^{(*)}$. Jede konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe erfüllt die Voraussetzungen des Riemannschen Umordnungssatzes, ist also bedingt konvergent. Die Kontraposition dieser Erkenntnis liefert, dass jede unbedingt konvergente Reihe absolut konvergent ist.
Wir wenden uns der Umkehrung zu und zeigen, dass jede absolut konvergente Reihe unbedingt konvergiert. Sei dazu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und (b_n) eine Umordnung von (a_n). Wir behandeln zunächst den Spezialfall, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und betrachten die Partialsummen $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}$. Ist $j \in \mathbb{N}$ vorgegeben, so können wir uns dazu wie im Beweis von Satz 12.5 ein $N \in \mathbb{N}$ verschaffen, für das $\{b_1, b_2, \ldots, b_j\} \subseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ gilt. Da alle Folgenglieder von (a_n) positiv sind, folgern wir daraus, dass $\sigma_j \leq \sum_{k=1}^{N} a_k$ ist. Wir machen diesen Ausdruck noch größer, indem wir weitere positive Summanden dazu addieren, und erhalten für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\sigma_j \leq \sum_{k=1}^{N} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k =: s. \tag{13.2}$$

Damit ist die Partialsummen-Folge (σ_n) beschränkt und wegen der Positivität der Summanden konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nach dem Monotonie-Kriterium, vgl. Satz 11.6 (a). Somit gilt dank (13.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \sigma_n \leq s.$$

Nun ist aber wegen Bemerkung 12.4 auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Umordnung der Reihe über (b_n). Man kann damit obigen Beweis mit vertauschten Rollen von (a_n) und (b_n) noch einmal führen und erhält dann die umgekehrte Ungleichung $s \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Also sind die beiden Reihenwerte gleich.
Es bleibt noch der Fall einer Folge (a_n) zu betrachten, deren Folgenglieder beliebige Vorzeichen haben. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ absolut konvergent ist und alle Summanden dieser Reihe positiv sind, ist nach dem ersten Teil dieses Beweises die Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergent und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Also ist die Reihe über (b_n) absolut konvergent.
Es bleibt noch die Gleichheit der Reihenwerte für die Reihen ohne Betragsstriche zu zeigen. Dazu setzen wir

$$\tilde{a}_n := a_n + |a_n|, \qquad \tilde{b}_n := b_n + |b_n|, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $\tilde{a}_n \geq 0$ und $\tilde{b}_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(\tilde{b}_n)$ ist eine Umordnung von $(\tilde{a}_n)$ (mit der gleichen Funktion φ). Außerdem ist wegen der absoluten Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ konvergent, ja sogar absolut konvergent, denn alle Folgenglieder von $(\tilde{a}_n)$ sind positiv. Nun können wir für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n$ wieder den schon bewiesenen Fall von oben verwenden und wissen hiermit, dass auch diese Reihe absolut konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n$ gilt. Damit ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{b}_n - |b_n|) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n - \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass das Auseinanderziehen und Zusammenfassen der Summation jeweils nach Satz 11.7 erlaubt ist, da wir nun von allen beteiligten Reihen wissen, dass sie konvergent sind. □

Die Untersuchung einer Reihe auf Konvergenz kann ein verzwicktes Problem darstellen. In diesem Abschnitt wollen wir einige Kriterien beweisen, die dabei helfen können.

Satz 13.5. *Es seien (a_n) und (b_n) zwei reelle Folgen.*

(a) Ist $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. (Majorantenkriterium)

Man nennt (b_n) dann eine konvergente Majorante *von (a_n).*

(b) Ist $a_n \geq b_n \geq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so divergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (Minorantenkriterium)

Man nennt (b_n) dann eine divergente Minorante *von (a_n).*

Beweis. (a) Nach Voraussetzung gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq k$ gilt. Seien nun $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n > k$ gegeben. Dann gilt, da (b_n) nach Voraussetzung positive Folgenglieder hat,

$$\sum_{j=n+1}^{m} |a_j| \leq \sum_{j=n+1}^{m} b_j = \Big| \sum_{j=n+1}^{m} b_j \Big|.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wird nach dem Cauchy-Kriterium der Ausdruck rechts für hinreichend große n, m kleiner als ε. Damit ist für diese n, m auch der Ausdruck links kleiner als ε und die Behauptung folgt aus dem Cauchy-Kriterium.

(b) Den Beweis des Minorantenkriteriums können wir einfach auf das Majorantenkriterium zurückspielen. Wenn wir annehmen, dass $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent ist, so wäre (a_n) eine konvergente Majorante von (b_n) und somit die Reihe $\sum_{n=1}^\infty b_n$ konvergent, was ja nicht sein soll. Also divergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$. □

Wir wollen diese sehr nützlichen Kriterien an zwei Beispielen erproben.

Beispiel 13.6. (a) Es sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $0 < \alpha \leq 1$. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^\alpha \leq n$ und damit $1/n^\alpha \geq 1/n$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^\infty 1/n$ divergiert, ist $(1/n)$ eine divergente Minorante für unsere Reihe und diese damit auch divergent.

Sobald die allgemeine Potenz n^x für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, verallgemeinert sich auch dieser Beweis sofort und die Aussage bleibt richtig für alle $\alpha \in (0, 1]$.

(b) Nun stellt sich die Frage, wie das Konvergenzverhalten der Reihe aus (a) für Exponenten α aussieht, die größer als eins sind. Um eine Intuition zu bekommen, untersuchen wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

Dazu zeigen wir mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}$$

konvergiert. Dann konvergiert wegen

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}$$

auch obige Reihe. Wir beobachten dazu, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Wir wissen aber seit Beispiel 11.5 (c), dass die Reihe über $(1/n(n+1))$ konvergiert, also haben wir mit dieser Folge eine konvergente Majorante gefunden und mithin ist $\sum_{n=1}^\infty 1/n^2$ konvergent.

Ein vollständiges Bild liefert der folgende Satz.

Satz 13.7. *Ist $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha > 1$, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Beweis. Da alle Summanden der Reihe positiv sind, reicht es nach dem Monotoniekriterium aus Satz 11.6 (a) aus, die Beschränktheit der Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} 1/k^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, zu zeigen. Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ sei dazu $j \in \mathbb{N}$ mit $2^j - 1 \geq n$ gewählt. Damit ist

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^j-1} &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}}_{\leq 2\cdot\frac{1}{2^\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{7^\alpha}}_{\leq 4\cdot\frac{1}{4^\alpha}} + \underbrace{\frac{1}{8^\alpha} + \cdots + \frac{1}{15^\alpha}}_{\leq 8\cdot\frac{1}{8^\alpha}} + \ldots \\ &\qquad + \underbrace{\frac{1}{(2^{j-1})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^j-1)^\alpha}}_{\leq 2^{j-1}\cdot\frac{1}{(2^{j-1})^\alpha}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{j-1} \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{j-1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k. \end{aligned}$$

Setzt man $q := 1/2^{\alpha-1}$, so ist wegen $\alpha > 1$ der Exponent positiv und deshalb $0 < q < 1$. Damit können wir mit Hilfe der geometrischen Reihe weiter abschätzen:

$$s_n \leq \sum_{k=0}^{j-1} q^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

und sind fertig. □

Wir haben gesehen, dass es für die Konvergenz der Reihe notwendig ist, dass über eine Nullfolge summiert wird, aber dass dies alleine kein hinreichendes Kriterium darstellt. Die Folgenglieder müssen sich in einem gewissen Sinne „schnell genug“ der Null annähern. Wir brauchen also Techniken, um diese Annäherungsgeschwindigkeit zu messen. Die zwei folgenden Sätze basieren auf dieser Idee.

Satz 13.8 (Wurzelkriterium)**.** *Es sei (a_n) eine reelle Folge und*

$$w_n := \sqrt[n]{|a_n|}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Ist die Folge (w_n) beschränkt und $\alpha := \limsup_{n\to\infty} w_n$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, wenn $\alpha < 1$ ist, und divergent, falls $\alpha > 1$ gilt.

(b) Ist die Folge (w_n) unbeschränkt, so divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkung 13.9. Beachten Sie, dass dieser Satz im Falle $\alpha = 1$ keine Aussage trifft. Das ist kein Versehen, sondern nicht zu ändern, denn mit $\alpha = 1$ gibt es sowohl Folgen, für welche die Reihe konvergiert, als auch Folgen, für die sie divergiert. Spuckt die Überprüfung dieses Kriteriums also $\alpha = 1$ aus, muss man sich etwas Neues einfallen lassen.

Beweis von Satz 13.8. Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt und $\alpha < 1$ ist. Sei $q \in (\alpha, 1)$ fest gewählt. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ nach Satz 10.8, d. h. wir haben $|a_n| \le q^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Nun ist aber wegen $0 < q < 1$ die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergent, und damit haben wir eine konvergente Majorante für unsere Reihe gefunden. Das sichert die absolute Konvergenz.
Ist $\alpha > 1$ oder die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ sogar unbeschränkt, dann gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, für die $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ gilt. Das heißt aber, dass für diese n auch $|a_n| \ge 1^n = 1$ gilt. Damit konvergiert die Folge (a_n) sicher nicht gegen null, was aber nach Satz 11.8 (c) eine notwendige Voraussetzung für die Konvergenz der Reihe ist. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in diesen Fällen. □

Wir betrachten wieder einige Beispiele für die Anwendung dieses Satzes, bei denen wir auch sehen werden, dass im Fall $\alpha = 1$ tatsächlich sowohl Konvergenz als auch Divergenz der Reihe auftreten können.

Beispiel 13.10. (a) Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ ist $a_n = 1/n$ und damit $\sqrt[n]{|a_n|} = 1/\sqrt[n]{n}$. Diese Folge konvergiert gegen 1. Also ist für diese Reihe $\alpha = 1$ und sie ist nach Beispiel 11.5 (d) divergent.

(b) Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ gilt wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^2 = 1^2 = 1$ genauso $\alpha = 1$, aber wie wir bereits gesehen haben, ist die Reihe in diesem Fall konvergent, vgl. Beispiel 13.6 (b).

(c) Wir betrachten die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1}$.

Es gilt $1 = \sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{n^2+1} \le \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}^2$. Mit Hilfe von Satz 7.8 und dem Sandwich-Theorem aus Satz 7.5 erhalten wir also $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$. Das impliziert mit $a_n = \frac{3^n}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{n^2+1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}} = 3.$$

Also ist $\alpha = 3 > 1$ und damit die Reihe divergent.

(d) Wir untersuchen schließlich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n := \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = 1/2$ für alle geraden n und $\sqrt[n]{|a_n|} = 1/3$ für alle ungeraden. Der größte Häufungswert dieser Folge ist $1/2$, also ist $\alpha = 1/2 < 1$ und unsere Reihe damit absolut konvergent.

Satz 13.11 (Quotientenkriterium)**.** *Es sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und*
$$q_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Dann gilt:

(a) Ist die Folge (q_n) beschränkt und gilt
$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} q_n < 1,$$
so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

(b) Ist $q_n \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. (a) Wie im Beweis des Wurzelkriteriums wählen wir ein $q \in (\alpha, 1)$ und folgern, dass $q_n \leq q$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei also $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $n \geq n_0$ gilt $q_n \leq q$. Für all diese n haben wir dann
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q_n \leq q.$$
Also ist $|a_{n+1}| \leq q|a_n|$ für alle $n \geq n_0$ und wir bekommen
$$|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq q^2|a_{n-2}| \leq \cdots \leq q^{n-n_0}|a_{n_0}|.$$
Da die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-n_0}|a_{n_0}| = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \sum_{n=1}^{\infty} q^n$$
als geometrische Reihe konvergent ist, haben wir eine konvergente Majorante gefunden und damit konvergiert auch die Reihe über $(|a_n|)$ nach dem Majorantenkriterium.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $q_n = |a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$ für alle $n \geq k$ gilt. Dann ist
$$|a_{k+1}| \geq |a_k|, \quad |a_{k+2}| \geq |a_{k+1}| \geq |a_k|, \quad |a_{k+3}| \geq |a_{k+2}| \geq |a_k|, \ \ldots$$
und allgemein $|a_{k+j}| \geq |a_k| > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Damit kann (a_n) wieder keine Nullfolge sein, d. h. die Reihe über (a_n) ist divergent. □

Bemerkung 13.12. Ist (a_n) eine reelle Folge, für die die Folge (q_n) aus dem Quotientenkriterium konvergiert und gilt $\lim_{n\to\infty} q_n > 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Warum?

Beispiel 13.13. Als Beispielanwendung für das Quotientenkriterium untersuchen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Für $x = 0$ besteht die Reihe nur aus einem Summanden und ist daher offensichtlich konvergent. Weiterhin ist die Konvergenz für $x = 1$ nach Satz 8.5 schon bekannt. Sei $x \neq 0$. Dann ist jeder Summand von null verschieden, sodass wir das Quotientenkriterium anwenden können. In diesem Fall ist $a_n = {x^n}/{n!}$ und wir erhalten

$$q_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \longrightarrow 0 \ (n \to \infty).$$

Damit ist $\limsup_{n\to\infty} q_n = 0$, d. h. die Reihe ist absolut konvergent und zwar für jedes beliebige $x \in \mathbb{R}$.

Das Ergebnis des vorhergehenden Beispiels ermöglicht die folgende Definition.

Definition 13.14. *Wir nennen die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} {x^n}/{n!}$ Exponentialreihe *und definieren die* Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *durch*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Im weiteren Verlauf werden wir zeigen, dass der Name dieser Funktion insofern gerechtfertigt ist, als $\mathrm{e}^r = \exp(r)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ gilt. Durch die Setzung $\mathrm{e}^x := \exp(x)$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und mit Hilfe des noch zu definierenden Logarithmus ist das schließlich der Schlüssel, um die allgemeine Potenz mit reellen Exponenten zu definieren.

14. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar$^{(*)}$

Wir führen in diesem Kapitel die sogenannte b-adische Entwicklung ein, die in unserem durch das Zahlsystem zur Basis $b = 10$ bestimmten Alltag als Dezimalbruchdarstellung bekannt ist. Damit werden wir dann den schon seit Kapitel 5 versprochenen Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ führen.
In diesem gesamten Abschnitt ist $b \geq 2$ eine natürliche Zahl, die Basis des untersuchten Stellenwertsystems.

Definition 14.1. *Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a ist, also die Zahl*

$$\lfloor a \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\},$$

die Gaußklammer *von a.*

Man beachte, dass immer die Ungleichungskette

$$\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1 \tag{14.1}$$

gilt.
Sei nun $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ gewählt. Wir erhalten die b-adische Entwicklung von a folgendermaßen: Wir setzen zunächst

$$z_0 := \lfloor a \rfloor.$$

Dann ist $z_0 \in \mathbb{N}_0$ und wegen (14.1) gilt $z_0 \leq a < z_0 + 1$. Weiter definieren wir rekursiv

$$z_n := \left\lfloor \left(a - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z_j}{b^j} \right) \cdot b^n \right\rfloor, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für diese Folge $(z_n)_{n \geq 0}$ zeigen wir die folgenden Eigenschaften.

Satz 14.2. *Sei $a \geq 0$ und $(z_n)_{n \geq 0}$ die oben dazu konstruierte Folge. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a) $z_n \in \mathbb{N}_0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $z_n \leq b - 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *(ohne Null!).*

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{z_j}{b^j} \leq a < \sum_{j=0}^{n} \frac{z_j}{b^j} + \frac{1}{b^n}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) Ist $(\widetilde{z}_n)_{n\geq 0}$ eine weitere Folge, die die Punkte (a) – (c) erfüllt, dann gilt $(\widetilde{z}_n)_{n\geq 0} = (z_n)_{n\geq 0}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst (c). Für $n = 0$ haben wir die gewünschte Aussage schon in obigen Überlegungen gezeigt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir anhand der Definition von z_n und wegen (14.1)

$$z_n \leq \Big(a - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z_j}{b^j}\Big) \cdot b^n < z_n + 1.$$

Teilen wir diese Ungleichungen durch den strikt positiven Term b^n und addieren dann $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{z_j}{b^j}$, so erhalten wir

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{z_j}{b^j} + \frac{z_n}{b^n} \leq a < \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z_j}{b^j} + \frac{z_n}{b^n} + \frac{1}{b^n}.$$

Das ist genau die Behauptung in (c).
Aus (c) folgt weiter, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq a - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z_j}{b^j} < \frac{1}{b^{n-1}}.$$

Multipliziert man diese Ungleichungen mit b^n durch, so findet man

$$0 \leq \Big(a - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z_j}{b^j}\Big) b^n < \frac{b^n}{b^{n-1}} = b.$$

Damit ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Wert von z_n gegeben als die Gaußklammer einer reellen Zahl aus dem Intervall $[0, b)$, also ist z_n eine ganze Zahl zwischen null und $b - 1$ und wir haben (a) und (b) gezeigt.
Es bleibt noch (d) zu zeigen. Wir nehmen an, die beiden Folgen $(z_n)_{n\geq 0}$ und $(\widetilde{z}_n)_{n\geq 0}$ wären verschieden und wir wählen $k \in \mathbb{N}_0$ als den kleinsten Index mit $z_k \neq \widetilde{z}_k$. Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass $z_k < \widetilde{z}_k$ ist, der Beweis im umgekehrten Fall ergibt sich mit demselben Argument.
Da beide Folgen die Eigenschaft in (c) haben, wissen wir

$$a - \sum_{j=0}^{k} \frac{z_j}{b^j} < \frac{1}{b^k} \qquad \text{und} \qquad 0 \leq a - \sum_{j=0}^{k} \frac{\widetilde{z}_j}{b^j}. \tag{14.2}$$

Außerdem stimmen die beiden Folgen für alle kleineren Indizes als k überein. Das und die beiden obigen Abschätzungen liefern

$$0 < \frac{\widetilde{z}_k}{b^k} - \frac{z_k}{b^k} = a - \sum_{j=0}^{k} \frac{z_j}{b^j} - \Big(a - \sum_{j=0}^{k} \frac{\widetilde{z}_j}{b^j}\Big) < \frac{1}{b^k} - 0 = \frac{1}{b^k}.$$

Daraus folgt $0 < \widetilde{z}_k - z_k < 1$, was ein Widerspruch dazu ist, dass z_k und $\widetilde{z}_k$ ganze Zahlen sein müssen. □

Nun betrachten wir die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{b^n}.$$
Da $z_n \leq b-1$ für alle $n \geq 1$ gilt, ist $0 \leq {z_n}/{b^n} \leq {b-1}/{b^n}$ für all diese n. Die Reihe $(b-1)\sum_{n=0}^{\infty} {1}/{b^n}$ ist aber konvergent (geometrische Reihe), also haben wir eine konvergente Majorante gefunden. Damit konvergiert unsere Reihe absolut nach dem Majorantenkriterium aus Satz 13.5. Da wegen (c) aus obigem Satz

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_j}{b^j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{z_j}{b^j} \leq a \leq \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{z_j}{b^j} + \frac{1}{b^n} \Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_j}{b^j}$$

gilt, erhalten wir
$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{b^n}. \tag{14.3}$$

Definition 14.3. *Sei $a \in [0,\infty)$. Dann heißt die Darstellung aus* (14.3) *mit der oben konstruierten Folge $(z_n)_{n\geq 0}$ die b-*adische Entwicklung *von a. Man schreibt*

$$a = z_0\,,\, z_1\, z_2\, z_3\, z_4\, \dots$$

Ist $a \in (-\infty, 0)$, und $(z_n)_{n\geq 0}$ die b-adische Entwicklung von $-a$, so schreibt man

$$a = -z_0\,,\, z_1\, z_2\, z_3\, z_4\, \dots$$

Dass wir tatsächlich die alltägliche Dezimalbruchdarstellung konstruiert haben, verdeutlichen wir uns anhand zweier Beispiele.

Beispiel 14.4. Wir wählen $b = 10$ und $a = 1$. Dann ist $z_0 = 1$ und $z_1 = \lfloor (1 - z_0) \cdot b \rfloor = 0$. Genauso sieht man, dass $z_n = 0$ sogar für alle $n \geq 1$ gilt, also ist
$$1 = 1,00000\dots$$
Wählen wir $a = {1}/{2}$, so ist $z_0 = 0$ und $z_1 = \lfloor ({1}/{2} - 0) \cdot 10 \rfloor = 5$ sowie $z_2 = \lfloor ({1}/{2} - {1}/{2}) \cdot 100 \rfloor = 0$, was auch wieder für alle $n \geq 2$ zutrifft. Also haben wir

$$\frac{1}{2} = 0,5000000\dots$$

Bemerkung 14.5. Man beachte, dass Satz 14.2 (d) die Eindeutigkeit der b-adischen Entwicklung garantiert. Für die Definition hätte es noch eine andere, gleichwertige Möglichkeit gegeben. Dazu definiert man auf analoge Weise eine Folge $(\widehat{z}_n)_{n\geq 0}$ mit
$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\widehat{z}_j}{b^j} < a \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{\widehat{z}_j}{b^j} + \frac{1}{b^n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Dann wäre für $a = 1$ in obigem Beispiel $\widehat{z}_0 < 1 \leq \widehat{z}_0 + 1$, also $\widehat{z}_0 = 0$ und $\widehat{z}_n = 9$ für alle $n \geq 1$, sodass

$$1 = 0,9999999\ldots.$$

Für $a = 1/2$ bekäme man entsprechend

$$\frac{1}{2} = 0,499999999\ldots.$$

Wir zeigen, dass so lange Schlangen von Neunen bzw. $(b-1)$-en in unserem System nicht auftreten können.

Satz 14.6. *Es sei $a \geq 0$ und $z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ die b-adische Entwicklung von a gemäß Definition 14.3. Dann gilt $z_n \neq b-1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir nehmen an, es wäre $z_n = b-1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $z_n = b-1$ für alle $n \geq m$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{b^n} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{z_n}{b^n} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{z_n}{b^n} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{z_n}{b^n} + (b-1) \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{b^n} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{z_n}{b^n} + \frac{b-1}{b^m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{b^{n-m}} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{z_n}{b^n} + \frac{b-1}{b^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{z_n}{b^n} + \frac{b-1}{b^m} \cdot \frac{1}{1 - 1/b} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{z_n}{b^n} + \frac{1}{b^{m-1}}
\end{aligned}$$

und das ist ein Widerspruch zu Satz 14.2 (c). □

Nun kommen wir zum versprochenen Nachweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$. Wir verwenden wieder das Cantorsche Diagonalverfahren, vgl. Beispiel 5.8.

Satz 14.7. *Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Beweis. Wir zeigen, dass sogar das Intervall $[0,1)$ schon überabzählbar ist. Dazu nehmen wir an, es wäre $[0,1) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ für eine reelle Folge (a_n). Dann können wir jedes a_n durch seine 3-adische Entwicklung $\big(z_k^{(n)}\big)_{k \geq 0}$ darstellen. Demnach ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 0, z_1^{(n)} z_2^{(n)} z_3^{(n)} \ldots \quad \text{mit} \quad z_k^{(n)} \in \{0,1,2\} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren nun eine Folge $(z_k)_{k \geq 0}$ durch $z_0 := 0$ und

$$z_k := \begin{cases} 1, \text{ falls } z_k^{(k)} \in \{0,2\}, \\ 0, \text{ falls } z_k^{(k)} = 1, \end{cases}$$

für $k \geq 1$. Damit setzen wir $a := \sum_{k=0}^{\infty} {}^{z_k}\!/_{3^k}$. Dann ist $a \in [0, 1)$, denn es gilt sogar

$$0 \leq a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{3^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1 - {}^1\!/_3} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Für die Folge $(z_k)_{k\geq 0}$ haben wir außerdem für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{3^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{3^k} = a$$

und wegen

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z_k}{3^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+j}} = \frac{1}{3^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{3^n}$$

gilt

$$a = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z_k}{3^k} < \sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}.$$

Damit erfüllen die Folge $(z_k)_{k\geq 0}$ und die Zahl a die Punkte (a)–(c) aus Satz 14.2. Also gibt diese Folge nach Satz 14.2 (d) die eindeutige 3-adische Entwicklung von a an.
Nach unserer Annahme muss ein Folgenglied a_k mit $a = a_k$ und damit ein Index $k \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $z_j^{(k)} = z_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist aber insbesondere $z_k^{(k)} = z_k$ und das ist ein Widerspruch zu unserer Wahl von z_k. $\square$

15. Das Cauchyprodukt

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Produkt von konvergenten Reihen. Dabei werden wir wieder unsere Überlegungen zu Umordnungen von Reihen benötigen. Sollen zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ multipliziert werden, so erhält man beim formalen Ausmultiplizieren alle Produkte der Form $a_j b_k$ mit $j, k \in \mathbb{N}_0$ je genau einmal. Ordnet man all diese Produkte in einer Folge $(p_n)_{n \geq 0}$ an, wobei jedes einzelne $a_j b_k$ genau einmal vorkommt, so erhält man eine sogenannte *Produktreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Präziser formuliert bekommt man eine solche Produktreihe, indem man eine bijektive Abbildung $\Phi : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ wählt und $p_{\Phi(j,k)} = a_j b_k$ für alle Paare $j, k \in \mathbb{N}_0$ setzt.

Beispiel 15.1. Wir geben zwei Beispiele solcher Anordnungen der Produkte. Dazu schreiben wir uns die zu nummerierenden Folgenglieder in ein Schema und nummerieren in diesem auf verschiedenen Wegen:

(a) Anordnung nach Diagonalen:

$$\begin{array}{cccccc}
a_0b_0 & & a_0b_1 & & a_0b_2 \dots & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
a_1b_0 & & a_1b_1 & & a_1b_2 \dots & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_2b_0 & & a_2b_1 & & a_2b_2 \dots & \\
\vdots & \swarrow & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Wir wählen also

$$p_0 = a_0b_0,\ p_1 = a_0b_1,\ p_2 = a_1b_0,\ p_3 = a_0b_2,\ p_4 = a_1b_1,\ p_5 = a_2b_0,\ \dots$$

(b) Anordnung nach Quadraten:

$$\begin{array}{ccccc}
a_0b_0 & & a_0b_1 & & a_0b_2 \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
a_1b_0 & \leftarrow & a_1b_1 & & a_1b_2 \dots \\
 & & & & \downarrow \\
a_2b_0 & \leftarrow & a_2b_1 & \leftarrow & a_2b_2 \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Wir wählen also

$$p_0 = a_0 b_0,\ p_1 = a_0 b_1,\ p_2 = a_1 b_1,\ p_3 = a_1 b_0,\ p_4 = a_0 b_2,\ p_5 = a_1 b_2,\ \ldots$$

Dank Satz 13.4 können wir nun hoffen, dass es zumindest für absolut konvergente Reihen egal ist, welche der Anordnungen wir wählen. Tatsächlich gilt das folgende Resultat.

Satz 15.2. *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen und $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ irgendeine ihrer Produktreihen. Dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ absolut und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$$

Beweis. In einem ersten Schritt zeigen wir die Behauptung für den speziellen Fall der Anordnung nach Quadraten von oben. Wir setzen $s_n := \sum_{k=0}^{n} p_k$ und $\sigma_n := \sum_{k=0}^{n} |p_k|$, wobei (p_k) die Anordnung nach Quadraten sei. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}_0$ fix und betrachten alle Summanden von σ_n. Jeder einzelne ist von der Form $|a_j b_k|$ mit $j, k \in \mathbb{N}_0$. Sei nun N der höchste Wert für j oder k, der dabei vorkommt. Dann gilt durch Hinzunahme von weiteren positiven(!) Summanden:

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} |p_k| \leq \Big(\sum_{k=0}^{N} |a_k|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{N} |b_k|\Big) \leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\Big).$$

Also ist die Folge (σ_n) beschränkt. Nach dem Monotoniekriterium für Reihen ist damit die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ absolut konvergent.
Damit konvergiert aber auch die Folge (s_n). Es sei $s := \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$. Für die Anordnung nach Quadraten im Speziellen gilt die Beziehung

$$s_{n^2+2n} = \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k\Big), \tag{15.1}$$

die man z. B. durch Induktion beweisen kann. Lassen wir in dieser Gleichung $n \to \infty$ streben, erhalten wir die gewünschte Aussage

$$s = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big),$$

denn auch die Teilfolge $(s_{n^2+2n})_{n\in\mathbb{N}}$ von (s_n) konvergiert gegen s.
Ist schließlich eine weitere Produktreihe von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gegeben, so ist diese eine Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ und damit gilt nach Satz 13.4 die Behauptung. $\square$

Am häufigsten arbeitet man mit der oben angegebenen Anordnung nach Diagonalen. Diese formalisieren wir in der folgenden Definition.

Definition 15.3. *Es seien zwei Reihen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *gegeben. Die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

heißt das Cauchy-Produkt *von* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Satz 15.4. *Sind* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *zwei absolut konvergente Reihen, so ist das Cauchy-Produkt der beiden ebenfalls absolut konvergent. Weiter gilt dann für den Reihenwert*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich sofort aus Satz 15.2 und dem folgenden Lemma über blockweises Aufsummieren.

Lemma 15.5. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent und* $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ *eine streng monoton wachsende Folge in* $\mathbb{N}_0$. *Setzen wir*

$$b_0 := \sum_{k=0}^{n_1} a_k$$

und für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$b_j := \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k,$$

so ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $s_n := \sum_{j=0}^{n} a_j$, $\sigma_n := \sum_{j=0}^{n} b_j$ und $s := \lim_{n\to\infty} s_n$. Dann gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$\sigma_j = \sum_{k=0}^{n_{j+1}} a_k = s_{n_{j+1}}.$$

Also ist (σ_j) eine Teilfolge von (s_n) und da diese konvergiert, gilt insbesondere auch $\sigma_n \to s$ $(n \to \infty)$, was die Behauptung beweist. $\square$

Wir wollen das Cauchy-Produkt nun einmal in Aktion sehen.

Beispiel 15.6. Für jedes $q \in (-1,1)$ ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ absolut konvergent, also können wir diese mit sich selbst multiplizieren und erhalten mit Hilfe des Cauchyprodukts

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} q^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.\end{aligned}$$

Wir können abschließend noch die folgenden Eigenschaften der Exponentialfunktion zeigen.

Satz 15.7. *(a) Es ist* $\exp(0) = 1$ *und* $\exp(1) = \mathrm{e}$.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$. (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(x) > 0$ *und* $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$.

(d) Für alle $r \in \mathbb{Q}$ *gilt* $\exp(r) = \mathrm{e}^r$.

(e) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend, d. h. für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $x < y$ *gilt* $\exp(x) < \exp(y)$.

Beweis. (a) $\exp(0) = 1$ ist klar und $\exp(1) = \mathrm{e}$ ergibt sich aus der Definition der Eulerzahl in Definition 8.6 und Satz 8.5.

(b) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann sind die Werte $\exp(x)$ und $\exp(y)$ der Exponentialfunktion durch absolut konvergente Reihen gegeben. Wir erhalten also mit dem Cauchyprodukt, vgl. Satz 15.4:

$$\exp(x)\exp(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

ist. Mit Hilfe der Binomialformel gilt

$$c_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

Setzen wir das wieder oben ein, erhalten wir

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y).$$

(c)$^{(*)}$ Mit Hilfe der ersten beiden Punkte gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x).$$

Also gilt $\exp(x) \neq 0$ und $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$. Um die Positivität von $\exp(x)$ nachzuweisen, betrachten wir zunächst den Fall $x \geq 0$. Dann gilt

$$\exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 > 0.$$

Ist $x < 0$, so ist $\exp(x) = \exp(-x)^{-1} > 0$, da $-x > 0$ ist.

(d)$^{(*)}$ Zunächst ist $\exp(0) = 1 = \mathrm{e}^0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit der Funktionalgleichung

$$\exp(n) = \exp(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ Stück}}) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$$

und genauso

$$\mathrm{e} = \exp(1) = \exp\Big(n \cdot \frac{1}{n}\Big) = \Big(\exp\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^n.$$

Also ist $\exp({}^1\!/\!{}_n) = \mathrm{e}^{1/n}$.

Somit gilt für strikt positive rationale Zahlen $r := {}^m\!/\!{}_n$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\exp(r) = \exp\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m \text{ Stück}}\Bigg) = \Big(\exp\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^m = \big(\mathrm{e}^{1/n}\big)^m = \mathrm{e}^{m/n} = \mathrm{e}^r.$$

Ist $r \in \mathbb{Q}$ kleiner als null, so ist $-r > 0$ und es gilt $\exp(r) = \exp(-r)^{-1} = (\mathrm{e}^{-r})^{-1} = \mathrm{e}^r$.

(e) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gegeben. Dann ist $y - x > 0$ und damit gilt wie im den Beweis von (c) $\exp(y - x) > 1$. Damit ist

$$1 < \exp(y - x) = \exp(y)\exp(-x) = \frac{\exp(y)}{\exp(x)},$$

also $\exp(y) > \exp(x)$. □

Wir definieren die Werte von e^x für nichtrationale Exponenten nun mit Hilfe der Exponentialfunktion.

Definition 15.8. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ schreiben wir $\mathrm{e}^x := \exp(x)$.*

16. Potenzreihen

Definition 16.1. *Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Eine Reihe der Form*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

heißt Potenzreihe *in $\mathbb{R}$ mit* Entwicklungspunkt *x_0.*

Zwei Beispiele von Potenzreihen mit Entwicklungspunkt null sind die Exponentialfunktion (Beispiel 13.13) und die geometrische Reihe (Beispiel 11.5 (b)). Wir wollen eine allgemeine Theorie solcher Reihen entwickeln.
Jede Potenzreihe konvergiert an ihrem Entwicklungspunkt, also für $x = x_0$. Zur weiteren Untersuchung der Konvergenz einer Potenzreihe dient der folgende Satz, der sich aus dem Wurzelkriterium ableitet.

Satz 16.2 (Satz von Hadamard)**.** *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe. Dann gilt:*

(a) Ist die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = x_0$.

(b) Ist die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt und $\varrho := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, so konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut.

(c) Ist die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ beschränkt und $\varrho > 0$, so ist die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| < 1/\varrho$ absolut konvergent und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| > 1/\varrho$ divergent.

Beweis. Wir zeigen zunächst (a). Dazu nehmen wir uns ein $x \neq x_0$. Dann ist $\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \sqrt[n]{|a_n|}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und diese Folge ist nach Voraussetzung unbeschränkt. Damit folgt die Divergenz der Reihe aus dem Wurzelkriterium (Satz 13.8).
Auch (b) und (c) ergeben sich aus dem Wurzelkriterium, denn hier gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \limsup_{n\to\infty} |x-x_0| \sqrt[n]{|a_n|} = |x-x_0| \cdot \varrho.$$

Ist $\varrho = 0$, so ist dieser Wert immer null und damit kleiner als eins und wir bekommen die Aussage in (b). Ist $\varrho > 0$, so ist der betrachtete Limes superior, je nachdem, ob $|x-x_0| < 1/\varrho$ oder $|x-x_0| > 1/\varrho$ gilt, größer oder kleiner als 1, was nach dem Wurzelkriterium genau absolute Konvergenz von Divergenz der Reihe scheidet. Das liefert (c). □

Die Zahl $1/\varrho$ aus obigem Satz enthält also wesentliche Informationen zur Konvergenz der Potenzreihe. Sie ist damit eine charakteristische Größe, die einen Namen verdient hat.

Definition 16.3. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe und im Falle, dass* $(\sqrt[n]{|a_n|})$ *beschränkt ist,* ϱ *wie in Satz 16.2. Dann heißt die Zahl*

$$r := \begin{cases} 0, & \textit{falls in obigem Satz (a) gilt,} \\ \infty, & \textit{falls in obigem Satz (b) gilt,} \\ \dfrac{1}{\varrho}, & \textit{falls in obigem Satz (c) gilt,} \end{cases}$$

der Konvergenzradius *der Potenzreihe.*

Wir betrachten einige Beispiele, die verdeutlichen, dass am Rand des Konvergenzintervalls alles passieren kann. Dazu betrachten wir, der Übersichtlichkeit halber, Reihen mit Entwicklungspunkt null.

Beispiel 16.4. (a) Wir beginnen mit $a_n := 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, d. h. der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Das ist die geometrische Reihe aus Beispiel 11.5 (b) und insofern ist es auch nicht verwunderlich, dass hier wegen $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} 1 = 1$ der Konvergenzradius 1 ist. D. h. diese Potenzreihe konvergiert, wie wir schon wissen, absolut für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Über das Konvergenzverhalten am Rand des Konvergenzintervalls gibt der Konvergenzradius keine Auskunft. Aber wir wissen schon, dass diese sowohl für $x = -1$ als auch für $x = 1$ divergiert.

(b) Nun sei $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, wir betrachten also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Auch hier ist der Konvergenzradius 1, denn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

Damit konvergiert diese Reihe für $x \in (-1,1)$ absolut und divergiert für $|x| > 1$. An den Rändern des Intervalls $(-1,1)$ erhalten wir für $x = 1$ genau die harmonische Reihe (divergent) und für $x = -1$ die alternierende harmonische Reihe (konvergent), sodass wir Konvergenz für alle $x \in [-1,1)$ und Divergenz für alle anderen x haben.

(c) Schließlich nehmen wir $a_n = 1/n^2$, d. h. die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Für diese ist ebenso der Konvergenzradius 1, aber diese Reihe konvergiert an beiden Randpunkten des Konvergenzintervalls, denn für $x = 1$ erhalten wir die nach Beispiel 13.6 (b) konvergente Reihe über $1/n^2$ und für $x = -1$ die nach dem Leibniz-Kriterium konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^2$. Also ist in diesem Fall das Konvergenzintervall der Potenzreihe $[-1, 1]$ und wir haben Divergenz für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$.

Beispiel 16.5. Es kommt immer mal wieder vor, dass in einer Potenzreihe nicht alle Potenzen vorkommen, wie z. B. in

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} x^{3n}.$$

Will man dann den Satz von Hadamard zur Bestimmung des Konvergenzradius anwenden, muss man zunächst dafür sorgen, dass die Reihe die dort behandelte Form hat. Das erreicht man hier durch die Substitution $y := x^3$. Diese liefert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} y^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n y^n.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe berechnet sich nach Hadamard als Kehrwert von

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3},$$

zu $3/2$. Weiter ist

$$|x|^3 = |x^3| = |y| < \frac{3}{2} \iff |x| < \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

Wir bekommen für die ursprünglich betrachtete Reihe also den Konvergenzradius $\sqrt[3]{3/2}$ heraus.

Bemerkung 16.6. Der Satz von Hadamard kann uns auch noch zu einer anderen, eher unerwarteten Erkenntnis verhelfen. Wir haben in Beispiel 13.13 mit Hilfe des Quotientenkriteriums gesehen, dass die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Nach dem Satz von Hadamard bedeutet dies, dass $\limsup_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{n!} = 0$ sein muss. Da diese Folge außerdem positiv ist, kann sie keinen weiteren Häufungswert haben, denn der müsste wegen der Positivität größer oder gleich null sein. Beachten wir nun noch, dass diese Folge beschränkt ist, so konvergiert sie nach Satz 10.7 und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Natürlich kann man auch mit dem Quotientenkriterium Konvergenzuntersuchungen bei Potenzreihen anstellen. Wir führen das exemplarisch an einem prominenten Beispiel durch.

Beispiel 16.7. Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

und untersuchen diese mit dem Quotientenkriterium für Reihen aus Satz 13.11. Für den dort betrachteten Quotienten gilt

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}}{\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}} \right| = \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} \right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)},$$

und dieser Ausdruck geht für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen null für $n \to \infty$. Also konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} {}^{(-1)^n}/_{(2n)!}\, x^{2n}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut. Der Konvergenzradius ist damit unendlich.

Was war daran nun prominent? Wie bei der Exponentialfunktion ist durch diese Potenzreihe eine Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ gegeben, der wir einen Namen geben.

Definition 16.8. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ nennen wir die Zahl*

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

den Cosinus *von x.*

Ganz ähnlich wie in obigem Beispiel kann man für die Reihe in der folgenden Definition absolute Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$ zeigen.

Definition 16.9. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ nennen wir die Zahl*

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

den Sinus *von x.*

Wir wollen uns nun dem Cauchy-Produkt zweier Potenzreihen zuwenden.

Satz 16.10. *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ Potenzreihen mit demselben Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und zugehörigen Konvergenzradien $r_a > 0$ bzw. $r_b > 0$ (dabei sind $r_a = \infty$ oder $r_b = \infty$ zugelassen). Wir setzen*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},\ n \in \mathbb{N}_0, \quad \textit{und} \quad R := \min\{r_a, r_b\}.$$

Dann ist das Cauchy-Produkt der beiden Potenzreihen gegeben durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, deren Konvergenzradius beträgt mindestens R, und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| < R$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\Big).$$

Beweis. Für $|x-x_0| < R$ sind beide Potenzreihen absolut konvergent, also konvergiert nach Satz 15.4 auch das Cauchy-Produkt der beiden absolut und es gilt

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k b_{n-k}(x-x_0)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n. \qquad \square\end{aligned}$$

17. Komplexe Zahlen

Wir wollen nun noch einmal unseren Zahlenraum erweitern und die komplexen Zahlen einführen. Betrachten wir die bisherigen Zahlenraumerweiterungen, so erlauben diese jeweils die Lösung weiterer Gleichungen: in $\mathbb{N}$ kann man die Gleichung $x + 3 = 5$, aber nicht $x + 5 = 3$ lösen. Diese zweite ist aber in $\mathbb{Z}$ lösbar, wo wiederum $3x = 5$ nicht lösbar ist. Die Lösung dieser Gleichung findet sich in $\mathbb{Q}$, wo aber $x^3 = 5$ nicht lösbar ist. So kommt man schließlich nach $\mathbb{R}$.
Die Gleichung, die uns nun in $\mathbb{R}$ Kopfzerbrechen macht, ist $x^2 = -1$. Um diese Gleichung zu lösen, müssen wir offensichtlich nicht-reelle Zahlen bemühen, eben die komplexen. Sie werden in den Algebra-Vorlesungen sehen, dass man damit insofern am Ende der Zahlenraumerweiterei ist, als jede polynomiale Gleichung in den komplexen Zahlen lösbar ist.

Definition 17.1.$^{(*)}$ *Wir betrachten die Menge*

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

der komplexen Zahlen *aller geordneten Paare von reellen Zahlen mit der* Addition

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \textit{für alle } (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$$

und der Multiplikation

$$(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \quad \textit{für alle } (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in \mathbb{C}.$$

Ist $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, so heißt x der Realteil *(Notation $x = \mathrm{Re}(z)$) und y der* Imaginärteil *(Notation $y = \mathrm{Im}(z)$) von z.*

Beispiel 17.2.$^{(*)}$ Wir berechnen einige wichtige Produkte:

$$\begin{aligned} (0,1)^2 &= (0,1) \odot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) \\ (x,y) \odot (1,0) &= (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \\ (y,0) \odot (0,1) &= (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, y) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Üblicherweise wird eine andere Schreibweise für die komplexen Zahlen verwendet, die wir auch im Folgenden verwenden wollen. Dazu definiert man die *imaginäre Einheit*

$$\mathrm{i} := (0, 1)$$

und interpretiert die komplexen Zahlen als Erweiterung der reellen, indem man die reelle Zahl x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$ identifiziert (deshalb auch die Bezeichung als Realteil). Das ergibt mit den Rechnungen aus obigem Beispiel für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x, y) = (x, 0) \oplus (0, y) = (x, 0) \odot (1, 0) \oplus (y, 0) \odot (0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot \mathrm{i} = x + \mathrm{i}y.$$

Bemerkung 17.3. $^{(*)}$

(a) Nun können wir auch die Gleichung $z^2 = -1$ lösen, denn es gilt nach der ersten Berechnung in Beispiel 17.2

$$\mathrm{i}^2 = (0, 1) \odot (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

genauso wie übrigens auch $(-\mathrm{i})^2 = (0, -1) \odot (0, -1) = -1$ gilt.

(b) Der Vorteil davon, die komplexe Zahl $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ als $x + \mathrm{i}y$ zu schreiben, ist, dass man damit rechnen kann wie gewohnt, solange man immer $\mathrm{i}^2 = -1$ beachtet. Denn für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt nach den gewohnten Rechenregeln

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1 + x_2 + \mathrm{i}(y_1 + y_2),$$

was mit der Definition von i und der Identifikation der reellen Zahlen mit dem Realteil genau der Definition der Addition oben entspricht.

Für die Multiplikation sieht man

$$\begin{aligned}(x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) &= x_1x_2 + \mathrm{i}x_1y_2 + \mathrm{i}y_1x_2 + \mathrm{i}^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) - y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1),\end{aligned}$$

was wieder genau zur Definition passt.

(c) Im Folgenden verwenden wir nicht weiter die schwerfälligen Bezeichnungen $\oplus$ und $\odot$ für die Verknüpfungen in $\mathbb{C}$, sondern schreiben auch zwischen komplexen Zahlen wieder + bzw. $\cdot$, da wir nach obigen Überlegungen mit den komplexen Zahlen wie gewohnt weiter rechnen können.

Satz 17.4. $^{(*)}$ *Die Menge $\mathbb{C}$ mit den eingeführten Verknüpfungen Plus und Mal ist im algebraischen Sinne ein Körper, d. h. sie erfüllt die Axiome (A1) bis (A9) aus Kapitel 2.*

Beweis $^{(*)}$. Das Axiom (A6) haben wir bereits in Beispiel 17.2 nachgerechnet und auch fast alle anderen Aussagen des Satzes kann man schlicht nachrechnen. Wir behandeln hier nur noch (A7). Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Da $z \neq 0$ ist, muss $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ gelten. Insbesondere ist $x^2 + y^2 > 0$. Wir setzen

$$z^{-1} := \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}.$$

Dann gilt unter anderem mit dem Distributivgesetz (A9)

$$zz^{-1} = (x + \mathrm{i}y)\frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + \mathrm{i}yx - \mathrm{i}xy - \mathrm{i}^2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1,$$

wir haben damit also ein multiplikativ-inverses Element zu z angegeben. $\square$

Veranschaulichen kann man sich die komplexen Zahlen am besten in der *komplexen Zahlenebene* (auch *Gaußsche Zahlenebene* genannt), s. Abbildung 17.1.

Definition 17.5. *Ist $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl, so heißt*

$\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ *die zu z* konjugiert komplexe *Zahl,*

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ *der* Betrag *von z.*

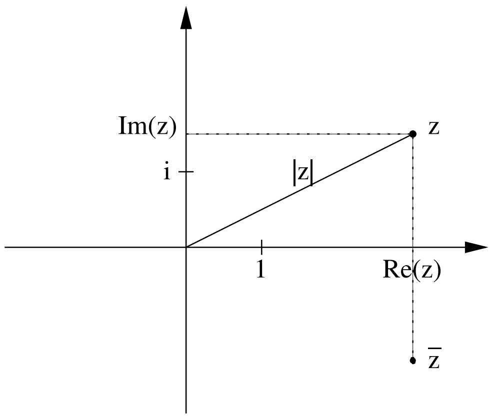

Abbildung 17.1.: Die Gaußsche Zahlenebene

Offensichtlich gilt $\overline{\overline{z}} = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Einige weitere bemerkenswerte Eigenschaften der komplexen Konjugation sammeln wir im folgenden Satz.

Satz 17.6.$^{(*)}$ *Sind $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so gilt*

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *und* $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

(b) $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$ *und* $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(z)$.

Beweis. (a) Es gilt für $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{x_1 + x_2 + \mathrm{i}(y_1 + y_2)} = x_1 + x_2 - \mathrm{i}(y_1 + y_2)\\ &= x_1 - \mathrm{i}y_1 + x_2 - \mathrm{i}y_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)\\ &= x_1x_2 - \mathrm{i}x_1y_2 - \mathrm{i}x_2y_1 - y_1y_2 = (x_1 - \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

(b) $z + \overline{z} = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z) - \mathrm{i}\mathrm{Im}(z) = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$ und
$z - \overline{z} = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(z) = 2\mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(z)$. □

Für den Betrag sehen wir sofort, dass $|z| = |\overline{z}|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist. Außerdem gelten die folgenden Aussagen.

Satz 17.7. *Für alle komplexen Zahlen $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

(a) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$,

(b) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ *und* $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$,

(c) $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0$ *genau dann, wenn* $z = 0$,

(d) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

(e) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung).

Beweis. (a) Es gilt $z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + \mathrm{i}yx - \mathrm{i}yx - \mathrm{i}^2y^2 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z|^2$.

(b) Diese Aussage folgt für den Realteil sofort aus $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ und genauso für den Imaginärteil.

(c) Ist $|z| = 0$, so ist $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ und damit auch $x^2 + y^2 = 0$. Diese Gleichung (in $\mathbb{R}$!) hat nur die Lösung $x = y = 0$, also ist in diesem Fall $z = 0$.

(d) Nachrechnen.

(e) Nach (a) und Satz 17.6 ist

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})\\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}\\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\end{aligned}$$

Nach (b) und (d) gilt nun $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq |\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})| \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1||z_2|$. Also ist

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Da alle beteiligten Größen positiv sind, kann man auf beiden Seiten der Ungleichung die Wurzel ziehen und erhält die Behauptung. □

Eine natürliche Frage ist nun: Welche Erkenntnisse, die wir bisher in $\mathbb{R}$ gewonnen haben, gelten auch in $\mathbb{C}$ weiter? Zunächst schauen wir uns aber an, was nicht geht.

Satz 17.8. *Es gibt auf $\mathbb{C}$ keine Relation „$\leq$“, die die Axiome (A10) bis (A14) erfüllt.*

Beweis. Nehmen wir an, es ginge doch, so muss nach (A10) entweder $\mathrm{i} \geq 0$ oder $\mathrm{i} \leq 0$ gelten. Wäre $\mathrm{i} \geq 0$, so ist wegen (A14) auch $-1 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} \geq 0$ und mit Satz 2.7 (a) folgt $1 \leq 0$, was ein Widerspruch zu (c) desselben Satzes ist.
Nehmen wir dagegen an, dass $\mathrm{i} \leq 0$ ist, so bekommen wir mit Satz 2.7 (b) die Ungleichung $-1 \geq 0$, was zum selben Widerspruch führt. □

Es ist also nicht möglich, zwei komplexe Zahlen der Größe nach zu vergleichen. Man kann aber Beträge von komplexen Zahlen vergleichen, denn das sind reelle Zahlen. Das werden wir uns oft zu Nutze machen. So kann man z. B. unsere Schreibweise $U_\varepsilon(x_0)$ für eine ε-Umgebung sofort nach $\mathbb{C}$ ziehen: Für $\varepsilon > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$U_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Wir wollen im Rest dieses Abschnitts einen Schnelldurchlauf durch die komplexen Folgen und Reihen machen und die Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$ definieren. Wir werden dabei feststellen, dass viele Dinge in $\mathbb{C}$ genauso wie in $\mathbb{R}$ funktionieren. Um nicht immer mühsam „in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$“ schreiben zu müssen, wird im weiteren Skript der Buchstabe $\mathbb{K}$ verwendet, wann immer man sowohl $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{C}$ einsetzen kann.
Wir übertragen zunächst den Begriff der Konvergenz. Diesen können wir auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ zurückspielen, vgl. Satz 7.1 (a).

Definition 17.9. *Es sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$.*

(a) Die Folge (z_n) konvergiert gegen *$z_0 \in \mathbb{C}$, wenn die reelle Folge $(|z_n - z_0|)$ in $\mathbb{R}$ gegen Null konvergiert.*

(b) Wir nennen (z_n) beschränkt*, wenn es ein $C \geq 0$ gibt mit $|z_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(c) Wir nennen (z_n) Cauchy-Folge *in $\mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|z_n - z_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$.*

(d) Das Symbol $\sum_{n=1}^\infty z_n$ bezeichnet wieder die Folge (s_n) mit $s_n := \sum_{k=1}^n z_k$ und die Reihe *$\sum_{n=1}^\infty z_n$ heißt* konvergent*, falls (s_n) konvergiert. In diesem Fall gilt $\sum_{n=1}^\infty z_n := \lim_{n\to\infty} s_n$.*

(e) Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty z_n$ heißt absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |z_n|$ konvergiert.*

Satz 17.10. *Es sei* (z_n) *eine Folge in* $\mathbb{C}$.

(a) Die Folge (z_n) *konvergiert genau dann gegen* $z_0 \in \mathbb{C}$, *wenn die beiden Folgen* $(\mathrm{Re}(z_n))$ *und* $(\mathrm{Im}(z_n))$ *in* $\mathbb{R}$ *konvergieren und*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z_0) \quad \textit{sowie} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z_0)$$

gilt.

Insbesondere ist der Limes einer in $\mathbb{C}$ *konvergenten Folge eindeutig bestimmt.*

(b) Eine Folge in $\mathbb{C}$ *ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn sie konvergiert.* (Cauchy-Kriterium)

(c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *ist genau dann konvergent, wenn die beiden Reihen* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n)$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$ *in* $\mathbb{R}$ *konvergieren. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

Beweis. (a) Wir setzen $x_n := \mathrm{Re}(z_n)$ und $y_n := \mathrm{Im}(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nun gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n - x_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2} \le \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = |z_n - z_0|$$

und genauso $|y_n - y_0| \le |z_n - z_0|$. Wenn also (z_n) gegen z_0 konvergiert, so haben wir auch $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Haben wir umgekehrt diese beiden Grenzwertbeziehungen, so gilt

$$\begin{aligned} |z_n - z_0| &= \sqrt{\mathrm{Re}(z_n - z_0)^2 + \mathrm{Im}(z_n - z_0)^2} \\ &= \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

wegen Satz 7.6.

(b) Dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist, zeigt man genauso wie im Kapitel 10 in $\mathbb{R}$. Für die umgekehrte Implikation schätzt man mit Hilfe von Satz 17.7 (b) folgendermaßen ab:

$$|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z_m)| = |\mathrm{Re}(z_n - z_m)| \le |z_n - z_m|, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Ist nun (z_n) eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, so liefert diese Abschätzung, dass die reelle Folge $(\mathrm{Re}(z_n))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist. Dank Satz 10.13 ist diese also konvergent. Eine analoge Argumentation liefert die Konvergenz von $(\mathrm{Im}(z_n))$ und damit liefert Teil (a) die Behauptung.

(c) Die Aussage folgt aus (a), da Reihen auch nur Folgen sind. $\square$

Mit Hilfe der Überlegungen aus dem vorhergehenden Satz lassen sich viele Resultate über reelle Folgen ins Komplexe übertragen. Als prominentes Beispiel beweisen wir eine komplexe Version des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

Satz 17.11. *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei (z_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ und $C \geq 0$ so, dass $|z_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Es gilt $|\mathrm{Re}(z_n)| \leq |z_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist auch die reelle Folge $(\mathrm{Re}(z_n))$ beschränkt. Nach dem reellen Satz von Bolzano-Weierstraß in Satz 10.1 hat diese eine konvergente Teilfolge $(\mathrm{Re}(z_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. Mit einem analogen Argument ist $(\mathrm{Im}(z_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{R}$ und wir bekommen eine erneute Teilfolge $(z_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$, so dass $(\mathrm{Im}(z_{n_{k_\ell}}))_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Als Teilfolge der konvergenten Folge $(\mathrm{Re}(z_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ ist auch die Folge $(\mathrm{Re}(z_{n_{k_\ell}}))_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergent. Schließlich bedeutet das mit Satz 17.10 (a), dass $(z_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{C}$ konvergente Folge ist und wir haben unsere konvergente Teilfolge von (z_n) gefunden. $\square$

Viele Sätze lassen sich wortwörtlich wie im Reellen beweisen. Das führen wir am Cauchy-Kriterium und an der Dreiecksungleichung für Reihen vor.

Satz 17.12. *Es sei (z_n) eine komplexe Folge. Dann gilt:*

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} z_k\Big| < \varepsilon \quad \textit{für alle } m > n \geq n_0.$$

(Cauchy-Kriterium)

(b) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolut konvergent, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergent und es gilt

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \quad \text{(verallgemeinerte Dreiecksungleichung)}$$

Beweis. (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $s_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$ die n-te Partialsumme. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n < m$. Dann gilt

$$|s_m - s_n| = \Big|\sum_{k=n+1}^{m} z_k\Big|.$$

Die Behauptung folgt damit direkt aus dem Cauchy-Kriterium für komplexe Folgen in Satz 17.10 (b).

(b) Wir verwenden das Cauchy-Kriterium aus Teil (a). Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es dank der absoluten Konvergenz ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=n+1}^{m} |z_k| < \varepsilon$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n > n_0$ gilt. Mit der Dreiecksungleichung gilt dann sofort für alle $m > n > n_0$ auch

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} z_k\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |z_k| < \varepsilon.$$

Also ist die Reihe nach dem Cauchy-Kriterium konvergent.

Setzen wir $s_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$ und $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir wie oben mit der Dreiecksungleichung $|s_n| \leq \sigma_n$ für alle n und damit im Grenzwert $n \to \infty$

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} z_k\Big| = \big|\lim_{n\to\infty} s_n\big| = \lim_{n\to\infty} |s_n| \leq \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|. \qquad \square$$

Schließlich übertragen sich auch unsere Konvergenzkriterien. Dies fassen wir im folgenden Satz zusammen.

Satz 17.13. *Es sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und (a_n) eine reelle Folge.*

(a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergent, so gilt $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

(b) Gilt $|z_n| \leq a_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolut. (Majorantenkriterium)

(c) Ist die Folge $(\sqrt[n]{|z_n|})$ unbeschränkt, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Ist $(\sqrt[n]{|z_n|})$ beschränkt, so ist die Reihe absolut konvergent, wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$ ist und divergent, wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$ ist. (Wurzelkriterium)

(d) Gilt $z_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ist die Folge $(|z_{n+1}/z_n|)$ beschränkt und gilt $\limsup_{n\to\infty} |z_{n+1}/z_n| < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolut konvergent. Gilt dagegen $|z_{n+1}/z_n| \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. (Quotientenkriterium)

Die Beweise für diesen Satz lassen sich entweder direkt auf die entsprechenden Resultate über reelle Reihen zurückspielen oder direkt aus dem Reellen übertragen. Gleiches gilt für den folgenden Satz über das wie in $\mathbb{R}$ definierte Cauchy-Produkt.

Definition 17.14. *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ zwei komplexe Reihen. Dann heißt die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}$$

das Cauchy-Produkt *dieser beiden Reihen.*

Satz 17.15. *Es seien* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *absolut konvergente Reihen in* $\mathbb{C}$. *Dann ist auch das Cauchy-Produkt der beiden Reihen absolut konvergent und es gilt*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}.$$

Da sich also herausstellt, dass unsere Ergebnisse über Reihen in großen Teilen auch im Komplexen gelten, ist es natürlich, auch über Potenzreihen mit komplexen Variablen und Koeffizienten nachzudenken. Das wird sich als eine sehr fruchtbare Idee – auch für zukünftige Semester – erweisen. So können wir z. B. problemlos die Exponentialfunktion für komplexe Zahlen definieren. Tatsächlich kann man leicht feststellen, dass der Satz von Hadamard 16.2 genauso in $\mathbb{C}$ funktioniert.

Beispiel 17.16. (a) Wir betrachten zunächst die komplexe geometrische Reihe, also die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Für $z = 1$ ist diese Reihe bekanntermaßen nicht konvergent und wie in Satz 3.12 gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

und dieser Ausdruck konvergiert für $N \to \infty$, falls $|z| < 1$. In diesem Fall ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1.$$

Die komplexen Zahlen mit $|z| < 1$ sind genau die, die innerhalb des Kreises mit Radius 1 um den Ursprung in der komplexen Zahlenebene liegen. Nun wird auch der bisher u.U. eher verwirrende Begriff Konvergenz*radius* klar.

(b) Der Kandidat für die Definition einer komplexen Exponentialfunktion ist natürlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Tatsächlich wissen wir schon, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} {|z|^n}/{n!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, denn $|z|$ ist ja reell. Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} {z^n}/{n!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ sogar absolut konvergent. Das rechtfertigt die nun folgende Definition.

Definition 17.17. *Die Funktion*

$$\mathrm{e}^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

heißt (komplexe) Exponentialfunktion*.*

Wir sammeln einige Eigenschaften dieser Funktion.

Satz 17.18. *(a) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2}$.*

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{e}^z \neq 0$ und $1/\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{-z}$.

(c) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)$. (Euler-Formel)

(d) Ist $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cos(y) + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \sin(y)$.

(e) Für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Formel von De Moivre*:*

$$\cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt) = \big(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)\big)^n.$$

Beweis. (a) Genau wie im Beweis von Satz 15.7 (b) berechnet man dies über das Cauchy-Produkt.

(b) Aus (a) folgt sofort für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{z-z} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{-z},$$

und damit $\mathrm{e}^z \neq 0$ sowie $\mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^z}$.

(c) Für alle $t \in \mathbb{R}$ können wir wegen der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe die Summation umordnen und zunächst über alle geraden n und dann über alle ungeraden n summieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t). \end{aligned}$$

(d) Es ist mit (a) und (c)

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cos(y) + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \sin(y).$$

(e) Auch dieses folgt sofort aus (c) und (a), denn

$$\cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big)^n = \big(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)\big)^n. \qquad \square$$

Auf gleiche Weise kann man auch den Sinus und den Cosinus für komplexe Argumente definieren, denn auch deren Reihen haben Konvergenzradius unendlich.

Definition 17.19. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ definieren wir den* Cosinus *und den* Sinus *durch*

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \qquad \textit{und} \qquad \sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Teil III.

Funktionen

18. Grenzwerte bei Funktionen

In diesem Abschnitt übertragen wir Begriffe, die wir im Kontext der Folgen kennen gelernt haben, auf Funktionen von $D \subseteq \mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$. In diesem Zusammenhang sei an die Konvention zum Buchstaben $\mathbb{K}$ von Seite 111 erinnert.
Wir beginnen mit dem Monotoniebegriff. Dieser funktioniert naturgemäß nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definition 18.1. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt*

(a) monoton wachsend*, falls für alle $x, y \in I$ mit $x \leq y$ gilt, dass $f(x) \leq f(y)$ ist.*

(b) monoton fallend*, falls für alle $x, y \in I$ mit $x \leq y$ gilt, dass $f(x) \geq f(y)$ ist.*

(c) streng monoton wachsend*, falls für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt, dass $f(x) < f(y)$ ist.*

(d) streng monoton fallend*, falls für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt, dass $f(x) > f(y)$ ist.*

(e) (streng) monoton*, falls sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.*

Definition 18.2. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ eine Menge. Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{K}$ heißt* Häufungspunkt *von D, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in D$ existiert mit*

$$x \in U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Um ein bisschen mehr Vorstellung von diesem Begriff zu bekommen, betrachten wir zwei äquivalente Formulierungen dieser Definition.

Satz 18.3. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $x_0 \in \mathbb{K}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) Die Zahl x_0 ist ein Häufungspunkt von D.

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ ist die Menge $D \cap U_\varepsilon(x_0)$ unendlich.

(c) Es existiert eine Folge (x_n) in D mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gegen x_0 konvergiert.

Beweis$^{(*)}$. **„(a)⇒(c)"** Sei x_0 ein Häufungspunkt von D. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert dann nach der Definition des Häufungspunktes ein $x_n \in D$ mit $x_n \in U_{1/n}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ zusammengenommen bilden diese eine Folge (x_n) in D mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $|x_n - x_0| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus letzterem folgt schließlich auch, dass (x_n) gegen x_0 konvergiert und wir haben damit die in (c) geforderte Folge konstruiert.

„(c)⇒(b)" Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gegen x_0 konvergiert. Weiter sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gilt $x_n \in U_\varepsilon(x_0)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist die Menge $D \cap U_\varepsilon(x_0)$ unendlich.

„(b)⇒(a)" Sei $\varepsilon > 0$. Dann hat nach Voraussetzung $D \cap U_\varepsilon(x_0)$ unendlich viele Elemente. Insbesondere gibt es darin ein Element, das nicht x_0 ist. Damit ist x_0 ein Häufungspunkt von D. □

Mit Hilfe dieser Umformulierungen kann man sich leicht die folgenden Beispiele veranschaulichen.

Beispiel 18.4. (a) Ist D endlich, so hat D keinen Häufungspunkt.

(b) Ist $D = (0, 1]$, so ist die Menge aller Häufungspunkte von D genau das Intervall $[0, 1]$.

(c) Ist $D = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, so ist genau 0 ein Häufungspunkt von D.

Die Definition des Grenzwertes einer Funktion an einer Stelle spielen wir auf den Konvergenzbegriff bei Folgen zurück.

Definition 18.5. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $f : D \to \mathbb{K}$ eine Funktion sowie $a \in \mathbb{K}$.*

(a) Ist x_0 ein Häufungspunkt von D, so sagen wir, dass f für x gegen x_0 den Grenzwert *a hat, wenn für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert und für die $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, die Folge $(f(x_n))$ gegen a konvergiert. Wir schreiben dafür*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

(b) Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von $D_+ := \{x \in D : x > x_0\}$, so hat f für x gegen x_0 den rechtsseitigen Grenzwert *a, wenn für jede Folge (x_n) in D_+, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(x_n))$ gegen a konvergiert. Wir schreiben*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = a.$$

(c) Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von $D_- := \{x \in D : x < x_0\}$, so hat f für x gegen x_0 den linksseitigen Grenzwert *a, wenn für jede Folge (x_n) in D_-, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(x_n))$ gegen a konvergiert. Wir schreiben*

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = a.$$

Bemerkung 18.6. (a) Eine besondere Betonung beim Lesen dieser Definition sollte jeweils auf den Worten „*jede* Folge“ liegen.

(b) Wie bei den Grenzwerten für Folgen gibt es auch hier die alternativen Schreibweisen

$$f(x) \to a\ (x \to x_0), \quad f(x) \to a\ (x \to x_0+) \text{ bzw. } f(x) \to a\ (x \to x_0-).$$

(c) Man beachte die Einschränkung, dass links- und rechtsseitige Grenzwerte nur bei auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ definierten Funktionen Sinn ergeben. In $\mathbb{C}$ gibt es einfach kein „rechts“ und „links“.

(d) In den folgenden Sätzen und Definitionen werden wir alle Aussagen jeweils nur für Grenzwerte von Funktionen machen. Diese gelten dann sinngemäß auch für den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert, wenn dieser sinnvoll ist.

Die Subtilitäten dieser Definition verdeutlichen wir uns an einem Beispiel.

Beispiel 18.7. (a) Wir setzen $D = (0, 1]$ und

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 1, \quad \text{falls} & \frac{1}{2} \le x < 1, \\ 7, & x = 1. \end{cases}$$

Wie wir schon im vorherigen Beispiel gesehen haben, ist jedes $x \in [0, 1]$ ein Häufungspunkt von D. Wir können also Grenzwertbetrachtungen in allen diesen Punkten anstellen. Wir untersuchen das Verhalten in den interessanten Stellen 0, $1/2$ und 1. Es gilt

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

Wir begründen die erste Aussage. Es sei (x_n) eine beliebige Nullfolge in D ($x_n \neq 0$ gilt sowieso, da $0 \notin D$). Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n < 1/2$ für alle $n \ge n_0$ gilt. Für diese n ist dann $f(x_n) = x_n^2$. Nach den Grenzwertsätzen für Folgen konvergiert die Folge (x_n^2) gegen Null, womit $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ gezeigt ist. Den zweiten Limes bestimmt man analog.

Was ist aber nun mit $\lim_{x \to 1/2} f(x)$? Dieser Grenzwert existiert nicht, denn es gilt

$$\lim_{n \to \infty} f\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} f\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\Big) = 1.$$

Nach unserer Definition müsste der Grenzwert aber für jede Folge, die gegen $1/2$ konvergiert, ohne $1/2$ zu treffen, der selbe sein.

Das Problem tritt hier auf, weil wir uns einmal von links und einmal von rechts an die kritische Stelle $1/2$ angenähert haben. Genau dafür haben wir aber die Begriffe des links- bzw. rechtsseitigen Grenzwertes. Tatsächlich zeigt man wie oben, dass diese existieren und dass gilt

$$\lim_{x\to 1/2+} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1/2-} f(x) = \frac{1}{4}.$$

(b) Ohne es so zu nennen, haben wir schon einmal solche Grenzwerte berechnet. Satz 7.6 können wir nun folgendermaßen formulieren:

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[p]{x} = \sqrt[p]{x_0} \quad \text{für alle } p \in \mathbb{N} \text{ und alle } x_0 \in [0,\infty).$$

Wir beweisen ein alternatives Kriterium, wann $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ gilt.

Satz 18.8. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D sowie $f : D \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass*

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \textit{für alle } x \in D \textit{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta \tag{18.1}$$

gilt.

Beweis. Wir beweisen zunächst „$\Longrightarrow$“. Dazu nehmen wir an, die ε-Bedingung sei falsch, d. h. es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass (18.1) für kein $\delta > 0$ gilt. Für dieses ε_0 gibt es also zu jedem $\delta > 0$ ein $x = x(\delta) \in D$, für das $0 < |x - x_0| < \delta$, aber $|f(x) - a| \geq \varepsilon_0$ gilt. Wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ speziell $\delta = 1/n$, so erhalten wir eine Folge (x_n) in D mit

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{aber} \quad |f(x_n) - a| \geq \varepsilon_0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das bedeutet, dass die Folge (x_n) gegen x_0 konvergiert und $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, aber $f(x_n)$ nicht gegen a konvergiert. Das ist ein Widerspruch zu $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

Zum Beweis von „$\Longleftarrow$“ sei (x_n) eine Folge in D, die gegen x_0 konvergiert, mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir müssen nun zeigen, dass die Folge $(f(x_n))$ konvergiert und den Limes a hat. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung existiert dann ein $\delta > 0$, so dass (18.1) gilt. Weiter ergibt sich aus der Konvergenz der Folge (x_n) die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $0 < |x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit haben wir aber nach (18.1) für alle $n \geq n_0$

$$|f(x_n) - a| < \varepsilon$$

und sind damit fertig. □

Satz 18.9. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{K}$ eine Funktion und x_0 ein Häufungspunkt von D. Weiter sei für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert und für die $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, die Folge $(f(x_n))$ konvergent. Dann existiert $\lim_{x \to x_0} f(x)$.*

Beweis. Es seien (x_n) und (y_n) Folgen in D, welche die Voraussetzungen des Satzes erfüllen. Wir müssen nun zeigen, dass

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(y_n)$$

gilt. Dazu definieren wir eine Folge (z_n) durch $z_{2n-1} = x_n$ und $z_{2n} = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. es ist

$$(z_1, z_2, z_3, \dots) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots).$$

Dann gilt auch bei dieser Folge $z_n \in D$ und $z_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (z_n) konvergiert gegen x_0. Also existiert nach Voraussetzung der Limes $a := \lim_{n \to \infty} f(z_n)$. Die Folgen $(f(x_n))$ und $(f(y_n))$ sind aber Teilfolgen von $(f(z_n))$, also konvergieren diese nach Satz 9.7 (b) gegen den selben Grenzwert, d. h.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a = \lim_{n \to \infty} f(y_n). \qquad \square$$

Auch für Grenzwerte von Funktionen können wir Grenzwertsätze formulieren.

Satz 18.10. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Desweiteren seien drei Funktionen $f, g, h : D \to \mathbb{K}$ gegeben, so dass die Grenzwerte*

$$a := \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \text{und} \quad b := \lim_{x \to x_0} g(x)$$

existieren. Dann gilt:

(a) Die Grenzwerte für $x \to x_0$ von $f+g$, fg, $|f|$, $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ und $\overline{f}$ existieren und es gilt

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = a + b, \qquad \lim_{x \to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = ab, \qquad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$$
$$\lim_{x \to x_0} \mathrm{Re}\big(f(x)\big) = \mathrm{Re}(a), \qquad \lim_{x \to x_0} \mathrm{Im}\big(f(x)\big) = \mathrm{Im}(a), \qquad \lim_{x \to x_0} \overline{f(x)} = \overline{a}.$$

(b) Ist $b \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$, so dass $|g(x)| \geq {}^{|b|}\!/_{2}$ für alle $x \in (D \cap U_\delta(x_0)) \setminus \{x_0\}$ ist. Wir können also die Funktion

$$\frac{f}{g} : \big(D \cap U_\delta(x_0)\big) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

definieren. Für diese existiert dann der Limes für x gegen x_0 mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}.$$

(c) *Sind f, g reellwertig und gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in (D \cap U_\delta(x_0)) \setminus \{x_0\}$ die Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ gilt, so folgt $a \leq b$.*

(d) *Sind f, g, h reellwertig, $a = b$ und gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in (D \cap U_\delta(x_0)) \setminus \{x_0\},$$

so existiert auch der Limes von h für $x \to x_0$ und es gilt $\lim_{x \to x_0} h(x) = a$.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich direkt aus den Grenzwertsätzen für Folgen in Satz 7.3. Nur die erste Aussage in (b) wollen wir kurz beweisen.
Es sei $\varepsilon := |b|/2 > 0$. Da $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$ gilt, existiert dann nach Satz 18.8 ein $\delta > 0$ mit $|g(x) - b| < \varepsilon = |b|/2$ für alle $x \in (D \cap U_\delta(x_0)) \setminus \{x_0\}$. Also gilt für alle diese x mit der Dreiecksungleichung

$$|b| = |b - g(x) + g(x)| \leq |b - g(x)| + |g(x)| \leq \frac{|b|}{2} + |g(x)|,$$

d. h. $|g(x)| \geq |b|/2$. □

Wir wollen im Folgenden auch untersuchen, wie sich Funktionen „im Unendlichen", also für sehr große (bzw. kleine) x verhalten. Um den dazu erforderlichen „$\lim_{x \to \infty}$" zu definieren, greifen wir auf den Begriff einer bestimmt divergenten Folge aus Definition 6.9 zurück. Dieser ermöglicht es außerdem zu formulieren, dass $f(x)$ für $x \to x_0$ gegen unendlich geht. Wir führen beides in den folgenden zwei Definitionen sauber ein.

Definition 18.11. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein Häufungspunkt von D. Wir schreiben*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \big(\text{bzw. } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty\big),$$

wenn für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert und für die $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, die Folge $(f(x_n))$ bestimmt gegen ∞ (bzw. $-\infty$) divergiert.

Definition 18.12. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach oben (bzw. unten) beschränkt, $f : D \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, bzw. $a \in \mathbb{C}$. Wir sagen*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \quad \big(\text{bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = a\big),$$

wenn für jede Folge (x_n) in D, die bestimmt gegen ∞ (bzw. $-\infty$) divergiert, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$ gilt.

Beispiel 18.13. (a) Es gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

(b) Wir untersuchen abermals die Exponentialfunktion und interessieren uns für ihr Verhalten für sehr große und sehr kleine $x \in \mathbb{R}$. Sei zunächst $x > 0$ und $p \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $x > 0$ ist, gilt unter Weglassen aller Summanden bis auf einen:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Das liefert

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^p} \geq \frac{x}{(p+1)!}, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^p} = \infty.$$

Das bedeutet, dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenzfunktion. Insbesondere gilt also

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty.$$

Wir untersuchen noch das Verhalten für x gegen minus unendlich. Sei dazu (x_n) eine bestimmt gegen $-\infty$ divergente Folge. Dann divergiert die Folge $(-x_n)$ bestimmt gegen ∞. Da für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{e}^{x_n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x_n}}$$

gilt, und die Folge (e^{-x_n}) nach unseren obigen Überlegungen bestimmt nach ∞ divergiert, folgt mit Hilfe der Übungsaufgabe 6.10 sofort

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

19. Stetigkeit

Definition 19.1. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $x_0 \in D$. Eine Funkion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt* stetig in x_0*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ gibt, so dass*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

gilt. Ansonsten nennt man sie unstetig *in x_0.*
Weiter heißt f stetig auf D*, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist. Wir setzen*

$$\mathrm{C}(D, \mathbb{K}) := \{f : D \to \mathbb{K} : f \text{ stetig auf } D\}.$$

Ist aus dem Zusammenhang klar, ob reell- oder komplexwertige Funktionen betrachtet werden, so wird auch oft einfach $\mathrm{C}(D)$ geschrieben.

Wir können stetige Funktionen auch äquivalent mit Hilfe von Folgen charakterisieren:

Satz 19.2. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $f : D \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert, auch die Folge $(f(x_n))$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt* (Folgenstetigkeit)*.*

Beweis. Sei zunächst f in x_0 stetig, (x_n) eine Folge in D, die gegen x_0 konvergiert und $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach der Definition der Stetigkeit ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Da (x_n) gegen x_0 konvergiert, gibt es nun weiter ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Also gilt für all diese n auch $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ und wir haben Konvergenz der Folge $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ gezeigt.
Es bleibt die umgekehrte Implikation zu zeigen. Dazu nehmen wir an, f wäre nicht stetig in x_0. Das bedeutet (vgl. Abschnitt 1.2): es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass es für jedes $\delta > 0$ ein $x = x(\delta) \in D$ gibt mit $|x - x_0| < \delta$, aber $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Insbesondere gilt das für alle δ der Form $1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Also gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < 1/n$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Wir betrachten nun die Folge (x_n). Wegen $|x_n - x_0| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert diese Folge gegen x_0. Andererseits bleibt die Folge $(f(x_n))$ aber immer mindestens ε_0 von $f(x_0)$ entfernt, im Widerspruch zur Voraussetzung, nach der $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergieren muss. $\square$

Übungsaufgabe 19.3. Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $f : D \to \mathbb{K}$ eine Funktion sowie $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Dann ist f in x_0 genau dann stetig, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

Satz 19.4. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f, g : D \to \mathbb{K}$ seien stetig in $x_0 \in D$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a) Die Funktionen λf, $f + g$, fg und $|f|$ sind stetig in x_0. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind auch $\overline{f}$, $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ stetig in x_0.

(b) Ist $x_0 \in \widetilde{D} := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$, so ist die Funktion $f/g : \widetilde{D} \to \mathbb{K}$ stetig in x_0.

(c) Ist $h : f(D) \to \mathbb{K}$ stetig in $f(x_0)$, so ist $h \circ f : D \to \mathbb{K}$ stetig in x_0.

Beweis. Die Beweise von (a) und (b) ergeben sich aus der Kombination von Satz 19.2 und den entsprechenden Aussagen in Satz 7.3. Wir führen das nur exemplarisch für die Summe $f + g$ aus. Sei (x_n) eine Folge in D, die gegen x_0 konvergiert. Da f und g in x_0 stetig sind, konvergieren dann nach Satz 19.2 auch die Folgen $(f(x_n))$ und $(g(x_n))$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0).$$

Damit ist nach Satz 7.3(b) auch die Folge $(f(x_n) + g(x_n))$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \big(f(x_n) + g(x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x_0) + g(x_0),$$

womit die Stetigkeit von $f + g$ in x_0 nach Satz 19.2 bewiesen ist.
Zum Nachweis von (c) sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Dann folgt aus der Stetigkeit von f mit Satz 19.2 wieder $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$. Der selbe Satz zusammen mit der Stetigkeit von h in $f(x_0)$ liefert uns dann $h(f(x_n)) \to h(f(x_0))$ $(n \to \infty)$. Also ist wiederum nach Satz 19.2 die Funktion $h \circ f$ stetig in x_0. □

Wir wollen nun die Stetigkeit einer ganzen Klasse von Funktionen auf einmal zeigen, nämlich all derer, die durch eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius gegeben sind.

Satz 19.5. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ (dabei ist $r = \infty$ zugelassen). Setzen wir $D := \{x \in \mathbb{K} : |x| < r\}$, bzw. $D := \mathbb{K}$, falls $r = \infty$, so ist die Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in D$, stetig auf D.*

Beweis. Es sei $x_0 \in D$ beliebig und $\varrho \in \mathbb{R}$ sei so gewählt, dass $|x_0| < \varrho < r$ gilt. Ist $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| \leq \varrho$, so ist

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^n - x_0^n) \tag{19.1}$$

und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist (vgl. Satz 3.11 (c))

$$\begin{aligned} \left|a_n(x^n - x_0^n)\right| &= \left|a_n(x-x_0)\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}\right| \le |a_n||x-x_0|\sum_{k=0}^{n-1}|x|^k|x_0|^{n-1-k} \\ &\le |a_n||x-x_0|\sum_{k=0}^{n-1}\varrho^{n-1} = |a_n||x-x_0|n\varrho^{n-1}, \end{aligned} \tag{19.2}$$

da sowohl $|x| \le \varrho$ als auch $|x_0| \le \varrho$ gilt.
Wir zeigen als nächstes, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|n\varrho^{n-1}$ konvergiert. Zur Anwendung des Wurzelkriteriums berechnen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|n\varrho^{n-1}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}\,\sqrt[n]{n}\varrho}{\sqrt[n]{\varrho}} = \varrho \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt Übungsaufgabe 10.11 verwendet und dabei ausgenutzt, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varrho} = 1$ gilt.
Aus dem Satz von Hadamard folgern wir im Fall $r = \infty$, dass $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ ist und für $r < \infty$ erhalten wir $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/r$. Zusammen ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|n\varrho^{n-1}} \le \frac{\varrho}{r} < 1,$$

die Reihe ist also nach dem Wurzelkriterium konvergent. Wir setzen

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|n\varrho^{n-1}.$$

Damit ist die Reihe über $a_n(x^n - x_0^n)$ absolut konvergent und wir können mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung abschätzen:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x^n - x_0^n)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x^n - x_0^n)| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x-x_0|n\varrho^{n-1} = |x-x_0|s. \end{aligned}$$

Wir haben also die Ungleichungskette

$$0 \le |f(x) - f(x_0)| \le s|x - x_0|. \tag{19.3}$$

Mit dem Sandwich-Theorem für Funktionsgrenzwerte (siehe Satz 18.10 (d)) folgt daraus $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ und damit ist f nach Übungsaufgabe 19.3 stetig in x_0. Da x_0 beliebig war, ist f stetig auf ganz D. □

Beispiel 19.6. (a) Dank Satz 19.5 wissen wir nun, dass alle Polynome, die Exponentialfunktion, Sinus und Cosinus jeweils auf ganz $\mathbb{C}$, bzw. $\mathbb{R}$, stetige Funktionen sind.

(b) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Zum Nachweis dieser Aussage überlegen wir uns, dass für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} =: g(x)$$

und die Potenzreihe, die g definiert, hat den Konvergenzradius unendlich (nachrechnen!). Also ist diese Funktion in 0 stetig und es gilt, da g mit der von uns untersuchten Funktion für alle $x \neq 0$ übereinstimmt,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 1.$$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

ist also auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Man nennt f die *stetige Fortsetzung* der Funktion $x \mapsto {}^{\sin(x)}\!/_{x}$.

(c) Genauso wie eben kann man den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

bestimmen, denn es ist für alle $x \neq 0$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\Big) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

und auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius ∞.

Zum Abschluss dieses Abschnittes können wir aus der Stetigkeit der Funktionen, die durch Potenzreihen gegeben sind, noch einen wichtigen, überraschenden Satz folgern. Er besagt, dass zwei Funktionen, die durch Potenzreihen gegeben sind und die auf einer Nullfolge von Punkten übereinstimmen, schon identisch sein müssen.

Satz 19.7 (Identitätssatz für Potenzreihen). *Gegeben seien zwei Potenzreihen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *mit Konvergenzradien* $r_a > 0$*, bzw.* $r_b > 0$*. Wir setzen* $R := \min\{r_a r_b\} > 0$ *und*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ |x| < r_a, \quad \text{und} \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \ |x| < r_b.$$

Gibt es dann eine Folge (x_k) *in* $U_R(0)$ *mit* $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$*, sowie* $x_k \neq 0$ *und* $f(x_k) = g(x_k)$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*, so gilt* $a_n = b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*, d. h. es ist* $f(x) = g(x)$ *für alle* $|x| < R$*.*

Beweis(*). Wir führen den Nachweis, dass $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, induktiv. Für den Induktionsanfang ($n = 0$) überlegen wir uns, dass f nach Satz 19.5 in 0 stetig ist, also gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(0) = a_0$. Dasselbe folgt für g und da $f(x_k) = g(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, beobachten wir

$$a_0 = f(0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(0) = b_0.$$

Als Induktionsvoraussetzung gelte im Folgenden $a_j = b_j$ für alle $j \in \{0, \dots, n\}$. Damit gilt für alle $|x| < R$

$$f(x) - g(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} (a_j - b_j) x^j.$$

Also ergibt sich für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 = f(x_k) - g(x_k) &= \sum_{j=n+1}^{\infty} (a_j - b_j) x_k^j \\ &= (a_{n+1} - b_{n+1}) x_k^{n+1} + (a_{n+2} - b_{n+2}) x_k^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

und da $x_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, dürfen wir diese Gleichung durch x_k^{n+1} teilen. Das ergibt

$$\sum_{j=0}^{\infty} (a_{n+1+j} - b_{n+1+j}) x_k^j = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Setzen wir

$$\varphi(x) := \sum_{j=0}^{\infty} (a_{n+1+j} - b_{n+1+j}) x^j,$$

so ist das eine Potenzreihe mit Konvergenzradius größer oder gleich $R > 0$ (nachrechnen!) und somit ist φ wieder dank Satz 19.5 stetig in 0. Außerdem gilt $\varphi(x_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \varphi(0) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0,$$

also $a_{n+1} = b_{n+1}$. □

20. Eigenschaften stetiger Funktionen

Dieser Abschnitt enthält einen wichtigen Satz über stetige, reellwertige Funktionen nach dem anderen. Wir werden später immer wieder auf die hier entwickelten Ergebnisse zurückgreifen. Alle Sätze dieses Abschnitts gelten nur für reellwertige Funktionen. Überlegen Sie sich jeweils, warum!

Satz 20.1 (Zwischenwertsatz)**.** *Es seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig auf* $[a, b]$. *Ist* y_0 *eine Zahl zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$, *so gibt es ein* $x_0 \in [a, b]$ *mit* $f(x_0) = y_0$.

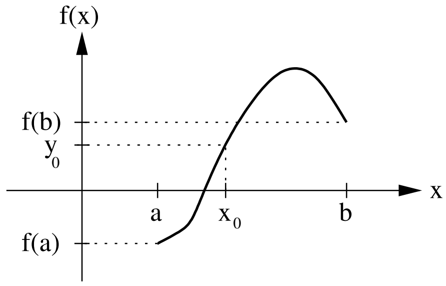

Abbildung 20.1.: Der Zwischenwertsatz

Beweis. Ist $y_0 = f(a)$ oder $y_0 = f(b)$, so sind wir bereits fertig. Wir können also annehmen, dass $y_0 \neq f(a)$ und $y_0 \neq f(b)$ gilt. Weiter nehmen wir an, dass $f(a) < f(b)$ ist, denn im Fall $f(a) = f(b)$ muss $y_0 = f(a) = f(b)$ sein, und den Fall $f(a) > f(b)$ kann man analog behandeln. Wir haben also $f(a) < y_0 < f(b)$. Setze

$$M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq y_0\}.$$

Dann gilt $a \in M$, also ist $M \neq \emptyset$. Außerdem ist M durch b nach oben beschränkt, d. h. $x_0 := \sup M$ existiert. In einem nächsten Schritt existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach Satz 2.17 ein $x_n \in M$ mit

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_0.$$

Die so entstandene Folge (x_n) konvergiert nach dem Sandwich-Theorem gegen x_0 und da für jedes Folgenglied $a \leq x_n \leq b$ gilt, haben wir damit auch gleich $x_0 \in [a, b]$.

Nun folgern wir aus der Stetigkeit von f mit Satz 19.2, dass die Folge $(f(x_n))$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt. Da außerdem jedes x_n in M gewählt war, gilt $f(x_n) \leq y_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist im Grenzwert $f(x_0) \leq y_0$. Es bleibt noch die umgekehrte Ungleichung $f(x_0) \geq y_0$ zu zeigen.
Dazu beobachten wir zunächst, dass sogar $x_0 \in [a, b)$ gelten muss, denn $x_0 = b$ kann wegen $f(x_0) \leq y_0$ und $f(b) > y_0$ nicht sein. Nun nehmen wir an, es wäre $f(x_0) < y_0$. Dann ist $\varepsilon := y_0 - f(x_0) > 0$. Nach der Definition der Stetigkeit gibt es zu diesem ε ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in [a, b] \cap U_\delta(x_0)$$

gilt. Sei nun ein $z \in [a, b]$ mit $x_0 < z < x_0 + \delta$ gewählt. Das geht, da $x_0 < b$ ist. Dann gilt

$$f(z) - f(x_0) \leq |f(z) - f(x_0)| < \varepsilon = y_0 - f(x_0).$$

Also ist $f(z) < y_0$ und damit $z \in M$. Da x_0 das Supremum von M ist, muss dann $z \leq x_0$ gelten, was ein Widerspruch ist.
Zusammen ist damit $f(x_0) = y_0$. □

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satz ist die folgende.

Satz 20.2 (Nullstellensatz von Bolzano)**.** *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in \mathrm{C}([a, b], \mathbb{R})$ mit $f(a)f(b) < 0$ gegeben. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.*

Beweis. Wir müssen uns nur klarmachen, dass die Voraussetzung $f(a)f(b) < 0$ bedeutet, dass entweder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ oder $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ ist. Dann folgt die Behauptung sofort aus Satz 20.1. □

Wir können dieses Ergebnis nun anwenden, um das Bild der reellen Exponentialfunktion zu bestimmen.

Beispiel 20.3. Wir zeigen, dass für die Exponentialfunktion gilt:

$$\exp(\mathbb{R}) = \{\mathrm{e}^x : x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty).$$

Wir wissen schon (vgl. Satz 15.7 (c)), dass $\mathrm{e}^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, d. h. es ist $\exp(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$. Es bleibt die umgekehrte Inklusion zu zeigen.
Sei dazu $y_0 \in (0, \infty)$. Wir wissen aus Beispiel 18.13 (b), dass

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$$

gilt. Also gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $\mathrm{e}^a < y_0$ gilt und ein $b \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{e}^b > y_0$. Da damit zwangsläufig $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ gilt und die Exponentialfunktion nach Satz 15.7 (e) streng monoton wachsend ist, muss $a < b$ gelten. Da die Exponentialfunktion nach Satz 19.5 auch auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, sind nun alle Voraussetzungen von Satz 20.1 erfüllt. Es gibt also ein $x_0 \in (a, b)$ mit $\mathrm{e}^{x_0} = y_0$. Damit ist $y_0 \in \exp(\mathbb{R})$ und wir sind fertig.

Definition 20.4. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt* beschränkt*, falls die Menge $f(D)$ beschränkt ist, d. h. falls ein $C \geq 0$ existiert, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in D$ gilt.*

Definition 20.5. *(a) Eine Teilmenge D von $\mathbb{K}$ heißt* abgeschlossen*, wenn für jede Folge (x_n) in D, die in $\mathbb{K}$ konvergiert, $\lim_{n\to\infty} x_n \in D$ gilt.*

(b) Eine Teilmenge von $\mathbb{K}$ heißt kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Warnung 20.6. Die angegebene Definition der Kompaktheit ist für die hier betrachteten Teilmengen von $\mathbb{K}$ sehr einfach und praktisch. Der Kompaktheitsbegriff kommt in vielen Bereichen der Mathematik vor und ist oft sehr wichtig. Im Allgemeinen hat er eine andere, leider deutlich sprödere, Definition, die wir zu Beginn der Analysis II kennenlernen werden. Diese ist im Allgemeinen *nicht* äquivalent zu der hier angegebenen Definition!

Wir können nun den fundamentalen Satz formulieren, der das Verhalten stetiger Funktionen auf kompakten Mengen beschreibt.

Satz 20.7. *Es sei $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt und nicht-leer sowie $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $x_*, x^* \in K$, so dass*

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \text{für alle } x \in K$$

gilt. Insbesondere ist f beschränkt.

Man beachte, dass damit insbesondere $\max f(K) = f(x^*)$ und $\min f(K) = f(x_*)$ existieren.
In Worte gefasst lautet dieser Satz damit:

> Eine stetige Funktion auf einem Kompaktum nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Kompaktum an.

Dass dabei jede der Voraussetzungen zwingend nötig ist, veranschaulichen die folgenden Beispiele.

Beispiel 20.8. (a) Ist $K = [0, 1]$ und

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } x \in (0,1), \\ \dfrac{1}{2}, \text{ falls } x = 0 \text{ oder } x = 1, \end{cases}$$

so ist $f(K) = (0, 1)$, d. h. es gibt keine $x_*, x^* \in [0, 1]$ mit $f(x_*) = 0$ und $f(x^*) = 1$. Wir brauchen also die Stetigkeit von f.

(b) Ist $K = (0, 1]$ und $f(x) = {}^1\!/_x$ für $x \in K$, so ist f auf K stetig, aber die Menge $f(K)$ ist nicht beschränkt, da $\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$ ist. Wir brauchen also die Abgeschlossenheit von K.

(c) Ist schließlich $K = \mathbb{R}$ und $f(x) = \mathrm{e}^x$, so ist diese Funktion wieder auf ganz K stetig und K ist abgeschlossen, aber f nicht beschränkt. Wir brauchen also die Beschränktheit von K.

Beweis von Satz 20.7. Wir zeigen zunächst, dass unter den Voraussetzungen des Satzes die Funktion f beschränkt ist. Wäre dem nicht so, gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $|f(x_n)| > n$. Dank der Beschränktheit von K und dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 10.1) können wir nun aus der Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) auswählen. Da K außerdem abgeschlossen ist, muss deren Grenzwert $x_0 := \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$ ebenfalls in K liegen. Nun nutzen wir die Stetigkeit von f auf K und folgern, dass die Folge $(f(x_{n_k}))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. Insbesondere ist damit die Folge $(f(x_{n_k}))$ beschränkt, was im Widerspruch zur Konstruktion der Folge (x_n) steht, nach der $|f(x_{n_k})| > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.
Da nun $f(K)$ beschränkt ist, existieren zumindest $\sup f(K)$ und $\inf f(K)$. Wir betrachten hier nur $S := \sup f(K)$, die Untersuchung für das Infimum verläuft analog. Zu zeigen ist, dass es ein $x^* \in K$ gibt, so dass $f(x^*) = S$ gilt. Dazu stellen wir zunächst fest, dass es nach Satz 2.17 für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in f(K)$ gibt mit $S - {}^1\!/_n < y_n \leq S$. Dazu finden wir jeweils ein $x_n \in K$ mit $f(x_n) = y_n$, so dass zusammengenommen

$$S - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq S \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{20.1}$$

gilt. Die so gewonnene Folge (x_n) enthält wie jede Folge in K eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Wir setzen

$$x^* := \lim_{k \to \infty} x_{n_k}.$$

Dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von K sofort $x^* \in K$ und dank der Stetigkeit von f haben wir $f(x_{n_k}) \to f(x^*)$ für $k \to \infty$. Mit Hilfe von (20.1) und dem Sandwich-Theorem gilt außerdem

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = S.$$

Also ist $f(x^*) = S$. □

Als nächstes wollen wir zeigen, dass sich die Stetigkeit einer Funktion auf ihre Umkehrfunktion überträgt, sofern diese existiert. Wir beobachten dazu, dass für ein Intervall I, insbesondere ist auch $I = \mathbb{R}$ zugelassen, jede streng monotone Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ injektiv ist (Übungsaufgabe!). Damit ist nach Einschränkung des Wertebereichs die Funktion $f : I \to f(I)$ bijektiv und die Umkehrfunktion f^{-1} existiert in diesem Fall. Wir wissen über die Umkehrfunktion sogar noch mehr.

Lemma 20.9. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to f(I)$ eine streng monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend).*

Beweis. Wir führen den Beweis nur für wachsende Funktionen, die geklammerte Aussage beweist man analog. Es sei also f streng monoton wachsend.
Es seien $y_1, y_2 \in f(I)$ mit $y_1 < y_2$ gegeben. Dann existieren $x_1, x_2 \in I$, so dass $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ gilt. Da f streng monoton wächst und $f(x_1) < f(x_2)$ gilt, muss auch $x_1 < x_2$ sein. Damit ist aber

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2),$$

was nichts anderes bedeutet, als dass f^{-1} streng monoton wächst. $\square$

Für den Beweis des nächsten Satzes brauchen wir noch das folgende Lemma, dessen Beweis als Übung stehen bleibt.

Lemma 20.10. *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn für je zwei Zahlen $a, b \in M$ mit $a < b$ stets $[a, b] \subseteq M$ gilt.*

Satz 20.11. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f \in \mathrm{C}(I, \mathbb{R})$ sei streng monoton. Dann ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall und es gilt $f^{-1} \in \mathrm{C}(f(I), \mathbb{R})$.*

Beweis. Wir führen den Beweis wieder nur für streng wachsende Funktionen f.
Wir verwenden zunächst Lemma 20.10, um zu zeigen, dass $f(I)$ ein Intervall ist. Seien dazu $a, b \in f(I)$ mit $a < b$ und ein $y_0 \in [a, b]$ gegeben. Dann gibt es $\alpha, \beta \in I$, so dass $f(\alpha) = a$ und $f(\beta) = b$ gilt. Wir haben also

$$f(\alpha) = a \leq y_0 \leq b = f(\beta).$$

Da f stetig ist, existiert also nach dem Zwischenwertsatz 20.1 ein $x_0 \in I$ mit $f(x_0) = y_0$. Also ist $y_0 \in f(I)$ und wir erhalten $[a, b] \subseteq f(I)$.
Nun bleibt noch zu zeigen, dass f^{-1} auf $f(I)$ stetig ist. Sei dazu $y_0 \in f(I)$ und (y_n) eine Folge in $f(I)$, die gegen y_0 konvergiert. Für diese ist zu zeigen, dass die Folge $(x_n) := (f^{-1}(y_n))$ gegen $x_0 := f^{-1}(y_0)$ konvergiert. Wir nehmen dazu an, das wäre nicht so. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, für das die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U_{\varepsilon_0}(x_0)\}$ unendlich viele Elemente besitzt.
Die Bedingung $x_n \notin U_{\varepsilon_0}(x_0)$ bedeutet, dass entweder $x_n \leq x_0 - \varepsilon_0$ oder $x_n \geq x_0 + \varepsilon_0$ gilt, d. h. es ist

$$M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_0 - \varepsilon_0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_0 + \varepsilon_0\} =: M_- \cup M_+.$$

Ist $n \in M_-$, so folgt dank der Monotonie von f

$$y_n = f(x_n) \leq f(x_0 - \varepsilon_0) < f(x_0) = y_0,$$

also gilt

$$|y_n - y_0| = y_0 - y_n \geq f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon_0) > 0.$$

Ist hingegen $n \in M_+$ so folgt in gleicher Weise

$$y_n = f(x_n) \geq f(x_0 + \varepsilon_0) > f(x_0) = y_0,$$

d. h.

$$|y_n - y_0| = y_n - y_0 \geq f(x_0 + \varepsilon_0) - f(x_0) > 0.$$

Mit $\varepsilon := \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon_0), f(x_0 + \varepsilon_0) - f(x_0)\} > 0$ ist also $M \subseteq \{n \in \mathbb{N} : |y_n - y_0| \geq \varepsilon\}$ und da M unendlich ist, hat auch diese Obermenge unendlich viele Elemente. Das steht im Widerspruch dazu, dass (y_n) gegen y_0 konvergiert. Unsere Annahme lässt sich also nicht halten und es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Wir haben damit die Stetigkeit von f^{-1} in y_0 gezeigt und da $y_0 \in f(I)$ beliebig war, bedeutet das, dass f^{-1} auf $f(I)$ stetig ist. □

Auch dieser Satz liefert uns eine neue spannende Information über die Exponentialfunktion, denn von dieser wissen wir, dass sie auf $I = \mathbb{R}$ streng monoton wächst (vgl. Satz 15.7 (e)). Außerdem haben wir in Beispiel 20.3 gesehen, dass $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ gilt. Damit wissen wir, dass die Umkehrfunktion existiert. Diese bekommt einen eigenen Namen.

Definition 20.12. *Die Funktion*

$$\ln := \log := \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad \ln(x) := \log(x) := \exp^{-1}(x),\ x \in (0, \infty),$$

heißt (natürlicher) Logarithmus.

Der Logarithmus hat die folgenden Eigenschaften.

Satz 20.13. *(a) Die Funktion* $\ln$ *ist auf* $(0, \infty)$ *stetig und wächst streng monoton.*

(b) Es gilt $\ln(1) = 0$ *und* $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$.

(d) Für alle $x, y \in (0, \infty)$ *und alle* $r \in \mathbb{Q}$ *gilt*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \qquad \ln\Big(\frac{x}{y}\Big) = \ln(x) - \ln(y) \quad \textit{und} \quad \ln(x^r) = r\ln(x).$$

Beweis. (a) Ergibt sich sofort aus Satz 20.11.

(b) Ergibt sich aus Satz 15.7 (a).

(c) Ergibt sich aus Beispiel 18.13 (b).

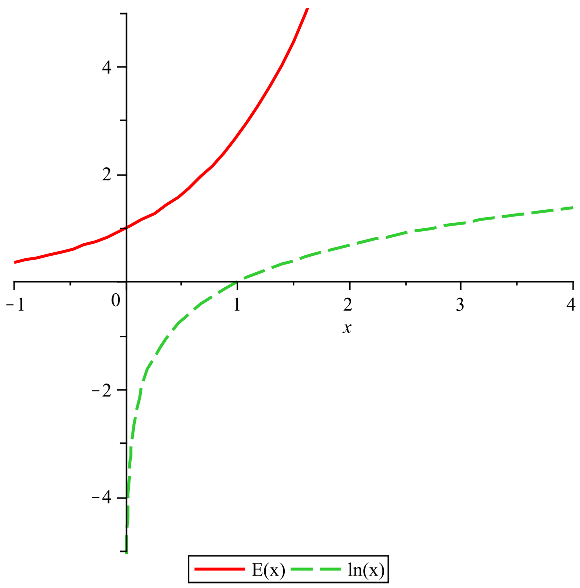

Abbildung 20.2.: Die Graphen der Exponentialfunktion und des Logarithmus

(d) Es gilt nach Satz 15.7 (b)

$$\mathrm{e}^{\ln(x)+\ln(y)} = \mathrm{e}^{\ln(x)}\mathrm{e}^{\ln(y)} = xy.$$

Also ist

$$\ln(xy) = \ln\bigl(\mathrm{e}^{\ln(x)+\ln(y)}\bigr) = \ln(x) + \ln(y).$$

Weiter gilt mit Satz 15.7 (c)

$$\mathrm{e}^{-\ln(1/x)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(1/x)}} = \frac{1}{1/x} = x.$$

Also ist

$$\ln(x) = \ln(\mathrm{e}^{-\ln(1/x)}) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right). \tag{20.2}$$

Damit können wir aus der ersten Formel sofort folgern

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

Es bleibt noch die dritte Formel. Für $r \in \mathbb{N}$ folgt diese sofort aus der ersten und für negative $r \in \mathbb{Z}$ ist $-r \in \mathbb{N}$, sodass mit Hilfe von (20.2) folgt

$$\ln(x^r) = \ln\bigl((x^{-r})^{-1}\bigr) = -\ln(x^{-r}) = -(-r)\ln(x) = r\ln(x).$$

Ist $r \in \mathbb{Q}$ und $r = m/n$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ so gilt alles zusammengenommen

$$\ln(x^r) = \ln\bigl((x^{1/n})^m\bigr) = m\ln(x^{1/n}) = nr\ln(x^{1/n}) = r\ln\bigl((x^{1/n})^n\bigr) = r\ln(x).$$

$\square$

Sehen wir uns die dritte Rechenregel in (d) noch einmal an, so folgt daraus insbesondere für alle $a \in (0, \infty)$ und alle $r \in \mathbb{Q}$ die Beziehung $a^r = \mathrm{e}^{\ln(a^r)} = \mathrm{e}^{r \ln(a)}$. Diese verwenden wir nun um die allgemeine Potenzfunktion zu definieren.

Definition 20.14. *Für alle $a \in (0, \infty)$ und alle $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die* allgemeine Potenz *durch*

$$a^x := \mathrm{e}^{x \cdot \ln(a)}.$$

Wir sammeln Eigenschaften dieser Funktion.

Satz 20.15. *Es sei $a \in (0, \infty)$. Dann ist die Funktion $x \mapsto a^x$ stetig auf $\mathbb{R}$ und es gelten die bekannten Rechenregeln für Potenzen wie beispielsweise*

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Beweis. Wir beobachten zunächst, dass die beiden Funktionen $x \mapsto x \cdot \ln(a)$ und exp jeweils auf $\mathbb{R}$ stetig sind, also ist auch die Potenzfunktion als deren Verkettung nach Satz 19.4(c) stetig.
Die Rechenregeln lassen sich alle direkt aus jenen für die Exponentialfunktion ableiten. Wir behandeln deshalb hier nur beispielhaft

$$a^{x+y} = \mathrm{e}^{(x+y)\ln(a)} = \mathrm{e}^{x \ln(a) + y \ln(a)} = \mathrm{e}^{x \ln(a)} \mathrm{e}^{y \ln(a)} = a^x a^y. \qquad \square$$

21. Funktionenfolgen und -reihen

In diesem Abschnitt betrachten wir Folgen, deren Glieder, bzw. Reihen, deren Summanden selbst wieder Funktionen sind. Dabei verwenden wir weiterhin die Absprache von Seite 111, dass der Buchstabe $\mathbb{K}$ jeweils für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ steht. Wir beginnen mit den folgenden Begriffen

Definition 21.1. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n : D \to \mathbb{K}$ gegeben.*

(a) Wir bezeichnen mit (f_n) die Funktionenfolge *$(f_1, f_2, f_3, \dots)$ und sagen, die Funktionenfolge* konvergiert punktweise*, wenn für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))$ in $\mathbb{K}$ konvergiert. In diesem Fall heißt die Funktion*

$$f : \begin{cases} D \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \end{cases}$$

die Grenzfunktion *von (f_n).*

(b) Wir bezeichnen mit $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ die Funktionenreihe *$f_1 + f_2 + f_3 + \dots$. Die Funktionenreihe* konvergiert punktweise*, wenn für jedes $x \in D$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert. In diesem Fall heißt die Funktion*

$$s : \begin{cases} D \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \end{cases}$$

die Summenfunktion*.*

Beispiel 21.2. (a) Es sei $D = [0, 1]$ und

$$f_n(x) := x^n, \quad x \in [0, 1],$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Nach Satz 7.9 gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ für alle $x \in [0, 1)$ und für $x = 1$ erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Wert 1, also konvergiert (f_n) punktweise gegen die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, \text{ falls } x \in [0, 1), \\ 1, \text{ falls } x = 1. \end{cases}$$

(b) Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n(x) = a_n x^n$$

gegeben. Dann ist die aus diesen Funktionen gebildete Funktionenreihe genau die durch die Folge (a_n) gegebene Potenzreihe. Sie konvergiert also, falls der Konvergenzradius r der Potenzreihe strikt positiv ist, innerhalb des Intervalls $(-r, r)$ punktweise gegen die Funktion $s : (-r, r) \to \mathbb{K}$ mit

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Die Potenzreihen sind also ein Spezialfall von Funktionenreihen.

(c) Es sei $D := [0, \infty)$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \frac{nx}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in [0, \infty).$$

Dann gilt für alle $x \in [0, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x/n}{1/n^2 + x^2} = 0,$$

also konvergiert (f_n) in diesem Beispiel auf $[0, \infty)$ punktweise gegen $f = 0$.

Bemerkung 21.3. (a) In Epsilons ausgedrückt bedeutet punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge (f_n) auf einer Menge $D \subseteq \mathbb{K}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in D \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (21.1)$$

Eine entsprechende Aussage lässt sich natürlich auch für Funktionenreihen hinschreiben, wenn man beachtet, dass Konvergenz der Reihe nichts anderes als die Konvergenz der Folge der Partialsummen bedeutet.

(b) Schauen wir uns noch einmal unser drittes Beispiel von oben an, vgl. Abbildung 21.1, so sehen wir rechnerisch sofort ein, dass diese Funktionenfolge punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Schaut man sich jedoch für jedes $n \in \mathbb{N}$ den größten Abstand des Funktionsgraphen der Funktion f_n von der x-Achse und damit vom Graphen der Nullfunktion an, so weigert sich dieser hartnäckig gegen Null zu streben, sondern bleibt immer konstant $1/2$. Rechnerisch, sieht man das daran, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| f_n\Big(\frac{1}{n}\Big) - f\Big(\frac{1}{n}\Big) \right| = \left| \frac{n\frac{1}{n}}{1 + n^2 (\frac{1}{n})^2} - 0 \right| = \left| \frac{1}{1+1} \right| = \frac{1}{2}. \quad (21.2)$$

Wir wollen im Folgenden einen weiteren, restriktiveren Konvergenzbegriff einführen, der solch ein Konvergenzverhalten nicht mehr „toleriert“.

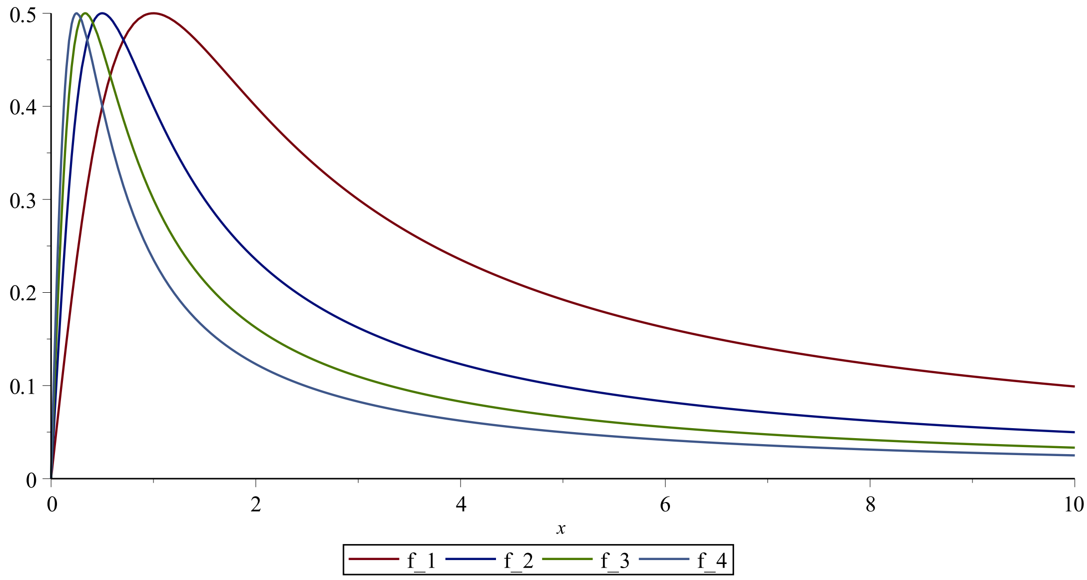

Abbildung 21.1.: Die Graphen der ersten vier Funktionen in der Funktionenfolge aus Beispiel 21.2 (c).

Definition 21.4. *Es seien $D \subseteq \mathbb{K}$, $f, s : D \to \mathbb{K}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$ gegeben.*

(a) *Die Funktionenfolge (f_n)* konvergiert gleichmäßig auf *D gegen f, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in D$$

gilt.

(b) *Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$* konvergiert gleichmäßig *auf D gegen s, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - s(x)\right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in D$$

gilt.

(c) *Die Funktionenfolge (f_n) (bzw. Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$)* konvergiert lokal gleichmäßig *auf D gegen f (bzw. s), wenn für jedes $K \subseteq D$ kompakt ihre Einschränkungen auf K gleichmäßig gegen f (bzw. s) konvergieren.*

Bemerkung 21.5. (a) Schreiben wir nun auch die Bedingung für gleichmäßige Konvergenz in Epsilontisch, so erhalten wir

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 \, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Vergleichen wir mit der entsprechenden Definition der punktweisen Konvergenz aus (21.1), so sehen wir den Unterschied: Der Quantor „$\forall x \in D$“ ist von vorne nach hinten gerutscht. Das macht einen großen Unterschied. Bei punktweiser Konvergenz dürfen wir bei der Auswahl des n_0 sowohl die zugelassene Abweichung ε von der Grenzfunktion als auch den Wert für x einfließen lassen und für verschiedene x unter Umständen verschiedene n_0 wählen, während es bei gleichmäßiger Konvergenz zu jedem ε ein n_0 geben muss, das für alle $x \in D$ das selbe ist. Wir brauchen in diesem Sinne ein universelles oder eben gleichmäßiges n_0, dass für alle $x \in D$ simultan den Abstand $|f_n(x) - f(x)|$ kleiner als ε garantiert.

(b) Obige Überlegung zeigt auch sofort, dass jede Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, insbesondere auch punktweise gegen die selbe Funktion konvergiert: Wenn wir ein universelles n_0 haben, erfüllt dieses die Konvergenzbedingung natürlich auch für jedes $x \in D$ einzeln.

(c) Anschaulich bedeutet gleichmäßige Konvergenz gegen f, dass die Graphen der Funktionen f_n ab einem gewissen n_0 alle ganz in einem ε-Streifen um den Graphen der Funktion f liegen, vgl. Abbildung 21.2.

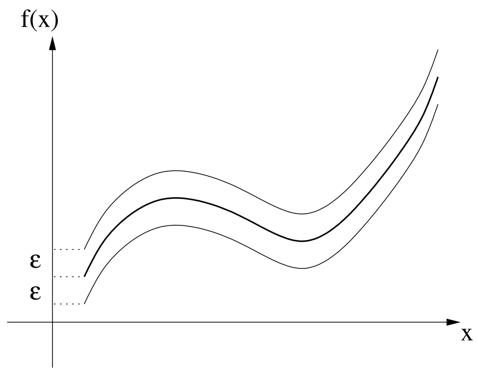

Abbildung 21.2.: Der ε-Streifen um den Graphen der Grenzfunktion f.

Betrachten wir wieder das Beispiel 21.2 (c) von oben, so sehen wir, dass das eben nicht der Fall ist. So verlässt jede Funktion f_n irgendwo den Streifen um die x-Achse mit Breite $1/4$.

Beispiel 21.6. Wir betrachten im Lichte der neuen Definition noch einmal (a) und (c) aus Beispiel 21.2. Beide Funktionenfolgen sind nicht gleichmäßig konvergent.
Für das Beispiel

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad x \in [0, \infty),$$

folgt das direkt aus (21.2), denn für $\varepsilon := 1/4$ gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0, \infty)$, für das $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ gilt.
Für

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1],$$

erhält man wegen $1/\sqrt[n]{2} \in (0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| f_n\Big(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\Big) - f\Big(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\Big) \right| = \left| \Big(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\Big)^n - 0 \right| = \frac{1}{2}$$

auf dem gleichen Wege, dass die Funktionenfolge nicht gleichmäßig konvergiert.

Die Frage der gleichmäßigen Konvergenz hängt manchmal sehr stark vom betrachteten Intervall ab, was nicht weiter verwundert, denn je größer dieses ist, desto mehr x muss ein zu vorgegebenem ε gewähltes n_0 gleichzeitig verarzten. Schauen wir nochmals die obigen Beispiele an, so sehen, wir, dass bei (a) das Problem bei $x = 1$ liegt und bei (c) bei $x = 0$. Halten wir uns von diesen beiden Punkten fern, so können wir tatsächlich gleichmäßige Konvergenz nachweisen.

Beispiel 21.7. (a) Wählen wir ein $\alpha \in (0,1)$, setzen wir $\tilde{D} := [0, \alpha]$ und betrachten nun auf dieser Menge die Funktionenfolge

$$f_n(x) := x^n, \quad x \in \tilde{D},$$

so gilt für alle $x \in \tilde{D}$ die Abschätzung $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n \leq \alpha^n$. (Man beachte, dass die Grenzfunktion auf $\tilde{D}$ nun die Nullfunktion ist.) Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\alpha^n < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ ist, da $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$ ist. Also gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha^n < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in \tilde{D}$$

und das ist genau die Bedingung für gleichmäßige Konvergenz.

Zusammengefasst ist die Funktionenfolge (x^n) also gleichmäßig konvergent auf jedem Intervall der Form $[0, \alpha]$ mit $0 < \alpha < 1$, aber nicht auf $[0, 1]$. Auf diesem ist sie aber noch punktweise konvergent.

Jede kompakte Teilmenge von $[0, 1)$ ist in einem Intervall der Form $[0, \alpha]$ mit $\alpha \in (0, 1)$ enthalten. Also haben wir lokal gleichmäßige Konvergenz auf $[0, 1)$. Achtung: Diese Funktionenfolge konvergiert nicht lokal gleichmäßig auf $[0, 1]$! Warum?

(b) Für ein $\alpha > 0$ setzen wir nun $\tilde{D} := [\alpha, \infty)$ und betrachten darauf die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad x \in \tilde{D}.$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \leq \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n\alpha}.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1/(n\alpha) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, also gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n\alpha} < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in \tilde{D}.$$

Zusammenfassend ist diese Funktionenfolge also auf jedem Intervall der Form $[\alpha, \infty)$ für $\alpha > 0$ gleichmäßig konvergent, aber nicht auf $[0, \infty)$. Lokal gleichmäßige Konvergenz haben wir in diesem Fall auf $(0, \infty)$, aber ebenfalls nicht auf $[0, \infty)$.

Beim Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz in obigem Beispiel haben wir jeweils das folgende allgemeine Prinzip verwendet.

Satz 21.8. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und (f_n) eine Funktionenfolge auf D sowie $f : D \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Gibt es eine Nullfolge (α_n), so dass*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in D$$

gilt, so konvergiert (f_n) gleichmäßig auf D gegen f.

Der Beweis verläuft genau wie in obigem Beispiel. Führen Sie ihn dennoch zu Übungszwecken aus.

Übungsaufgabe 21.9. Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und (f_n) eine Funktionenfolge auf D.

(a) Ist (f_n) gleichmäßig konvergent gegen $f : D \to \mathbb{K}$, so konvergiert auch die Folge $(|f_n|)$ gleichmäßig auf D und zwar gegen $|f|$.

(b) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{K}$, wenn $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$ gilt. Ist die Funktion f beschränkt, so gilt in diesem Fall außerdem $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x)| = \sup_{x\in D} |f(x)|$.

Satz 21.10 (Majorantenkriterium für Funktionenreihen)**.** *Es seien $D \subseteq \mathbb{K}$ und (f_n) eine Funktionenfolge auf D. Gibt es dann eine Folge (c_n) in $\mathbb{R}$, so dass $\sum_{n=1}^\infty c_n$ konvergiert und*

$$|f_n(x)| \leq c_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in D,$$

so konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ auf D gleichmäßig.

Beweis. Zuerst beobachten wir, dass für jedes $x \in D$ die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ die Voraussetzungen des Majorantenkriteriums für Reihen in Satz 13.5 – bzw. Satz 17.13 für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – erfüllt. Also ist die betrachtete Funktionenreihe punktweise absolut konvergent. Weiter gilt für jedes $x \in D$ und alle ausreichend großen $n \in \mathbb{N}$

$$\Big|\sum_{k=1}^n f_k(x) - \sum_{k=1}^\infty f_k(x)\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^\infty f_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^\infty |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^\infty c_k =: \alpha_n.$$

Da die Reihe über die c_n, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert, ist die Folge der Reihenreste (α_n) nach Satz 11.8 (b) eine Nullfolge. Damit folgt die Behauptung aus Satz 21.8. $\square$

Wir bestätigen uns nun erneut, dass Potenzreihen etwas Freundliches sind und beweisen, dass diese (als Funktionenreihen aufgefasst) auf ihrem Konvergenzbereich sogar lokal gleichmäßig gegen ihre Summenfunktion konvergieren.

Satz 21.11. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann konvergiert die Potenzreihe (als Funktionenreihe aufgefasst) lokal gleichmäßig auf $U_r(0)$.*

Beweis. Die Potenzreihe ist eine Funktionenreihe, bei der über die Funktionen $f_n(x) = a_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, summiert wird.
Es sei $K \subseteq U_r(0)$ kompakt. Da die Betragsfunktion stetig und K kompakt ist, gibt es nach Satz 20.7 ein $x_0 \in K$ mit $|x_0| = \max\{|x| : x \in K\}$. Weiter ist $K \subseteq U_r(0)$, also bekommen wir

$$\varrho := \max\{|x| : x \in K\} = |x_0| < r.$$

Damit gilt $|x| \leq \varrho < r$ für alle $x \in K$. Das bedeutet

$$|f_n(x)| = |a_n x^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n|\varrho^n =: c_n.$$

Da $\varrho \in (-r, r)$ gilt, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nach dem Satz von Hadamard. Damit ist diese eine konvergente Majorante und die Behauptung folgt aus Satz 21.10. □

Um zu sehen, dass eine Potenzreihe im Allgemeinen nicht gleichmäßig auf dem vollen Konvergenzintervall konvergiert, kann dass das folgende Beispiel dienen.

Übungsaufgabe 21.12. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist auf $(-1, 1)$ nicht gleichmäßig konvergent.

Wir zeigen nun, dass gleichmäßige Konvergenz Stetigkeit erhält, eine sehr wichtige Konsequenz dieser Eigenschaft.

Satz 21.13. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und (f_n) sei eine Funktionenfolge (bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine Funktionenreihe) auf D, die auf D lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f (bzw. s) konvergiere. Sind die Funktionen f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ in einem Punkt $x_0 \in D$ stetig, so ist auch die Grenzfunktion f (bzw. die Summenfunktion s) in x_0 stetig.*

Beweis. Wir führen den Beweis im Fall von Funktionenfolgen.
Sei (x_k) eine Folge in D, die gegen x_0 konvergiert. Nach Satz 19.2 müssen wir zeigen, dass $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$ ist.
Sei $\varepsilon > 0$. Wir betrachten $\{x_k : k \in \mathbb{N}_0\}$, d. h. die Menge aller Folgenglieder von (x_k) zusammen mit dem Grenzwert. Dank der Konvergenz von (x_k) ist das eine abgeschlossene und beschränkte und damit kompakte Teilmenge von D. Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gibt es also ein $m \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_m(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

gilt.
Weiter ist nach Voraussetzung die Funktion f_m stetig, also gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

ist. Sei nun k_0 so gewählt, dass $|x_k - x_0| < \delta$ für alle $k \geq k_0$ ist. Dann gilt für alle $k \geq k_0$ durch Kombination dieser Überlegungen

$$\begin{aligned} |f(x_k) - f(x_0)| &= \big|f(x_k) - f_m(x_k) + f_m(x_k) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)\big| \\ &\leq \big|f(x_k) - f_m(x_k)\big| + \big|f_m(x_k) - f_m(x_0)\big| + \big|f_m(x_0) - f(x_0)\big| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Bemerkung 21.14. (a) Wir können Satz 21.13 auch folgendermaßen formulieren: Konvergiert eine Funktionenfolge (f_n) auf D lokal gleichmäßig gegen f und sind alle Funktionen f_n in $x_0 \in D$ stetig, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Wir haben in diesem Satz also gezeigt, dass man bei gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen den Konvergenz-Limes mit dem Stetigkeits-Limes vertauschen kann. Dieses Vertauschen von Grenzwerten ist im Allgemeinen nicht erlaubt, vgl. Warnung 8.4, und insofern sind Sätze dieser Art, die ein Vertauschen gestatten, sehr wertvoll.

Tatsächlich ist diese Vertauscherei für nur punktweise Konvergenz im Allgemeinen falsch. Beispielsweise gilt für unsere Funktionenfolge aus Beispiel 21.2 (a)

$$\lim_{x \to 1-} \lim_{n \to \infty} x^n = \lim_{x \to 1-} 0 = 0 \neq 1 = \lim_{n \to \infty} 1 = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 1-} x^n.$$

(b) Satz 21.13 gibt außerdem noch ein manchmal sehr brauchbares Kriterium ab, um nachzuweisen, dass eine punktweise konvergente Funktionenfolge oder -reihe nicht gleichmäßig konvergiert. Sind nämlich alle Folgenglieder (bzw. alle Summanden) stetige Funktionen, aber die punktweise Grenzfunktion ist unstetig, so kann die Konvergenz nach diesem Satz nicht gleichmäßig sein.

22. Gleichmäßige Stetigkeit

Wir bekommen es in diesem Abschnitt mit einem ähnlichen Phänomen wie bei der Unterscheidung zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz zu tun. Erinnern wir uns an die Definition der Stetigkeit, so war $f : D \to \mathbb{K}$ in einem Punkt $x_0 \in D$ genau dann stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0\, \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Das zu bestimmende δ darf hierbei außer von ε, von dem es logischerweise abhängen muss, auch von x_0 abhängen. Es liegt also nahe, ähnlich wie bei der Konvergenz von Funktionenfolgen eine „Stetigkeit von höherer Qualität“ zu definieren, bei der das δ gleichmäßig in $x_0 \in D$ gewählt werden muss.
Dass das tatsächlich zu einem restriktiveren Begriff führt, zeigt das folgende Beispiel.

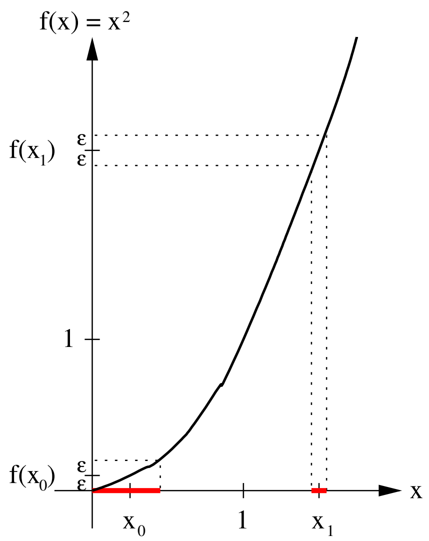

Abbildung 22.1.: Die Abhängigkeit des Stetigkeits-Deltas von x_0

Beispiel 22.1. Es sei $D = [0, \infty)$ und $f(x) = x^2$, $x \in D$, vgl. Abbildung 22.1. Diese Funktion ist offensichtlich stetig, beispielsweise weil sie durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius unendlich dargestellt wird. Also gibt es zu jedem $x_0 > 0$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$$

für alle $x > 0$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Können wir aber dieses δ unabhängig von x_0 wählen? Die Antwort ist Nein, denn wenn wir $x = x_0 + \delta/2$ setzen, so gilt $|x - x_0| = \delta/2 < \delta$, aber damit ist auch

$$\varepsilon > |x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0| = \Big(2x_0 + \frac{\delta}{2}\Big)\frac{\delta}{2} = \delta x_0 + \frac{\delta^2}{4}.$$

Insbesondere ist damit $\delta x_0 < \varepsilon$, d. h.

$$\delta < \frac{\varepsilon}{x_0}.$$

Je größer also das x_0 wird, umso kleiner müssen wir bei gegebenem ε das δ wählen. Anschaulich liegt das daran, dass der Graph der Funktion für große x immer steiler ansteigt. Wenn wir also im Bildbereich nur eine Abweichung von ε um das $f(x_0)$ zulassen, wird der verfügbare Platz für das δ auf der x-Achse immer geringer je weiter wir mit dem x_0 nach rechts rutschen.

Wir wollen nun die gleichmäßige Stetigkeit exakt definieren.

Definition 22.2. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$. Dann heißt $f : D \to \mathbb{K}$* gleichmäßig stetig *auf D, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für alle } x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ gilt.}$$

Bemerkung 22.3. (a) Es ist klar, dass eine Funktion, die auf einer Menge D gleichmäßig stetig ist, auch auf dieser Menge stetig ist, also zu $C(D, \mathbb{K})$ gehört. Die Umkehrung gilt i.A. nicht, wie Beispiel 22.1 zeigt.

(b) Wie bei der gleichmäßigen Konvergenz auch, ist die Frage, ob eine stetige Funktion sogar gleichmäßig stetig ist, sehr vom zu Grunde gelegten Definitionsbereich abhängig. Es ist eine Eigenschaft, die der Funktion *auf einer Menge* zukommt. Es ist deshalb im Gegensatz zur Stetigkeit nicht sinnvoll von „gleichmäßiger Stetigkeit in einem Punkt“ zu sprechen.

Wir wollen nun einen Fall behandeln, in dem Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit tatsächlich zusammenfallen.

Satz 22.4. *Ist $K \subseteq \mathbb{K}$ kompakt und $f \in C(K, \mathbb{K})$, so ist f gleichmäßig stetig auf K.*

Beweis. Wir nehmen an, f wäre nicht gleichmäßig stetig auf K. Nun müssen wir unsere Gesellenprüfung in elementarer Logik ablegen und die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit negieren. Am besten macht man das ganz formal und ohne viel nachzudenken mit den Quantoren. Wir schreiben uns noch einmal hin, was gleichmäßige Stetigkeit bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \text{ so dass } \forall x, y \in \mathbb{K} \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Beim Negieren müssen wir aus jedem $\forall$ ein $\exists$ und aus jedem $\exists$ ein $\forall$ machen sowie die Aussage negieren. Das ergibt: f ist auf K nicht gleichmäßig stetig, falls

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x = x(\delta) \in K \; \exists y = y(\delta) \in K \text{ mit } |x - y| < \delta, \\ \text{so dass } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Nun machen wir uns klar, was wir da bekommen haben. Nach Annahme gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ etwas gilt. Wir begnügen uns damit, alle δ anzuschauen, die von der Form $1/n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ sind. Also gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen $x_n, y_n \in K$ existieren, für die zum einen

$$|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n} \quad \text{und zum anderen} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

gilt. Nun ist die Folge (x_n) eine Folge in der kompakten Menge K, d. h. sie ist insbesondere beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 10.1 – bzw. 17.11 im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – besitzt sie damit eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) und es gilt $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$, da K abgeschlossen ist. Betrachten wir die Folge (y_{n_k}), so bekommen wir

$$y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k}).$$

Der erste Summand auf der rechten Seite konvergiert gegen x_0 nach Konstruktion und wegen $|x_n - y_n| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert der zweite gegen Null. Also sind beide Summanden auf der rechten Seite für $k \to \infty$ konvergent, was bedeutet, dass auch die Folge (y_{n_k}) für $k \to \infty$ konvergiert mit $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$. Da f in x_0 stetig ist, gilt

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq \lim_{k\to\infty} \big(|f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_{n_k})|\big) = 0 + 0 = 0,$$

was im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ steht. Also muss f gleichmäßig stetig in K sein. $\square$

Wir führen noch einen weiteren Stetigkeitsbegriff ein.

Definition 22.5. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $f : D \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Diese heißt* Lipschitz-stetig*, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in D$ gilt.

Bemerkung 22.6. Man kann sich leicht überlegen, dass der Begriff der Lipschitz-Stetigkeit sogar ein noch stärkerer als der der gleichmäßigen Stetigkeit ist, denn wenn f Lipschitz-stetig und $\varepsilon > 0$ ist, so gilt für jedes $0 < \delta < \varepsilon/L$ sofort

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$. Man beachte, dass das δ nur von ε und nicht von x oder y abhängt, also ist f tatsächlich gleichmäßig stetig. Die Umkehrung ist auch hier wieder i.A. falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 22.7. Wir setzen $D = [0, 1]$ und $f(x) = \sqrt{x}$. Dann ist f nach Satz 7.6 stetig und nach Satz 22.4 auch gleichmäßig stetig auf D. Nehmen wir aber an, es gäbe ein $L \geq 0$, so dass für alle $x, y \in D$ gilt

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|,$$

so folgt für die spezielle Wahl $y = 0$ sofort $\sqrt{x} \leq Lx$, d. h.

$$L \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ für alle } x \in (0, 1].$$

Also ist f nicht Lipschitz-stetig.

23. Differenzierbarkeit

Schon aus der Schule werden Sie das Thema dieses Abschnitts kennen. Man möchte das Änderungsverhalten einer Funktion in einem Punkt, d. h. anschaulich gesprochen die Steigung des Funktionsgraphen an dieser Stelle quantitativ fassen. Dazu nähert man die Tangentensteigung mit den bekannten Sekantensteigungen an und kommt auf den Differenzenquotienten. Dessen Grenzwert, die Ableitung, gibt dann die Steigung an, vgl. Abbildung 23.1. Auch die Differenzierbarkeit einer Funktion ist so im Grunde nichts anderes als ein Grenzwertproblem, das wir mit unseren bisherigen Erkenntnissen behandeln können.

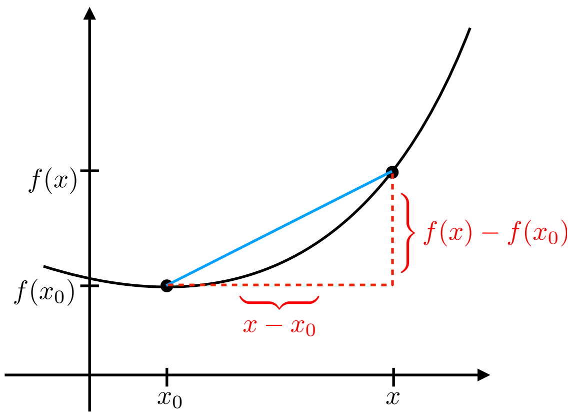

Abbildung 23.1.: Der Differenzenquotient als Steigung der Sekanten

Bei allem was mit ableiten zu tun hat, werden wir hier nur Funktionen mit Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ anschauen. Die Übertragung der Differenzialrechnung ins Komplexe, also für Funktionen mit komplexen Argumenten wird uns dann in der Analysis III ausführlicher beschäftigen, denn der Differenzierbarkeitsbegriff verhält sich im komplexen völlig anders als im reellen.
In diesem Abschnitt sei $I \subseteq \mathbb{R}$ immer ein Intervall.

Definition 23.1. *(a) Es sei $x_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ heißt* differenzierbar *in x_0, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in $\mathbb{K}$ existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert die Ableitung von f in x_0 *und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.*

(b) *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ heißt* differenzierbar auf I*, falls sie in allen Punkten $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall wird durch $x \mapsto f'(x)$ für $x \in I$ eine Funktion $f' : I \to \mathbb{K}$ definiert. Diese Funktion heißt die* Ableitung *oder auch* Ableitungsfunktion von f auf I.

Bemerkung 23.2. Es ist nicht schwer sich klarzumachen, dass der Grenzwert in obiger Definition genau dann existiert, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert, und dass dann diese beiden Limites übereinstimmen. Man kann also je nachdem, was in der jeweiligen Situation übersichtlicher erscheint, den einen oder den anderen Grenzwert untersuchen.

Beispiel 23.3. (a) Es sei zunächst $f(x) = c \in \mathbb{K}$ konstant für alle $x \in I$. Dann ist f in I differenzierbar und es gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$.

(b) Wir betrachten $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ und

$$f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ für } x > 0, \\ -1, \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Also existiert der Grenzwert dieses Ausdrucks für $x \to x_0 = 0$ nicht, d. h. f ist in 0 *nicht* differenzierbar. Man beachte, dass f aber in 0 stetig ist.

Wir haben soeben gesehen, dass es stetige Funktionen gibt, die nicht differenzierbar sind. Wir wollen nun zeigen, dass aber umgekehrt jede differenzierbare Funktion notwendigerweise stetig ist.

Satz 23.4. *Es sei $f : I \to \mathbb{K}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann ist f stetig in x_0.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, also ist f in x_0 stetig. □

Wir berechnen beispielhaft noch weitere Ableitungen.

Beispiel 23.5. (a) Es sei $I = \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten

$$f(x) = x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt nach Satz 3.11 (c) für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x \neq x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{x \to x_0} x^k x_0^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Damit ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(b) Es sei wieder $I = \mathbb{R}$ und jetzt

$$f(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\mathrm{e}^{x_0 + h} - \mathrm{e}^{x_0}}{h} = \frac{\mathrm{e}^{x_0}\mathrm{e}^h - \mathrm{e}^{x_0}}{h} \\ &= \mathrm{e}^{x_0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \longrightarrow \mathrm{e}^{x_0} \ (h \to 0) \end{aligned}$$

mit Hilfe von Beispiel 19.6 (c). Also ist die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\exp'(x) = \mathrm{e}^x = \exp(x)$.

Die folgende Umformulierung von Differenzierbarkeit ist in Abbildung 23.2 visualisiert. Sie ist im Moment noch von rein theoretischem Interesse, wird uns aber im nächsten Semester in großer Notlage retten. Der Beweis ist eine schöne Übung in Funktionengrenzwerten.

Satz 23.6. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ ist in $x_0 \in I$ genau dann differenzierbar mit $f'(x_0) = a$, wenn*

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x), \qquad x \in I,$$

ist mit einer Funktion $r : I \to \mathbb{K}$, für die gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

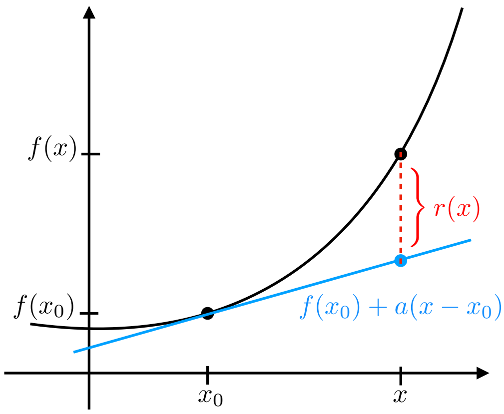

Abbildung 23.2.: Die Ableitung als beste lineare Approximation nach Satz 23.6.

Um kompliziertere Ableitungen berechnen zu können, brauchen wir Rechenregeln. Einen ersten Satz wollen wir jetzt beweisen.

Satz 23.7. *Es seien $f, g : I \to \mathbb{K}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gilt*

(a) $\alpha f + \beta g$ ist in x_0 differenzierbar und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \qquad \text{(Linearität)}$$

(b) fg ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \qquad \text{(Produktregel)}$$

(c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert ein Intervall $J \subseteq I$ mit $x_0 \in J$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Außerdem ist die Funktion $f/g : J \to \mathbb{K}$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}. \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

(d) Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind auch $\overline{f} : I \to \mathbb{C}$ sowie $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit $(\overline{f})'(x_0) = \overline{f'(x_0)}$ sowie $(\operatorname{Re} f)'(x_0) = \operatorname{Re}(f'(x_0))$ und $(\operatorname{Im} f)'(x_0) = \operatorname{Im}(f'(x_0))$.

Beweis$^{(*)}$. Die Aussagen (a) und (b) behandeln wir als Übungsaufgaben.
Zum Beweis von (c) müssen wir zuerst die Existenz von J begründen. Da g in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|g(x) - g(x_0)| < |g(x_0)|/2$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) =: J$ gilt. Für diese x ist dann $|g(x)| > |g(x_0)|/2 > 0$, also insbesondere $g(x) \neq 0$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}&=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\cdot\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\\&=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\cdot\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\\&=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\Big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Big).\end{aligned}$$

Da g in x_0 differenzierbar ist, ist diese Funktion insbesondere in x_0 stetig (vgl. Satz 23.4), also können wir in obiger Gleichung zum Grenzwert $x \to x_0$ übergehen und erhalten die Behauptung.
Es bleibt noch (d) zu zeigen. Nach den Rechenregeln für die komplexe Konjugation, vgl. Satz 17.6, und Dank Satz 19.4, gilt

$$\begin{aligned}(\overline{f})'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{\overline{f(x)}-\overline{f(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\overline{f(x)-f(x_0)}}{\overline{x-x_0}}=\lim_{x\to x_0}\overline{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}\\&=\overline{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\overline{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

Die Differenzierbarkeit von $\mathrm{Re}f$ und $\mathrm{Im}f$ folgt jetzt aus $\mathrm{Re}f = {}^{f+\overline{f}}/_2$ und $\mathrm{Im}f = {}^{f-\overline{f}}/_{2\mathrm{i}}$, in Zusammenarbeit mit (a). □

Es folgt sogleich die Rechenregel für die Verkettung differenzierbarer Funktionen.

Satz 23.8 (Kettenregel)**.** *Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $g : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $x_0 \in I$. Weiter gelte $g(I) \subseteq J$ und die Funktion $f : J \to \mathbb{K}$ sei differenzierbar in $y_0 = g(x_0)$. Dann ist auch die Funktion $f \circ g : I \to \mathbb{K}$ differenzierbar in x_0 und es gilt*

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion $\tilde{f} : J \to \mathbb{K}$ mit

$$\tilde{f}(y)=\begin{cases}\dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}, & \text{für } y\in J \text{ mit } y\neq y_0,\\ f'(y_0), & \text{für } y=y_0.\end{cases}$$

Dann gilt

$$\tilde{f}(y)(y-y_0)=f(y)-f(y_0) \tag{23.1}$$

für alle $y \in J$ (auch für y_0!). Da f in y_0 differenzierbar ist, haben wir nun

$$\lim_{y\to y_0}\tilde{f}(y)=\tilde{f}(y_0)=f'(y_0)=f'(g(x_0)),$$

insbesondere ist $\tilde{f}$ stetig in y_0. Nach Satz 23.4 ist g stetig in x_0, und da die Verkettung von stetigen Funktionen wieder stetig ist, sehen wir damit

$$\lim_{x\to x_0} \tilde{f}(g(x)) = \tilde{f}(g(x_0)) = f'(g(x_0)).$$

Daher folgt schließlich mit Hilfe von (23.1)

$$\begin{aligned}\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \frac{\tilde{f}(g(x))\big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0} \\ &= \tilde{f}(g(x))\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)\ (x \to x_0). \square\end{aligned}$$

Beispiel 23.9. Es sei $a > 0$ gegeben. Dann betrachten wir auf $I = \mathbb{R}$ die Funktion

$$\varphi(x) := a^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist nach Definition $\varphi(x) = \mathrm{e}^{x \ln a}$. Um die Kettenregel anzuwenden setzen wir $f(y) := \mathrm{e}^y$ und $g(x) := x \ln(a)$. Dann ist $\varphi = f \circ g$. Da sowohl f als auch g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind und f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, sind die Voraussetzungen von Satz 23.8 erfüllt und es gilt

$$(a^x)' = f'(g(x))g'(x) = \mathrm{e}^{g(x)} \ln(a) = \mathrm{e}^{x \ln(a)} \ln(a) = a^x \ln(a).$$

Wir können sogar eine allgemeine Rechenregel für die Ableitung der Umkehrfunktion angeben.

Satz 23.10. *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton und in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$, diese ist differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$ und es gilt*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Die Existenz der Umkehrfunktion folgt sofort aus der strengen Monotonie von f.
Zu gegebenem $h \neq 0$ setzen wir

$$k := f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0 + h) - x_0.$$

Da f^{-1} nach Satz 20.11 in y_0 stetig ist, folgt aus $h \to 0$ sofort $k \to 0$. Außerdem ist $x_0 + k = f^{-1}(y_0 + h)$, d. h. $f(x_0 + k) = y_0 + h$ und wir erhalten

$$h = f(x_0 + k) - f(x_0).$$

Das liefert schließlich

$$\frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \frac{k}{f(x_0 + k) - f(x_0)} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)} \quad (h \to 0),$$

da $f'(x_0) \neq 0$ gilt. $\square$

Bemerkung 23.11. Man beachte, dass die Voraussetzung $f'(x_0) \neq 0$ notwendig ist. Als Beispiel diene hierzu $I = [0, \infty)$ und $f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x) = 2x$ und somit $f'(0) = 0$. Tatsächlich ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn es gilt

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow \infty \quad (x \to 0+).$$

Beispiel 23.12. (a) Wir bestimmen die Ableitung des Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Sei dazu $I = \mathbb{R}$ und $f(x) = \mathrm{e}^x$ auf I. Dann ist $f^{-1}(x) = \ln(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$ und mit Satz 23.10 gilt für $y = f(x)$ die Beziehung

$$(\ln)'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}, \quad y \in (0, \infty).$$

(b) Damit bekommen wir dank der Kettenregel für jede auf I differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die $f(x) > 0$ für alle $x \in I$ erfüllt,

$$(\ln \circ f)'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad x \in I.$$

Man nennt das die *logarithmische Ableitung* von f.

(c) Für $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f(x) := x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ erhalten wir

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)} (\alpha \ln(x))' = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Die Ableitungsregel für die Potenz mit natürlichem Exponenten aus Beispiel 23.5 (a) verallgemeinert sich also auch auf die allgemeine Potenz, solange $x > 0$.

Insbesondere haben wir im Fall $\alpha = 1/2$

$$(\sqrt{\cdot})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

24. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Dieses Kapitel sammelt wichtige Sätze über differenzierbare Funktionen, vergleichbar mit Kapitel 20 für stetige Funktionen. Wir beginnen mit dem Satz, der im Zusammenhang mit Ableitungen in den verschiedensten Wissenschaften wahrscheinlich am häufigsten verwendet wird. Er ermöglicht die Bestimmung von Maximal- und Minimalstellen einer Funktion. Wir definieren zunächst genau was wir damit meinen.

Definition 24.1. *Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

(a) Man sagt, dass f in $x_0 \in D$ ein globales Maximum *(bzw.* globales Minimum*) hat, falls $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) für alle $x \in D$ gilt.*

(b) f hat in $x_0 \in D$ ein relatives Maximum *(bzw.* relatives Minimum*), falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) für alle $x \in D \cap U_\delta(x_0)$ gilt.*

(c) Allgemein spricht man von einem globalen *bzw.* relativen Extremum *in x_0, wenn f dort ein entsprechendes Maximum oder Minimum hat.*

Bemerkung 24.2. Statt „relatives" Extremum/Maximum/Minimum ist auch die Bezeichnung *lokales Extremum/Maximum/Minimum* üblich.

Satz 24.3. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Hat f in x_0 ein relatives Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Warnung 24.4. Da dieser Satz so oft verwendet wird, wird er auch gerne falsch verwendet. Darum hier (aus vielfach gegebenem Anlass) zwei Warnungen.

(a) Die Voraussetzung, dass f auf einem Intervall ohne Randpunkte als Definitionsbereich betrachtet wird, ist wesentlich. Ein einfaches Beispiel ist die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Diese hat ein relatives Minimum in $x_0 = 0$, aber $f'(0) = 1$.

(b) Die Umkehrung gilt nicht! Das sieht man sofort an dem Beispiel $f(x) = x^3$ auf $I = \mathbb{R}$. Dann ist nämlich $f'(x) = 3x^2$, also $f'(0) = 0$, aber diese Funktion hat in 0 kein Extremum, denn in jeder Umgebung $U_\delta(0)$ für $\delta > 0$ liegen Punkte mit $f(x) > 0 = f(0)$, z. B. $x = \delta/2$, und mit $f(x) < 0 = f(0)$, z. B. $x = -\delta/2$.

Beweis von Satz 24.3. Wir gehen zunächst davon aus, dass f in x_0 ein relatives Maximum hat. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass gleichzeitig $U_\delta(x_0) \subseteq I$ und $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$ gilt. Die erste Bedingung können wir erfüllen, weil x_0 kein Randpunkt von I ist, die zweite ist genau die Definition des relativen Maximums. Sei nun $x \in U_\delta(x_0)$ aber $x \neq x_0$. Dann ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0, \text{ falls } x > x_0, \\ \geq 0, \text{ falls } x < x_0. \end{cases}$$

Da f außerdem in x_0 differenzierbar ist, muss damit gelten

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{und} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Also ist $f'(x_0) = 0$.
Wir widmen uns nun dem Fall, dass f ein relatives Minimum in x_0 hat. Dann hat die Funktion $-f$ in x_0 ein relatives Maximum, denn es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in U_\delta(x_0)$ die Ungleichung $f(x) \geq f(x_0)$ erfüllt ist. Also ist für alle diese x auch $-f(x) \leq -f(x_0)$. Nach dem ersten Teil des Beweises gilt also $f'(x_0) = -(-f)'(x_0) = -0 = 0$. □

Satz 24.5 (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad \textit{bzw. gleichbedeutend} \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

gilt.

Anschaulich bedeutet dieser Satz, dass die Sekantensteigung der Funktion, die man anhand der beiden Punkte a und b erhält, irgendwann dazwischen tatsächlich als Tangentensteigung angenommen wird, vgl. Abbildung 24.1. Man kann sich das verdeutlichen, indem man versucht, eine differenzierbare Funktion zu zeichnen, für die das nicht gilt, was (hoffentlich) nicht klappen wird.

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Dann ist offensichtlich auch $g \in \mathrm{C}([a, b], \mathbb{R})$ und g ist differenzierbar auf (a, b) mit

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad x \in (a, b).$$

Außerdem ist $g(a) = g(b) = 0$. Können wir nun zeigen, dass es ein $\xi \in (a, b)$ gibt, für das $g'(\xi) = 0$ gilt, so haben wir damit $f'(\xi) = {}^{f(b)-f(a)}/_{b-a}$ und sind fertig.

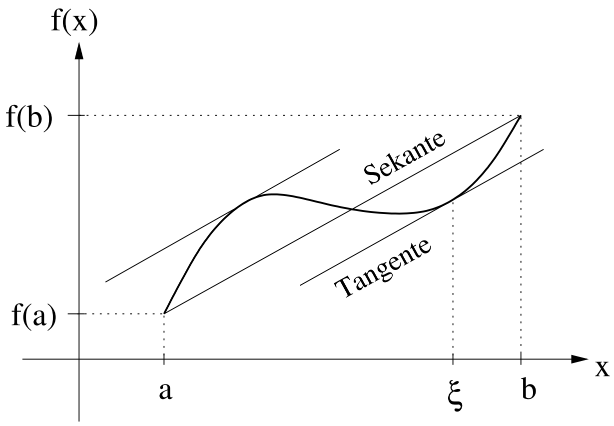

Abbildung 24.1.: Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Wir beobachten zunächst, dass im Fall $g(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ nichts mehr zu tun ist, denn dann ist insbesondere $g'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Es sei also g nicht konstant. Da g eine stetige Funktion auf der kompakten Menge $[a,b]$ ist, gibt es nach Satz 20.7 Zahlen $t, s \in [a,b]$, so dass

$$g(t) \leq g(x) \leq g(s) \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

gilt. Wäre nun sowohl $t \in \{a,b\}$, als auch $s \in \{a,b\}$, so wäre $g(s) = g(t) = 0$ und damit wieder $g(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, was wir gerade ausgeschlossen haben. Es gilt also $t \in (a,b)$ oder $s \in (a,b)$, d. h. eins der beiden ist ein innerer Punkt von $[a,b]$. Weiterhin hat g dort ein relatives Extremum. Also gilt nach Satz 24.3 $g'(t) = 0$ oder $g'(s) = 0$ und der Beweis ist beendet. □

Warnung 24.6. Die Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes auf komplexwertige Funktionen ist im Allgemeinen falsch! Hier ist Vorsicht angebracht, auch im Hinblick auf alles, was im Folgenden mit Hilfe des Mittelwertsatzes bewiesen wird. Manchmal kann man sich allerdings durch die getrennte Behandlung von Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion behelfen, vgl. den Beweis von Satz 24.7 (c).

Wir wollen nun einige Folgerungen aus dem Mittelwertsatz ziehen.

Satz 24.7. *(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Ist f auf (a,b) differenzierbar und gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.* (Satz von Rolle)

(b) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I differenzierbar. Dann gilt

$$\textit{Ist } f' = 0 \textit{ auf } I, \textit{ so ist } f \textit{ auf } I \textit{ konstant.}$$
$$\textit{Ist } f' > 0 \textit{ auf } I, \textit{ so ist } f \textit{ auf } I \textit{ streng monoton wachsend.}$$

Ist $f' < 0$ auf I, so ist f auf I streng monoton fallend.
Ist $f' \geq 0$ auf I, so ist f auf I monoton wachsend.
Ist $f' \leq 0$ auf I, so ist f auf I monoton fallend.

(c) *Sind $f, g : I \to \mathbb{K}$ auf I differenzierbare Funktionen und gilt $f' = g'$ auf I, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{K}$, so dass $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in I$ gilt.*

Beweis. (a) folgt direkt aus dem Mittelwertsatz.

(b) Es seien $a, b \in I$ mit $a < b$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$. Ist die Ableitung von f nun konstant Null auf I, so muss also $f(a) = f(b)$ gelten. Da a und b in I beliebig waren, ist f auf I konstant,

Weiter ist der Ausdruck $b - a$ immer positiv, also ergibt sich das Vorzeichen von $f(b) - f(a)$ direkt aus dem Vorzeichen von $f'(\xi)$. Daraus kann man die 4 restlichen Behauptungen sofort ablesen.

(c) Mit $f' = g'$ gelten auch $(\mathrm{Re}(f))' = \mathrm{Re}(f') = \mathrm{Re}(g') = (\mathrm{Re}(g))'$ und $(\mathrm{Im}(f))' = \mathrm{Im}(f') = \mathrm{Im}(g') = (\mathrm{Im}(g))'$, vgl. Satz 23.7 (d). Wir setzen $h := \mathrm{Re}(f) - \mathrm{Re}(g)$. Dann ist $h' = \mathrm{Re}(f') - \mathrm{Re}(g') = 0$ auf I, d. h. h ist konstant nach (b). Genauso erhält man, dass $k := \mathrm{Im}(f) - \mathrm{Im}(g)$ konstant ist. Setzt man $c = h(x_0) + \mathrm{i}k(x_0)$ für ein $x_0 \in I$, so gilt damit für alle $x \in I$

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{Re}\big(f(x)\big) + \mathrm{i}\mathrm{Im}\big(f(x)\big) = \mathrm{Re}\big(g(x)\big) + h(x) + \mathrm{i}\big(\mathrm{Im}\big(g(x)\big) + k(x)\big) \\ &= g(x) + h(x) + \mathrm{i}k(x) = g(x) + h(x_0) + \mathrm{i}k(x_0) = g(x) + c. \end{aligned}$$ □

Schon an diesen reichhaltigen Folgerungen sieht man die Stärke des Mittelwertsatzes. Dieser ist aber auch im analytischen Alltag immer wieder ein unverzichtbares Hilfmittel. Eine typische Anwendung zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 24.8. Wir zeigen, dass für alle $a, b \geq 1$ die Ungleichung

$$\big|\sqrt{a} - \sqrt{b}\big| \leq \frac{|a - b|}{2}$$

gilt. Dazu seien $a, b \geq 1$ gegeben. Wir wenden den Mittelwertsatz auf die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ an und erhalten mit einem ξ zwischen a und b

$$\big|\sqrt{a} - \sqrt{b}\big| = \big|f(a) - f(b)\big| = \big|f'(\xi)(a - b)\big| = \big|f'(\xi)\big||a - b|.$$

Da a und b größer oder gleich 1 sind, gilt $\xi \geq 1$, also ist

$$\big|f'(\xi)\big| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \leq \frac{1}{2}$$

und wir erhalten

$$\big|\sqrt{a} - \sqrt{b}\big| \leq \frac{1}{2}|a - b| = \frac{|a - b|}{2}.$$

Satz 24.9 (verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig sowie differenzierbar auf (a, b). Ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x).$$

Dann ist $h \in \mathrm{C}([a, b], \mathbb{R})$, differenzierbar in (a, b) und es gilt

$$\begin{aligned} h(a) &= f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) = h(b). \end{aligned}$$

Also gibt es nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(\xi) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(\xi),$$

woraus wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ die Behauptung folgt. □

Übungsaufgabe 24.10. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann erfüllt f' die *Zwischenwerteigenschaft*, d. h. sind $u, w \in f'(I)$ mit $u < w$ und $y_0 \in (u, w)$, so gibt es ein $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = y_0$.
Anders formuliert: Für jede differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist $f'(I)$ ein Intervall (oder ein Punkt).
Beachten Sie bei Ihrem Beweis, dass f' nicht unbedingt stetig vorausgesetzt ist, den Zwischenwertsatz können Sie also in der Tasche lassen.

Die Differenzierbarkeit gibt uns unter Anderem ein starkes Hilfsmittel zur Bestimmung von Grenzwerten bei Quotienten von Funktionen in die Hand, das wir zum Abschluss dieses Abschnitts beweisen wollen.

Satz 24.11 (Satz von de l'Hospital). *Es sei (a, b) ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ (dabei ist hier $a = -\infty$ oder $b = \infty$ zugelassen) und $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf (a, b) mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Gilt dann*

(I) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ *oder*

(II) $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

und existiert der Grenzwert

$$L := \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

oder hat dieser im Sinne von bestimmter Divergenz einen Wert ∞ oder $-\infty$, dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Die Aussage dieses Satzes bleibt richtig, wenn man überall a durch b ersetzt.

Beweis. Wir betrachten den Fall (I) und gehen zunächst davon aus, dass $a \in \mathbb{R}$ gilt. Dann setzen wir f und g durch $f(a) := g(a) := 0$ stetig fort und wählen ein $\tilde{b} \in (a, b)$. Dann gilt $f, g \in \mathrm{C}([a, \tilde{b}], \mathbb{R})$, denn die Funktionen sind ja auf (a, b) differenzierbar und damit insbesondere stetig. Ist nun $x \in (a, \tilde{b})$, so gibt es nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz 24.9) ein $\xi = \xi(x) \in (a, x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Strebt nun $x \to a$, so muss zwangsläufig auch $\xi \to a$ gehen, also folgt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L.$$

Wir können uns also dem Fall $a = -\infty$ zuwenden und wählen ein $\tilde{b} \in (-\infty, b) \setminus \{0\}$. Dann substituieren wir $t = {}^1\!/_x$. Das führt dazu, dass der Grenzübergang $x \to a = -\infty$ in $t \to 0-$ übergeht. Wir setzen

$$\tilde{f}(t) := f({}^1\!/_t) \quad \text{und} \quad \tilde{g}(t) := g({}^1\!/_t), \quad t \in (-{}^1\!/_{|\tilde{b}|}, 0).$$

Dann gilt für alle $t \in (-{}^1\!/_{|\tilde{b}|}, 0)$

$$\tilde{f}'(t) = f'\Big(\frac{1}{t}\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{t^2}\Big) \quad \text{und} \quad \tilde{g}'(t) = g'\Big(\frac{1}{t}\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{t^2}\Big)$$

und somit gilt auch

$$\lim_{t \to 0-} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = \lim_{t \to 0-} \frac{f'({}^1\!/_t)(-t^2)}{g'({}^1\!/_t)(-t^2)} = \lim_{t \to 0-} \frac{f'({}^1\!/_t)}{g'({}^1\!/_t)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Wir können also das oben schon Bewiesene anwenden und erhalten

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0-} \frac{f({}^1\!/_t)}{g({}^1\!/_t)} = \lim_{t \to 0-} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} = \lim_{t \to 0-} \frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)} = L.$$

Der Fall (II) und die Ersetzung von a durch b bleiben als Übungsaufgabe stehen. □

Beispiel 24.12. (a) Es seien $a, b > 0$. Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0+} \frac{a^x - b^x}{x}$$

untersuchen. Wir betrachten das Intervall $(0, 1)$ und die Funktionen $f(x) = a^x - b^x$ und $g(x) = x$ auf $(0, 1)$. Diese sind dort beide differenzierbar und es gilt $g'(x) = 1 \neq 0$ für alle $x \in (0, 1)$. Außerdem ist

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (a^x - b^x) = \lim_{x \to 0+} a^x - \lim_{x \to 0+} b^x = 1 - 1 = 0 = \lim_{x \to 0+} g(x).$$

Wir können also den Satz von de l'Hospital anwenden und erhalten

$$\lim_{x\to 0+} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{a^x \ln(a) - b^x \ln(b)}{1} = \ln(a) - \ln(b),$$

was wohl nur sehr schwer zu erraten gewesen wäre.

(b) Ebenso kann man zeigen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

In diesem Fall hat man es mit einem uneigentlichen Grenzwert der Form ∞/∞ zu tun.

(c) Eine kleine Umformung führt dazu, dass man mit der Regel von de l'Hospital auch Grenzwerte der Form $0\cdot\infty$ behandeln kann. Das geht exemplarisch so:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

Man beachte, dass hier u.a. wegen $\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to 0+} 1/x = \infty$ die Anwendung des Satzes gerechtfertigt war.

Dieser Grenzwert ermöglicht uns nun zusammen mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion noch die Berechnung von

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{x\ln(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0+} x\ln(x)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Warnung 24.13. Dieser Satz hat viele Voraussetzungen und diese sind wirklich alle nötig! Im Eifer des Gefechts gegen einen hartnäckigen Grenzwert wird hier gerne die eine oder andere vergessen. Besonderer Beliebtheit erfreut es sich, nicht nachzuprüfen, ob es sich wirklich um einen sogenannten „uneigentlichen" Grenzwert der Form $0/0$ oder $\pm\infty/\pm\infty$ handelt. Nur solche kann dieser Satz behandeln! Die besondere Gemeinheit ist, dass man bei einer nicht gerechtfertigten Anwendung von Hospital keine Warnmeldung zurückbekommt, sondern ein schönes Ergebnis, das aber meistens leider einfach falsch ist. Hier ist ein typisches Beispiel: Einfach mit Anwendung der Grenzwertsätze ergibt sich, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x-1} = \frac{\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^x - 1)}{\lim_{x\to 0}(x-1)} = \frac{0}{-1} = 0$$

ist. Hospital ist hier nicht anwendbar, da weder Fall (I) noch Fall (II) aus dem Satz vorliegt. Wendet man ihn aber trotzdem an, bekommt man

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x-1} \overset{???}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

also ein falsches Ergebnis.

25. Ableitung von Potenzreihen

Wir wollen uns in diesem Abschnitt zunächst mit der Ableitung von Funktionen, die durch Potenzreihen gegeben sind, beschäftigen. Wie nicht anders zu erwarten stellt sich heraus, dass diese wieder besonders schön sind.

Satz 25.1. *Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit strikt positivem Konvergenzradius r und wir setzen $I := (-r, r)$. Dann gilt:*

(a) Die Potenzreihe

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

hat ebenfalls den Konvergenzradius r.

(b) Die Funktion f ist auf I differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ für alle } x \in I.$$

Beweis$^{(*)}$. Da mit Hilfe von Übungsaufgabe 10.11

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} \right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

gilt, folgt die Aussage in (a) sofort aus dem Satz von Hadamard.
Zum Beweis der Aussage in (b) bezeichnen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ die n-te Partialsumme und mit $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$ den n-ten Reihenrest. Nun sei $x_0 \in I$ fest. Dann wählen wir ein $0 < \varrho < r$, so dass $x_0 \in (-\varrho, \varrho) \subseteq I$ gilt. Es folgt für alle $x \in [-\varrho, \varrho]$ mit $x \neq x_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \\
&= \left| \frac{s_n(x) + R_n(x) - s_n(x_0) - R_n(x_0)}{x - x_0} - s_n'(x_0) + s_n'(x_0) - g(x_0) \right| \\
&\leq \left| \frac{s_n(x) - s_n(x_0)}{x - x_0} - s_n'(x_0) \right| + \left| \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{x - x_0} \right| + |s_n'(x_0) - g(x_0)|. \qquad (25.1)
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Unser Ziel ist es, abhängig von ε ein $\delta > 0$ zu finden, so dass für alle $x \in U_\delta(x_0)$ der Ausdruck auf der linken Seite der oberen Ungleichung kleiner

als ε wird. Dazu untersuchen wir die 3 Summanden auf der rechten Seite jeweils einzeln und versuchen sie jeweils kleiner als $\varepsilon/3$ abzuschätzen.
Zunächst gilt

$$s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1},$$

also gilt nach (a) $\lim_{n\to\infty} s_n'(x) = g(x)$ für alle $x \in I$. Insbesondere gibt es also ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|s_n'(x_0) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $n \geq n_1$ gilt.
Wir wenden uns dem zweiten Summanden zu. Für alle $x \in [-\varrho, \varrho]$ mit $x \neq x_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nach der Dreiecksungleichung und mit Hilfe von Satz 3.11 (c)

$$\begin{aligned}\Big|\frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{x - x_0}\Big| &= \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k(x^k - x_0^k)}{x - x_0}\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \Big|\frac{x^k - x_0^k}{x - x_0}\Big| \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \Big|\sum_{j=0}^{k-1} x_0^j x^{k-1-j}\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=0}^{k-1} |x_0|^j |x|^{k-1-j}.\end{aligned}$$

Verwenden wir nun, dass sowohl x als auch x_0 im Betrag unterhalb ϱ bleiben, ergibt sich als weitere Abschätzung

$$\begin{aligned}&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=0}^{k-1} \varrho^j \varrho^{k-1-j} = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=0}^{k-1} \varrho^{k-1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|\varrho^{k-1} =: c_n.\end{aligned}$$

Wir haben in (a) gesehen, dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|x^{n-1}$ auch den Konvergenzradius r hat. Da $\varrho \in (-r, r)$ gilt, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\varrho^{n-1}$ und damit folgt $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, da es sich dabei um die Folge der Reihenreste handelt, vgl. Satz 11.8 (b). Also können wir ein $n_2 \in \mathbb{N}$ wählen, so dass

$$\Big|\frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{x - x_0}\Big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $n \geq n_2$ gilt. Sei nun $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Da s_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ als Polynom differenzierbar ist, gibt es nun ein $\delta \in (0, \varrho - |x_0|)$, so dass für alle $x \in U_\delta(x_0)$ mit $x \neq x_0$ gilt

$$\Big|\frac{s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_0)}{x - x_0} - s_{n_0}'(x_0)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wiederholen wir die Abschätzung aus (25.1) für $n = n_0$, und nehmen wir das soeben gewählte δ, so ist jeder der 3 Summanden auf der rechten Seite von (25.1) kleiner als $\varepsilon/3$ und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Die besondere Stärke dieses Satzes besteht darin, dass er uns nicht nur abstrakt die Differenzierbarkeit einer durch eine Potenzreihe gegebenen Funktion sichert, sondern dass er uns auch gleich sagt, wie wir diese, oder wenigstens eine Potenzreihe dieser Ableitungsfunktion, bekommen können: Nämlich auf die denkbar einfachste Weise, wir dürfen jeden einzelnen Summanden „unter dem Summenzeichen“ differenzieren. Da sowohl die Summation als auch die Differenziation einen Grenzübergang darstellen, haben wir hier also wieder ein Beispiel für einen Satz, der das Vertauschen zweier Grenzprozesse gestattet.

Einen kreativen Einsatz dieses Satzes zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 25.2. Wir betrachten die durch eine Potenzreihe gegebene Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Wie man leicht nachrechnet, hat diese den Konvergenzradius 1. Für $|x| < 1$ gilt nun nach dem obigen Satz

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

und – welch Glücksfall – diese Reihe ist eine geometrische, wir können also den Reihenwert angeben und erhalten

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \big(\ln(1+x)\big)'.$$

Nach Satz 24.7 (c) gibt es also ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = \ln(1+x) + c$ für alle $x \in (-1, 1)$ gilt. Nun gilt aber $f(0) = 0$, genauso wie $\ln(1+0) = \ln(1) = 0$ ist, also muss $c = 0$ sein. Das liefert

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Wir konnten also mit Hilfe des obigen Satzes eine Potenzreihendarstellung einer Funktion angeben, für die wir bis jetzt keine solche hatten, bzw. andersherum formuliert, hat obiger Satz uns geholfen, einen zunächst schwierig aussehenden Reihenwert zu berechnen.

26. Trigonometrische Funktionen

Wir hatten im Abschnitt 16 über Potenzreihen die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus definiert als

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Mit unserem Satz 25.1 über die Differenzierbarkeit von Potenzreihen können wir nun die Ableitungen dieser Funktionen bestimmen und erhalten

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (2n+1)\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x).$$

Genauso berechnet man die Ableitung des Cosinus und erhält zusammengefasst das folgende Resultat.

Satz 26.1. *Sinus und Cosinus sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \textit{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen noch weitere Eigenschaften von Cosinus und Sinus beweisen.

Satz 26.2. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$ (trigonometrischer Pythagoras)

(b) $|\sin(x)| \leq 1$ *und* $|\cos(x)| \leq 1.$

(c) $\sin(-x) = -\sin(x)$ *und* $\cos(-x) = \cos(x).$

(d) Additionstheoreme*:*

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x),$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Beweis. (a) Wir setzen $g(x) := \sin^2(x) + \cos^2(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$g'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)\big(-\sin(x)\big) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Also ist g wieder eine konstante Funktion und da $g(0) = \sin^2(0) + \cos^2(0) = 0 + 1 = 1$ ist, gilt $g(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

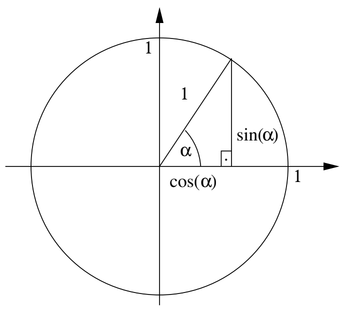

Abbildung 26.1.: Trigonometrischer Pythagoras

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin(x)| = \sqrt{\sin^2(x)} \leq \sqrt{\sin^2(x) + \cos^2(x)} = 1$. Genauso rechnet man für den Cosinus.

(c) Diese Beziehungen folgen direkt aus der Potenzreihendarstellung, denn in der Potenzreihe des Sinus tauchen nur ungerade x-Potenzen und in der des Cosinus nur gerade x-Potenzen auf.

(d) Nach der Euler-Formel aus Satz 17.18 (c) gilt

$$\cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y) = \mathrm{e}^{i(x+y)}.$$

Nach Teil (a) des selben Satzes haben wir für die komplexe Exponentialfunktion die gewohnten Potenzrechenregeln, also gilt mit rückwärtiger Anwendung der Euler-Formel

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \big(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\big)\big(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\big) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ &\qquad + \mathrm{i}\big(\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)\big).\end{aligned}$$

Vergleicht man links und rechts dieser Gleichung jeweils den Real- und den Imaginärteil, so ergeben sich gleich beide Additionstheoreme. □

Die Eigenschaften aus Teil (c) des obigen Satzes sind sehr wichtig und bekommen deshalb einen eigenen Namen.

Definition 26.3. *Eine Funktion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ heißt*

(a) gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $f(-x) = f(x)$.*

(b) ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $f(-x) = -f(x)$.*

Satz 26.4. *(a) Für alle $x \in (0, 2)$ gilt $\sin(x) > x - x^3/3! > 0$.*

(b) Die Funktion $\cos$ hat eine kleinste strikt positive Nullstelle ξ_0.

Beweis. (a) Sei $x \in (0,2)$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x^2 < 4 \leq 4n^2 \leq 4n^2 + 2n = 2n(2n+1)$$

und deshalb $x^2/2n(2n+1) < 1$. Multiplizieren wir diese Ungleichung nun mit $x^{2n-1}/(2n-1)! > 0$ durch, so erhalten wir

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} < \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Damit ist

$$\sin(x) = \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right)}_{>0} + \cdots > x - \frac{x^3}{3!} > 0.$$

(b) Wir beobachten zunächst, dass aus (a)

$$\sin(1) > 1 - \frac{1}{3!} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

folgt. Damit gilt mit dem Additionstheorem und mit Satz 26.2 (b)

$$\begin{aligned}\cos(2) &= \cos(1+1) = \cos^2(1) - \sin^2(1) = \cos^2(1) + \sin^2(1) - 2\sin^2(1)\\ &= 1 - 2\sin^2(1) < 1 - 2 \cdot \frac{5^2}{6^2} = 1 - \frac{50}{36} < 0.\end{aligned}$$

Da außerdem $\cos(0) = 1 > 0$ gilt und cos eine stetige Funktion ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in (0,2)$ mit $\cos(\xi) = 0$.

Nun haben wir also eine Nullstelle, sind aber noch nicht fertig, denn wir wollen ja zeigen, dass es eine *kleinste* positive Nullstelle gibt. Dazu setzen wir $M := \{\eta > 0 : \cos(\eta) = 0\}$. Nach dem oben Gezeigten wissen wir, dass $M \neq \emptyset$ ist. Da M außerdem durch Null nach unten beschränkt ist, existiert also $\xi_0 := \inf M$. Zu zeigen ist noch, dass ξ_0 selbst eine Nullstelle des Cosinus ist, dass also $\xi_0 \in M$ und damit das Minimum von M ist. Da ξ_0 das Infimum ist, gibt es nach Satz 2.17 für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi_n \in M$ mit $\xi_0 \leq \xi_n \leq \xi_0 + 1/n$. Insbesondere konvergiert diese Folge (ξ_n) gegen ξ_0. Nun ist aber die Cosinus-Funktion stetig, d. h.

$$\cos(\xi_0) = \lim_{n\to\infty} \cos(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Also ist $\xi_0 = \min M$ und schließlich ist ξ_0 strikt positiv, da $\xi_0 \geq 0$ ist und $\xi_0 = 0$ wegen $\cos(0) = 1$ nicht sein kann. $\square$

Das Ergebnis des vorstehenden Satzes gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 26.5. *Die Zahl*
$$\pi := 2\xi_0$$
heißt Pi.

Da nach obigem Satz $\xi_0 \in (0,2)$ liegt, wissen wir bereits, dass π echt zwischen 0 und 4 liegt, tatsächlich ist π eine irrationale Zahl, deren Wert ungefähr $3,1415\ldots$ beträgt.
Wir haben nun also nach Definition $\cos(\pi/2) = 0$ und dank $\pi/2 \in (0,2)$ und Satz 26.4 (a) außerdem $\sin(\pi/2) > 0$. Wir können diesen Wert sogar ausrechnen, denn nach dem trigonometrischen Pythagoras gilt

$$1 = \sin^2(\pi/2) + \cos^2(\pi/2) = \sin^2(\pi/2), \quad \text{also} \quad \sin(\pi/2) = 1,$$

da der Wert nicht negativ und somit nicht -1 sein kann. Kombiniert man nun dieses Wissen mit den Additionstheoremen, so sieht man schnell ein, dass die folgenden Identitäten gelten.

Satz 26.6. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \sin(x + \pi/2) &= \cos(x), & \cos(x + \pi/2) &= -\sin(x),\\ \sin(x+\pi) &= -\sin(x), & \cos(x+\pi) &= -\cos(x),\\ \sin(x+2\pi) &= \sin(x), & \cos(x+2\pi) &= \cos(x). \end{aligned}$$

Auch diese Eigenschaft von Sinus und Cosinus, dass die Funktionen bei einer geeigneten Verschiebung im Argument unverändert bleiben, bekommt einen Namen.

Definition 26.7. *Eine Funktion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ heißt* periodisch *mit* Periode $L \in \mathbb{K}$ *oder kurz* L-periodisch*, wenn für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $f(x+L) = f(x)$.*

Damit sind Cosinus und Sinus beide 2π-periodisch.

Satz 26.8. *Der Cosinus hat in $[0,\pi]$ genau eine Nullstelle, nämlich $\pi/2$.*

Beweis. Es sei $\eta \in [0,\pi]$ eine Nullstelle des Cosinus. Dann gilt nach Satz 26.4 sofort $\eta \geq \pi/2$. Wir setzen $\tilde{\eta} := \pi - \eta$. Dann ist $\tilde{\eta} \in [0, \pi/2]$. Außerdem ist nach Satz 26.6 und da der Cosinus eine gerade Funktion ist

$$\cos(\tilde{\eta}) = \cos(-\eta + \pi) = -\cos(-\eta) = -\cos(\eta) = 0.$$

Somit muss aber $\tilde{\eta} = \pi/2$ und damit auch $\eta = \pi/2$ sein. □

Nun haben wir das gesamte Rüstzeug zusammen, um sämtliche Nullstellen von Sinus und Cosinus zu bestimmen und das sind ganz schön viele.

Satz 26.9. *Es gilt*

(a) $\cos(x) = 0 \iff x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\sin(x) = 0 \iff x = k\pi$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Die Beweisrichtung von rechts nach links ergibt sich in beiden Fällen sofort aus Satz 26.6. Wir beweisen also jeweils nur noch von links nach rechts.

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) = 0$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ gilt. (Wer sich noch an die Gaußklammer erinnert, kann $k = \lfloor x/\pi \rfloor$ nehmen.) Setze nun $\eta := x - k\pi$. Dann gilt $\eta \in [0, \pi]$ und

$$\cos(\eta) = \cos(x - k\pi) = \cos(x)\cos(-k\pi) - \sin(x)\sin(-k\pi) = 0,$$

da $\cos(x) = 0$ und $\sin(-k\pi) = 0$ gilt. Nach Satz 26.8 ist damit $\eta = x - k\pi = \pi/2$, d. h. $x = k\pi + \pi/2$.

(b) Für die entsprechende Aussage für den Sinus müssen wir die Arbeit nicht wiederholen, denn falls $\sin(x) = 0$ ist, so haben wir $\cos(x + \pi/2) = 0$. Also gibt es nach dem soeben Bewiesenen ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$x + \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

d. h. $x = k\pi$. □

Mit Hilfe von Sinus und Cosinus können wir nun noch die komplexen Zahlen etwas genauer verstehen. Insbesondere lässt sich beschreiben, was die komplexe Multiplikation anschaulich tut. Dazu erinnern wir uns erneut an die Euler-Formel

$$\mathrm{e}^{it} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

aus Satz 17.18(c). Diese liefert uns im Zusammenspiel mit dem trigonometrischen Pythagoras, vgl. Satz 26.2 (a), die folgenden Erkenntnisse.

Satz 26.10. *Für alle* $t \in \mathbb{R}$ *und alle* $z \in \mathbb{C}$ *gelten:*

(a) $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = 1$ *und* $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$.

(b) $\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$, *d. h.* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist* $2\pi\mathrm{i}$*-periodisch.*

Beweis. Alle drei Gleichheiten rechnet man mit den oben schon angegebenen Zutaten direkt nach:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| &= \big|\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)\big| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{1} = 1,\\
|\mathrm{e}^z| &= \big|\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)+\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)}\big| = |\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}||\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \cdot 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)},\\
\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} &= \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z\big(\cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi)\big) = \mathrm{e}^z(1+0) = \mathrm{e}^z.
\end{aligned}$$ □

Neben der Darstellung einer komplexen Zahl als $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, die dem kartesischen Koordinatensystem in der komplexen Zahlenebene entspricht, gibt es eine zweite Möglichkeit der Darstellung, die in Polarkoordinaten. Dazu beobachten wir zunächst anschaulich geometrisch, vgl. Abbildung 26.1, dass für jede komplexe Zahl z gilt

$$\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\varphi) \qquad \mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\varphi),$$

wobei φ den Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der Verbindungslinie zwischen z und dem Ursprung bezeichnet. Also ist

$$z = |z|\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Diese geometrische Überlegung können wir auch analytisch untermauern.

Satz 26.11. *Es sei $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Dann gibt es genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.*

Beweis$^{(*)}$. Wir setzen $w := z/|z|$ und wählen $u, v \in \mathbb{R}$ so, dass $w = u + \mathrm{i}v$. Wegen $|w| = 1$ gilt dann $|u| = |\mathrm{Re}(w)| \leq 1$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann wegen $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$ ein $\alpha \in [0, \pi]$ mit $u = \cos(\alpha)$.
Nun ist $u^2 + v^2 = |w|^2 = 1$, also haben wir $v^2 = 1 - \cos^2(\alpha) = \sin^2(\alpha)$, womit $v = \sin(\alpha)$ oder $v = -\sin(\alpha)$ gelten muss. Ist $v = \sin(\alpha)$, so setzen wir $\varphi := \alpha$, denn dann gilt

$$z = |z|w = |z|(u + \mathrm{i}v) = |z|\big(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\big) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

wobei $\varphi \in [0, \pi]$ ist.
Ist dagegen $v = -\sin(\alpha)$, so setzen wir $\varphi := -\alpha$, denn dann gilt, da der Cosinus gerade und der Sinus ungerade ist

$$z = |z|(u + \mathrm{i}v) = |z|\big(\cos(-\varphi) - \mathrm{i}\sin(-\varphi)\big) = |z|\big(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\big) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

In diesem zweiten Fall ist dabei $\varphi \in [-\pi, 0]$. Wir haben jetzt also immer ein $\varphi \in [-\pi, \pi]$ gefunden, wollten aber eigentlich den Fall $\varphi = -\pi$ ausschließen. Das ist kein Problem, denn es gilt $\cos(\pi) = \cos(-\pi)$ und $\sin(\pi) = \sin(-\pi)$, also können wir falls $\varphi = -\pi$ ist, auch $\varphi = \pi$ nehmen.
Schließlich müssen wir noch die behauptete Eindeutigkeit beweisen. Wir nehmen also an, wir hätten zwei Winkel $\phi, \psi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$. Dann ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$, d. h. wir haben $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\psi)} = 1$. Damit muss

$$\cos(\phi - \psi) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\psi)}\big) = 1 \quad \text{und} \quad \sin(\phi - \psi) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\psi)}\big) = 0$$

sein. Diese Konstellation tritt nur genau an den Stellen $\phi - \psi = 2\pi k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ auf. Da aber sowohl ϕ als auch ψ in $(-\pi, \pi]$ liegen, gilt $|\phi - \psi| < 2\pi$. Damit kommt nur der Fall $k = 0$ in Frage, was aber $\phi - \psi = 0$ und damit $\phi = \psi$ impliziert. □

Definition 26.12. *Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die nach Satz 26.11 existierende Zahl $\varphi \in (-\pi, \pi]$ heißt das* Argument *von z und wird mit* $\arg(z)$ *bezeichnet.*

Anschaulich gibt das Argument von $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ den Winkel an, in dem diese Zahl in der Gaußschen Zahlenebene zur positiven reellen Achse steht.
Wir haben damit für alle $z \in \mathbb{C}$, die nicht Null sind, mit $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}$ eine weitere Möglichkeit neben $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$ diese durch reelle Größen auszudrücken. Umgekehrt erhalten wir für $r \in (0, \infty)$ und $\phi \in (-\pi, \pi]$ mit $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ genau alle komplexen Zahlen außer der Null. Als Faustregel kann man sagen, dass diese Polardarstellung immer dann zu bevorzugen ist, wenn komplexe Zahlen multipliziert oder dividiert werden müssen, denn für zwei komplexe Zahlen $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ und $w = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ gilt

$$zw = rs\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{i\psi} = rs\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\psi)} \quad \text{und} \quad \frac{z}{w} = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}} = \frac{r}{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\psi)},$$

d. h. man muss zum Multiplizieren (Dividieren) nur die Beträge multiplizieren (dividieren) und die Argumente addieren (subtrahieren).

Nun, da wir eine Exponentialfunktion haben, stellt sich die Frage nach einem komplexen Logarithmus. Dies ist nicht so einfach wie im reellen, denn durch die Periodizität der Exponentialfunktion wird der Logarithmus im Komplexen mehrdeutig. Zuerst definieren wir die Logarithmen aber ganz abstrakt.

Definition 26.13. (*) *Es sei $w \in \mathbb{C}$. Jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{e}^z = w$ heißt ein* Logarithmus *von w.*

Nun wollen wir natürlich wissen, wie man einen solchen Logarithmus finden kann. Wir suchen also für ein vorgegebenes $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (einen Logarithmus für Null wird es natürlich auch im komplexen nicht geben, da ja $\mathrm{e}^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, vgl. Satz 17.18 (b)) also alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\mathrm{e}^z = w$. Sei dazu $r := |w|$ und $\phi := \arg(w) \in (-\pi, \pi]$. Weiter setzen wir z in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an. Dann soll also gelten

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}.$$

Also müssen insbesondere die beiden letzten Ausdrücke in dieser Gleichungskette den selben Betrag haben, was wegen $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}| = 1$, sofort $r = \mathrm{e}^x$, also

$$\mathrm{Re}(z) = x = \ln(r) = \ln(|w|)$$

liefert. Es bleibt also noch y zu bestimmen. Da nun $\mathrm{e}^x = r$ gilt, muss auch $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ gelten, d. h. wir haben $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y-\phi)} = 1$. Wie am Schluss des Beweises von Satz 26.11 folgt daraus $y - \phi = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Als Lösungen unserer Gleichung kommen also nur solche Zahlen $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x = \ln(|w|)$ und

$$y = \phi + 2k\pi = \arg(w) + 2k\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

in Betracht. Dass alle diese Zahlen tatsächlich Logarithmen von w sind, rechnet man schließlich einfach nach:

$$\mathrm{e}^{\ln(|w|)+\mathrm{i}(\arg(w)+2k\pi)} = \mathrm{e}^{\ln(|w|)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(w)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi} = |w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(w)} \cdot 1 = w.$$

Da der komplexe Logarithmus mehrdeutig, und damit gar keine Funktion mehr ist, tritt das gleiche Phänomen auch beim Versuch auf, eine allgemeine Potenzfunktion in $\mathbb{C}$ zu definieren. Wir wollen das hier nicht weiter vertiefen, sondern nur vorwarnen, dass in diesem Zusammenhang größte Vorsicht angeraten ist.

Wir können nun weitere trigonometrische Funktionen definieren.

Definition 26.14. *Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ heißt die Funktion*

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

der Tangens *und für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$*

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

der Cotangens *von x.*

Nach der Quotientenregel gilt

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) > 0$$

für alle x im Definitionsbereich des Tangens. Also ist der Tangens insbesondere auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton wachsend und da

$$\lim_{x \to -\pi/2+} \tan(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \pi/2-} \tan(x) = \infty$$

gilt, ist $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$. Somit existiert die Umkehrfunktion $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Diese bekommt wieder einen Namen.

Definition 26.15. *Die Umkehrfunktion des Tangens auf $(-\pi/2, \pi/2)$*

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

heißt Arcustangens.

Die Ableitung des Arcustangens können wir nun nach der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion (Satz 23.10) bestimmen:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

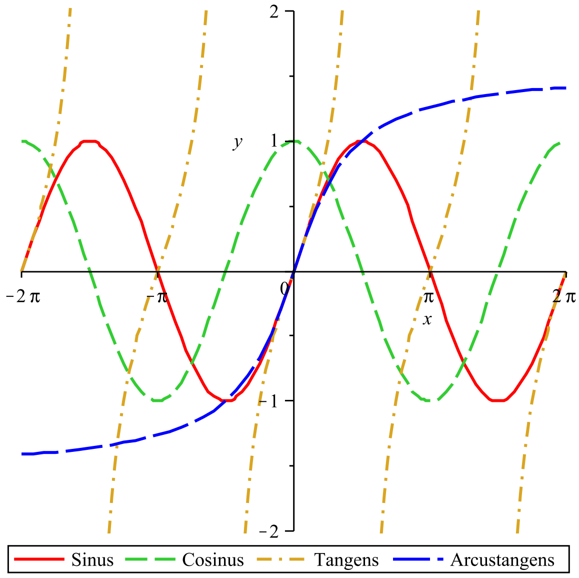

Abbildung 26.2.: Die Graphen von Sinus, Cosinus, Tangens und Arcustangens

Überraschenderweise erhalten wir als Ableitung eine gebrochen-rationale Funktion und nichts Trigonometrisches.
In der gleichen Weise kann man auch Umkehrfunktionen von Sinus und Cosinus definieren, wenn man sich im Definitionsbereich einschränkt. So sind

$$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1] \quad \text{und} \quad \cos : [0,\pi] \to [-1,1]$$

bijektiv. Das rechtfertigt die folgende Definition.

Definition 26.16.

$$\begin{aligned}\arcsin &:= \sin^{-1} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2] \quad \text{(Arcussinus)},\\ \arccos &:= \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi] \quad \text{(Arcuscosinus)}.\end{aligned}$$

Die Ableitungen berechnen sich wieder mit Hilfe der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion zu

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und genauso

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

für alle $|x| < 1$.
Man beachte, dass die Auswahl des Bereichs, in dem man diese Funktionen invertiert, willkürlich ist. Üblicherweise werden zwar die hier gewählten Intervalle

verwendet, aber welcher Bereich gewählt wurde, sollte bei Verwendung der Arcusfunktionen am besten immer dazugesagt werden. Hier ist Wachsamkeit angesagt!

Zum Abschluss definieren wir noch die hyperbolischen Funktionen.

Definition 26.17. *Für alle $x \in \mathbb{K}$ definieren wir*

$$\begin{aligned} \cosh(x) &:= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) && \text{(Cosinus hyperbolicus)}, \\ \sinh(x) &:= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) && \text{(Sinus hyperbolicus)}, \\ \tanh(x) &:= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} && \text{(Tangens hyperbolicus)}. \end{aligned}$$

Diese sind über die komplexe Exponentialfunktion eng mit den trigonometrischen Funktionen verwandt.

Übungsaufgabe 26.18. Zeigen Sie die folgenden Identitäten für alle $z = x+y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

(b) $\sin(z) = \sin(x + y\mathrm{i}) = \sin(x)\cosh(y) + \cos(x)\sinh(y)\mathrm{i}$.

(c) $\cos(z) = \cos(x + y\mathrm{i}) = \cos(x)\cosh(y) - \sin(x)\sinh(y)\mathrm{i}$.

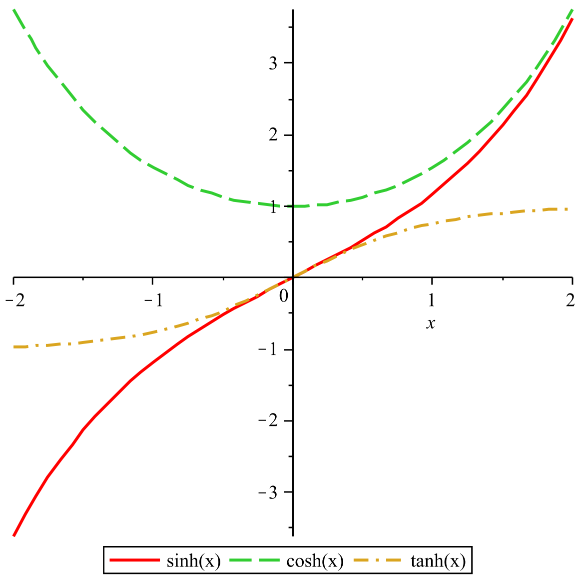

Abbildung 26.3.: Die Graphen von Sinus, Cosinus und Tangens hyperbolicus

Wir berechnen auch hier die Ableitungen:

$$\cosh'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \sinh(x) \quad \text{und} \quad \sinh'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \cosh(x),$$

sowie

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, und weiterhin die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$
$$\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

Damit ist der Tangens hyperbolicus streng motonon wachsend auf $\mathbb{R}$ und es gilt $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$. Also existiert auch hier die Umkehrfunktion

$$\operatorname{Artanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R} \quad \textit{(Areatangens hyperbolicus)}.$$

Die Ableitung ergibt sich hier zu

$$\operatorname{Artanh}'(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{Artanh}(x)))} = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1.$$

In diesem Abschnitt haben wir nun so viele neue Funktionen eingeführt, dass wir diese noch einmal alle in einer Tabelle zusammenfassen wollen:

Name	Symbol	Def.-bereich	Bild	Ableitung
Sinus	sin	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	cos
Cosinus	cos	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$-\sin$
Tangens	tan	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
Cotangens	cot	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{\sin^2} = -1 - \cot^2$
Arcussinus	arcsin	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcuscosinus	arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arcustangens	arctan	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{1}{1+x^2}$
Sinus hyperbolicus	sinh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	cosh
Cosinus hyp.	cosh	$\mathbb{R}$	$[1, \infty)$	sinh
Tangens hyp.	tanh	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$
Areasinus hyp.	Arsinh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
Areacosinus hyp.	Arcosh	$[1, \infty)$	$[0, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
Areatangens hyp.	Artanh	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1-x^2}$

27. Höhere Ableitungen

Wir wollen in diesem Abschnitt das Konzept der zweiten, dritten und allgemein n-ten Ableitung einer Funktion einführen.

Definition 27.1. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{K}$ sei differenzierbar auf I.*

(a) Die Funktion f heißt in x_0 zweimal differenzierbar, *falls die Funktion $f' : I \to \mathbb{K}$ in x_0 wiederum differenzierbar ist. In diesem Fall heißt $f''(x_0) := (f')'(x_0)$ die* zweite Ableitung *von f in x_0.*

(b) Ist f in jedem Punkt $x \in I$ zweimal differenzierbar, so heißt f zweimal differenzierbar auf *I und die Funktion $x \mapsto f''(x)$ ist die* zweite Ableitung *von f* auf *I.*

(c) Für $n \geq 3$ beliebig definieren wir rekursiv: Die Funktion f heißt in x_0 (bzw. auf I) n mal differenzierbar, *falls sie $(n-1)$ mal differenzierbar ist und die Funktion $f^{(n-1)}$ in x_0 (bzw. auf I) wieder differenzierbar ist. In diesem Fall heißt $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$ die n-te* Ableitung *von f in x_0, bzw. $x \mapsto f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von f auf I.*

Häufig ist es praktisch die Funktion selbst als ihre nullte Ableitung aufzufassen, also

$$f^{(0)} := f.$$

Beispiel 27.2. (a) Ist $f(x) = \sin(x)$, so gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x), & f''(x) &= -\sin(x), \\ f'''(x) &= -\cos(x), & f^{(4)}(x) &= \sin(x) = f(x). \end{aligned}$$

(b) Betrachten wir auf $\mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ falls } x \geq 0 \\ -x^2, \text{ falls } x < 0, \end{cases}$$

so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 2|x|$, $x \in \mathbb{R}$ (nachrechnen!), aber da die Betragsfunktion in Null nicht differenzierbar ist (vgl. Beispiel 23.3 (b)), ist diese Funktion in Null nicht mehr differenzierbar, d. h. f ist in $x_0 = 0$ nicht zweimal differenzierbar.

(c) Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, d. h. f sei durch eine Potenzreihe gegeben, von der wir annehmen wollen, dass der Konvergenzradius $r > 0$ ist. Wir setzen wieder $I := (x_0 - r, x_0 + r)$. In Satz 25.1 haben wir gesehen, dass f dann auf I differenzierbar ist mit

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1}, \quad x \in I,$$

und dass dies wieder eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r ist. Also ist nach nochmaliger Anwendung dieses Satzes f sogar zweimal auf I differenzierbar mit

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x - x_0)^{n-2}, \quad x \in I.$$

Durch weitere Iteration dieses Arguments (Formalisten mögen eine saubere Induktion führen), ist dann f auf I beliebig oft differenzierbar und es gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-(k-1))(x - x_0)^{n-k}, \quad x \in I.$$

Setzt man speziell $x = x_0$ ein, so erhält man die für das Weitere wichtige Beziehung

$$f^{(k)}(x_0) = a_k k(k-1) \cdots 2 \cdot 1 = k! a_k.$$

Diese verrät uns insbesondere die Gestalt der Koeffizienten a_k für Funktionen, die durch eine Potenzreihe dargestellt werden:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

(d) Wir betrachten auf $I = [0, \infty)$ die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^{3/2} \sin(1/x), & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

vgl. Abbildung 27.1.

Dann ist f in allen $x > 0$ offensichtlich differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin\Big(\frac{1}{x}\Big) + x^{3/2} \cos\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin\Big(\frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\Big(\frac{1}{x}\Big). \end{aligned}$$

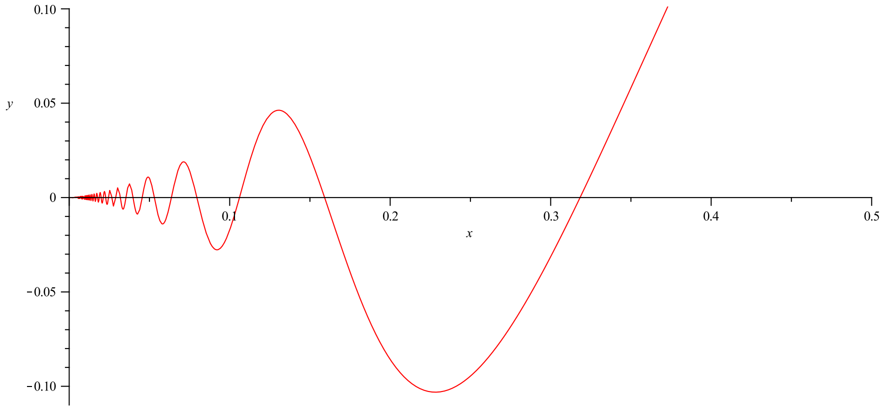

Abbildung 27.1.: Der Graph des „Flattersinus'" aus Beispiel 27.2 (d)

Um f auf Differenzierbarkeit in 0 zu untersuchen, betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| &= \lim_{x\to 0}\left|\frac{x^{3/2}\sin(1/x)}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \\ &\leq \lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0.\end{aligned}$$

Da der Grenzwert selbst über etwas Positives gebildet wird, muss er auch größer oder gleich Null und damit gleich Null sein. Somit ist f auf ganz $[0,\infty)$ differenzierbar, wobei $f'(0) = 0$ gilt.

Anhand dieses Beispiels sieht man nun, dass etwas Abstruses passieren kann. Die Funktion $f' : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist nämlich in Null nicht nur nicht noch einmal differenzierbar, sie ist nicht einmal mehr stetig, so dass wir über Differenzierbarkeit erst gar nicht mehr nachzudenken brauchen. Um das zu sehen, betrachten wir die Folge $x_n := 1/n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}f'(x_n) &= \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\sin(n\pi) - \sqrt{n\pi}\cos(n\pi) = -\sqrt{n\pi}\cos(n\pi) \\ &= -(-1)^n\sqrt{n\pi} = (-1)^{n+1}\sqrt{n\pi}.\end{aligned}$$

Also ist die Funktion f' auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ nicht beschränkt, sie kann also nach Satz 20.7 nicht stetig sein.

Das schlechte Differenzierbarkeitsverhalten der Funktion in (d) des obigen Beispiels nehmen wir zum Anlass, um einen stärkeren Differenzierbarkeitsbegriff zu formulieren, der so „hässliche" Funktionen ausschließt.

Definition 27.3. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{K}$ eine Funktion.*

(a) *Für $n \in \mathbb{N}$ heißt die Funktion f n-*mal stetig differenzierbar *auf I, falls sie n-mal differenzierbar auf I ist und die Funktion $f^{(n)}$ auf I stetig ist.*

Wir setzen $\mathrm{C}^n(I, \mathbb{K}) := \{f : I \to \mathbb{K} : f\ n\text{-mal stetig differenzierbar auf } I\}$.

(b) *Wir setzen*

$$\mathrm{C}^0(I, \mathbb{K}) := \mathrm{C}(I, \mathbb{K}) \quad \textit{und} \quad \mathrm{C}^\infty(I, \mathbb{K}) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathrm{C}^n(I, \mathbb{K})$$

und nennen eine Funktion $f \in \mathrm{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ beliebig oft differenzierbar.

Auch hier wird, wenn der betrachtete Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ aus dem Zusammenhang klar ist, oft nur $\mathrm{C}^n(I)$ bzw. $\mathrm{C}^\infty(I)$ geschrieben.

Bemerkung 27.4. (a) Da die Differenzierbarkeit insbesondere Stetigkeit impliziert, sind für eine Funktion $f \in \mathrm{C}^n(I, \mathbb{K})$ alle Ableitungen $f', f'', \dots, f^{(n)}$ stetige Funktionen auf I.

(b) Oft hört man statt „beliebig oft“ auch die Bezeichnung „unendlich oft“ differenzierbar. Diese ist etwas unglücklich, denn sie hört sich so an, als existiere auch eine „unendlichste“ Ableitung. $f \in \mathrm{C}^\infty(I)$ heißt aber eben nur, dass $f^{(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf I existiert und dort stetig ist.

28. Der Satz von Taylor

Dieser Abschnitt stellt mit dem Satz von Taylor einen fundamental wichtigen Satz der Analysis vor, der sowohl in abstrakten als auch in ganz angewandten Zusammenhängen immer wieder gebraucht wird. Es geht dabei darum komplizierte Funktionen durch möglichst angepasste Polynome zu nähern. Vor allem die PhysikerInnen werden mit diesem Satz sehr häufig zu tun bekommen.
Wir haben in Beispiel 27.2 (c) gesehen, dass eine Funktion, die auf einem Intervall durch eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ gegeben ist, immer Koeffizienten a_n der Form

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

aufweist. Haben wir umgekehrt eine Funktion aus $\mathrm{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ vorliegen, können wir für ein $x_0 \in I$ obige Koeffizienten ausrechnen und die dadurch gegebene Potenzreihe betrachten. Diese bekommt zunächst einen Namen.

Definition 28.1. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in \mathrm{C}^\infty(I, \mathbb{K})$. Die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

heißt dann die Taylorreihe von f um x_0.

Nun stellt sich sofort die

Frage: Gilt in der Situation obiger Definition nun in einer Umgebung von x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ ?$$

Die **Antwort** ist ein entschiedenes *manchmal*. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 28.2. Wir wählen $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ und

$$f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, \text{ falls } x \neq 0, \\ 0, \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist f offensichtlich in jedem Punkt $x \neq 0$ differenzierbar, aber wir sind ja gerade an $x_0 = 0$ interessiert. Um Differenzierbarkeit in Null zu untersuchen, müssen wir über den Differenzenquotienten gehen. Es ist für alle $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x} = \frac{1/x}{\mathrm{e}^{1/x^2}}.$$

Da der Nenner dieses Ausdrucks für x gegen null bestimmt nach unendlich divergiert, ist die Bedingung (II) für die Regel von de l'Hospital aus Satz 24.11 erfüllt. Dieser Satz liefert dann

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{\mathrm{e}^{1/x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{-1/x^2}{\mathrm{e}^{1/x^2} \cdot (-2/x^3)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} \cdot \mathrm{e}^{-1/x^2} = 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Mittels Induktion kann man sogar zeigen, dass f in null beliebig oft differenzierbar ist und $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Also ist in diesem Fall die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0 \neq f(x) \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Für diese Funktion stellt die Taylorreihe also in keiner auch noch so kleinen Umgebung des Nullpunktes die Funktion f dar.

Da die Taylorreihe nach einem vielversprechenden Mittel aussieht, um Potenzreihenentwicklungen von Funktionen auszurechnen, und da diese ein unverzichtbares Hilfsmittel der Analysis, der Physik, der Ingenieurwissenschaften und vieler anderer Bereiche sind, hätten wir gerne ein Kriterium, wann die Taylorreihe brav zu ihrer Funktion passt. Ein solches folgt aus dem folgenden Satz.

Satz 28.3 (Satz von Taylor)**.** *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x, x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal differenzierbar auf I. Dann gibt es ein ξ zwischen x und x_0, so dass gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Bemerkung 28.4. (a) Im Fall $n = 0$ ist dieser Satz genau der Mittelwertsatz (vgl. Satz 24.5).

(b) Der Wert von ξ hängt natürlich jeweils von x_0, x und n ab und ist im Allgemeinen nicht zu bestimmen. Das wäre auch sehr erstaunlich, denn dann wäre ja die Berechnung von f auf den Schwierigkeitsgrad eines Polynoms zurückgeführt, was dann für einfach nur $(n+1)$-mal differenzierbare Funktionen doch ein bisschen zu simpel wäre. Im ξ steckt sozusagen die Komplexität der Funktion f.

Beweis von Satz 28.3. Wir betrachten ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Fall $x_0 < x$ und setzen

$$\varrho := \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}\Big(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\Big).$$

Dann gilt

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \varrho \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

und unsere Aufgabe ist es ein $\xi \in (x_0, x)$ zu finden, so dass $\varrho = f^{(n+1)}(\xi)$ ist. Dazu schreiben wir die letzte Gleichung so um, dass auf der rechten Seite Null steht und definieren dann die Hilfsfunktion

$$g(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \varrho \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \in [x_0, x].$$

Dann ist nach den Voraussetzungen $g \in \mathrm{C}([x_0, x], \mathbb{R})$ und da in g höchstens die n-te Ableitung von f auftaucht, ist g sogar noch einmal differenzierbar auf $[x_0, x]$. Außerdem gilt direkt $g(x) = f(x) - f(x) = 0$ und so wie wir ϱ gewählt haben gilt auch $g(x_0) = 0$. Nach dem Satz von Rolle gibt es also ein $\xi \in (x_0, x)$, so dass

$$g'(\xi) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0$$

gilt.
Andererseits ist (nachrechnen!)

$$g'(t) = \varrho \frac{(x-t)^n}{n!} - f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!},$$

womit

$$0 = g'(\xi) = \varrho \frac{(x-\xi)^n}{n!} - f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-\xi)^n}{n!}$$

und schließlich $\varrho = f^{(n+1)}(\xi)$ folgt. □

Wir wollen diesen Satz nun in konkreten Situationen anwenden. Zunächst einmal kann man den Satz dazu verwenden, den einen oder anderen Reihenwert zu bestimmen. Wir betrachten hierzu das folgende Beispiel.

Beispiel 28.5. Wir untersuchen auf $(-1, \infty)$ die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ um $x_0 = 0$. Um den Satz anwenden zu können, müssen wir die ersten $n+1$, also alle, Ableitungen von f ausrechnen. Wir finden für $x > -1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}$$

und per Induktion allgemein

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist also für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Nach dem Satz von Taylor gilt nun (mit $x = 1$):

$$\begin{aligned} \ln(2) = f(1) &= f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} 1^{n+1} \qquad (28.1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)} =: \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + c_n \end{aligned}$$

mit einem $\xi \in (0,1)$. Unabhängig davon was das ξ nun genau ist, haben wir in jedem Fall $1 + \xi > 1$ und damit auch $(1+\xi)^{n+1} > 1$. Deshalb gilt

$$|c_n| = \left| \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Damit können wir in (28.1) n gegen unendlich streben lassen und erhalten mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

den Reihenwert der alternierenden harmonischen Reihe (vgl. Beispiel 12.1).
Um etwaigen Mäkeleien zuvorzukommen: Wer meint, dass das aber viel Aufwand für so einen mickrigen Reihenwert war, hat noch nie selbst versucht einen Reihenwert zu bestimmen.
Abschließend sei darauf hingewiesen, dass wir damit unser Ergebnis aus Beispiel 25.2 insofern verbessert haben, als wir nun

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für alle } x \in (-1,1]$$

und damit auch an einem Randpunkt wissen. Am anderen Randpunkt $x = -1$ ist die Reihe eine harmonische Reihe und somit divergent.

Wir haben hier schon gesehen, dass man mit dem Satz von Taylor auch andere Dinge als Potenzreihen berechnen kann, z. B. eben den obigen Reihenwert. Wir kommen nun zu einer weiteren, eher überraschenden, Anwendung des Satzes von Taylor.

Satz 28.6. $^{(*)}$ $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis$^{(*)}$. Wir wissen schon, dass $2 < \mathrm{e} < 3$ gilt. Nehmen wir nun an, es gäbe $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{e} = {}^{m}\!/\!_{n}$, so muss $n \geq 2$ sein, denn sonst wäre $\mathrm{e} \in \mathbb{N}$. Mit dem so gewählten n, $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x = 1$ und $x_0 = 0$ wenden wir nun den Satz von Taylor an. Dieser liefert ein $\xi \in (0, 1)$ mit

$$\frac{m}{n} = \mathrm{e} = f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Nun sind die Ableitungen der Exponentialfunktion zum Glück nicht schwer zu bestimmen. Wir erhalten also

$$\frac{m}{n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}$$

und nach Multiplikation dieser Gleichung mit $n!$

$$\underbrace{m(n-1)!}_{\in\mathbb{N}} = \underbrace{n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1}_{\in\mathbb{N}} + \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{n+1}.$$

Da der Ausdruck ${}^{\mathrm{e}^\xi}\!/\!_{n+1}$ strikt positiv ist, bleibt ihm damit nichts anderes übrig als selbst zu $\mathbb{N}$ zu gehören. Damit haben wir aber einen Widerspruch, denn wegen $n \geq 2$ und $\xi \in (0, 1)$ gilt

$$0 < \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{n+1} < \frac{\mathrm{e}}{n+1} \leq \frac{\mathrm{e}}{3} < 1. \qquad \square$$

Was uns immer noch fehlt, ist ein Kriterium, wann eine beliebig oft differenzierbare Funktion in einer Umgebung des Entwicklungspunktes durch ihre Taylorreihe dargestellt wird, wann also solch unangenehme Dinge wie in Beispiel 28.2 nicht passieren können. Hier ist eines.

Satz 28.7. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in \mathrm{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ eine Funktion. Weiter existiere eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in I$ gilt*

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq C^n.$$

Dann gilt für jedes $x_0 \in I$ die Identität

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{für alle } x \in J := I \cap (x_0 - {}^{1}\!/\!_{C}, x_0 + {}^{1}\!/\!_{C}).$$

Beweis. Wir müssen zunächst sicherstellen, dass die obige Potenzreihe überhaupt für alle $x \in J$ konvergiert. Das folgt direkt aus der Voraussetzung und dem Satz von Hadamard, denn

$$\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|} \leq C, \quad \text{d. h. } \limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|} \leq C$$

und damit ist der Konvergenzradius größer oder gleich $1/C$.
Sei nun $x \in J$ beliebig gewählt. Nach dem Satz von Taylor gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein ξ_n zwischen x_0 und x, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Uns bleibt nun wie im Beispiel 28.5 zu zeigen, dass der letzte Summand für n gegen unendlich gegen Null strebt. Dazu schätzen wir mit der Voraussetzung ab:

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leq C^{n+1}|x - x_0|^{n+1} = \big(C|x - x_0|\big)^{n+1}.$$

Da aber $x \in J$ ist, gilt $|x-x_0| < 1/C$, bzw. $C|x-x_0| < 1$, so dass obiger Ausdruck tatsächlich gegen Null geht, wenn n nach unendlich strebt. □

Definition 28.8. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $n \geq 1$ und $f \in \mathrm{C}^n(I, \mathbb{R})$. Dann heißt das Polynom*

$$T_n(x, x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

n-tes Taylorpolynom *von f in x_0.*

Bemerkung 28.9. (a) Das n-te Taylorpolynom hat immer höchstens Grad n, dieser kann aber auch kleiner sein. Es ist das eindeutig bestimmte Polynom p vom Grade kleiner oder gleich n, für das $p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt.

(b) Wir können mit dieser Definition den Satz von Taylor (Satz 28.3) folgendermaßen umformulieren:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ ein $\xi = \xi(x)$ zwischen x_0 und x mit

$$f(x) = T_n(x, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

(c) Die Differenz zwischen der Funktion und ihrem Taylorpolynom, also der Wert
$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
wird oft als *Restglied* bezeichnet.

Wir haben in Satz 24.3 gesehen, dass eine differenzierbare Funktion, die im Inneren eines Intervalls ein relatives Extremum hat, dort eine verschwindende Ableitung haben muss. Allerdings ist dies kein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines Extremums, d. h. es kann sein, dass die Ableitung Null ist, ohne dass an dieser Stelle tatsächlich ein relatives Extremum vorliegen muss. Um wirklich nachzuweisen, dass eine solche kritische Stelle ein relatives Extremum ist, brauchen wir genauere Hilfsmittel und auch hier hilft der Satz von Taylor.

Satz 28.10. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in \mathrm{C}^n(I,\mathbb{R})$ für ein $n \geq 2$. Weiter gelte $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, aber $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ist nun n ungerade, so hat f in x_0 kein relatives Extremum, ist n gerade, so liegt in x_0 ein relatives Extremum vor, und zwar falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ ein relatives Minimum und falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ ein relatives Maximum.*

Beweis. Da $f^{(n)}$ in x_0 stetig und I ein offenes Intervall ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq I$, so dass $f^{(n)}(x)$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$ dasselbe Vorzeichen wie $f^{(n)}(x_0)$ hat. Sei nun $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ gewählt. Dann gibt es nach dem Satz von Taylor ein ξ zwischen x und x_0 mit
$$f(x) = T_{n-1}(x,x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n.$$
Nach Voraussetzung sind aber die ersten $n-1$ Ableitungen von f in x_0 alle Null, also bleibt vom $(n-1)$-ten Taylorpolynom nur der Summand nullter Ordnung übrig, d. h. es gilt $T_{n-1}(x,x_0) = f(x_0)$ und damit
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n =: f(x_0) + c(x).$$
Da ξ zwischen x_0 und x liegt, liegt es auch in $U_\delta(x_0)$, also hat $f^{(n)}(\xi)$ dasselbe Vorzeichen wie $f^{(n)}(x_0)$. Mit diesen Überlegungen können wir nun die verschiedenen Fälle der Behauptung nacheinander untersuchen.
Ist n ungerade und $f^{(n)}(x_0) \gtrless 0$, so gilt dasselbe für $f^{(n)}(\xi)$ und damit ist
$$c(x) \begin{cases} \gtrless 0, & \text{falls } x \in (x_0, x_0+\delta), \\ \lessgtr 0, & \text{falls } x \in (x_0-\delta, x_0), \end{cases}$$
da Potenzieren mit einem ungeraden Exponenten das Vorzeichen erhält. Daraus folgt aber mit $f(x) = f(x_0) + c(x)$
$$f(x) \begin{cases} \gtrless f(x_0), & \text{falls } x \in (x_0, x_0+\delta), \\ \lessgtr f(x_0), & \text{falls } x \in (x_0-\delta, x_0). \end{cases}$$

Damit kann f in x_0 kein Extremum haben, denn die Funktionswerte von f sind auf der einen Seite von x_0 kleiner und auf der anderen Seite von x_0 größer als in x_0.
Ist dagegen n gerade, so lässt das Potenzieren mit n das Vorzeichen verschwinden. Also gilt für $f^{(n)}(x_0) \gtreqless 0$ wegen $f^{(n)}(\xi) \gtreqless 0$ dann $c(x) \gtreqless 0$ unabhängig davon auf welcher Seite von x_0 das x liegt. Das liefert schließlich $f(x) \gtreqless f(x_0)$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ und damit die Behauptung. $\square$

29. Das Regelintegral – Teil 1: Treppenfunktionen

Wir haben nun zunächst mal unsere Betrachtungen zur Differenziation abgeschlossen und wollen uns einem auf den ersten Blick ganz anderen Problem zuwenden, der Berechnung von Flächeninhalten von krummlinig begrenzten Flächen. Wir werden jedoch feststellen, dass sich uns dabei ein sehr überraschender Zusammenhang zur Differenziation offenbart.
Wir betrachten das Problem der Flächenberechnung unter einem Funktionsgraphen, d. h. für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und eine gegebene beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wollen wir den Flächeninhalt der Fläche berechnen, die von der x-Achse, den beiden Geraden $x = a$ und $x = b$ und dem Graphen der Funktion eingeschlossen wird.[1]

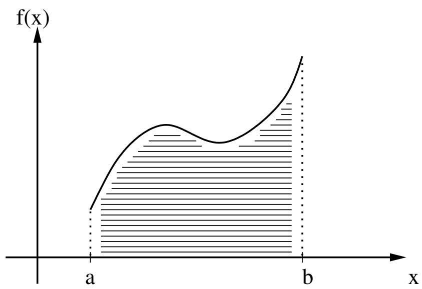

Abbildung 29.1.: Zu bestimmende Fläche unter dem Funktionsgraphen

Wir werden dazu zunächst ganz einfache Funktionen, sogenannte Treppenfunktionen, betrachten, für die sich der Flächeninhalt elementar-geometrisch bestimmen lässt. Den Übergang zu allgemeineren Funktionen wird dann im folgenden Kapitel wieder durch einen Grenzwertprozess gewährleistet, bei dem wir unser bisher gesammeltes Wissen über Funktionenfolgen gewinnbringend verwenden können. Dabei werden wir den oben schon angedeuteten Zusammenhang zur Differenzialrechnung entdecken, und so schließlich tatsächlich in der Lage sein, den Flächeninhalt unter Umständen exakt angeben zu können.
Wie schon vorher verwenden wir wieder den Buchstaben $\mathbb{K}$, wann immer man sowohl $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{C}$ einsetzen kann. Außerdem seien in diesem gesamten Kapitel

[1] Genaugenommen geht es um die signierte Fläche, d. h. es sollen Flächen oberhalb der x-Achse positiv und Flächen unterhalb der x-Achse negativ zählen.

$a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben und wir bezeichnen mit I das abgeschlossene Intervall $[a, b]$.

Definition 29.1. *(a) Eine endliche Menge $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq I$ heißt* Zerlegung *des Intervalls I, wenn gilt*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

(b) Sind Z und $\tilde{Z}$ zwei Zerlegungen des Intervalls I, so heißt $\tilde{Z}$ eine Verfeinerung *von Z, falls $Z \subseteq \tilde{Z}$ gilt.*

(c) Sind Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen von I, so ist auch $Z := Z_1 \cup Z_2$ eine Zerlegung dieses Intervalls (warum?) und heißt die gemeinsame Verfeinerung *von Z_1 und Z_2.*

(d) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ heißt Treppenfunktion, *falls es eine Zerlegung $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von I gibt, so dass $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ konstant ist.*

Eine solche Zerlegung Z heißt zu f passend.

(e) Die Menge aller Treppenfunktionen auf I bezeichnen wir mit $\mathcal{T}(I)$.

(f) Ist $A \subseteq \mathbb{K}$, so heißt $\mathbf{1}_A : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ mit

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \textit{falls } x \in A, \\ 0, & \textit{falls } x \notin A \end{cases}$$

charakteristische Funktion *von A.*

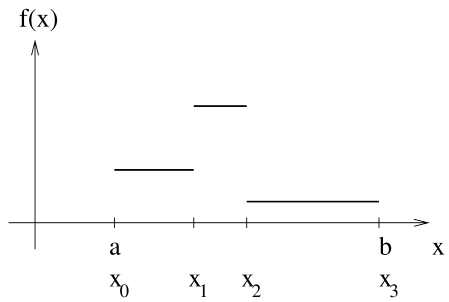

Abbildung 29.2.: Beispiel einer Treppenfunktion

Bemerkung 29.2. (a) Man beachte, dass bei der Definition einer Treppenfunktion die Werte von f an den Zerlegungsstellen $x_0, \ldots, x_n$ keinen Einschränkungen unterliegen. Hier kann f irgendwelche Werte annehmen.

(b) Ist $A \subseteq I$ eine endliche Vereinigung von Intervallen, so ist $\mathbf{1}_A$ eine Treppenfunktion.

(c) Ist $f : I \to \mathbb{K}$ eine Treppenfunktion, so können wir mit einer zu f passenden Zerlegung $\{x_0, \dots, x_n\}$ und geeigneten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ diese schreiben als

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{(x_{j-1}, x_j)}(x) \quad \text{für alle } x \in I \setminus \{x_0, \dots, x_n\}.$$

(d) Hat man eine Treppenfunktion f auf I und eine zu f passende Zerlegung von I, so passt auch jede Verfeinerung dieser Zerlegung wieder zu f.

Die Fläche unter dem Graph einer Treppenfunktion ist leicht zu bestimmen, es sind nur einige Rechteckflächen zu bestimmen. Das führt auf die folgende Definition.

Definition 29.3. *Sei $f \in \mathcal{T}(I)$ mit einer Darstellung $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{1}_{(x_{j-1}, x_j)}(x)$ für eine passende Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$. Dann heißt*

$$\int^{Z} f := \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1})$$

das Integral von f bezüglich Z.

Damit aus dieser Definition eine sinnvolle Setzung des Integrals von f werden kann, müssen wir nun natürlich als erstes sicherstellen, dass der Wert des Integrals für jede zu f passende Zerlegung derselbe ist. Das ist der Inhalt des ersten Lemmas in diesem Abschnitt.

Lemma 29.4. *Ist $f \in \mathcal{T}(I)$ eine Treppenfunktion und sind Z_1 und Z_2 zwei zu f passende Zerlegungen von I, so gilt*

$$\int^{Z_1} f = \int^{Z_2} f.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass Z_2 eine Verfeinerung von Z_1 um genau einen Punkt ist, d. h. es gilt

$$Z_1 = \{x_0, \dots, x_n\} \quad \text{und} \quad Z_2 = \{x_0, \dots x_{k-1}, y, x_k, \dots, x_n\}$$

für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ und ein $y \in (x_{k-1}, x_k)$. Dann gilt, da schon Z_1 zu f passend war, dass die jeweils konstanten Werte von $f|_{(x_{k-1}, y)}$, $f|_{(y, x_k)}$ und $f|_{(x_{k-1}, x_k)}$ alle gleich sind. Also erhalten wir mit der vorstehenden Definition

$$\begin{aligned}\int^{Z_1} f &= \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{k-1} c_j(x_j - x_{j-1}) + c_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{j=k+1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} c_j(x_j - x_{j-1}) + c_k(x_k - y) + c_k(y - x_{k-1}) + \sum_{j=k+1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}) = \int^{Z_2} f,\end{aligned}$$

d. h. die Behauptung in diesem Spezialfall.
Ist Z_2 eine beliebige Verfeinerung von Z_1, so können wir einfach das obere Argument mehrfach anwenden, und so immer noch einen Punkt mehr dazu packen. Ganz formal sauber würde man dazu eine Induktion machen.
Wir wenden uns dem allgemeinen Fall zu, dass Z_1 und Z_2 beide zu f passen, aber keine der beiden eine Verfeinerung der anderen ist. In diesem Fall betrachten wir die gemeinsame Verfeinerung $Z := Z_1 \cup Z_2$. Auch diese ist dann zu f passend und wir erhalten mit obigen Überlegungen

$$\int^{Z_1} f = \int^{Z} f = \int^{Z_2} f$$

und sind fertig. □

Definition 29.5. *Sei $f \in \mathcal{T}(I)$ und Z eine zu f passende Zerlegung. Dann heißt*

$$\int_I f := \int^{Z} f$$

das Integral von f über I.

Bemerkung 29.6. Für das Integral gibt es mehrere synonyme Schreibweisen. Es ist

$$\int_I f =: \int_a^b f =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =: \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir wollen in den folgenden Sätzen ein paar erste Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen beweisen.

Satz 29.7. *Seien $f, g \in \mathcal{T}(I)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Dann sind auch $\lambda f + \mu g$, $|f|$, $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ und $\overline{f}$ Treppenfunktionen auf I und es gilt*

(a) $\displaystyle\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$ (Linearität des Integrals),

(b) $\displaystyle\left|\int_I f\right| \le \int_I |f|$ (Dreiecksungleichung).

(c) $\int_I \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}\Big(\int_I f\Big), \quad \int_I \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\Big(\int_I f\Big), \quad$ *und* $\quad \int_I \overline{f} = \overline{\int_I f}.$

Beweis. Übung.

Satz 29.8. *Sei $f \in \mathcal{T}(I)$ eine Treppenfunktion. Dann gilt*

$$\Big|\int_I f\Big| \leq (b-a) \cdot \sup_{x\in I} |f(x)|. \qquad \text{(„Standardabschätzung“)}$$

Beweis. Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine zu f passende Zerlegung von I und $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{(x_{j-1},x_j)}(x)$ für geeignete $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$. Dann gilt nach der Defintion des Integrals für Treppenfunktionen

$$\Big|\int_I f\Big| = \Big|\int^Z f\Big| = \Big|\sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1})\Big|.$$

Also erhalten wir mit der Dreiecksungleichung für Summen und dank einer freundlichen Teleskopsumme

$$\begin{aligned}\Big|\int_I f\Big| &\leq \sum_{j=1}^n |c_j||x_j - x_{j-1}| \leq \sum_{j=1}^n \max\{|c_1|, \dots |c_n|\} \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sup_{x\in I} |f(x)| \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \sup_{x\in I} |f(x)|(x_n - x_0) = \sup_{x\in I} |f(x)|(b-a).\end{aligned}$$ □

Satz 29.9. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$. Dann gilt $\int_I f \leq \int_I g$.*

Beweis. Seien Z eine zu f passende und W eine zu g passende Zerlegung von I. Dann passt die gemeinsame Verfeinerung $Z \cup W =: \{x_0, \dots x_n\}$ sowohl zu f als auch zu g und es sei für alle $x \in I \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{(x_{j-1},x_j)}(x), \quad g(x) = \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{1}_{(x_{j-1},x_j)}(x)$$

für geeignete $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gilt dann $c_j \leq d_j$ für alle $j = 1, \dots, n$ und wir haben damit

$$\int_I f = \int^{Z\cup W} f = \sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^n d_j(x_j - x_{j-1}) = \int^{Z\cup W} g = \int_I g.$$ □

30. Das Regelintegral – Teil 2: Regelfunktionen

Wir wollen natürlich nicht nur Treppenfunktionen integrieren, denn das Leben ist im Allgemeinen nicht stückweise konstant und irgenwann werden die auch langweilig. Das nächste Ziel ist es daher, unseren Integralbegriff auf eine größere Funktionenklasse auszuweiten, die wir nun definieren. Auch in diesem Abschnitt seien wieder grundsätzlich $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I := [a, b]$.

Definition 30.1. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ heißt* sprungstetig *auf I, falls für alle $x_0 \in [a, b)$ der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ und für alle $x_0 \in (a, b]$ der linksseitige Grenzwert $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ existiert.*
Die Menge aller sprungstetigen Funktionen auf I bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(I)$.

Um einem häufigen Missverständnis gleich vorzubeugen: Nichts, aber auch gar nichts in dieser Definition fordert, dass der links- und der rechtsseitige Grenzwert in obiger Definition gleich sein müssen. Damit eine Funktion sprungstetig ist, müssen die beiden nur existieren.

Lemma 30.2. *Jede sprungstetige Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ ist beschränkt.*

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe eine unbeschränkte Funktion $f \in \mathcal{S}(I)$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in I$ mit $|f(x_n)| \geq n$. Damit ist (x_n) eine Folge in dem kompakten Intervall $I = [a, b]$, also hat diese eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und es gilt $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in I$. Wir wählen ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k \geq k_0$ gilt $n_k > |f(x_0)|$. Dann ist $|f(x_{n_k})| \geq n_k > |f(x_0)|$ und damit ist für alle $k \geq k_0$ insbesondere $x_{n_k} \neq x_0$.
Das liefert weiter, dass mindestens eine der beiden Mengen $\{k \geq k_0 : x_{n_k} < x_0\}$ und $\{k \geq k_0 : x_{n_k} > x_0\}$ unendlich viele Elemente hat. Eine solche Auswahl von unendlich vielen Elementen bildet eine Teilfolge $(x_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ von (x_n), die immer echt oberhalb oder echt unterhalb von x_0 liegt und weiterhin gegen x_0 konvergiert. Da nach Voraussetzung $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ existieren, muss insbesondere $\lim_{\ell\to\infty} f(x_{n_{k_\ell}})$ existieren, was aber im Widerspruch zu $|f(x_{n_{k_\ell}})| \geq n_{k_\ell}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ steht. Also kann es so eine Funktion nicht geben und wir sind fertig. □

Das folgende Lemma liefert einen großen Zoo von Beispielen sprungstetiger Funktionen.

Lemma 30.3. *Alle*

(a) Treppenfunktionen $f : I \to \mathbb{K}$

(b) stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{K}$ *und*

(c) monotonen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$

sind sprungstetig.

Beweis. Für Treppenfunktionen und stetige Funktionen ist die Behauptung klar. Wir wenden uns also (c) zu und betrachten im Folgenden nur den Fall einer monoton wachsenden Funktion f. Für monoton fallende Funktionen kann man entweder einen analogen Beweis führen oder $-f$ betrachten.
Sei also $x_0 \in (a, b]$. Dann setzen wir

$$\alpha := \sup\{f(x) : x \in [a, x_0)\}.$$

Sei nun (x_n) eine Folge in $[a, x_0)$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Wir wollen nun zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ ist. Dann folgt $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \alpha$ und dieser Grenzwert existiert damit.
Zunächst beobachten wir, dass nach Defintion von α auf jeden Fall $f(x_n) \leq \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Folge $(f(x_n))$ ist also nach oben beschränkt. Ein erster Reflex ist nun auf das Monotoniekriterium loszugehen, schließlich ist f monoton! Aber das funktioniert nicht, denn wir wissen nichts über Monotonie von (x_n). Wir müssen uns also etwas anderes einfallen lassen.
Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Satz 2.17 gibt es dann ein $y \in [a, x_0)$ mit $f(y) > \alpha - \varepsilon$. Nun gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq y$ für alle $n \geq n_0$. Für all diese n haben wir nun schlussendlich mit Hilfe der Monotonie von f

$$f(x_n) \geq f(y) > \alpha - \varepsilon, \quad \text{d. h.} \quad 0 \leq \alpha - f(x_n) < \varepsilon.$$

Das liefert $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.
Zur Behandlung der rechtsseitigen Grenzwerte, betrachtet man $x_0 \in [a, b)$ und definiert

$$\beta := \inf\{f(x) : x \in (x_0, b]\}.$$

Ein analoges Argument liefert dann $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \beta$. □

Was haben nun sprungstetige Funktionen mit unseren Integralen zu tun? Die Verbindung schafft das folgende für unser Integral fundamentale Theorem, der Approximationssatz für sprungstetige Funktionen.

Satz 30.4 (Approximationssatz für sprungstetige Funktionen)**.**
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ *ist genau dann sprungstetig, wenn es eine Folge* (f_n) *von Treppenfunktionen auf* I *gibt, die gleichmäßig auf* I *gegen* f *konvergiert.*

Beweis$^{(*)}$. **„⇒"** [1] Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Dazu nehmen wir an, die zu beweisende Aussage wäre falsch, d. h. es gibt eine sprungstetige Funktion $f \in \mathcal{S}(I)$, die sich nicht gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren lässt und zeigen, dass das auf einen Widerspruch führt.

In einem **ersten Schritt** überlegen wir uns, dass es unter dieser Annahme ein $\varepsilon_0 > 0$ geben muss, so dass für alle Treppenfunktionen $g \in \mathcal{T}(I)$ gilt

$$\sup_{x \in I} |g(x) - f(x)| > \varepsilon_0.$$

Nehmen wir an, das wäre nicht so, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{T}(I)$ mit $\sup_{x \in I} |g(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Nimmt man speziell für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Wahl $\varepsilon = 1/n$, so erhalten wir eine Folge (g_n) von Treppenfunktionen auf I, so dass $\sup_{x \in I} |g_n(x) - f(x)| \leq 1/n$ ist. Also gilt

$$\big|g_n(x) - f(x)\big| \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in I.$$

Nach Satz 21.8 konvergiert also die Folge von Treppenfunktionen (g_n) gleichmäßig gegen f, aber gerade das ist ja nicht möglich. Das postulierte $\varepsilon_0 > 0$ existiert also und wir bewahren dieses für die weiteren Schritte des Beweises sicher auf.

Im ebenfalls vorbereitenden **zweiten Schritt** betrachten wir ein beliebiges abgeschlossenes Teilintervall $J = [c, d]$ von I, wobei natürlich $c < d$ gelten soll sowie die beiden Teilintervalle $J^- := [c, {}^{c+d}/_2]$ und $J^+ := [{}^{c+d}/_2, d]$, d. h. die „linke und rechte Hälfte" von J.

Für $\varepsilon > 0$ nennen wir ein $\varphi \in \mathcal{S}(J)$ *ε-biestig auf* J, falls für jede Treppenfunktion $g : J \to \mathbb{K}$ gilt, dass $\sup_{x \in J} |g(x) - \varphi(x)| > \varepsilon$ ist. Das Ziel ist nun zu zeigen, dass für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(J)$, das ε-biestig auf J ist, auch zumindest eine der beiden Einschränkungen $\varphi|_{J^-}$ und $\varphi|_{J^+}$ ε-biestig auf J^- oder J^+ sein muss. Auch hier gehen wir indirekt vor und zeigen die Kontraposition, d. h. wir beweisen: Ist $\varphi \in \mathcal{S}(J)$ so, dass $\varphi|_{J^-}$ und $\varphi|_{J^+}$ nicht ε-biestig auf J^- bzw. J^+ sind, so ist auch φ nicht ε-biestig auf J.

Also los: Da $\varphi|_{J^-}$ und $\varphi|_{J^+}$ nicht ε-biestig sind, gibt es Treppenfunktionen $g_- \in \mathcal{T}(J^-)$ und $g_+ \in \mathcal{T}(J^+)$ mit $\sup_{x \in J^-} |g_-(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ und $\sup_{x \in J^+} |g_+(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$. Wir betrachten nun die Funktion $g : J \to \mathbb{K}$, die durch

$$g(x) = \begin{cases} g_-(x), & c \leq x < {}^{c+d}/_2 \\ \varphi(x), \quad \text{falls} & x = {}^{c+d}/_2 \\ g_+(x), & {}^{c+d}/_2 < x \leq d \end{cases}$$

[1] Ich danke Herrn Moritz Egert für die schöne Idee zu diesem Beweis, der mit den Mitteln dieser Vorlesung darstellbar ist.

gegeben ist. Diese ist wieder eine Treppenfunktion auf J (warum?) und es gilt dank $J = J^- \cup J^+$

$$\begin{aligned}\sup_{x\in J}\big|g(x)-\varphi(x)\big| &= \max\Big\{\sup_{x\in J^-}\big|g(x)-\varphi(x)\big|, \sup_{x\in J^+}\big|g(x)-\varphi(x)\big|\Big\}\\ &\le \max\Big\{\sup_{x\in J^-}\big|g_-(x)-\varphi(x)\big|, \sup_{x\in J^+}\big|g_+(x)-\varphi(x)\big|\Big\} \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist auch φ nicht ε-biestig auf J und Schritt 2 ist erledigt.

Im **dritten Schritt** können wir nun den eigentlichen Beweis führen. Sei also $f \in \mathcal{S}(I)$ nicht gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximierbar. Dann haben wir im ersten Schritt gezeigt, dass es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, für das f ε_0-biestig auf I ist. Wir wissen nun aus Schritt 2, dass eine der beiden Einschränkungen $f|_{I^+}$ oder $f|_{I^-}$ ebenfalls auf I^+ bzw. I^- ε_0-biestig sein muss. Eine Hälfte von I, für die das der Fall ist, nennen wir I_1.

Nun können wir dieses Verfahren iterieren und erhalten eine Folge $I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$ von abgeschlossenen Teilintervallen von I, deren Länge gegen Null schrumpft und auf denen die Einschränkung von f jeweils ε_0-biestig ist.

Nach Satz 10.15 gilt also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x_\infty\}$ mit einem $x_\infty \in I$. Der weitere Beweis geht davon aus, dass x_∞ weder mit a noch b übereinstimmt. Die (einfachen) Modifikationen, die sonst nötig werden, verbleiben als Übung.

Da f sprungstetig auf I ist, existieren die beiden Grenzwerte $f(x_\infty-) := \lim_{x\to x_\infty-} f(x)$ und $f(x_\infty+) := \lim_{x\to x_\infty+} f(x)$. Zu unserem ε_0 gibt es daher $a_\infty, b_\infty \in I$ mit $a_\infty < x_\infty < b_\infty$ sowie $|f(x) - f(x_\infty-)| < \varepsilon_0$ für alle $x \in [a_\infty, x_\infty]$ und $|f(x) - f(x_\infty+)| < \varepsilon_0$ für alle $x \in [x_\infty, b_\infty]$.

Wir betrachten nun die Treppenfunktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x_\infty-), & a_\infty \le x < x_\infty \\ \quad f(x_\infty), \quad \text{falls} & x = x_\infty \\ f(x_\infty+), & x_\infty < x \le b_\infty \end{cases}$$

auf $[a_\infty, b_\infty]$. Für diese gilt dort nach den obigen Erkenntnissen

$$\sup_{x\in[a_\infty,b_\infty]}\big|g(x)-f(x)\big| \le \varepsilon_0.$$

Sei nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $I_{n_0} \subseteq [a_\infty, b_\infty]$ gilt. Das geht, da die Länge der Intervalle I_n gegen Null schrumpft und x_∞ in jedem I_n enthalten ist. Dann ist $g|_{I_{n_0}}$ auch eine Treppenfunktion auf I_{n_0}, für die gilt

$$\sup_{x\in I_{n_0}}\big|g(x)-f(x)\big| \le \varepsilon_0.$$

Also ist f nicht ε_0-biestig auf I_{n_0}, womit wir bei einem Widerspruch wären.

„$\Leftarrow$“ Seien nun $f_n : I \to \mathbb{K}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ Treppenfunktionen und die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig auf I gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$. Wir müssen nun zeigen, dass f sprungstetig ist.

Seien dazu $x_0 \in (a, b]$ und eine Folge (x_j) in $[a, x_0)$ mit $x_j \to x_0$ $(j \to \infty)$ gegeben. Sei außerdem $\varepsilon > 0$. Dank der gleichmäßigen Konvgergenz von (f_n) existiert dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in I$$

gilt. Wir wählen für das Folgende ein $n \geq n_0$ fest. Nun ist f_n nach Voraussetzung eine Treppenfunktion, also gibt es ein $\alpha \in [a, x_0)$, so dass $f_n|_{(\alpha,x_0)}$ konstant ist. Da weiterhin (x_j) von links gegen x_0 konvergiert, gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_j \in (\alpha, x_0)$ für alle $j \geq j_0$. Das bedeutet, dass $f_n(x_j) = f_n(x_k)$ für alle Wahlen von $j, k \geq j_0$ gilt. Also haben wir für alle $j, k \geq j_0$ mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\big|f(x_j) - f(x_k)\big| &= \big|f(x_j) - f_n(x_j) + f_n(x_k) - f(x_k)\big| \\ &\leq \big|f(x_j) - f_n(x_j)\big| + \big|f(x_k) - f_n(x_k)\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

D. h. $(f(x_j))$ ist eine Cauchy-Folge und damit konvergent.

Wir haben damit gezeigt, dass für jede Folge (x_j) die von links gegen x_0 konvergiert, der Grenzwert $\lim_{j\to\infty} f(x_j)$ existiert. Nach Satz 18.9 existiert damit der Grenzwert $\lim_{x\to x_0-} f(x)$.

Der Beweis zur Existenz von $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ für alle $x_0 \in [a, b)$ geht analog. □

Die Idee für das weitere Vorgehen ist nun vorgezeichnet. Wir können jede sprungstetige Funktion f gleichmäßig durch Treppenfunktionen annähern und von jeder Treppenfunktion das Integral bestimmen. Wir zeigen nun also, dass die Integrale dieser annähernden Treppenfunktionen konvergieren, und definieren dann den Grenzwert als Integral von f. Dabei müssen wir natürlich sicherstellen, dass der so definierte Wert des Integrals nicht von der speziellen Wahl der approximierenden Folge von Treppenfunktionen abhängt.

Satz 30.5. *Sei $f \in \mathcal{S}(I)$. Dann existiert für jede Folge (f_n) von Treppenfunktionen in I, die gleichmäßig auf I gegen f konvergieren, der Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n$ *und dieser ist für alle solchen Folgen derselbe.*

Beweis. Es sei $\alpha_n := \int_I f_n$ und $\varepsilon > 0$. Dank der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gegen f existiert dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in I.$$

Für alle Wahlen von $n, m \geq n_0$ gilt damit mit ein wenig Unterstützung der Standardabschätzung aus Satz 29.8

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \alpha_m| &= \Big| \int_I (f_n - f_m) \Big| \leq (b-a) \sup_{x \in I} \big| f_n(x) - f_m(x) \big| \\ &\leq (b-a) \sup_{x \in I} \big(|f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \big) \\ &\leq (b-a) \big[\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in I} |f(x) - f_m(x)| \big] \\ &\leq (b-a) \Big[\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Big] = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist (α_n) eine Cauchy-Folge und damit schon mal konvergent.
Sei nun (g_n) eine weitere Folge von Treppenfunktionen auf I, die gleichmäßig auf I gegen f konvergiert. Wir betrachten die Folge $(h_n) := (f_1, g_1, f_2, g_2, f_3, g_3, \ldots)$. Dann ist auch (h_n) eine Folge von Treppenfunktionen auf I und diese konvergiert auch gleichmäßig auf I gegen f (Nachweisen!).
Nach dem ersten Teil des Beweises ist dann die Folge $(\int_I h_n)$ konvergent. Damit haben aber insbesondere die beiden Teilfolgen dieser Folge $(\int_I f_n)$ und $(\int_I g_n)$ denselben Grenzwert und wir sind fertig. □

Das vorstehende Theorem rechtfertigt nun also die folgende Defintion.

Definition 30.6. *Sei $f : I \to \mathbb{K}$ sprungstetig und (f_n) eine Folge von Treppenfunktionen auf I, die gleichmäßig auf I gegen f konvergiert. Dann heißt*

$$\int_I f := \int_a^b f := \int_I f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n \to \infty} \int_I f_n$$

das Integral von f über I.

Eine erste Idee davon, wie regulär oder wild sprungstetige Funktionen sein können, gibt der nächste Satz.

Satz 30.7. *Jede sprungstetige Funktion auf I besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Insbesondere gilt das damit für alle monotonen Funktionen.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{S}(I)$. Dann existiert nach Satz 30.4 eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen auf I, die gleichmäßig auf I gegen f konvergieren. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$M_n := \{x \in I : f_n \text{ unstetig in } x\}.$$

Da jedes f_n eine Treppenfunktion ist, sind alle Mengen M_n endlich. Also ist $M := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ abzählbar und in jedem Punkt $x \in I$, der nicht in M liegt, sind alle Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, stetig. Satz 21.13 liefert also die Stetigkeit von f in allen $x \in I \setminus M$, womit f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt. □

Damit haben wir unseren Integralbegriff nun auf eine große Klasse von Funktionen ausgeweitet. Man beachte, dass wir damit dank Lemma 30.3 insbesondere alle stetigen und alle monotonen Funktionen auf I integrieren können. Nun brauchen wir natürlich ein Beispiel einer so nicht integrierbaren Funktion. Zunächst sind alle unbeschränkten Funktionen zu nennen, die wir bisher nicht behandeln können. Aber gibt es auch beschränkte Funktionen, die sich unserem Integral widersetzen? Ja, hier ist so eine:

Beispiel 30.8. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die sogenannte *Dirichletsche Sprungfunktion*, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, \text{ falls } x \in [0,1] \text{ und } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Da man jeden rationalen Punkt in $[0,1]$ durch eine irrationale Folge und jeden irrationalen Punkt durch eine rationale Folge annähern kann, ist diese Funktion in keinem $x \in [0,1]$ stetig. Wegen Satz 30.7 kann sie dann nie und nimmer in unserem Integralbegriff integrierbar sein.

In der Vorlesung Maß- und Intgrationstheorie werden Sie mit dem Lebesgue-Integral einen deutlich mächtigeren Integralbegriff kennen lernen, mit dem man sogar dem Integral über die Dirichletsche Sprungfunktion einen sinnvoll definierten Wert zuweisen kann. Das Lebesgue-Integral basiert auf der gleichen Idee wie das Regelintegral, der Approximation durch Treppenfunktionen. Es weitet die Betrachtungen jedoch auf *punktweise* Grenzwerte von Treppenfunktionen aus, was deutlich mehr Funktionen integrierbar macht. Diese Verallgemeinerung wirft jedoch einige knifflige Probleme auf, die eine genauere Beschäftigung mit der Frage nötig machen, wie man das Volumen von Mengen messen kann. Wir stellen die Behandlung dieses Integralbegriffs, der die Grundlage der modernen Analysis darstellt, deshalb erst einmal zurück. Im Moment reicht uns das Regelintegral vollständig aus.

31. Eigenschaften des Integrals

Wir wollen nun Rechenregeln und Eigenschaften unseres Integrals sammeln und insbesondere den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung beweisen, der uns die Möglichkeit eröffnet, verschiedenste Integrale auch konkret zu bestimmen. Zunächst übertragen wir die Eigenschaften des Integrals über Treppenfunktionen, indem wir die sprungstetigen Funktionen durch Treppenfunktionen approximieren und dann die gleichmäßige Konvergenz ausnutzen.
Auch in diesem Kapitel seien wieder durchgehend $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I := [a, b]$ und wir verwenden wieder den Buchstaben $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Satz 31.1. *Es seien $f, g \in \mathcal{S}(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann sind auch $\alpha f + \beta g$, $|f|$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ sowie $\overline{f}$ sprungstetig und es gilt*

(a) $\displaystyle\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g.$ (Linearität des Integrals)

(b) $\displaystyle\Big|\int_a^b f\Big| \le \int_a^b |f| \le (b-a) \sup_{x \in I} |f(x)|.$
(Dreiecksungleichung und Standardabschätzung)

(c) $\displaystyle\operatorname{Re}\Big(\int_I f\Big) = \int_I \operatorname{Re}(f), \quad \operatorname{Im}\Big(\int_I f\Big) = \int_I \operatorname{Im}(f), \quad$ *und* $\displaystyle\quad \int_I \overline{f} = \overline{\int_I f}.$

(d) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und gilt $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in I$, so ist auch
$\displaystyle\int_I f \le \int_I g.$ (Monotonie des Integrals)

Beweis. (a) Wir wählen Folgen (f_n) und (g_n) von Treppenfunktionen auf I, so dass (f_n) gleichmäßig gegen f und (g_n) gleichmäßig gegen g konvergiert. Dann konvergiert auch die Funktionenfolge $(\alpha f_n + \beta g_n)$ gleichmäßig gegen $\alpha f + \beta g$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\alpha f_n + \beta g_n$ eine Treppenfunktion auf I. Also ist nach dem Approximationssatz für sprungstetige Funktionen 30.4 auch $\alpha f + \beta g$ sprungstetig.

Weiter haben wir nach Defintion des Integrals und da das Integral für Treppenfunktionen nach Satz 29.7 linear ist

$$\int_I (\alpha f + \beta g) = \lim_{n \to \infty} \int_I (\alpha f_n + \beta g_n) = \lim_{n \to \infty} \Big(\alpha \int_I f_n + \beta \int_I g_n\Big) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g.$$

(b) Wir wählen eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen auf I, die gleichmäßig auf I gegen f konvergiert. Nach Übungsaufgabe 21.9 (a) konvergiert dann auch $(|f_n|)$ gleichmäßig auf I gegen $|f|$. Da auch die Funktionen $|f_n|$, $n \in \mathbb{N}$, Treppenfunktionen sind, ist damit also auch $|f|$ sprungstetig und wir haben

$$\int_I |f| = \lim_{n\to\infty} \int_I |f_n|.$$

Weiter gilt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\left|\int_I f\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \int_I f_n\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_I f_n\right| \le \lim_{n\to\infty} \int_I |f_n| = \int_I |f|.$$

Weiter bekommen wir mit der Standardabschätzung aus Satz 29.8 und Übungsaufgabe 21.9 (b)

$$\int_a^b |f| = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n| \le \lim_{n\to\infty} (b-a) \sup_{x\in I} |f_n(x)| = (b-a) \sup_{x\in I} |f(x)|.$$

(c) Übungsaufgabe.

(d) Seien wieder $f_n, g_n \in \mathcal{T}(I)$, $n \in \mathbb{N}$, so dass (f_n) gleichmäßig gegen f und (g_n) gleichmäßig gegen g konvergiert. Dann konvergieren nach Übungsaufgabe 21.9 (b) die Folgen

$$\alpha_n := \sup_{y\in I} |f(y) - f_n(y)| \qquad \text{und} \qquad \beta_n := \sup_{y\in I} |g(y) - g_n(y)|, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gegen Null.

Wir betrachten nun die Funktionenfolgen

$$\varphi_n(x) := f_n(x) - \alpha_n \qquad \text{und} \qquad \psi_n(x) := g_n(x) + \beta_n, \qquad x \in I,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind auch φ_n und ψ_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ Treppenfunktionen auf I. Wir zeigen, dass auch (φ_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Für alle $x \in I$ gilt

$$|\varphi_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \alpha_n - f(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |\alpha_n|.$$

Also ist

$$\sup_{x\in I} |\varphi_n(x) - f(x)| \le |\alpha_n| + \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

und die gewünschte Konvergenzaussage folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) und wieder Übungsaufgabe 21.9 (b). Eine analoge Überlegung zeigt schließlich, dass auch (ψ_n) gleichmäßig auf I gegen g konvergiert.

Als nächsten Schritt beobachten wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in I$

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) = f_n(x) - \alpha_n + f(x) - f(x) &\le \underbrace{\big|f_n(x) - f(x)\big|}_{\le \alpha_n} - \alpha_n + f(x) \\ &\le f(x) \le g(x) = g(x) - g_n(x) + g_n(x) = g(x) - g_n(x) + \psi_n(x) - \beta_n \\ &\le \underbrace{\big|g(x) - g_n(x)\big|}_{\le \beta_n} - \beta_n + \psi_n(x) \le \psi_n(x)\end{aligned}$$

gilt. Also haben wir mit Hilfe von Satz 29.9 schlussendlich

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n \le \lim_{n\to\infty} \int_I \psi_n = \int_I g. \qquad \square$$

Definition 31.2. *Es seien $f \in \mathcal{S}(I)$ und $c, d \in I$ mit $c < d$. Dann definieren wir*

$$\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x := 0 \qquad \textit{und} \qquad \int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{[c,d]} f.$$

Lemma 31.3. *Seien $f : I \to \mathbb{K}$ eine sprungstetige Funktion und $c \in I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Beweis. Die Aussage ist richtig für Treppenfunktionen (man wähle eine zu f passende Zerlegung von I, die c enthält). Wählen wir nun eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen auf I, die auf I gleichmäßig gegen f konvergiert, so sind auch $f_n|_{[a,c]}$ und $f_n|_{[c,b]}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ Treppenfunktionen auf $[a, c]$ bzw. $[c, b]$ und es gilt

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in[a,c]} |f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \qquad \text{und} \\ &\sup_{x\in[c,b]} |f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|.\end{aligned}$$

Also konvergieren dank Übungsaufgabe 21.9 (b) auch $(f_n|_{[a,c]})$ bzw. $(f_n|_{[c,b]})$ gleichmäßig auf $[a, c]$ bzw. $[c, b]$ gegen $f|_{[a,c]}$ bzw. $f|_{[c,b]}$. Das liefert

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_{[a,c]} f_n + \int_{[c,b]} f_n \Big) = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f. \qquad \square$$

Lemma 31.4. *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine sprungstetige Funktion mit $f(x) \ge 0$ für alle $x \in I$. Ist f an einer Stelle $c \in I$ stetig mit $f(c) > 0$, so gilt $\int_I f > 0$.*

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall $c \in (a, b)$. Die einfachen Modifikationen der Argumentation in den Fällen $c = a$ und $c = b$ bleiben als Übungsaufgabe stehen.

Da f in c stetig ist und $c \in (a,b)$ liegt, existiert ein $\delta > 0$ mit $[c-\delta, c+\delta] \subseteq (a,b)$ und

$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(c) > 0 \quad \text{für alle } x \in [c-\delta, c+\delta].$$

Weiter ist f auf ganz I nicht-negativ, also haben wir dank der Monotonie des Integrals $\int_{[a,c-\delta]} f \geq 0$ und $\int_{[c+\delta,b]} f \geq 0$. Damit erhalten wir

$$\int_I f = \int_a^{c-\delta} f + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f + \int_{c+\delta}^b f \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{1}{2} f(c) = 2\delta \frac{1}{2} f(c) > 0. \quad \square$$

Mit der Vorarbeit aus diesem Lemma können wir nun den Mittelwertsatz der Integralrechnung beweisen.

Satz 31.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Seien $f, \varphi : I \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Dann existiert ein $\xi \in I$ mit*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung 31.6. Bevor wir diesen Satz beweisen, lohnt es sich den wichtigen Spezialfall $\varphi = 1$ zu betrachten. Er lautet dann: Es existiert ein $\xi \in I$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

In dieser Formulierung hat der Satz auch eine geometrisch-anschauliche Bedeutung. Er besagt, dass es einen Funktionswert $f(\xi)$ mit $\xi \in [a,b]$ gibt, so dass das Rechteck mit den Seitenlängen $f(\xi)$ und $b-a$ den gleichen Flächeninhalt hat wie die Fläche unter dem Graphen von f zwischen a und b, vgl. Abbildung 31.1.
Wie schon in mehreren ähnlichen Fällen vorher (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung, Satz von Taylor) ist auch hier der genaue Wert von ξ meist nicht bestimmbar, oder seine Bestimmung zumindest genau so schwierig wie die Bestimmung des Integrals von f.

Beweis von Satz 31.5. Wir bemerken zunächst, dass die Aussage des Satzes für den Fall, dass φ konstant Null ist, offensichtlich richtig ist. Folglich konzentrieren wir uns auf den Fall, dass es ein $x_0 \in I$ mit $\varphi(x_0) \neq 0$ gibt. Da φ nicht-negativ ist, muss dann $\varphi(x_0) > 0$ gelten und wir erhalten $\int_I \varphi > 0$ aus Lemma 31.4.
Da I kompakt und f stetig ist, nimmt f auf I sein Minimum und Maximum an, wir können also

$$m := \min_{x \in I} f(x) \qquad \text{und} \qquad M := \max_{x \in I} f(x)$$

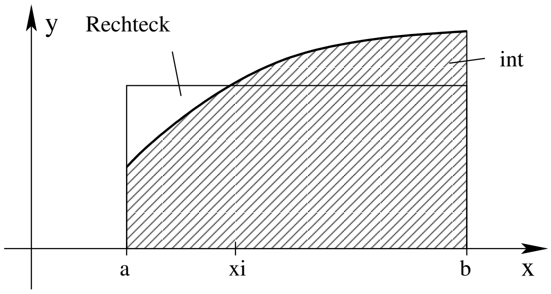

Abbildung 31.1.: Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

setzen. Dann gilt – eingedenk der Positivität von φ – die Ungleichungskette $m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x)$ für alle $x \in I$. Also erhalten wir

$$m \int_I \varphi(x)\ \mathrm{d}x = \int_I m\varphi(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_I f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \leq M \int_I \varphi(x)\ \mathrm{d}x$$

und damit ist wegen $\int_I \varphi > 0$

$$m \leq \frac{\int_I f\varphi}{\int_I \varphi} \leq M.$$

Nun ist f nach Voraussetzung eine stetige Funktion, also erkennen wir an dieser Ungleichungskette, dass es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in I$ geben muss mit

$$f(\xi) = \frac{\int_I f\varphi}{\int_I \varphi}.$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $\int_I \varphi$ liefert die Behauptung. $\square$

Satz 31.7. *Es sei $f \in \mathcal{S}(I)$. Für $c \in I$ definieren wir die Funktion $F_c : I \to \mathbb{K}$ durch $F_c(x) := \int_c^x f$, $x \in I$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a) F_c ist Lipschitz-stetig, also insbesondere stetig auf I.

(b) Ist f an einer Stelle $x \in I$ stetig, so ist F_c in x differenzierbar und es gilt $F_c'(x) = f(x)$.

Beweis. (a) Es seien $x, y \in I$. Dann gilt nach der Definition von F_c

$$F_c(x) - F_c(y) = \int_c^x f - \int_c^y f = \int_y^x f.$$

Also können wir den Betrag mit Hilfe der Standardabschätzung durch

$$\big|F_c(x) - F_c(y)\big| = \Big|\int_y^x f\Big| \leq |x-y| \sup_{s\in[x,y]} |f(s)| \leq \sup_{s\in I} |f(s)| \cdot |x-y|$$

abschätzen. Mit $L := \sup_{s\in I} |f(s)|$ (Man bedenke, dass f als sprungstetige Funktion auf I insbesondere beschränkt ist, vgl. Lemma 30.2) folgt damit die Behauptung.

(b) Für jedes $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x + h \in I$ gilt

$$\frac{F_c(x+h) - F_c(x)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\int_c^{x+h} f - \int_c^x f\Big) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f.$$

Weiter gilt $f(x) = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(x)\, \mathrm{d}s$. Also haben wir, wieder mit Hilfe der Standardabschätzung,

$$\Big|\frac{F_c(x+h) - F_c(x)}{h} - f(x)\Big| = \Big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(s)\, \mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\, \mathrm{d}s\Big|$$
$$= \frac{1}{|h|}\Big|\int_x^{x+h} \big(f(s) - f(x)\big)\, \mathrm{d}s\Big| \leq \sup_{s\in[x-|h|, x+|h|]} \big|f(s) - f(x)\big|.$$

Da f in x stetig ist, geht nun dieses Supremum für $h \to 0$ gegen Null (warum?). Damit ist gezeigt, dass F_c in x differenzierbar ist mit $F_c'(x) = f(x)$. □

Mit diesen Vorarbeiten können wir nun den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung beweisen. Dieser verknüpft auf verblüffend einfache Weise die Integral- mit der Differenzialrechung und ermöglicht so die explizite Berechnung von vielen Integralen, indem er unsere Erkenntnisse über die Differentiation zur Integralberechnung nutzbar macht.

Satz 31.8 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)**.**
Sei $f : I \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) Sei $c \in I$ fest und $F_c(x) := \int_c^x f(s)\, \mathrm{d}s$ für jedes $x \in I$. Dann ist F_c differenzierbar auf I und $F_c'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

(b) Ist $\Phi : I \to \mathbb{K}$ differenzierbar mit $\Phi'(x) = f(x)$ für jedes $x \in I$, dann gilt

$$\Phi(x) = \Phi(c) + \int_c^x f(s)\, \mathrm{d}s \qquad \text{für alle } c, x \in I.$$

Beweis. Die Hauptarbeit ist schon erledigt, wir müssen nur noch alles zusammensetzen.

(a) Ist bereits mit Satz 31.7 (b) erledigt.

(b) Sei F_a wie in (a) mit $c = a$. Dann gilt mit Hilfe von (a) und der Voraussetzung für jedes $x \in I$

$$(F_a - \Phi)'(x) = F_a'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Also gibt es eine Konstante $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $F_a(x) = \Phi(x) + \alpha$. Damit erhalten wir schließlich für jede Wahl von c und x aus I

$$\begin{aligned}\int_c^x f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^c f(s)\,\mathrm{d}s &= F_a(x) - F_a(c)\\ &= \Phi(x) + \alpha - \Phi(c) - \alpha = \Phi(x) - \Phi(c),\end{aligned}$$

woraus durch Umstellen der Gleichung die Behauptung folgt. □

Nach Teil (b) des Hauptsatzes können wir den Wert eines Integrals über f leicht bestimmen, wenn wir eine Funktion Φ finden, für die $\Phi' = f$ gilt. Damit ist das Problem der Integration darauf zurück geführt den Vorgang der Differentiation umzukehren. Das ist leider leichter gesagt als getan, hilft aber schon oft weiter.

Definition 31.9. *Sei $f : I \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Jede differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{K}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ heißt eine* Stammfunktion *von f.*

Mit diesem Begriff formulieren wir den Hauptsatz noch einmal leicht um.

Korollar 31.10. *(a) Ist $f : I \to \mathbb{K}$ stetig, so besitzt f eine Stammfunktion F auf I und es gilt*

$$\int_y^x f(s)\,\mathrm{d}s = F(x) - F(y) =: F(s)\Big|_{s=y}^{s=x} \qquad \text{für alle } x, y \in I.$$

(b) Sind $F, \hat{F} : I \to \mathbb{K}$ Stammfunktionen einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{K}$, so existiert eine Konstante $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $F(x) = \hat{F}(x) + \alpha$ für alle $x \in I$.

Beweis. (a) Nach dem Hauptsatz 31.8 (a) ist die Funktion $F : I \to \mathbb{K}$ mit $F(x) := \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$ eine Stammfunktion von f und aus Teil (b) desselben Satzes folgt

$$\int_y^x f(s)\,\mathrm{d}s = F(x) - F(y).$$

(b) Nach Satz 31.8 (b) muss für die beiden Stammfunktionen F und $\hat{F}$ von f für jedes $x \in I$ gelten

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{und} \qquad \hat{F}(x) = \hat{F}(a) + \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Also ist $F(x) - \hat{F}(x) = F(a) - \hat{F}(a) =: c$ konstant auf I. □

Warnung 31.11. (a) Es gibt Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, aber nicht sprungstetig sind. Zur Konstruktion eines Beispiels betrachten wir auf $[0,1]$ die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} x^{3/2}\sin(1/x), \text{ falls } x \in (0,1], \\ 0, \text{ falls } x = 0. \end{cases}$$

Von dieser haben wir in Beispiel 27.2 (d) gezeigt, dass sie auf $[0,1]$ differenzierbar ist, aber dass die Funktion $f := F'$ auf $[0,1]$ nicht beschränkt ist. Damit kann f auf $[0,1]$ nicht sprungstetig sein, aber F ist natürlich eine Stammfunktion von f.

(b) Andersherum gibt es auch sprungstetige Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen. Als Beispiel dient uns hier auf $[-1,1]$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ falls } x \in [-1,0), \\ 1, \text{ falls } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Diese ist als Treppenfunktion integrierbar. Nehmen wir an, es gäbe auf dem Intervall $[-1,1]$ eine Stammfunktion F von f, so muss F nach Definition differenzierbar sein, d. h. die Ableitung $F' = f$ müsste die Zwischenwerteigenschaft erfüllen, s. Übungsaufgabe 24.10. Da dies offensichtlich nicht der Fall ist (-1 und 1 werden von F' als Werte angenommen, aber Null nicht), kann es eine solche Stammfunktion nicht geben.

Wir haben unser Integral auf den sprungstetigen Funktionen bekommen, indem wir es auf Treppenfunktionen definiert haben und dann gleichmäßige Grenzwerte von Treppenfunktionen betrachtet haben. Da wir nun für jede sprungstetige Funktion ein Integral haben, könnte man auf die Idee kommen, denselben Trick noch einmal zu machen und gleichmäßige Limiten von sprungstetigen Funktionen betrachten, in der Hoffnung, so für eine noch größere Klasse von Funktionen einen Integralbegriff definieren zu können.
Der nachfolgende Satz zeigt, dass das leider nichts wird, denn es stellt sich heraus, dass eine Funktion, die gleichmäßig durch sprungstetige Funktionen approximiert werden kann, selbst schon sprungstetig sein muss, wir bekommen also durch so ein Vorgehen keine neuen Funktionen mehr dazu.
Dahinter steckt ein allgemeines Prinzip. Spätestens nach dem Besuch einer Vorlesung in Topologie oder Funktionalanalysis im weiteren Studium werden Sie obige Hoffnung als naiv erkennen, aber im Moment spricht noch nichts gegen sie.

Satz 31.12. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : I \to \mathbb{K}$ eine sprungstetige Funktion, so dass die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig auf I gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f sprungstetig und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n = \int_I f.$$

Bemerkung 31.13. (a) Die Bedeutung dieses Satzes geht weit über die Zerstörung der obigen Hoffnung hinaus. Wir haben es hier wieder mit einem Resultat zu tun, das uns das Vertauschen von zwei Grenzwertprozessen erlaubt, nämlich die Integration und den Grenzwert der Funktionenfolge. Auch hier zeigt sich wieder wie nützlich der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz ist. Tatsächlich ist ein entsprechender Satz für nur punktweise konvergente Funktionenfolgen falsch.

(b) Beachten Sie, dass nach obigem Satz für gleichmäßig konvergente Funktionenreihen von sprungstetigen Funktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

gilt.

Übungsaufgabe 31.14. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass Satz 31.12 für eine nur punktweise konvergente Funktionenfolge im Allgemeinen falsch ist.

Beweis von Satz 31.12. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n nach Voraussetzung sprungstetig, also gibt es nach Satz 30.4 jeweils eine Treppenfunktion φ_n auf I, für die $|\varphi_n(x) - f_n(x)| < 1/n$ für alle $x \in I$ gilt. Auf diese Weise erhalten wir eine Funktionenfolge (φ_n) von Treppenfunktionen auf I, von der wir nun zeigen wollen, dass sie ebenfalls gleichmäßig gegen f konvergiert.
Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wir wählen nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass erstens $n_0 > 2/\varepsilon$ gilt und zweitens $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ ist für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in I$. Letzteres geht, da (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann erhalten wir für alle $x \in I$ und alle $n \geq n_0$

$$\left|\varphi_n(x) - f(x)\right| \leq \left|\varphi_n(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Somit ist die gleichmäßige Konvergenz von (φ_n) gegen f auf I gezeigt. Damit folgt sofort, dass f sprungstetig ist, also existiert $\int_I f$. Mit diesem Wissen haben wir nun gewonnen, denn mit Hilfe der Standardabschätzung gilt

$$\left|\int_I f_n - \int_I f\right| = \left|\int_I (f_n - f)\right| \leq (b-a) \sup_{x \in I} \left|f_n(x) - f(x)\right|$$

und letzterer Ausdruck geht nach Übungsaufgabe 21.9 (b) gegen Null. Also gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_I f_n = \int_I f$$

und wir sind fertig. □

Als Anwendung dieses Ergebnisses wollen wir abschließend einen Satz beweisen, der thematisch ins Kapitel 21 gehört, der sich allerdings schön mit Hilfe der Integralrechnung beweisen lässt. Deshalb liefern wir ihn hier nach.

Satz 31.15.$^{(*)}$ *Es sei* (f_n) *eine Funktionenfolge auf* $I = [a, b]$ *mit* $f_n \in \mathrm{C}^1(I, \mathbb{K})$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Konvergiert die Funktionenfolge* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig auf* I *gegen eine Funktion* $g : I \to \mathbb{K}$ *und ist die Folge* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *für ein* $x_0 \in I$ *konvergent, so konvergiert auch die Funktionenfolge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig auf* I *gegen eine Funktion* $f \in \mathrm{C}^1(I, \mathbb{K})$ *und es gilt* $f' = g$*, d. h.*

$$\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Beweis$^{(*)}$. Wir setzen $c := \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Nach dem Hauptsatz gilt nun für alle $x \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Da (f_n') auf dem Intervall zwischen x_0 und x eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge ist und die Funktionen f_n' für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig und damit insbesondere sprungstetig sind, gilt nach Satz 31.12

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Also ist (f_n) auf I punktweise konvergent und für die Grenzfunktion f gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t$$

für jedes $x \in I$.
Weiter ist g ein gleichmäßiger Limes der nach Voraussetzung stetigen Funktionen f_n', $n \in \mathbb{N}$, also ist auch g eine stetige Funktion. Das bedeutet wiederum, dass nach dem Hauptsatz die Abbildung $x \mapsto \int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t$ differenzierbar ist und für die Ableitung gilt

$$f'(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t\Big)' = g(x).$$

Damit ist $f \in \mathrm{C}^1(I, \mathbb{K})$ und es bleibt noch die gleichmäßige Konvergenz von (f_n) auf I zu zeigen. Dazu beobachten wir für jedes $x \in I$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \Big|f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\ \mathrm{d}t - c - \int_{x_0}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t\Big| \\ &\le \Big|\int_{x_0}^{x} \big(f_n'(t) - g(t)\big)\ \mathrm{d}t\Big| + |f_n(x_0) - c| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left|\int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t\right| + |f_n(x_0) - c| \\
&\le \int_a^b |f_n'(t) - g(t)| \,\mathrm{d}t + |f_n(x_0) - c|.
\end{aligned}
$$

Sein nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert zum einen dank der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n') ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_1$ und alle $t \in I$

$$
\left|f_n'(t) - g(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}
$$

gilt. Zum anderen gibt es ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x_0) - c| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_2$. Wählen wir nun $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, so gilt für alle $n \geq n_0$ mit der Abschätzung von oben

$$
\left|f_n(x) - f(x)\right| \le \int_a^b \left|f_n'(t) - g(t)\right| \,\mathrm{d}t + |f_n(x_0) - c| \le (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
$$

Da wir n_0 unabhängig von x wählen konnten, ist damit die Gleichmäßigkeit der Konvergenz bewiesen. □

32. Integrationsregeln

Zur Integration von Funktionen ist das Auffinden von Stammfunktionen von zentraler Bedeutung. Leider gibt es dazu nicht wie bei der Differenziation einen kompletten Satz von Regeln, mit dessen Hilfe, genug Zeit und Konzentration vorausgesetzt, im Prinzip jede Funktion differenziert werden kann. Stattdessen müssen wir uns mit Rechenregeln begnügen, die meist das Problem der Integration einer Funktion auf das entsprechende Problem für eine andere Funktion zurückspielen, die dann hoffentlich einfacher ist.
Das liegt nicht daran, dass uns im Moment noch starke mathematische Hilfsmittel fehlen, sondern ist ein prinzipielles Problem. Es gibt einfache stetige (sogar beliebig oft differenzierbare) Funktionen, die nach dem Hauptsatz eine Stammfunktion haben, die aber nicht in einer geschlossenen Form angebbar ist.
Zusammengefasst ist dies in dem Spruch:

Differenzieren ist Handwerk, Integrieren ist Kunst.

Wir wollen uns dieser Kunst nun nähern, indem wir aus den bekannten Differenziationsregeln, Rechenregeln für Integrale ableiten. Wir beginnen mit der Produktregel.
Auch in diesem Kapitel steht wieder $\mathbb{K}$ für die mögliche Wahl von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Satz 32.1 (Partielle Integration)**.** *Es seien $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f, g : I \to \mathbb{K}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg' = fg\,\Big|_a^b - \int_a^b fg'.$$

Beweis. Zunächst einmal existieren alle in der Behauptung auftretenden Integrale, denn nach Voraussetzung sind $f'g$ und fg' stetige Funktionen und damit auch sprungstetig auf I.
Nach der Produktregel gilt nun

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Also haben wir mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung aus Satz 31.8,

$$\int_a^b \bigl(f'g + fg'\bigr) = \int_a^b (fg)' = fg\,\Big|_a^b, \quad \text{d. h.} \quad \int_a^b f'g = fg\,\Big|_a^b - \int_a^b fg'$$

und damit die Behauptung. □

Beispiel 32.2. (a) Wir betrachten das Integral

$$\int_0^1 x \sinh(x)\,\mathrm{d}x,$$

d. h. wir wenden unseren Satz mit $g(x) = x$ und $f'(x) = \sinh(x)$ auf dem Intervall $[0,1]$ an. Dann ist $f(x) = \cosh(x)$ eine mögliche Wahl für die Funktion f und wir erhalten mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \sinh(x)\,\mathrm{d}x &= x\cosh(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \cosh(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cosh(1) - 0 - \Big(\sinh(x)\Big|_{x=0}^{x=1}\Big) = \cosh(1) - \sinh(1) \\ &= \frac{\mathrm{e} + 1/\mathrm{e}}{2} - \frac{\mathrm{e} - 1/\mathrm{e}}{2} = \frac{1}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

(b) Die Wahl von f und g kann für den Erfolg einer Anwendung dieser Regel sehr entscheidend sein. Wenn wir beispielsweise im Integral aus (a) umgekehrt $g(x) = \sinh(x)$ und $f'(x) = x$ genommen hätten, wären wir bei

$$\int_0^1 x\sinh(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\sinh(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\cosh(x)\,\mathrm{d}x$$

gelandet. Diese Umformung ist natürlich auch richtig, aber von dem nun entstandenen Integral weiß man erst recht nicht, wie man es berechnen soll.

(c) Manchmal muss man sich die zweite Funktion zur partiellen Integration erst künstlich schaffen:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x &= x\ln(x)\Big|_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \big(x\ln(x) - x\big)\Big|_{x=1}^{x=2} = 2\cdot\ln(2) - 2 - 0 + 1 = 2\cdot\ln(2) - 1,\end{aligned}$$

wobei wir $g(x) = \ln(x)$ und $f'(x) = 1$ gewählt haben.

(d)$^{(*)}$ Wir wollen

$$A := \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$

bestimmen. Dazu wählen wir $f'(x) = g(x) = \sin(x)$ und berechnen

$$= -\cos(x)\sin(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos(x)(-\cos(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wenden wir nun mit $f'(x) = g(x) = \cos(x)$ noch einmal partielle Integration an, so erhalten wir

$$= \sin(x)\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = A$$

und damit außer der Gewissheit, dass wir uns unterwegs nicht verrechnet haben, nichts neues. Wir müssen also einen anderen Weg suchen: Mit dem Ergebnis unserer ersten partiellen Integration und dem trigonometrischen Pythagoras $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, finden wir

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(x))\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - A,$$

woraus $2A = \pi/2$ und schließlich

$$A = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

folgt.

Die zweite wichtige Integrationsregel ergibt sich aus der Kettenregel der Differenzialrechnung.

Satz 32.3 (Substitutionsregel). *Es seien $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ kompakte Intervalle, sowie $f \in \mathrm{C}([a,b],\mathbb{K})$ und $g \in \mathrm{C}^1([c,d],\mathbb{R})$ mit $g([c,d]) \subseteq [a,b]$. Dann ist*

$$\int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Nach Korollar 31.10 besitzt f auf $[a,b]$ eine Stammfunktion F. Wir betrachten die Funktion $H := F \circ g$ auf $[c,d]$. Dann gilt für alle $t \in [c,d]$ nach der Kettenregel

$$H'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t).$$

Also können wir mit zweimaliger Anwendung des Hauptsatzes folgern:

$$\int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t = H(d) - H(c) = F(g(d)) - F(g(c)) = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Bemerkung 32.4. Häufig behilft man sich bei der Anwendung der Substitutionsregel einer intuitiven, aber nicht rigorosen Schreibweise. Diese leitet sich aus der alternativen Notation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (gesprochen „dy nach dx“) statt y' für eine differenzierbare Funktion y ab. Man fasst dann in der Substitutionsregel die Setzung $x = g(t)$ so auf, als sei x eine Funktion von t und rechnet mit den Differenzialen dx und dt wie gewohnt:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g'(t) \quad „ \Rightarrow \mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t.“$$

Dabei erhält man genau die in der Substitionsformel stehende Ersetzung von $\mathrm{d}x$ durch $g'(t)\mathrm{d}t$.
Dieser Formalismus ist sehr übersichtlich und praktisch, es sollte dabei aber nicht in Vergessenheit geraten, dass das *keine* saubere Mathematik ist.

Beispiel 32.5. (a) Wir berechnen das Integral

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

mit unserer Schmierrechnungsmethode. Dazu setzen wir $2+x^2=t$. Wegen $x \in [1,2]$ können wir das auflösen zu $x=\sqrt{t-2}$, d. h. wir wenden die Substitutionsregel mit $g(t) := \sqrt{t-2}$ an. Weiter ist bei der Anwendung des Satzes $c=3$ und $d=6$, denn dann ist $g(c)=1$ und $g(d)=2$. Die natürliche Wahl für $[a,b]$ ist $[1,2]$, aber auch $[a,b]=[-3,15]$ ist in Ordnung. Nun wenden wir die Substitutionsregel an. Es ist $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = {}^1\!/_{2\sqrt{t-2}} = {}^1\!/_{2x}$, also „$2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$“. Damit haben wir

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\cdot 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_3^6 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{t}\Big|_{t=3}^{t=6} = \sqrt{6}-\sqrt{3}.$$

(b) Als zweites Beispiel wollen wir das Integral

$$A := \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

bestimmen. Dieses hat auch eine anschauliche Bedeutung, denn der Graph der Funktion $\sqrt{1-x^2}$ ist für $x \in [0,1]$ der Viertelkreisbogen des Kreises mit Radius 1 um 0 zwischen den Punkten $(1,0)$ und $(0,1)$. Wir bestimmen mit diesem Integral also die Fläche dieses Viertelkreises, es sollte also, bitteschön, ${}^\pi\!/_4$ herauskommen.

Wir substituieren $x=\cos(t)$. Dann gilt z. B. $x=0$ für $t={}^\pi\!/_2$ und $x=1$ für $t=0$. Wir wählen also $c={}^\pi\!/_2$ und $d=0$. Die Schmierrechnung gibt uns wegen ${}^{\mathrm{d}x}\!/_{\mathrm{d}t} = \cos'(t) = -\sin(t)$ die Ersetzung $\mathrm{d}x = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Nun gilt für alle $t \in [0, {}^\pi\!/_2]$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{\sin^2(t)} = |\sin(t)| = \sin(t).$$

Setzen wir das nun alles zusammen, ergibt sich mit Beispiel 32.2 (d) tatsächlich

$$A = \int_{\pi/2}^0 \sin(t)(-\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Im Verlauf der letzten Abschnitte hat sich aus unserer ursprünglichen Motivation für die Integralrechnung, nämlich die der Flächenberechnung, zunehmend die abstrakte Fragestellung nach Bestimmung einer Stammfunktion ergeben. Der Integralkalkül kann natürlich auch von Anfang an so motiviert werden. Dann gelangt man zum unbestimmten Integral, das wir nun einführen wollen.

Definition 32.6. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{K}$. Besitzt f auf I eine Stammfunktion, so schreibt man für die Menge aller Stammfunktionen auch das sogenannte* unbestimmte Integral

$$\int f \qquad \textit{oder} \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Man beachte dabei, dass nun das Symbol $\int f$ eine Menge von *Funktionen* bezeichnet, während das bestimmte Integral $\int_a^b f$ für vorgegebene $a, b \in \mathbb{R}$ eine *Zahl* ist.

Beispiel 32.7. (a) Es gilt $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Diese Zeile ist formal unsauber, denn es fehlen rechts vom Gleichheitszeichen die Mengenklammern. Da das aber dem üblichen Formelgebrauch in der Analysis entspricht, wird dieser auch hier verwendet. Es ist tatsächlich oft notationell praktisch, die Grenzen zwischen einer Stammfunktion und der Menge aller Stammfunktionen schwammig verwischen zu lassen. Es muss einem dann aber umso klarer sein, was hier gerade passiert und wie die Dinge zu interpretieren sind. Nur wenn man genau weiß, dass man gerade schlampt, darf man in der Mathematik schlampen!

(b) $\displaystyle\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

(c) Man beachte, dass das unbestimmte Integral auch für Funktionen Sinn ergeben kann, die überhaupt nicht integrierbar sind. So gilt zum Beispiel für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\sin\Big(\dfrac{1}{x}\Big) - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\Big(\dfrac{1}{x}\Big), & \text{falls } x > 0,\\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

wegen Beispiel 27.2 (d)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left.\begin{cases} x^{3/2}\cdot\sin(1/x), & \text{falls } x > 0,\\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}\right\} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

aber f ist für jedes $b > 0$ auf dem Intervall $[0, b]$ nicht integrierbar (vgl. Warnung 31.11 (a)).

Wir können nun unsere Rechenregeln für Integrale auch für die unbestimmten Integrale formulieren. Zuvor ist jedoch noch die folgende Beoachtung interessant.

Bemerkung 32.8. Auf einem kompakten Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ besitzt nach Korollar 31.10 jede stetige Funktion eine Stammfunktion. Dies gilt tatsächlich sogar für jedes beliebige Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dazu wählen wir ein beliebiges $\xi \in I$, das kein Randpunkt von I ist, und setzen für jedes $x \in I$

$$F(x) = \int_{\xi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zum Nachweis, dass nun F tatsächlich eine Stammfunktion von f ist, unterscheiden wir die Fälle $x \geq \xi$ und $x < \xi$. Ist $x \geq \xi$, so wählen wir ein $b \geq x$ (Im Falle $x = \xi$, bitte nicht auch noch $b = x$, was sich dank unserer Wahl von ξ im Inneren des Intervalls zum Glück vermeiden lässt). Nun ist nach dem Hauptsatz die Funktion F auf dem Intervall $[\xi, b]$ eine Stammfunktion von f, also ist $F'(x) = f(x)$.
Der Fall $x < \xi$ geht analog.

Im Lichte dieser Bemerkung können wir also die folgenden Betrachtungen auf beliebigen Intervallen in $\mathbb{R}$ anstellen.

Satz 32.9 (Partielle Integration)**.** *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{K}$ seien differenzierbare Funktionen auf I. Besitzt dann die Funktion fg' auf I eine Stammfunktion, so besitzt auch $f'g$ dort eine Stammfunktion und es gilt*

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

Beweis. Sei H eine Stammfunktion von fg' auf I. Nach der Produktregel gilt $(fg)' = f'g + fg'$, also ist

$$f'g = (fg)' - fg' = (fg)' - H' = (fg - H)'.$$

Das bedeutet, dass $fg - H$ eine Stammfunktion von $f'g$ auf I ist und mit deren Hilfe gilt schließlich

$$\int f'g = fg - H + c = fg - \int fg'. \qquad \square$$

Beispiel 32.10. (a) Parallel zu Beispiel 32.2 (c) bekommt man allgemein

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(b) Manchmal führt auch erst mehrmalige Anwendung der partiellen Integration zum Ziel:

$$\begin{aligned}\int x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= x^2\mathrm{e}^x - \Big(2x\mathrm{e}^x - \int 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\Big)\\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\int \mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + c,\\ &= \mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2) + c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Satz 32.11 (Substitutionsregeln für unbestimmte Integrale)**.**
Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f \in \mathrm{C}(I, \mathbb{K})$, sowie $g \in \mathrm{C}^1(J, \mathbb{R})$ seien Funktionen mit $g(J) = I$. Dann gilt

(a) $\displaystyle\int f(g(t)) \cdot g'(t) \,\mathrm{d}t = \int f(x) \,\mathrm{d}x\Big|_{x=g(t)}$ *auf J.*

(b) Ist $g'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$, so gilt

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \,\mathrm{d}t\Big|_{t=g^{-1}(x)}.$$

Bemerkung 32.12. (a) Die Notation $|_{x=g(t)}$ bedeutet, dass man zunächst den davor stehenden Ausdruck bestimmt, und dann überall $g(t)$ für x einsetzt.

(b) Man beachte, dass die Voraussetzung $g'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ in Teil (b) des Satzes, dank der Stetigkeit der Ableitung impliziert, dass g' entweder überall strikt positiv oder überall strikt negativ ist. Auf jeden Fall ist also g streng monoton auf J und damit existiert die Umkehrfunktion g^{-1} auf J, die ja in der dann folgenden Aussage auch verwendet wird.

Beweis. Nach Bemerkung 32.8 hat f auf I eine Stammfunktion F. Damit setzen wir $H := F \circ g$. Man beachte, dass damit für alle $t \in J$

$$H(t) + c = F(g(t)) + c = \int f(x) \,\mathrm{d}x\Big|_{x=g(t)}$$

gilt. Außerdem gilt nach der Kettenregel für alle $t \in J$

$$H'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t) \tag{32.1}$$

woraus bereits die erste Aussage folgt. Für die zweite Aussage machen wir uns klar, dass

$$H \circ g^{-1} = F \circ g \circ g^{-1} = F$$

gilt. Also ist wieder mit Hilfe von (32.1)

$$\begin{aligned}\int f(x) \,\mathrm{d}x = F(x) + c = H(g^{-1}(x)) + c &= H(t)\big|_{t=g^{-1}(x)} + c\\ &= \int f(g(t)) \cdot g'(t) \,\mathrm{d}t\Big|_{t=g^{-1}(x)}.\end{aligned}$$

□

Beispiel 32.13. (a) Wir berechnen auf dem Intervall $(0, \infty)$

$$h(t) := \int \frac{t+5}{t^2+10t+4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t+10}{t^2+10t+4}\,\mathrm{d}t.$$

Dazu setzen wir $f(x) = {}^1\!/_x$ und $g(t) = t^2 + 10t + 4$. Dann ist

$$h(t) = \frac{1}{2}\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Also haben wir mit der Substitutionsregel

$$h(t) = \frac{1}{2}\int f(x)\,\mathrm{d}x\bigg|_{x=g(t)} = \frac{1}{2}\cdot \ln(x)\big|_{x=t^2+10t+4} + c = \frac{1}{2}\cdot\ln(t^2+10t+4) + c.$$

(b)(*) Auf dem Intervall $(0, 1)$ betrachten wir das unbestimmte Integral (vgl. Beispiel 32.5 (b))

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

An diesem Beispiel werden wir sehen, wie die verschiedenen Integrationsregeln zusammenwirken können, denn die Stammfunktion hiervon wird sich als einigermaßen anstrengend zu berechnen erweisen.

Wir setzen zunächst $x = g(t) = \sin(t)$ für $t \in J := (0, {}^\pi\!/_2)$. Dann ist ${}^{\mathrm{d}x}\!/_{\mathrm{d}t} = \cos(t)$, also $\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$ und damit haben wir

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=\arcsin(x)}.$$

Da $t \in (0, {}^\pi\!/_2)$ ist, ist das Vorzeichen des Cosinus hier immer positiv, so dass tatsächlich $\sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$ gilt. Das nun auftretende Integral über $\cos^2(t)$ berechnen wir wieder wie in Beispiel 32.2 (d) mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t &= \sin(t)\cos(t) + \int \sin^2(t) = \sin(t)\cos(t) + \int (1-\cos^2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \sin(t)\cos(t) + t - \int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

woraus mit der Rücksubstitution $t = \arcsin(x)$ (man beachte, dass unser Intervall $(0, 1)$ im Definitionsbereich des Arcussinus liegt) folgt:

$$\begin{aligned}2\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t &= \sin(t)\cos(t) + t + c \\ &= \sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x)) + \arcsin(x) + c \\ &= x\cos(\arcsin(x)) + \arcsin(x) + c.\end{aligned}$$

Das können wir noch ein wenig vereinfachen, denn wegen $\cos^2(y)+\sin^2(y) = 1$ gilt (mit $y = \arcsin(x)$)

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2,$$

also $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Damit haben wir nun das Endergebnis

$$\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\big) + c \quad \text{auf } (0,1).$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir nun einen weiteren Beweis für den Satz von Taylor mit Methoden aus der Integrationstheorie angeben. Auf diese Weise bekommen wir als neue Erkenntnis eine alternative Darstellung des Restgliedes mit Hilfe eines Integrals. Da der schwierigste Teil bei der Anwendung dieses Satzes meist die Abschätzung des Restgliedes ist, ist es natürlich praktisch möglichst viele Darstellungen für dieses zu haben.

Satz 32.14 (Satz von Taylor (mit Integralrestglied))**.** $^{(*)}$ *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in \mathrm{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, x_0 \in I$. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Beweis$^{(*)}$. Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $n = 0$ ist die Behauptung

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\ \mathrm{d}t,$$

was gerade der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist. Gilt die Formel nun für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so haben wir für $f \in \mathrm{C}^{n+2}(I,\mathbb{K})$ nach Induktionsvoraussetzung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Mit partieller Integration folgt daraus

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \Big(\frac{1}{n+1}\frac{-(x-t)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(t)\Big)\Big|_{t=x_0}^{t=x} \\
&\qquad + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ \mathrm{d}t. \qquad \square
\end{aligned}$$

33. Uneigentliche Integrale

Bisher können wir Integrale nur über kompakte Intervalle und sprungstetige, d. h. insbesondere beschränkte Funktionen bilden. Wir wollen unser mächtiges Werkzeug des Grenzübergangs jetzt auch hier verwenden, um etwas allgemeinere Integrale zuzulassen.
In diesem Abschnitt seien stets $a, b \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ sowie $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definition 33.1. *Es sei* $f : [a, \beta) \to \mathbb{K}$ *(bzw.* $f : (\alpha, b] \to \mathbb{K}$*) sprungstetig auf dem Intervall* $[a, t]$ *(bzw.* $[t, b]$*) für jedes* $t \in (a, \beta)$ *(bzw.* $t \in (\alpha, b)$*). Dann heißt* f uneigentlich integrierbar*, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{t \to \beta-} \int_a^t f \qquad \Big(\textit{bzw.} \quad \lim_{t \to \alpha+} \int_t^b f\Big)$$

existiert. In diesem Fall heißt das uneigentliche Integral

$$\int_a^\beta f := \lim_{t \to \beta-} \int_a^t f \qquad \Big(\textit{bzw.} \quad \int_\alpha^b f := \lim_{t \to \alpha+} \int_t^b f\Big)$$

konvergent*. Sonst nennt man es* divergent.

Beispiel 33.2. (a) Wir betrachten

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x.$$

Das ist ein uneigentliches Integral, denn die Funktion $1/\sqrt{1-x^2}$ ist auf $[0, 1]$ wegen $\lim_{x \to 1-} 1/\sqrt{1-x^2} = \infty$ nicht beschränkt. Für jedes $t \in (0, 1)$ ist sie aber stetig auf dem Intervall $[0, t]$, also dort insbesondere sprungstetig. Wir haben damit im Sinne der obigen Defintion den Fall $a = 0$ und $\beta = 1$. Dann ist für jedes $t \in (0, 1)$

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin(x)\Big|_{x=0}^{x=t} = \arcsin(t)$$

und wegen $\lim_{t \to 1-} \arcsin(t) = \pi/2$ ist das uneigentliche Integral konvergent und wir haben

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \lim_{t \to 1-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \lim_{t \to 1-} \arcsin(t) = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Während im ersten Beispiel die Funktion unbeschränkt war, schauen wir uns nun eine Integration über ein unbeschränktes Intervall an:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

es ist also $a = 0$ und $\beta = \infty$. Für $t \in (0, \infty)$ gilt nun

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x)\Big|_{x=0}^{x=t} = \arctan(t) \longrightarrow \frac{\pi}{2} \quad (t \to \infty),$$

also ist auch dieses uneigentliche Integral konvergent und es ist

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Genauso sieht man

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Es sei $s > 0$. Wann ist die Funktion $1/x^s$ auf dem Intervall $[1, \infty)$ uneigentlich integrierbar? Für $t \in (1, \infty)$ gilt für $s = 1$

$$\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)\Big|_{x=1}^{x=t} = \ln(t),$$

also ist das uneigentliche Integral in diesem Fall wegen $\lim_{t\to\infty} \ln(t) = \infty$ divergent.

Für $s \neq 1$ ist

$$\int_1^t \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-s}x^{1-s}\Big|_{x=1}^{x=t} = \frac{1}{1-s}(t^{1-s} - 1).$$

Der Grenzwert dieses Ausdrucks existiert nun genau für $s > 1$ und es ist in diesem Fall

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-s}(t^{1-s} - 1) = -\frac{1}{1-s} = \frac{1}{s-1}.$$

(d) Genauso wie im vorherigen Beispiel kann man zeigen, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$$

genau dann konvergiert, wenn $s < 1$ ist. In diesem Fall gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-s}.$$

Bisher haben wir nur uneigentliche Integrale betrachtet, die an einer Grenze uneigentlich sind. Natürlich will man auch den Fall behandeln, dass es an beiden Intervallgrenzen Probleme gibt, man spricht dann oft von einem doppelt uneigentlichen Integral. Dazu müssen wir unsere Definition modifizieren.

Definition 33.3. *Es sei $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{K}$ sprungstetig auf jedem Intervall $[\xi, \eta] \subseteq (\alpha, \beta)$. Dann heißt f auf (α, β)* uneigentlich integrierbar*, wenn es ein $c \in (\alpha, \beta)$ gibt, so dass die beiden uneigentlichen Integrale*

$$\int_\alpha^c f \quad \textit{und} \quad \int_c^\beta f$$

im Sinne von Defintion 33.1 konvergieren. In diesem Fall heißt das uneigentliche Integral

$$\int_\alpha^\beta f := \int_\alpha^c f + \int_c^\beta f$$

konvergent.

Natürlich muss man, damit diese Definition Sinn macht, zeigen, dass der so erhaltene Wert für das uneigentliche Integral nicht von der speziellen Wahl von c abhängt:

Übungsaufgabe 33.4. Definition 33.3 ist von der Wahl von $c \in (\alpha, \beta)$ unabhängig.

Warnung 33.5. Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty f$ ist bewusst *nicht* definiert durch $\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f$, sondern

$$\int_{-\infty}^\infty f = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 f + \lim_{s\to\infty} \int_0^s f.$$

Das ist ein wesentlicher Unterschied, wie man an dem Beispiel $\int_{-\infty}^\infty x \, \mathrm{d}x$ sieht. Dieses ist offensichtlich divergent, denn sowohl $\int_{-\infty}^0 x \, \mathrm{d}x$, als auch $\int_0^\infty x \, \mathrm{d}x$ sind divergent, aber für jedes $t > 0$ gilt

$$\int_{-t}^t x \, \mathrm{d}x = 0.$$

Der oben angegebene Limes existiert hier also und ist Null. Trotzdem ergibt es keinen Sinn, dadurch das uneigentliche Integral zu definieren, denn dass sich die positiven und negativen Beiträge hier gerade aufheben, liegt daran, dass wir die Grenzwerte in Richtung ∞ und $-\infty$ genau gleich schnell laufen lassen. Bildet man z.B. den genau so sinnvollen (bzw. nicht sinnvollen) Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t+1} x \, \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \Big(\frac{1}{2}(t+1)^2 - \frac{1}{2}t^2 \Big) = \lim_{t\to\infty} \Big(t + \frac{1}{2} \Big) = \infty,$$

sieht das Ergebnis schon anders aus.
Also merke: Ein doppelt uneigentliches Integral konvergiert nur dann, wenn es an beiden Integrationsgrenzen unabhängig voneinander konvergiert.

Beispiel 33.6. (a) Es ist mit Hilfe von Beispiel 33.2 (b) das doppelt uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

konvergent und gleich π.

(b) Sei $s > 0$. Kombiniert man (c) und (d) aus Beispiel 33.2, so sieht man, dass das doppelt uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^s} \, \mathrm{d}x$$

genau dann konvergiert, wenn $s > 1$ und $s < 1$ gilt, d. h. es ist immer divergent.

Die folgenden Sätze und Definitionen formulieren wir der Übersichtlichkeit halber nur für uneigentliche Integrale der Form $\int_a^\beta f(x) \, \mathrm{d}x$. Dabei sei stets vorausgesetzt, dass f für jedes $t \in (a, \beta)$ auf $[a, t]$ sprungstetig ist. Entsprechende Sätze und Defintionen gelten auch für die anderen Arten uneigentlicher Integrale, wobei bei doppelt uneigentlichen Integralen immer darauf geachtet werden muss, dass an beiden Grenzen unabhängig voneinander Konvergenz vorliegt.
Die Beweise der nächsten Sätze sind denen der entsprechenden Aussagen für Reihen nachgebildet. Hier wird die enge Verwandtschaft der uneigentlichen Integrale mit den unendlichen Reihen überaus deutlich.
Im Folgenden seien jeweils $f, g : [a, \beta) \to \mathbb{K}$ Funktionen, die für jedes $t \in (a, \beta)$ auf dem Intervall $[a, t]$ sprungstetig sind.

Satz 33.7 (Cauchy-Kriterium)**.** *Das uneigentliche Integral $\int_a^\beta f$ ist genau dann konvergent, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $c = c(\varepsilon) \in (a, \beta)$ gibt, so dass*

$$\Big| \int_u^v f \Big| < \varepsilon \quad \textit{für alle } u, v \in (c, \beta)$$

gilt.

Beweis. **„$\Longrightarrow$"** Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \to \beta-} \int_a^t f = \int_a^\beta f$$

und das bedeutet mit Hilfe von Satz 18.8, dass wir ein $c \in (a, \beta)$ finden, so dass für alle $t \in (c, \beta)$ gilt

$$\Big| \int_a^t f - \int_a^\beta f \Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nehmen wir nun $u, v \in (c, \beta)$, so gilt

$$\Big|\int_u^v f\Big| = \Big|\int_a^v f - \int_a^u f\Big| \leq \Big|\int_a^v f - \int_a^\beta f\Big| + \Big|\int_a^u f - \int_a^\beta f\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

„$\Longleftarrow$" Sei (t_n) eine Folge in $[a, \beta)$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \beta$ und sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert dann ein $c \in (a, \beta)$, so dass $|\int_u^v f| < \varepsilon$ ist für alle $u, v \in (c, \beta)$. Dank der Konvergenz der Folge (t_n) gegen β gibt es weiter ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $t_n \in (c, \beta)$ für alle $n \geq n_0$. Damit wissen wir für alle $n, m \geq n_0$

$$\Big|\int_a^{t_n} f - \int_a^{t_m} f\Big| = \Big|\int_{t_n}^{t_m} f\Big| < \varepsilon.$$

Wir haben gezeigt, dass $(\int_a^{t_n} f)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist, also ist diese konvergent. Da wir dies für jede Folge in $[a, \beta)$ gezeigt haben, die gegen β konvergiert, liefert Satz 18.9, dass der Funktionengrenzwert $\lim_{t\to\beta-} \int_a^t f$ existiert. Damit konvergiert $\int_a^\beta f$ und wir sind fertig. $\square$

Beispiel 33.8. Wir weisen mit Hilfe des Cauchykriteriums nach, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \,\mathrm{d}x$$

ein konvergentes uneigentliches Integral ist. Dazu stellen wir zunächst fest, dass dieses, obwohl es auf den ersten Blick doppelt uneigentlich aussieht, eigentlich nur einfach uneigentlich für x gegen unendlich ist, denn nach Beispiel 19.6 (b) können wir die Funktion $x \mapsto {\sin(x)}/{x}$ durch den Wert 1 stetig nach $x = 0$ fortsetzen.
Es seien $u, v \in (0, \infty)$ mit $u < v$. Dann gilt mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned}\Big|\int_u^v \frac{\sin(x)}{x} \,\mathrm{d}x\Big| &= \Big| - \frac{\cos(x)}{x}\Big|_{x=u}^{x=v} - \int_u^v \Big(-\frac{1}{x^2}\Big)(-\cos(x)) \,\mathrm{d}x\Big| \\ &\leq \Big|\frac{\cos(u)}{u} - \frac{\cos(v)}{v} - \int_u^v \frac{\cos(x)}{x^2} \,\mathrm{d}x\Big|.\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt schätzen wir mehrfach mit Dreiecksungleichungen ab und erhalten, da u und v strikt positiv sind,

$$\leq \frac{|\cos(u)|}{u} + \frac{|\cos(v)|}{v} + \int_u^v \frac{|\cos(x)|}{x^2} \,\mathrm{d}x.$$

Da die Cosinusfuktion auf $\mathbb{R}$ durch eins beschränkt ist, geht die Abschätzung munter weiter:

$$\leq \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \int_u^v \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} - \frac{1}{x}\Big|_{x=u}^{x=v} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = \frac{2}{u}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $c > 0$ mit $c > {}^2/_\varepsilon$ und es gilt für alle $u, v \in (c, \infty)$ dank obiger Rechnung

$$\Big| \int_u^v \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x \Big| \leq \frac{2}{u} \leq \frac{2}{c} < \varepsilon.$$

Das Cauchykriterium aus Satz 33.7 liefert damit die Konvergenz des betrachteten Integrals.
Betrachtet man dagegen das Integral

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} \, \mathrm{d}x,$$

so stellt sich heraus, dass dieses divergent ist. Wir haben hier einen ähnlichen Effekt wie bei der harmonischen und der alternierenden harmonischen Reihe. Das motiviert die folgende Definition.

Definition 33.9. *Das uneigentliche Integral $\int_a^\beta f$ heißt* absolut konvergent*, wenn das uneigentliche Integral $\int_a^\beta |f|$ konvergent ist.*

Parallel zu unseren Überlegungen bei absolut konvergenten Reihen, können wir auch hier den folgenden Satz zeigen.

Satz 33.10 (Dreiecksungleichung für uneigentliche Integrale)**.** *Ist das uneigentliche Integral $\int_a^\beta f$ absolut konvergent, so ist es auch konvergent und es gilt*

$$\Big| \int_a^\beta f \Big| \leq \int_a^\beta |f|.$$

Beweis. Wir wenden das Cauchykriterium gleich zweimal an. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann gibt es dank der absoluten Konvergenz des Integrals nach Satz 33.7 ein $c \in (a, \beta)$, so dass für alle $u, v \in (c, \beta)$ gilt

$$\Big| \int_u^v |f| \Big| < \varepsilon.$$

Nach der Dreiecksungleichung aus Satz 31.1 (b) ist dann für alle $u, v \in (c, \beta)$

$$\Big| \int_u^v f \Big| \leq \Big| \int_u^v |f| \Big| < \varepsilon,$$

was wiederum nach Satz 33.7 bedeutet, dass das Integral $\int_a^\beta f$ konvergent ist. Mit diesem Wissen ausgestattet, folgern wir daraus schließlich

$$\Big| \int_a^\beta f \Big| = \Big| \lim_{t \to \beta-} \int_a^t f \Big| = \lim_{t \to \beta-} \Big| \int_a^t f \Big| \leq \lim_{t \to \beta-} \int_a^t |f| = \int_a^\beta |f|. \qquad \square$$

Die Übertragung des Beweises des folgenden Satzes aus dem Kapitel über absolute Konvergenz bleibt als Übungsaufgabe.

Satz 33.11 (Majoranten-/Minorantenkriterium)**.** *Es sei* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(a) Ist $|f(x)| \leq g(x)$ *für alle* $x \in [a, \beta)$ *und ist das uneigentliche Integral* $\int_a^\beta g$ *konvergent, so konvergiert* $\int_a^\beta f$ *absolut.*

(b) Ist $f(x) \geq g(x) \geq 0$ *für alle* $x \in [a, \beta)$ *und ist das uneigentliche Integral* $\int_a^\beta g$ *divergent, so ist auch* $\int_a^\beta f$ *divergent.*

Beispiel 33.12. $^{(*)}$

(a) Wir untersuchen

$$\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,\mathrm{d}x =: \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

auf Konvergenz. Wegen

$$|f(x)| = \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{3/2}} =: g(x)$$

und da nach Beispiel 33.2 (c) das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^{-3/2}\,\mathrm{d}x$ konvergiert, ist das untersuchte uneigentliche Integral nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent.

Einen genauen Wert für das Integral können wir, wie beim Majorantenkriterium üblich, nicht angeben, aber das ist auch meist nicht nötig, denn wir haben ja mit Hilfe der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3/2 - 1} = 2.$$

(b) Wir untersuchen noch das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^2+7x+10}\,\mathrm{d}x =: \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vergleichen wollen wir die Funktion f mit der Funktion $g(x) := 1/x$ für große x. Dazu bemerken wir zunächst

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+7x+10} = 1.$$

Also gibt es ein $c > 1$, so dass $f(x)/g(x) \geq 1/2$ für alle $x \geq c$ gilt, was wiederum $f(x) \geq g(x)/2 = 1/2x > 0$ für alle diese x bedeutet. Da nun das uneigentliche Integral $\int_c^\infty 1/2x\,\mathrm{d}x$ nach Beispiel 33.2 (c) divergent ist, divergiert nach dem Minorantenkriterium auch das uneigentliche Integral $\int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, und damit divergiert auch das Ausgangsintegral.

Bemerkung 33.13. $^{(*)}$ Das im letzten Beispiel verwendete Verfahren ist ziemlich universell einsetzbar. Allgemein folgt für zwei Funktionen f und g aus der Beziehung $\lim_{x\to\beta} f(x)/g(x) = L > 0$ die Ungleichungskette

$$\frac{1}{2}L \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2}L \quad \text{für alle } x \in [c, \beta)$$

für ein nahe genug bei β gewähltes c. Daraus lässt sich dann immer wie oben eine Abschätzung für das Majoranten- bzw. das Minorantenkriterium bekommen. Qualitativ gesprochen bedeutet die Existenz eines endlichen und strikt positiven Grenzwertes von $f(x)/g(x)$, wenn x gegen die Problemstelle läuft, dass f und g das gleiche Verhalten an der Problemstelle haben.

Bevor wir dieses Kapitel abschließen, sei noch einmal vor einem typischen Fehler gewarnt.

Warnung 33.14. $^{(*)}$ Wir haben in Beispiel 33.2 (d) bemerkt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ konvergiert, aber $\int_0^1 1/x\,\mathrm{d}x$ divergiert. Daran sieht man, dass man im Allgmeinen nicht schließen kann, dass mit f auch sofort f^2 uneigentlich integrierbar ist! Das wird trotzdem immer wieder gerne versucht. Es gilt also allgemein *nicht*, dass das Produkt uneigentlich integrierbarer Funktionen wieder uneigentlich integrierbar ist.

Übungsaufgabe 33.15. $^{(*)}$ Das uneigentliche Integral $\int_a^\beta f$ ist genau dann konvergent, wenn es ein $c \in [a, \beta)$ gibt, so dass $\int_c^\beta f$ konvergent ist. In diesem Falle gilt

$$\int_a^\beta f = \int_a^c f + \int_c^\beta f.$$

34. Die Γ-Funktion$^{(*)}$

Satz 34.1. *Es sei $x > 0$. Dann ist das doppelt uneigentliche Integral*

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

konvergent.

Beweis. Wir untersuchen zunächst das Integral von Null bis Eins. Dazu beobachten wir, dass

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\mathrm{e}^{-t} t^{x-1}}{\frac{1}{t^{1-x}}} = \lim_{t \to 0+} \mathrm{e}^{-t} = 1$$

ist. Also gibt es wie in Bemerkung 33.13 ein $c \in (0,1)$ mit

$$0 \leq \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leq \frac{3}{2} \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{für alle } t \in (0,c).$$

Da außerdem für alle $x > 0$ das uneigentliche Integral $\int_0^c {}^1\!/_{t^{1-x}}\, \mathrm{d}t$ konvergiert, ist nach dem Majorantenkriterium auch $\int_0^c \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$, und damit nach Übungsaufgabe 33.15 auch $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ konvergent.
Für das Integral von Eins bis ∞ vergleichen wir mit ${}^1\!/_{t^2}$ und erhalten

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} t^{x-1}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^{x+1}}{\mathrm{e}^t} = 0.$$

Also gibt es wieder ein $c > 1$ mit

$$0 \leq \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{t^2} \quad \text{für alle } t \geq c$$

und da $\int_c^\infty {}^1\!/_{t^2}\, \mathrm{d}t$ konvergent ist, konvergiert damit nach dem Majorantenkriterium auch wieder $\int_c^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ und somit auch $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$. Also sind beide Teile des doppelt uneigentlichen Integrals konvergent, d. h. es konvergiert auch als ganzes. □

Das soeben behandelte Integral ist wichtig genug, dass es einen Namen verdient hat.

Definition 34.2. *Die nach Satz 34.1 durch* $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0,$$

gegebene Funktion heißt Gamma-Funktion.

Satz 34.3. *Für alle* $x > 0$ *gilt* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Beweis. Es seien $0 < \alpha < \beta$. Dann gilt mit partieller Integration

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-t} t^x\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t} t^x \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (-e^{-t}) x t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{e}^\alpha}\alpha^x - \frac{1}{\mathrm{e}^\beta}\beta^x + x\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Setzen wir speziell $\beta = 1$, so erhalten wir

$$\int_\alpha^1 \mathrm{e}^{-t} t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{e}^\alpha}\alpha^x - \frac{1}{\mathrm{e}} + x\int_\alpha^1 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

und mit $\alpha \to 0$ also

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^x\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\mathrm{e}} + x\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Machen wir die gleichen Überlegungen mit der speziellen Wahl $\alpha = 1$ und dem Grenzübergang $\beta \to \infty$, so erhalten wir

$$\int_1^\beta \mathrm{e}^{-t} t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}^\beta}\beta^x + x\int_1^\beta \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t,$$

bzw.

$$\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t} t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{e}} + x\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Zusammengenommen bedeutet das

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^x\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^x\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \mathrm{e}^{-t} t^x\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\mathrm{e}} + x\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\mathrm{e}} + x\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t = x\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \\
&= x\Gamma(x).
\end{aligned}$$ □

Aus diesem Resultat lässt sich nun relativ schnell folgern, dass die Gamma-Funktion eine Erweiterung der Fakultät auf die reellen Zahlen darstellt.

Korollar 34.4. *Für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $n = 0$ gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^0 \, \mathrm{d}t = \lim_{s\to\infty} \int_0^s \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \lim_{s\to\infty} -\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^s = \lim_{s\to\infty} 1 - \mathrm{e}^{-s} = 1 = 0!.$$

Also haben wir den Induktionsanfang erledigt. Gilt nun $\Gamma(n+1) = n!$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so haben wir nach Satz 34.3

$$\Gamma(n+2) = \Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!. \qquad \square$$

Tabelle der griechischen Buchstaben

groß	klein	Name
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ϵ, ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	κ, $\varkappa$	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π, ϖ	Pi
P	ρ, ϱ	Rho
Σ	σ, ς	Sigma
T	τ	Tau
Y	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

Index