Skriptum zur Vorlesung

Mehrfachintegration (Analysis III)

H.D. Alber

1 Der Raum L_1, Transformationsformel

1 a.) Einführung

Beim Studium des Integrals von Funktionen einer Variablen wurde folgende Substitutionsregel bewiesen (Vorlesung Analysis II, Kapitel 2 d):

Substitutionsregel: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $g : [c,d] \to [a,b]$ sei bijektiv und stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f\Big(g(y)\Big)g'(y)dy\,.$$

Man kann $g : [c,d] \to [a,b]$ als „Koordinatentransformation" auffassen. Bei dieser Auffassung ist $f \circ g$ die Darstellung der ursprünglich in „x–Koordinaten" gegebenen Funktion f in „y–Koordinaten", und die Substitutionsregel zeigt, wie man die Integrale von f in den verschiedenen Koordinatendarstellungen ineinander umrechnet. Daher nennt man die Substitutionsregel auch Transformationsformel. Es erhebt sich die Frage, ob eine solche Transformationsformel auch für mehrdimensionale Integrale existiert. In diesem Kapitel soll diese Transformationsformel hergeleitet und bewiesen werden.

Um das Ziel dieses Kapitels genau anzugeben, brauche ich folgende Definition (siehe Analysis II, Kapitel 5 e):

Definition: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $f : U \to V$ sei bijektiv und f sowie f^{-1} seien stetig differenzierbar. Dann heißt f Diffeomorphismus.

In diesem Kapitel soll folgender Satz bewiesen werden:

Satz: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen und sei $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ über U integrierbar ist, und es gilt dann

$$\int_V f(x)dx = \int_U f\Big(\varphi(y)\Big)|\det \varphi'(y)|dy\,.$$

Hierbei sei $\varphi'(x)$ die $n \times n$ Matrix der ersten partiellen Ableitung von φ. Die Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale unterscheidet sich von der Transformationsformel für eindimensionale Integrale im wesentlichen dadurch, daß mehrdimensionale Integrale keine „Orientierung"zulassen.

Die nächsten Abschnitte dienen zur Vorbereitung des Beweises dieser Formel.

1 b.) Der Raum L_1

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. $\mathcal{L}(M)$ sei der Vektorraum aller über M Lebesgue–integrierbaren Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$. Für $f \in \mathcal{L}(M)$ sei

$$\|f\|_1 := \int_M |f(x)|\, dx .$$

Dies ist keine Norm auf $\mathcal{L}(M)$. Es gilt aber

(i) $\|f\|_1 \geq 0\,,\quad f = 0 \Longrightarrow \|f\|_1 = 0$

(ii) $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\, \|f\|_1$

(iii) $\|f_1 + f_2\|_1 \leq \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1\,.$

Es gilt aber nicht $\|f\|_1 = 0 \Longrightarrow f \equiv 0$. Ein Gegenbeispiel liefert die Dirichletfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Also ist $(\mathcal{L}(M), \|\cdot\|_1)$ kein normierter Raum. Man kann einen normierten Raum erhalten, indem man Äquivalenzklassen bildet:

Definition: Zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}(M)$ heißen äquivalent, geschrieben $f \sim g$, genau dann wenn

$$\|f - g\|_1 = 0$$

gilt.

Lemma: Zwei Funktionen f und g sind äquivalent, genau dann wenn sie sich höchstens auf einer Nullmenge unterscheiden.

Beweis: In Kapitel 4b der Vorlesung Analysis II wurde bewiesen, daß $\|f - g\|_1 = \int_M |f(x) - g(x)| dx = 0$ gilt, genau dann wenn $f - g$ höchstens auf einer Nullmenge von Null verschieden ist. ∎

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Dies ergibt sich aus folgendem

Lemma: Es gilt

(i) $f \sim f$

(ii) $f \sim \tilde{f} \Longrightarrow \tilde{f} \sim f$

(iii) $f \sim g,\ \ g \sim h \Longrightarrow f \sim h\,.$

(iv) $f \sim \tilde{f},\ \ g \sim \tilde{g} \Longrightarrow f + g \sim \tilde{f} + \tilde{g}$

(v) $\quad f \sim \tilde{f},\ \ \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda f \sim \lambda \tilde{f}\,.$

Beweis: Wir beweisen hier nur (iii). Die anderen Beweise verlaufen ähnlich. Wenn $f \sim g$ und $g \sim h$ ist, gilt nach Definition $\|f-g\|_1 = 0\,,\ \|g-h\|_1 = 0$. Also ergibt die Dreiecksungleichung

$$\|f-h\|_1 = \|f-g+g-h\|_1 \leq \|f-g\|_1 + \|g-h\|_1 = 0\,.$$

Dies bedeutet $f \sim h$. ■

Nach (i) – (iii) ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Der Vektorraum $\mathcal{L}(M)$ wird durch diese Äquivalenzrelation in Äquivalenzklassen eingeteilt. Auf der Menge dieser Äquivalenzklassen kann man eine Vektorraumstruktur folgendermaßen definieren:
Sei $[f]$ die Äquivalenzklasse zum Repräsentanten f, $[g]$ die Äquivalenzklasse zum Repräsentanten g und $\lambda \in \mathbb{R}$. Setze

$$\begin{aligned} [f]+[g] &:= [f+g] \\ \lambda[f] &= [\lambda f]\,. \end{aligned}$$

Außerdem kann man eine Norm $\|\cdot\|_1$ erklären durch

$$\|[f]\|_1 := \|f\|_1\,. \qquad (*)$$

Zunächst muß man zeigen, daß diese Definitionen sinnvoll sind. Zum Beispiel muß man zeigen: Seien $f, \tilde{f}$ zwei Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse: $[f] = [\tilde{f}]$. Dann ist

$$\|f\|_1 = \|\tilde{f}\|_1\,.$$

Wenn dies nicht so wäre, würde die rechte Seite von $(*)$ vom gewählten Repräsentanten abhängen, während die linke Seite nur von der Äquivalenzklasse abhängen darf, also vom Repräsentanten unabhängig sein muß. $(*)$ würde also keinen Sinn haben.
Es gilt aber: $[f] = [\tilde{f}] \Longleftrightarrow f \sim \tilde{f} \Longleftrightarrow \|f-\tilde{f}\| = 0$, also

$$\|f\|_1 = \|f-\tilde{f}+\tilde{f}\|_1 \leq \|f-\tilde{f}\|_1 + \|\tilde{f}\|_1 = \|\tilde{f}\|_1\,.$$

Durch vertauschen der Rollen von f und $\tilde{f}$ folgt $\|\tilde{f}\|_1 \leq \|f\|_1$, und somit $\|f\|_1 = \|\tilde{f}\|_1$.

Daß auch die Definitionen der Addition und der Multiplikation mit Skalaren sinnvoll sind, folgt unmittelbar aus den Aussagen (iv) und (v) des obenstehenden Lemmas.

Definition: Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$ wird mit $L_1(M)$ oder $L(M)$ bezeichnet.

Lemma: $L_1(M)$ bildet mit der oben definierten Addition, Skalarmultiplikation und Norm einen normierten Vektorraum.

Beweis: Es gilt

$$\|[f]\|_1 = 0 \Longleftrightarrow \|f\|_1 = 0 \Longleftrightarrow f \sim 0 \Longleftrightarrow [f] = 0\,.$$

Die auf $\mathcal{L}(M)$ fehlende Normeigenschaft von $\|\cdot\|_1$ ist somit auf dem Raum $L_1(M)$ vorhanden. Der Beweis, daß die übrigen Vektorraum- und Normeigenschaften erfüllt sind, bleibt dem Leser überlassen. ∎

In der Praxis unterscheidet man nicht zwischen Äquivalenzklasse $[f]$ und dem Repräsentanten f, und man spricht vom Vektorraum $L_1(M)$ als dem normierten Raum der Lebesgue integrierbaren Funktionen!

Dieser normierter Raum ist vollständig:

Satz: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq L_1(M)$ eine Cauchyfolge bezüglich der $\|\cdot\|_1$–Norm. Dann ist diese Folge konvergent. Genauer gilt:

a) Es gibt eine Teilfolge $\{f_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ und eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{m\to\infty} f_{k_m}(x) = f(x)$$

fast überall.

b) Diese Funktion f gehört zu $L_1(M)$ und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_1 = 0\,.$$

Beweis: Es gibt eine Teilfolge $\{f_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ von $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $\|f_{k_m} - f_{k_{m+1}}\|_1 \le 2^{-m}$. Für die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}|$$

gilt

$$\begin{aligned} \|\sum_{m=1}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}|\,\|_1 &\le \sum_{m=1}^{\ell} \|f_{k_{m+1}} - f_{k_m}\|_1 \\ &\le \sum_{m=1}^{\ell} 2^{-m} \le \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} < \infty\,. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Beppo Levi folgt also, daß die monoton wachsende Folge

$$\left\{ \sum_{m=1}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| \right\}_{\ell=1}^{\infty}$$

fast überall gegen eine integrierbare Funktion F konvergiert.

Also ist die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}(f_{k_{m+1}} - f_{k_m})$ fast überall absolut konvergent, also auch die Folge

$$f_{k_\ell}(x) = \sum_{m=1}^{\ell-1}(f_{k_{m+1}} - f_{k_m}) + f_{k_1} \,.$$

Die Grenzfunktion sei f. Da

$$|f_{k_\ell}(x)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |f_{k_{m+1}}(x) - f_{k_m}(x)| + |f_{k_1}(x)| = F(x) + |f_{k_1}(x)|$$

gilt, hat die Folge $\{f_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ die integrierbare Dominante $F + |f_{k_1}|$, also folgt aus dem Satz von Lebesgue, daß f integrierbar ist und daß

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_M f_{k_\ell}(x)dx = \int_M f(x)dx$$

gilt. Weil $\{|f - f_{k_\ell}|\}_{\ell=1}^{\infty}$ die Dominante $F + |f_{k_1}| + |f|$ hat, folgt aus dem Satz von Lebesgue auch, daß

$$\lim_{\ell\to\infty} \|f - f_{k_\ell}\|_1 = \lim_{\ell\to\infty} \int_M |f - f_{k_\ell}|dx = \int_M \lim_{\ell\to\infty} |f - f_{k_\ell}|dx = \int_M 0dx = 0$$

gilt.

Auch $\{\|f - f_m\|_1\}_{m=1}^{\infty}$ konvergiert. Denn sei $\varepsilon > 0$. Wähle m_0, so daß für $k, m \geq m_0$

$$\|f_k - f_m\|_1 < \varepsilon \,.$$

Wähle $k_\ell \geq m_0$ so, daß $\|f_{k_\ell} - f\|_1 < \varepsilon$ gilt. Es folgt für $m \geq m_0$, daß

$$\|f - f_m\|_1 \leq \|f - f_{k_\ell}\| + \|f_{k_\ell} - f_m\|_1 < 2\varepsilon \,.$$

■

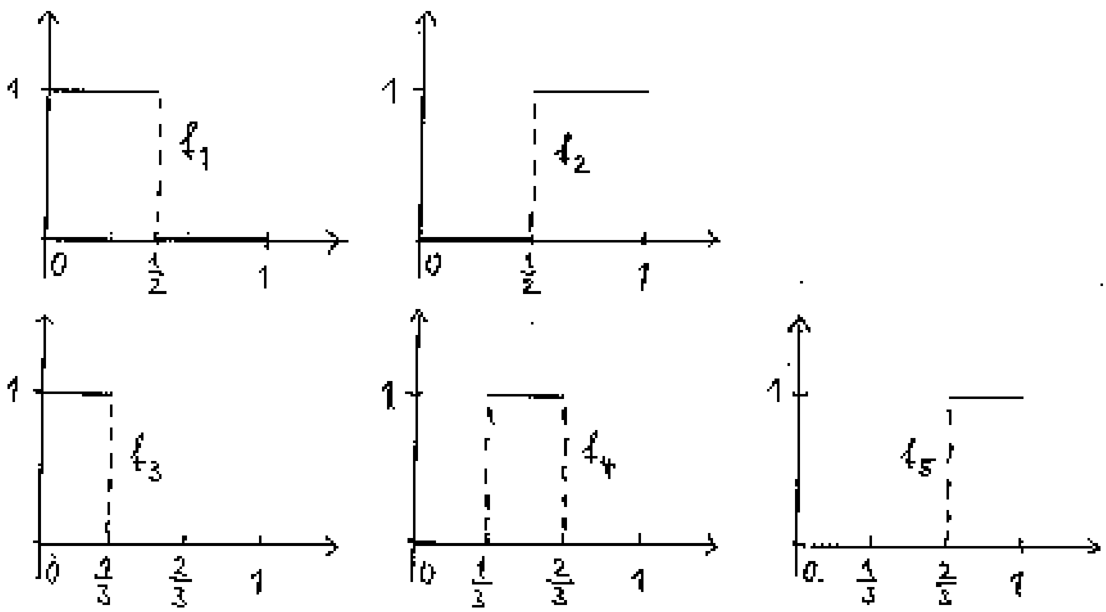
Folgerung: Sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq L_1(M)$ eine Folge, die in der L_1–Norm gegen $f \in L_1(M)$ konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $\{f_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$, die punktweise fast überall gegen f konvergiert.

Beweis: $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist eine Cauchyfolge, enthält also eine Teilfolge $\{f_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$, die punktweise fast überall und in der L_1–Norm gegen eine Grenzfunktion g konvergiert. Da $\{f_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ auch gegen f in der L_1–Norm konvergiert, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \|f-g\|_1 &= \|f-f_{k_m}+f_{k_m}-g\|_1 \\ &\leq \|f-f_{k_m}\|_1 + \|f_{k_m}-g\|_1 < 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$, also ist $\|f-g\|_1 = 0$, also $f = g$ fast überall, also konvergiert $\{f_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ fast überall gegen f. ■

Beispiel:



Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Funktion

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in I \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus I \end{cases}$$

heißt charakteristische Funktion von I. Es sei $M = [0,1]$, $k_n = \sum_{i=1}^{n-1} i$ und

$$f_k = \chi_{[(k-k_n)/n\,,\,(k-k_n+1)/n]}$$

für $n \geq 2$, $k_n \leq k < k_{n+1}$. Weil

$$\|f_k\|_1 = \int_0^1 |f_k(x)|dx = \frac{1}{n}$$

ist für $k_n \le k < k_{n+1}$, gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k\|_1 = 0$, also konvergiert die Folge $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ im Raum $L_1([0,1])$ gegen 0. Zu jedem $x \in [0,1]$ und zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es aber $k, \ell \ge m$ mit

$$f_k(x) = 1\,,\ f_\ell(x) = 0\,,$$

also ist $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ für kein $x \in [0,1]$ konvergent. Wegen $f_{k_n} = \chi_{[0,1/n]}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x) = 0\,,\ x > 0\,,$$

also konvergiert die Teilfolge $\{f_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ fast überall punktweise gegen 0.

1 c.) Funktionen mit kompaktem Träger, der Raum C_0^∞

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \ne \emptyset$. Die Abbildung $d_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei erklärt durch

$$d_M(x) := \mathrm{dist}\,(x, M) := \inf_{y\in M} \|x - y\|\,.$$

Hierbei sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Man nennt $d_M(x)$ den Abstand des Punktes x von der Menge M.

Lemma: d_M ist stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - z\| < \varepsilon$, daß

$$\begin{aligned}\|x - y\| &= \|x - z + z - y\| \le \|x - z\| + \|z - y\| \\ &< \varepsilon + \|z - y\|\,,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}d_M(z) &= \mathrm{dist}\,(z, M) = \inf_{y\in M} \|z - y\| \\ &> \inf_{y\in M} \|x - y\| - \varepsilon = d_M(x) - \varepsilon\,.\end{aligned}$$

also $d_M(x) - d_M(z) < \varepsilon$. Ebenso zeigt man $d_M(z) - d_M(x) < \varepsilon$, also

$$|d_M(x) - d_M(z)| < \varepsilon\,.$$

■

Lemma: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge mit $M \ne \mathbb{R}^n$ und sei $K \subseteq M$ kompakt. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so daß für alle $x \in K$ gilt

$$\mathrm{dist}\,(x, \mathbb{R}^n \backslash M)\ \ge \varepsilon.$$

Beweis: Die stetige Funktion

$$x \mapsto \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \backslash M)$$

nimmt auf der kompakten Menge K ihr Minimum an in einer Stelle $x_0 \in K \subseteq M$. Weil M offen ist, gibt es eine Kugel $B_\varepsilon(x_0)$ um x_0 mit positivem Radius ε, die zu M gehört. Also folgt für alle $x \in K$

$$\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \backslash M) \geq \operatorname{dist}(x_0, \mathbb{R}^n \backslash M) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n \backslash M} \|x_0 - y\| \geq \varepsilon\,.$$

■

Definition: (i) Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Als Träger oder Support von g bezeichnet man die Menge

$$\operatorname{supp} g := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \neq 0\}}\quad .$$

Man sagt, g habe kompakten Träger, wenn die Menge $\operatorname{supp} g$ kompakt ist.

(ii) Für eine offene Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ seien

$$C_0(M) = \{g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} g \,\text{kompakt und}\, \operatorname{supp} g \subseteq M\}$$

$$C_0^\infty(M) = C_0(M) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)\,.$$

Für $g \in C_0(M)$ oder $g \in C_0^\infty(M)$ hat der Träger $\operatorname{supp} g$ als kompakte Teilmenge von M nach obigem Lemma einen positiven Abstand von der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R}^n \setminus M$. Man sagt, g verschwinde in einer Umgebung des Randes von M.

Ein **Beispiel** für eine Funktion aus dem Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist

$$J(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| \geq 1\,, \end{cases}$$

mit $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Wir überlassen dem Leser den Beweis, daß J auf der Sphäre $\{|x| = 1\}$ beliebig oft differenzierbar ist.

Lemma: $C_0(M)$ und $C_0^\infty(M)$ sind lineare Unterräume des Raumes $L_1(M)$.

Beweis: Für $g_1, g_2 \in C_0(M)$ ist auch $g_1 + g_2$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\operatorname{supp}(g_1 + g_2) \subseteq (\operatorname{supp} g_1) \cup (\operatorname{supp} g_2) \subseteq M\,.$$

Weil die abgeschlossene Menge $\operatorname{supp}(g_1 + g_2)$ als Teilmenge der kompakten Menge $(\operatorname{supp} g_1) \cup (\operatorname{supp} g_2)$ selbst kompakt ist, folgt also

$$g_1 + g_2 \in C_0(M)$$

und ebenso $\lambda g_1 \in C_0(M)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Somit ist $C_0(M)$ ein Vektorraum. Folglich ist $C_0^\infty(M) = C_0(M) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ als Durchschnitt zweier Vektorräume ein linearer Unterraum von $C_0(M)$.

Um zu beweisen, daß $C_0(M) \subseteq L_1(M)$ gilt, sei $g \in C_0(M)$. Da der Träger $\operatorname{supp} g$ eine kompakte Menge ist, gibt es einen beschränkten, abgeschlossenen Quader Q mit

$$\operatorname{supp} g \subseteq Q\,.$$

g ist auf Q stetig und beschränkt, weil Q kompakt ist, folglich ist $g \in L_1(Q)$ nach Beispiel 1 Kapitel 3c der Vorlesung Analysis II. Weil g außerhalb von Q verschwindet, gilt somit $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, also auch $g \in L_1(M)$. Hiermit folgt $C_0^\infty(M) \subseteq C_0(M) \subseteq L_1(M)$. ■

Differenzierbare Funktionen, die in einer Umgebung des möglicherweise sehr komplizierten Randes von M verschwinden, haben angenehme Eigenschaften. Dies wird sich beim Beweis der Transformationsformel zeigen. Es ist daher von großer Bedeutung, daß jede Funktion $f \in L_1(M)$ beliebig gut durch Funktionen aus $C_0^\infty(M)$ approximiert werden kann. Zum Beweis dieses im weiter unten folgenden Satz formulierten Resultates benötigt man einige Vorbereitungen:

Lemma: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Dann gibt es eine Folge $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ von Teilmengen von M, wobei jedes E_k Vereinigung von endlich vielen kompakten Quadern ist, mit

$$E_k \subseteq E_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^\infty E_k = M.$$

Beweis: Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ sei

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i\}$$

ein abgeschlossener Quader. a und b heißen Eckpunkte des Quaders. $x \in \mathbb{R}^n$ heißt rational, wenn alle Komponenten von x rationale Zahlen sind.

Eine offene Menge M ist Vereinigung aller in M enthaltenen Quader mit rationalen Eckpunkten. Es gibt nur abzählbar viele solche Quader, weil die Menge der rationalen Elemente von $\mathbb{R}^n$ abzählbar ist. Also kann die Menge dieser Quader in eine Folge $\{Q_l\}_{l=1}^\infty$

angeordnet werden. Setze

$$E_k = \bigcup_{l=1}^{k} Q_l \,.$$

■

Lemma: Sei M eine offene Menge und $f \in L_1(M)$. Dann gibt es eine Folge $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Treppenfunktionen, die jede höchstens auf einer kompakten Teilmenge von M ungleich Null ist, mit

$$\lim_{k\to\infty} \|f - v_k\|_1 = 0.$$

Beweis: Aus der Äquivalenzklasse $f \in L_1(M)$ wähle man einen Repräsentanten, der auch mit f bezeichnet werde. f gehört zu $\mathcal{L}(M)$, also gehört nach Definition von $\mathcal{L}(M)$ die durch Null von M nach $\mathbb{R}^n$ fortgesetzte Funktion zu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Ich bezeichne diese Fortsetzung auch mit f. Nach Definition des Raumes $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gibt es $h_1, h_2 \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f = h_1 - h_2$$

und wachsende Folgen $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Treppenfunktionen mit

$$\lim_{k\to\infty} t_k(x) = h_1(x) \quad \text{f. ü.}, \qquad \lim_{k\to\infty} s_k(x) = h_2(x) \quad \text{f. ü.}$$

Somit gilt $t_1(x) \le t_k(x) \le h_1(x)$, folglich

$$|t_k(x)| \le \max(|t_1(x)|, |h_1(x)|) \le |h_1(x)| + |t_1(x)| \,,$$

und ebenso

$$|s_k(x)| \le |h_2(x)| + |s_1(x)| \,,$$

fast überall. Also ist $u_k = t_k - s_k$ für jedes k eine Treppenfunktion mit

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = \lim_{k\to\infty} (t_k(x) - s_k(x)) = h_1(x) - h_2(x) = f(x) \,,$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, und mit

$$|u_k(x)| \le |t_k(x)| + |s_k(x)| \le |h_1(x)| + |h_2(x)| + |t_1(x)| + |s_1(x)| \,.$$

Sei nun $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ die Folge von Teilmengen von M aus dem vorangehenden Lemma. Die Folge $\{\chi_{E_k}\}_{k=1}^{\infty}$ von charakteristischen Funktionen ist wachsend mit

$$\lim_{k\to\infty} \chi_{E_k}(x) = \chi_M(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Weil E_k endliche Vereinigung von kompakten Quadern ist, ist χ_{E_k} eine Treppenfunktion, also ist auch

$$v_k = \chi_{E_k} u_k$$

eine Treppenfunktion, die höchstens auf der kompakten Teilmenge E_k ungleich Null ist. Außerdem gilt

$$\lim_{k\to\infty} v_k(x) = \lim_{k\to\infty} \chi_{E_k}(x) u_k(x) = \lim_{k\to\infty} \chi_{E_k}(x) \lim_{k\to\infty} u_k(x) = \chi_M(x) f(x) = f(x)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ sowie

$$\begin{aligned} |f(x) - v_k(x)| &\leq |f(x)| + |v_k(x)| \leq |f(x)| + |u_k(x)| \\ &\leq |f(x)| + |h_1(x)| + |h_2(x)| + |t_1(x)| + |s_1(x)| \,. \end{aligned}$$

Die Funktion auf der rechten Seite dieser Ungleichung ist also eine integrierbare Dominante von $|f - v_k|$, und somit ergibt der Satz von Lebesgue

$$\lim_{k\to\infty} \|f - v_k\|_1 = \lim_{k\to\infty} \int_M |f(x) - v_k(x)|\, dx = \int_M \lim_{k\to\infty} |f(x) - v_k(x)|\, dx = \int_M 0\, dx = 0 \,.$$

■

Das nächste Resultat ist bereits die Transformationsformel für Integrale im einfachen Fall einer linearen Koordinatentransformation:

Satz: Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung. Dann gilt für jede Funktion $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\, |\det A| dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \,.$$

Beweis: Ich beweise den Satz durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist der Satz richtig nach der Substitutionsregel. Angenommen, es sei $n > 1$ und der Satz sei richtig für die Dimension $n - 1$. Zunächst betrachte man lineare Abbildungen der Form

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \dots & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} .$$

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Mit

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \\ b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} .$$

ergibt sich

$$Bx = (x_1, B_0 x' + b x_1) .$$

Der Determinantenentwicklungssatz liefert

$$\det B = \det B_0 ,$$

also ist B invertierbar genau dann, wenn B_0 invertierbar ist. Aus dem Satz von Fubini und der Induktionsannahme folgt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Bx)|\det B|dx &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f((x_1, B_0 x' + b x_1))|\det B_0|dx'dx_1 \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f((x_1, B_0 x'))|\det B_0|dx'dx_1 \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x')dx'dx_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx . \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß die Behauptung für Matrizen der Form B richtig ist. Weiter gilt mit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ und mit

$$C_0 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

daß

$$Cx = (C_0 x' + c x_n, x_n) .$$

Hieraus und aus $\det C = \det C_0$ folgt ähnlich wie oben, daß die Behauptung auch für Matrizen der Form C gültig ist. Weiter gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(B \circ Cx)|\det(B \circ C)|dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(B \circ Cx)|\det B||\det C|dx$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Bx)|\det B|dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx ,$$

also ist die Behauptung auch für Matrizen der Form $B \circ C$ richtig. Alle invertierbaren linearen Abbildungen lassen sich aber in dieser Form darstellen. Denn sei $A = B \circ C$. Dann folgt

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ b_{21}c_{11} & (b_{21}c_{12} + b_{22}) & \dots & (b_{21}c_{1n} + b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}c_{11} & (b_{n1}c_{12} + b_{n2}) & \dots & (b_{n1}c_{1n} + b_{nn}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Es kann angenommen werden, daß in der gegebenen Matrix A das Element a_{11} von Null verschieden ist. Denn wegen $\det A \neq 0$ enthält die erste Zeile von A mindestens ein von Null verschiedenes Element, und durch Umnummerieren der Koordinaten kann erreicht werden, daß dies a_{11} ist. Dann sind dies n^2-Gleichungen, aus denen nacheinander alle c_{ij} und b_{ij} berechnet werden können. Also ist die Zerlegung $A = B \circ C$ gefunden. ∎

Nun folgt der angekündigte

Satz: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $f \in L_1(M)$. Dann existiert eine Folge $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $g_k \in C_0^{\infty}(M)$ und mit

$$\lim_{k\to\infty} \|g_k - f\|_1 = 0\,.$$

Jedes Element f des Vektorraumes $L_1(M)$ kann also beliebig gut durch Elemente des Unterraumes $C_0^{\infty}(M)$ approximiert werden. Man sagt daher, $C_0^{\infty}(M)$ sei ein dichter Teilraum von $L_1(M)$.

Beweis: I.) Nach dem vorangehenden Lemma gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion u mit $\|f - u\|_1 < \varepsilon/2$, die höchstens auf einer kompakten Teilmenge K von M ungleich Null ist. Sie kann in der Form

$$u(x) = \sum_{l=1}^{m} a_l \chi_{A_l}(x)$$

dargestellt werden mit Konstanten $a_l \in \mathbb{R}, a_l \neq 0$, und mit den charakteristischen Funktionen χ_{A_l} zu Quadern $A_l \subseteq K$. Weil K eine kompakte Teilmenge der offenen Menge M ist, gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so daß jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{dist}(x, K) \leq \delta$, also insbesondere jedes x mit $\mathrm{dist}(x, A_l) \leq \delta$ zu M gehört. Zum Beweis des Satzes genügt es daher, zu jedem $l = 1, \dots, m$ eine Funktion $v_l \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ zu konstruieren mit $\mathrm{supp}\, v_l \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(x, A_l) \leq \delta\}$ und mit

$$\|\chi_{A_l} - v_l\|_1 < \varepsilon/(2m|a_l|)\,.$$

Denn dann ist $g = \sum\limits_{l=1}^{m} a_l v_l \in C_0^\infty(M)$ mit

$$\begin{aligned} \|f-g\|_1 &= \|(f-u)+(u-g)\|_1 \\ &= \|(f-u)+\sum_{l=1}^{m} a_l(\chi_{A_l}-v_l)\|_1 \\ &\le \|f-u\|_1 + \sum_{l=1}^{m} |a_l|\cdot\|\chi_{A_l}-v_l\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2m} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung des Satzes folgt, weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war.
II.) Zur Konstruktion der gesuchten Funktionen $v_l \in C_0^\infty(M)$ wähle man eine Funktion $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $j(x) \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{supp} j \subseteq \{|x| \le 1\}$, und mit

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} j(x)dx = 1\,.$$

Ein Beispiel für eine solche Funktion ist $j = cJ$ mit der Funktion $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ aus dem obigen Beispiel und mit der positiven Konstanten

$$c = (\int_{\mathbb{R}^n} J(x)\,dx)^{-1}\,.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$j_k(x) := k^n j(kx)\,.$$

Dann gilt $\operatorname{supp} j_k \subseteq \left\{|x| \le \frac{1}{k}\right\}$, und nach dem vorangehenden Satz, angewandt auf die durch $Ax = \frac{1}{k}x$ definierte lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} j_k(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} j(kx)k^n dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} j(x)dx = 1\,.$$

Mit einer hinreichend großen Zahl $k \in \mathbb{N}$, die später gewählt wird, sei nun

$$v_l(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} j_k(x-y)\chi_{A_l}(y)dy = \int_{A_l} j_k(x-y)dy$$

Das Integral auf der rechten Seite hängt von den Parametern $x_1,\dots,x_n$ ab, und mit den Ergebnissen aus Kapitel 4c) der Vorlesung Analysis II über Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale prüft man schnell nach, daß v_l beliebig oft differenzierbar ist mit den partiellen Ableitungen

$$\partial_{x_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{x_n}^{\alpha_n} v_l(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\partial_{x_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{x_n}^{\alpha_n} j_k(x-y)]\chi_{A_l}(y)dy\,,$$

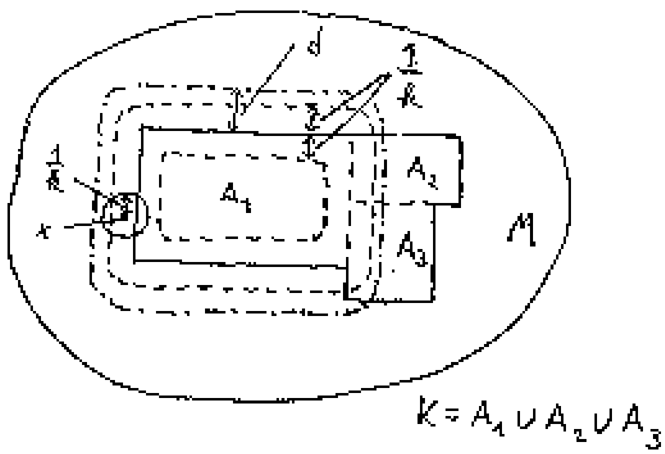
wobei $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$. Wegen $j_k(x) \geq 0$ und weil der Träger $\operatorname{supp}(y \to j_k(x-y))$ in der abgeschlossenen Kugel $B_{1/k}(x)$ um x mit Radius $\frac{1}{k}$ enthalten ist, folgt

$$0 \leq v_l(x) = \int_{A_l \cap B_{1/k}(x)} j_k(x-y)dy \begin{cases} = \ 0 & , \ \operatorname{dist}(x, A_l) > 1/k \\ \leq \ 1 & , \ \operatorname{dist}(x, \partial A_l) \leq 1/k \\ = \ 1 & , \ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \backslash A_l) > 1/k \,. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet ∂A_l den Rand des Quaders A_l. Wählt man also k so groß, daß $1/k \leq \delta$ gilt, dann verschwindet v_l außerhalb der Teilmenge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x,\, A_l) \leq \delta\}$$

von M, hat in einem Streifen R der Breite $2/k$ um den Rand von A_l Werte zwischen 0 und 1, und hat den Wert 1 für alle Punkte von A_l, die weiter als $1/k$ vom Rand von A_l entfernt sind.



Also ist $\chi_{A_l} - v_l$ nur im Randstreifen R von Null verschieden und hat dort Werte zwischen 0 und 1. Um das Maß $|R|$ von R abzuschätzen, benützt man, daß $A_l \cup R$ in einem beschränkten Würfel Q enthalten ist. Es ist

$$Q = \prod_{j=1}^{n} I_j$$

die Produktmenge von n beschränkten Intervallen $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ ist. Ist $|I_j|$ die Länge des j-ten Intervalls, so folgt

$$|R| \leq 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |I_j| \,.$$

Für

$$k \geq \max\left\{\frac{1}{\delta}\,,\, (4 \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |I_j|) \frac{2m|a_l|}{\varepsilon}\right\}$$

folgt also $v_l \in C_0^\infty(M)$ und

$$\|\chi_{A_l} - v_l\|_1 = \int\limits_R |\chi_{A_l}(x) - v_l(x)|dx \leq |R| < \varepsilon/(2m|a_l|)\,.$$

■

1 d.) Transformationsformel

Zum Beweis der Transformationsformel sind einige Vorbereitungen nötig. Zunächst studiere ich Faltungsintegrale der Form

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} j_k(x-y)f(y)dy$$

mit den im vorangehenden Beweis eingeführten Mollifiern j_k genauer.

Definition: Sei $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $j(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{supp} j \subseteq \{|x| \leq 1\}$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} j(x)dx = 1\,.$$

Die Folge $\{j_k\}_{k=1}^\infty$ mit $j_k(x) = k^n j(kx)$ heißt Dirac-Folge.

Satz: Zu $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ sei $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$f_k(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} j_k(x-y)f(y)dy\,.$$

Dann ist $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\operatorname{supp} f_k \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} f) \leq \frac{1}{k}\right\}\,,$$

und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_\infty = 0\,.$$

Beweis: Daß $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt mit $\operatorname{supp} f_k \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} f) \leq \frac{1}{k}\right\}$ folgt genau wie im vorangegangenen Beweis. Um zu beweisen, daß die Folge $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ gleichmäßig gegen f konvergiert, beachte man, daß die stetige Funktion f nur auf einer kompakten Menge von Null verschieden ist, und somit gleichmäßig stetig ist. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $|x-y| < \delta$. Wegen $\int\limits_{\mathbb{R}^n} j_k(x)dx = 1$ und weil $\operatorname{supp} j_k \subseteq \{|x| \leq 1/k\}$ gilt, folgt für alle k mit $1/k < \delta$

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_k(x)| &= \left| f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} j_k(x-y)dy - \int\limits_{\mathbb{R}^n} j_k(x-y)f(y)dy \right| \\
&= \left| \int\limits_{|x-y<1/k} j_k(x-y)(f(x)-f(y))dy \right| \\
&\leq \int\limits_{|x-y|\leq 1/k} j_k(x-y)|f(x)-f(y)|dy < \varepsilon \int\limits_{|x-y|<1/k} j_k(x-y)dy = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

also

$$\|f - f_k\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon\,.$$

■

In den nächsten beiden Hilfssätzen sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und K eine kompakte Teilmenge von U. Dann existiert eine Zahl $\delta > 0$ mit

$$K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, K) \leq \delta\} \subseteq U\,.$$

$\chi : U \to \mathbb{R}^n$ sei eine stetig differenzierbare Abbildung, und für jedes $a \in K$ sei eine affine Abbildung: $\tilde{\chi}_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\tilde{\chi}_a(x) = [\chi'(a)]\,(x-a) + \chi(a)\,.$$

$\tilde{\chi}_a$ ist der Anfang der Taylorentwicklung von χ im Punkt a und approximiert χ daher in einer Kugel um a mit genügend kleinem Radius. Die Approximation ist um so besser, je kleiner der Radius ist. Um eine vorgeschriebene „Güte“der Approximation zu erreichen, muß daher der Radius hinreichend klein gewählt werden, und der erste Hilfssatz zeigt, daß dieser Radius für alle $a \in K$ gleich gewählt werden kann:

Hilfssatz 1: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl η mit $0 < \eta \leq \delta$, so daß für alle $a \in K$ und $z \in U$ mit $|z-a| < \eta$ gilt

$$|\chi(z) - \tilde{\chi}_a(z)| \leq \varepsilon |z-a|\,.$$

Beweis: Wenn $a \in K$ ist und der Abstand zwischen a und z kleiner als δ ist, dann gehört die gesamte Verbindungsstrecke von a und z zu $K_\delta \subseteq U$. Aus dem Mittelwertsatz folgt also für die j–te Komponente

$$\chi_j(z) - \chi_j(a) = (\operatorname{grad} \chi_j(w)) \cdot (z-a)\,,$$

mit einem geeigneten w auf der Verbindungsstrecke von a und z. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ergibt daher

$$|\chi_j(z) - (\tilde{\chi}_a)_j(z)| = |\chi_j(z) - (\operatorname{grad}\chi_j(a)) \cdot (z-a) - \chi_j(a)|$$
$$= |(\operatorname{grad}\chi_j(w) - \operatorname{grad}\chi_j(a)) \cdot (z-a)| \leq |\operatorname{grad}\chi_j(w) - \operatorname{grad}\chi_j(a)|\,|z-a|\,.$$

Da χ stetig differenzierbar ist auf U, ist jede partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i}\chi_j$ und damit

$$z \to \operatorname{grad}\chi_j(z) = (\frac{\partial}{\partial x_1}\chi_j(z), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\chi_j(z))$$

gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge K_δ. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl η mit $0 < \eta \leq \delta$, so daß

$$|\operatorname{grad}\chi_j(w) - \operatorname{grad}\chi_j(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

gilt für alle $a \in K$ und alle z mit $|z-a| < \eta$, weil dann auch $w \in K_\delta$ ist mit $|w-a| < \eta$. Somit folgt

$$|\chi(z) - \tilde{\chi}_a(z)| = (\sum_{j=1}^{n}(\chi_j(z) - (\tilde{\chi}_a)_j(z))^2)^{1/2} < (\sum_{j=1}^{n}(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}|z-a|)^2)^{1/2} = \varepsilon|z-a|$$

■

Hilfssatz 2: Es existiert eine Zahl $b > 0$, so daß für alle η mit $0 < \eta \leq \delta$ und für alle $y \in K$ die Kugel $\overline{B_\eta(y)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| \leq \eta\}$ durch die Abbildungen χ und $\tilde{\chi}_y$ in die Kugel $\overline{B_{b\eta}(\chi(y))}$ abgebildet wird:

$$\chi(\overline{B_\eta(y)}) \subseteq \overline{B_{b\eta}(\chi(y))}\,, \quad \tilde{\chi}_y(\overline{B_\eta(y)}) \subseteq \overline{B_{b\eta}(\chi(y))}\,.$$

Beweis: Für $y \in K$ und $x \in \overline{B_\eta(y)}$ gehört die gesamte Verbindungsstrecke von y und x zur kompakten Menge K_δ. Für die Komponente χ_j von χ gilt also nach dem Mittelwertsatz

$$|\chi_j(x) - \chi_j(y)| = |(\operatorname{grad}\chi_j(w)) \cdot (x-y)|$$
$$\leq |\operatorname{grad}\chi_j(w)| \cdot |x-y| = |x-y| \Big(\sum_{j=1}^{n}((\partial/\partial x_i)\chi_j(w))^2\Big)^{1/2},$$

mit w auf der Verbindungsstrecke von x und y. Weil χ stetig differenzierbar ist auf U, ist jede der partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}\chi_j$ stetig. Also ist auch $w \to (\sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial x_i}\chi_j(w))^2)^{1/2}$

eine stetige Funktion, die auf der kompakten Menge K_δ ihr Maximum m_j annimmt. Also folgt

$$|\chi(x) - \chi(y)| = \Big(\sum_{j=0}^{n} (\chi_j(x) - \chi_j(y))^2\Big)^{1/2} \leq b|x-y|$$

mit $b = (\sum\limits_{j=1}^{n} m_j^2)^{1/2}$. Hieraus folgt $\chi(\overline{B_\eta(y)}) \subseteq \overline{B_{b\eta}(\chi(y))}$.
Weiter gilt für die j-te Komponente von $\tilde{\chi}_y$

$$\begin{aligned}
&|(\tilde{\chi}_y)_j(x) - (\tilde{\chi}_y)_j(y)| = |\,[\chi'(y)]_j\,(x-y)| \\
&= |\mathrm{grad}\,\chi_j(y)\cdot(x-y)| \leq |x-y|\Big(\sum_{i=1}^{n} ((\partial/\partial x_i)\chi_j(y))^2\Big)^{1/2} \leq m_j|x-y|\,,
\end{aligned}$$

also $|\tilde{\chi}_y(x) - \tilde{\chi}_y(y)| \leq b|x-y|$, und somit $\tilde{\chi}_y(\overline{B_\eta(y)}) \subseteq \overline{B_{b\eta}(\chi(y))}$, mit derselben Konstanten b. ∎

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen und sei $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Mit der Abkürzung

$$a_y = \varphi^{-1}(y)$$

werde für jedes $y \in U$ eine affine Abbildung $\psi_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\psi_y(z) = \varphi'(a_y)(z - a_y) + \varphi(a_y) = \varphi'(a_y)(z - a_y) + y\,.$$

Die Inverse ist

$$\begin{aligned}
\psi_y^{-1}(x) &= \varphi'(a_y)^{-1}(x-y) + a_y \\
&= [\varphi'(\varphi(y))]^{-1}\,(x-y) + a_y = \big[(\varphi^{-1})'(y)\big]\,(x-y) + \varphi^{-1}(y)\,,
\end{aligned}$$

nach der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion. Sei $K \subseteq V$ eine kompakte Menge und sei $\delta > 0$ mit

$$K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}\,(x, K) \leq \delta\} \subseteq V\,.$$

Das Urbild $K' = \varphi^{-1}(K)$ von K unter φ ist eine kompakte Teilmenge von U, weil φ^{-1} stetig ist. Also gibt es eine Zahl $\delta' > 0$ mit

$$K'_{\delta'} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}\,(z, K') \leq \delta'\} \subseteq U\,.$$

Nach Hilfssatz 2, angewandt auf die Abbildungen $\chi = \varphi^{-1}$ und $\tilde{\chi}_y = \psi_y^{-1}$, gibt es eine Zahl $b > 0$, so daß für alle $y \in K$ und $\eta \leq \delta$

$$\varphi^{-1}(\overline{B_\eta(y)})\,,\ \psi_y^{-1}(\overline{B_\eta(y)}) \subseteq \overline{B_{b\eta}(a_y)}$$

gilt mit $a_y = \varphi^{-1}(y) \in K'$. Ich wähle δ so klein, daß $b\delta \leq \delta'$ ist. Dann gilt

$$\overline{B_{b\eta}(a_y)} \subseteq K'_{\delta'}$$

für alle $y \in K$ und $\eta \leq \delta$.
Hiermit kann nun folgender Hilfssatz bewiesen werden:

Hilfssatz 3: Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in K} \Big| \int\limits_U j_k(\varphi(z) - y) \,|\det \varphi'(z)|\, dz - \int\limits_V j_k(x-y)dx \Big| = 0\,.$$

Dieser Hilfssatz zeigt, daß für den Mollifier j_k die Transformationsformel näherungsweise richtig ist, und daß der Fehler durch Vergrößerung von k beliebig klein gemacht werden kann. Die Beweisidee dabei ist, daß der Träger der Funktion $z \to j_k(\varphi(z) - y)$ in der Kugel $\overline{B_{b/k}(a_y)}$ enthalten ist, deren Radius klein ist bei großem k, und daß in dieser kleinen Kugel die Transformation φ durch die affine Funktion ψ_y approximiert wird, für die die Transformationsformel schon im vorangegangenen Abschnitt bewiesen wurde.

Beweis: Zum Beweis dieses Hilfssatzes genügt es zu zeigen, daß eine Konstante C und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\tilde{k}$ existieren, so daß für alle $k \geq \tilde{k}$ und alle $y \in K$

$$\Big| \int\limits_U j_k(\varphi(z) - y) \,|\det \varphi'(z)|\, dz - \int\limits_V j_k(x-y)dx \Big| < C\varepsilon$$

ist. Der Beweis besteht aus drei Teilen:
I.) Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß $1/k_0 \leq \delta$ ist. Für alle $k \geq k_0$ und $y \in K$ gilt dann

$$\mathrm{supp}\Big[x \to j_k(x-y)\Big] \subseteq \overline{B_{1/k}(y)} \subseteq K_\delta \subseteq V\,,$$

also auch

$$\mathrm{supp}\Big[z \to j_k(\psi_y(z) - y)\Big] \subseteq \psi_y^{-1}(\overline{B_{1/k}(y)}) \subseteq \overline{B_{b/k}(a_y)} \subseteq K'_{\delta'} \subseteq U\,.$$

Da $z \to \psi_y(z) = \varphi'(a_y)(z-y) + y$ eine affine Funktion ist mit $\psi'_y(z) = \varphi'(a_y)$, gilt somit für alle $y \in K$ und $k \geq k_0$ nach der im vorangegangenen Abschnitt bewiesenen Transformationsformel für lineare Transformationen und wegen der Translationsinvarianz des Integrals

$$\begin{aligned} \int\limits_V j_k(x-y)dy &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} j_k(x-y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} j_k(\psi_y(z) - y)\,|\det \varphi'(a_y)|\, dz \\ &= \int\limits_U j_k(\psi_y(z) - y)\,|\det \varphi'(a_y)|\, dz\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

II.) Es wird nun gezeigt, daß der Integrand auf der rechten Seite dieser Formel sich für große k nur wenig von $j_k(\varphi(z)-y)\,|\det\varphi'(z)|$ unterscheidet. Hierzu beachte man, daß nach Hilfssatz 1, angewandt auf die Funktionen $\chi=\varphi$ und $\tilde{\chi}_a=\psi_y$, zu $\varepsilon>0$ eine Zahl k_1 mit $k_1\geq k_0$ existiert, so daß für alle $a_y\in K'$, also $y\in K$, alle $k\geq k_1$ und alle $z\in\overline{B_{b/k}(a_y)}\subseteq K'_{\delta'}$,

$$|\varphi(z)-\psi_y(z)|\leq\varepsilon|z-a_y|\leq\varepsilon\frac{b}{k}$$

gilt. Aus dieser Ungleichung, aus dem Mittelwertsatz und aus der Relation

$$|\operatorname{grad} j_k(w)|=|k^{n+1}(\operatorname{grad} j)(kw)|\leq M_1k^{n+1},$$

wobei $M_1=\max\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\operatorname{grad} j(\xi)|$ sei, schließt man, daß für ein geeignetes w aus der Verbindungsstrecke von $\varphi(z)-y$ und $\psi_y(z)-y$

$$\begin{aligned}&|j_k(\varphi(z)-y)-j_k(\psi_y(z)-y)|=|\operatorname{grad} j_k(w)\cdot(\varphi(z)-\psi_y(z))|\\&\leq|\operatorname{grad} j_k(w)|\,|\varphi(z)-\psi_y(z)|\leq M_1k^{n+1}\varepsilon\frac{b}{k}=M_1b\varepsilon k^n\,.\end{aligned}$$

gilt. Mit $M_2=\max\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n}j(\xi)$ und $M_3=\max\limits_{\xi\in K'_{\delta'}}|\det\varphi'(\xi)|$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned}&\Big|j_k(\varphi(z)-y)\,|\det\varphi'(z)|-j_k(\psi_y(z)-y)\,|\det\varphi'(a_y)|\Big|\\&\leq|j_k(\varphi(z)-y)-j_k(\psi_y(z)-y)|\,|\det\varphi'(z)|\\&\qquad+j_k(\psi_y(z)-y)\,\Big|\,|\det\varphi'(z)|-|\det\varphi'(a_y)|\,\Big|\\&\leq M_1M_3b\varepsilon k^n+M_2k^n\,\Big|\,|\det\varphi'(z)|-|\det\varphi'(a_y)|\,\Big|.\end{aligned}$$

Weil $\xi\to|\det\varphi'(\xi)|$ auf der kompakten Menge $K'_{\delta'}$ gleichmäßig stetig ist, existiert eine Zahl $k_2\geq k_0$ mit

$$\Big|\,|\det\varphi'(z)|-|\det\varphi'(a_y)|\,\Big|\leq\varepsilon$$

für alle $z\in\overline{B_{b/k_2}(a_y)}\subseteq K'_{\delta'}$. Mit $\tilde{k}=\max(k_1,k_2)$ und $C_1=M_1M_3b+M_2$ folgt also für $y\in K$, $k\geq\tilde{k}$ und $z\in\overline{B_{b/k}(a_y)}$

$$\Big|j_k(\varphi(z)-y)\,|\det\varphi'(z)|-j_k(\psi_y(z)-y)\,|\det\varphi'(a_y)|\Big|\leq C_1\varepsilon k^n\,.$$

III.) Benützt man, daß nach Wahl von k_0 auch

$$\operatorname{supp}\Big[z\to j_k(\varphi(z)-y)\Big]\subseteq\varphi^{-1}(\overline{B_{1/k}(y)})\subseteq\overline{B_{b/k}(a_y)}\subseteq K'_{\delta'}\subseteq U$$

gilt, dann erhält man aus der in II.) bewiesenen Ungleichung für $k \geq \tilde{k}$ und alle $y \in K$

$$\Big| \int_U j_k(\varphi(z) - y)\, |\det \varphi'(z)| - j_k(\psi_y(z) - y)\, |\det \varphi'(a_y)|\, dz \Big|$$

$$\leq \int_{B_{b/k}(a_y)} \Big| j_k(\varphi(z) - y)\, |\det \varphi'(z)| - j_k(\psi_y(z) - y)\, |\det \varphi'(a_y)| \Big|\, dz$$

$$\leq C_1 k^n \varepsilon \int_{B_{b/k}(a_y)} dz \leq C_1 k^n \varepsilon (2\frac{b}{k})^n = C\varepsilon\,,$$

mit $C = C_1(2b)^n$. Hierbei habe ich benützt, daß sich die Kugel $B_{b/k}(a_y)$ in einen Würfel der Kantenlänge $2b/k$ einschließen läßt, dessen Maß $(2b/k)^n$ ist. Zusammen mit der Formel $(*)$ folgt hieraus die Behauptung. ■

Satz: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt für alle $f \in C_0(V)$

$$\int_U f(\varphi(x))\, |\det \varphi'(x)|\, dx = \int_V f(y) dy\,.$$

Beweis: Sei

$$g_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j_k(x - y) f(y) dy\,.$$

Ich wende Hilfssatz 3 an mit der kompakten Teilmenge $K = \operatorname{supp} f$ von V. Die Funktion $f \circ \varphi$ verschwindet dann außerhalb der kompakten Teilmenge $K' \subseteq U$, und für alle hinreichend großen k verschwinden g_k beziehungsweise $g_k \circ \varphi$ außerhalb der kompakten Teilmengen $K_\delta \subseteq V$ beziehugnsweise $K'_{\delta'} \subseteq U$. Hierbei seien K', K_δ und $K'_{\delta'}$, wie in Hilfssatz 3 definiert. Also gilt

$$\Big| \int_U f(\varphi(x))\, |\det \varphi'(x)|\, dx - \int_V f(y) dy \Big|$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \Big| \int_{K'_{\delta'}} (f(\varphi(x)) - g_k(\varphi(x)))\, |\det \varphi'(x)|\, dx \Big|$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \Big| \int_U g_k(\varphi(x))\, |\det \varphi'(x)|\, dx - \int_V g_k(y) dy \Big|$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \Big| \int_{K_\delta} g_k(y) - f(y) dy \Big|$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_\infty \int_{K'_{\delta'}} |\det \varphi'(x)|\, dx$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \Big| \int_U g_k(\varphi(x))\, |\det \varphi'(x)|\, dx - \int_V g_k(y) dy \Big|$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_\infty \int_{K_\delta} dy\,.$$

Wegen

$$\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_\infty = 0$$

genügt es zum Beweis des Satzes zu zeigen, daß der mittlere Term auf der rechten Seite dieser Ungleichung verschwindet. Hierzu sei $K = \operatorname{supp} f$. Weil K eine kompakte Teilmenge von V ist, gilt mit Hilfssatz 3 und mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \Big| \int_U g_k(\varphi(x))\,|\det\varphi'(x)|\,dx - \int_V g_k(x)\,dx \Big| \\
&= \lim_{k\to\infty} \Big| \int_U \int_K j_k(\varphi(x)-y)f(y)dy\,|\det\varphi'(x)|\,dx - \int_V \int_K j_k(x-y)f(y)dy\,dx \Big| \\
&= \lim_{k\to\infty} \Big| \int_K f(y) \int_U j_k(\varphi(x)-y)\,|\det\varphi'(x)|\,dx\,dy - \int_K f(y)\int_V j_k(x-y)\,dx\,dy \Big| \\
&\le \lim_{k\to\infty} \int_K |f(y)| \Big| \int_U j_k(\varphi(x)-y)\,|\det\varphi'(x)|\,dx - \int_V j_k(x-y)dx \Big| dy \\
&\le \lim_{k\to\infty} \sup_{y\in K} \Big| \int_U j_k(\varphi(x)-y)\,|\det\varphi'(x)|\,dx - \int_V j_k(x-y)dx \Big| \int_K |f(y)|dy = 0\,.
\end{aligned}$$

■

Satz: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ über U integrierbar ist, und es gilt dann

$$\int_U f(\varphi(x))\,|\det\varphi'(x)|\,dx = \int_V f(y)dy\,.$$

Zum Beweis wird folgendes Lemma benötigt:

Lemma: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $N \subseteq U$ eine Nullmenge und $F : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist auch die Bildmenge $F(N)$ eine Nullmenge.

Beweis: Der Beweis wird dem Leser überlassen.

Beweis des Satzes: Der Raum $C_0^\infty(V)$ ist dicht im Raum $L_1(V)$ und damit erst recht der Raum $C_0(V)$, weil $C_0(V)$ eine Obermenge von $C_0^\infty(V)$ ist. Zu $f \in L_1(V)$ gibt es also eine Folge $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ mit $f_k \in C_0(V)$ und mit

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_1 = 0\,.$$

Aus dieser Folge kann man eine Teilfolge auswählen, die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Ich bezeichne diese Teilfolge selbst wieder mit $\{f_k\}_{k=1}^\infty$. Somit existiert eine Nullmenge $N \subseteq V$ mit $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für alle $x \in V \setminus N$. Also gilt für die durch

$g_k := (f_k \circ \varphi)\,|\det \varphi'|$ und $g := (f \circ \varphi)\,|\det \varphi'|$ definierten Funktionen

$$g(y) = \lim_{k\to\infty} g_k(y) \quad \text{für alle } y \in U \setminus \varphi^{-1}(N)\,, \tag{$*$}$$

wobei gemäß dem obenstehenden Lemma $\varphi^{-1}(N)$ eine Nullmenge ist.
Aus der schon bewiesenen Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger folgt

$$\|g_k - g_m\|_1 = \int_U |g_k(\varphi(x)) - g_m(\varphi(x))|\,|\det \varphi'(x)|\,dx = \int_V |f_k(y) - f_m(y)|dy = \|f_k - f_m\|_1\,,$$

also ist $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ eine Cauchyfolge im vollständigen Raum $L_1(U)$, und besitzt eine Grenzfunktion $\hat{g}$ in diesem Raum. Nach den Ergebnissen von Kapitel 1 impliziert $(*)$, daß $g = \hat{g}$ und somit $g \in L_1(U)$ gelten muß. Damit erhält man

$$\int_U g(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_U g_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_V f_k(y)dy = \int_V f(y)dy\,,$$

wobei die erste und letzte Gleichheit aus den Ergebnissen in Abschnitt b von Kapitel 1 resultieren, und das mittlere Gleichheitszeichen wieder wegen der Transformationsformel für stetige Funktionen mit kompaktem Träger gilt.

Damit ist eine Richtung der Aussage des Satzes bewiesenen. Zum Beweis der anderen Richtung wende man das gerade Bewiesene auf die Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}$ an. Angenommen, es sei

$$g = (f \circ \varphi)\,|\det \varphi'| \in L_1(U)\,.$$

Aus dem gerade bewiesenen Resultat, angewandt auf ψ, folgt dann $(g \circ \psi)\,|\det \psi'| \in L_1(V)$, also $f \in L_1(V)$. Denn wegen $\varphi' \circ \psi = (\psi')^{-1}$ ergibt der Determinantenmultiplikationssatz

$$(g \circ \psi)\,|\det \psi'| = (f \circ \varphi \circ \psi)\,|\det(\varphi' \circ \psi)|\,|\det \psi'| = f\,|\det[(\varphi' \circ \psi)\psi']| = f\,.$$

$\blacksquare$

Beispiel: Sei $\Omega_R = \{y \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, |y| < R\}$ eine Kugel um den Nullpunkt mit Radius R. Die Funktion $f : \Omega_R \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(y) = |y|^{-\alpha}$$

mit $\alpha > 0$. Es soll das Integral

$$\int_V f(y)dy$$

berechnet werden, falls es existiert. Hierzu sei

$$U = \{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, 0 < r < R, -\pi < \varphi < \pi, 0 < \theta < \pi\}$$

ein offener Quader im $\mathbb{R}^3$ und

$$V = \Omega_R \backslash \Big\{(y_1, 0, y_3) \,\Big|\, y_1 \le 0, y_3 \in \mathbb{R}\Big\}\,.$$

Die offene Menge V entsteht aus Ω_R durch Entfernen der Punkte auf einer abgeschlossenen Halbebene. Weil diese Halbebene eine Nullmenge ist, ist die Funktion f genau dann über Ω_R integrierbar, wenn sie über V integrierbar ist mit demselben Integral.

Die Polarkoordinatenabbildung

$$(r,\varphi,\theta) \mapsto \Phi(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$

ist ein Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ mit

$$\begin{aligned}
\det \Phi'(r,\varphi,\theta) &= \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta\Big[-r^2\cos\theta\sin\theta\Big((\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2\Big)\Big] \\
&\quad - \sin\theta\Big[r^2(\sin\theta)^2\Big((\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2\Big)\Big] \\
&= -r^2\sin\theta\,.
\end{aligned}$$

Folglich ist f über V integrierbar, genau dann wenn $(r,\varphi,\theta) \mapsto f(\Phi(r,\varphi,\theta))|r^2\sin\theta|$ über U integrierbar ist.

Wegen

$$f\Big(\Phi(r,\varphi,\theta)\Big) = \Big[(r\cos\varphi\cos\theta)^2 + (r\sin\varphi\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\Big]^{-\alpha/2} = r^{-\alpha}$$

gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_R} |y|^{-\alpha} dy &= \int_V |y|^{-\alpha} dy = \int_U r^{-\alpha}|r^2\sin\theta|\,d(r,\varphi,\theta) \\
&= \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} r^{2-\alpha}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr \\
&= 4\pi \int_0^R r^{2-\alpha} dr = 4\pi\,\frac{1}{3-\alpha}\,r^{3-\alpha}\Big|_0^R = \frac{4\pi}{3-\alpha}\,R^{3-\alpha}
\end{aligned}$$

für $\alpha < 3$.

2 p-dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^m$, Kurven- und Flächenintegrale

II a.) p-dimensionale Flächenstücke, Untermannigfaltigkeiten

Definition: Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann ist $A(\mathbb{R}^n)$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^m$. Als Rang von A bezeichnet man die Dimension dieses Unterraumes.

Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ mit Rang p ist injektiv.

Definition: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge und sei $p < n$. Die Abbildung $\gamma : U \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und die Ableitung

$$\gamma'(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$$

habe für alle $u \in U$ den Rang p. Dann heißt γ Parameterdarstellung eines p-dimensionalen Flächenstückes im $\mathbb{R}^n$. Ist $p = 1$, dann heißt γ Parameterdarstellung einer Kurve im $\mathbb{R}^n$.

Man beachte, daß γ nicht injektiv zu sein braucht. Die Fläche kann "Doppelpunkte" haben.

Für jedes $u \in U$ ist auch $\tau : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$,

$$\tau(h) = \gamma(u) + \gamma'(u)h$$

die Parameterdarstellung eines p-dimensionalen Flächenstückes. Die Bildmenge ist ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der nach Definition der Ableitung die Bildmenge von γ in einer Umgebung von $\gamma(u)$ approximiert.

Definition: Die Bildmenge von $h \to \gamma'(u)h$ heißt Tangentialraum von γ im Punkt $\gamma(u)$.

Beispiel 1: Sei $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ und sei $\gamma : U \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\gamma(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma_1(u,v) \\ \gamma_2(u,v) \\ \gamma_3(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-(u^2+v^2)} \end{pmatrix}.$$

Dann ist γ die Parameterdarstellung der oberen Hälfte der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$. Denn es gilt

$$\gamma'(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} & -\frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{pmatrix}.$$

Die beiden Spalten in dieser Matrix sind für alle $(u,v) \in U$ linear unabhängig, also ist der Rang 2.

Beispiel 2: Im vorangehenden Beispiel ist das Flächenstück durch den Graphen einer Funktion gegeben. Allgemeiner sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge und sei $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ stetig differenzierbar. Dann ist der Graph von f ein in den $\mathbb{R}^n$ eingebettetes p-dimensionales Flächenstück. Die Abbildung $\gamma : U \to \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\gamma_1(u) &:= u_1 \\
\gamma_2(u) &:= u_2 \\
&\vdots \\
\gamma_p(u) &:= u_p \\
\gamma_{p+1}(u) &:= f_1(u_1 \ldots, u_p) \\
&\vdots \\
\gamma_n(u) &:= f_{n-p}(u_1 \ldots, u_p)
\end{aligned}$$

ist eine Parameterdarstellung dieser Fläche . Denn es gilt

$$\gamma'(u) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 1 \\ \partial_{x_1} f_1(u) & \ldots & \partial_{x_p} f_1(u) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_{n-p}(u) & \ldots & \partial_{x_p} f_{n-p}(u) \end{pmatrix},$$

und alle Spalten dieser Matrix sind linear unabhängig, also ist der Rang p.

Definition: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^p$ offene Mengen, $\gamma : U \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma} : V \to \mathbb{R}^n$ seien Parameterdarstellungen von p-dimensionalen Flächenstücken. γ und $\tilde{\gamma}$ heißen äquivalent, wenn ein Diffeomorphismus $\varphi : V \to U$ existiert mit

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi \,.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation unter den Parameterdarstellungen von Flächenstücken. Die zugehörigen Äquivalenzklassen bezeichnet man als p-dimensionale Flächenstücke.

Jede Parameterdarstellung einer p–dimensionalen Fläche ist lokal äquivalent zu einer Parameterdarstellung von der Art wie im obigen Beispiel. Denn es gilt:

Satz: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge und sei $\gamma : U \to \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung einer

p–dimensionalen Fläche. Für $u_0 \in U$ gelte

$$\det \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\gamma_1(u_0) \ \ldots \ \partial_{x_p}\gamma_1(u_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_1}\gamma_p(u_0) \ \ldots \ \partial_{x_p}\gamma_p(u_0) \end{pmatrix} \quad \neq \quad 0\,.$$

(Die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1}\gamma_1(u_0) \ \ldots \ \partial_{x_p}\gamma_1(u_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_1}\gamma_n(u_0) \ \ldots \ \partial_{x_p}\gamma_n(u_0) \end{pmatrix}$$

hat nach Voraussetzung immer p voneinander linear unabhängige Zeilen. Durch Umnumerierung kann erreicht werden, daß dies die ersten p sind.)
Dann gibt es eine Umgebung W von u_0, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^p$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : V \to \mathbb{R}^{n-p}$, so daß $\gamma|_W$ äquivalent ist zur Parameterdarstellung $\tilde{\gamma} : V \to \mathbb{R}^n$, die durch

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1(v) \quad &= \quad v_1 \\ &\vdots \\ \tilde{\gamma}_p(v) \quad &= \quad v_p \\ \tilde{\gamma}_{p+1}(v) \quad &= \quad f_1(v) \\ &\vdots \\ \tilde{\gamma}_n(v) \quad &= \quad f_{n-p}(v) \end{aligned}$$

beschrieben wird. Insbesondere ist $\gamma|_W$ injektiv.

Beweis: Betrachte die Abbildung $\hat{\gamma} : U \to \mathbb{R}^p$,

$$\hat{\gamma}(u) = \begin{pmatrix} \gamma_1(u) \\ \vdots \\ \gamma_p(u) \end{pmatrix}\,.$$

Da $\hat{\gamma}$ stetig differenzierbar ist und da nach Voraussetzung $\det(\hat{\gamma}'(u_0)) \neq 0$ ist, existiert nach dem Satz über die inverse Funktion eine offene Umgebung W von u_0, in der $\hat{\gamma}|_W : W \to V := \hat{\gamma}(W)$ ein Diffeomorphismus ist mit offener Menge $V \subseteq \mathbb{R}^p$. Die Umkehrabbildung sei $\varphi : V \to W$. Man setze

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi\,.$$

Dann ist $\tilde{\gamma}$ eine zu $\gamma|_W$ äquivalente Parameterdarstellung. Außerdem gilt

$$v_i = \gamma_i(u) = \tilde{\gamma}_i(v)\,,\ i = 1, \ldots, p\,,$$

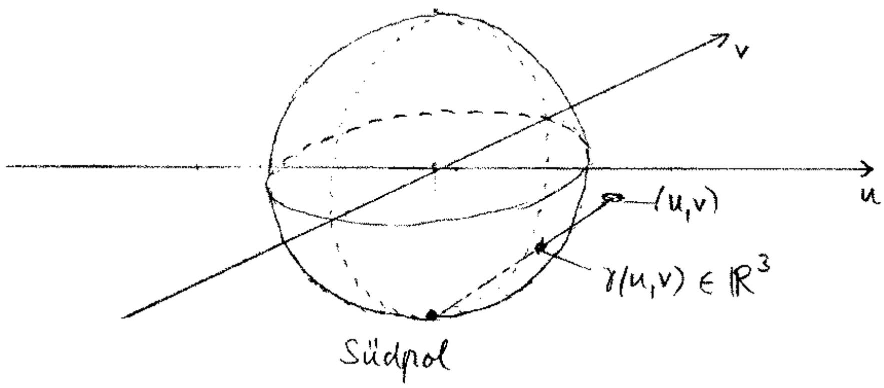
also hat $\tilde{\gamma}$ die angegebene Gestalt. $\tilde{\gamma}$ ist natürlich injektiv, also ist wegen

$$\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi^{-1}$$

auch γ injektiv.

■

Beispiel: Durch stereographische Projektion kann die am Südpol gelochte Sphäre mit Mittelpunkt im Ursprung eineindeutig auf die Ebene abgebildet werden, also umgekehrt auch die Ebene auf die gelochte Sphäre:



$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{u}{v}, \quad \frac{\sqrt{u^2+v^2} - \sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}}{\gamma_3} = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{-1}, \quad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2 = 1$$

Aus den in der Abbildung angegebenen, aus den geometrischen Verhältnissen abgeleiteten Gleichungen erhält man für die Abbildung $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ der stereographischen Projektion, daß

$$\begin{aligned} \gamma_1(u,v) &= \frac{2u}{1+u^2+v^2} \\ \gamma_2(u,v) &= \frac{2v}{1+u^2+v^2} \\ \gamma_3(u,v) &= \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2} . \end{aligned}$$

Die Ableitung ist

$$\gamma'(u,v) = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \begin{pmatrix} 1-u^2+v^2 & -2uv \\ -2uv & 1+u^2-v^2 \\ -2u & -2v \end{pmatrix} .$$

Für $u^2 + v^2 \neq 1$ ist

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \partial_{x_1}\gamma_1(u,v) & \partial_{x_2}\gamma_1(u,v) \\ \partial_{x_1}\gamma_2(u,v) & \partial_{x_2}\gamma_2(u,v) \end{vmatrix} &= (1+(v^2-u^2))(1-(v^2-u^2)) - 4u^2v^2 \\
&= 1-(v^2-u^2)^2 - 4u^2v^2 = 1-(v^2+u^2)^2 \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Für $u \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \partial_{x_1}\gamma_2(u,v) & \partial_{x_2}\gamma_2(u,v) \\ \partial_{x_1}\gamma_3(u,v) & \partial_{x_2}\gamma_3(u,v) \end{vmatrix} &= 4uv^2 + 2u(1+u^2-v^2) \\
&= 2u(1+u^2+v^2) \neq 0\,,
\end{aligned}$$

und für $v \neq 0$ entsprechend

$$\begin{vmatrix} \partial_{x_1}\gamma_1(u,v) & \partial_{x_2}\gamma_1(u,v) \\ \partial_{x_1}\gamma_3(u,v) & \partial_{x_2}\gamma_3(u,v) \end{vmatrix} = -2v(1+u^2+v^2) \neq 0\,,$$

also hat γ' immer den Rang 2, und somit ist γ eine Parameterdarstellung der Einheitssphäre bei herausgenommenem Südpol. Diese Rechnung zeigt auch, daß ohne Umnummerierung der Komponenten von γ die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes erfüllt sind für alle (u_0, v_0) mit $u_0^2 + v_0^2 \neq 1$. Für $(u_0, v_0) = 0$ liefert der Satz insbesondere die im ersten Beispiel dieses Kapitels angegebene Parametrisierung der oberen Hälfte der Einheitssphäre.

In diesem Beispiel ist eine Parameterdarstellung für die gelochte Sphäre angegeben angegeben. Für die gesamte Sphäre gibt es jedoch keine Parameterdarstellung

$$\gamma : U \to \mathbb{R}^3\,.$$

Um die gesamte Sphäre darzustellen, muß man sie daher in mindestens zwei (überlappende) Flächenstücke aufteilen und für jedes eine Parameterdarstellung angeben. Daher definiert man:

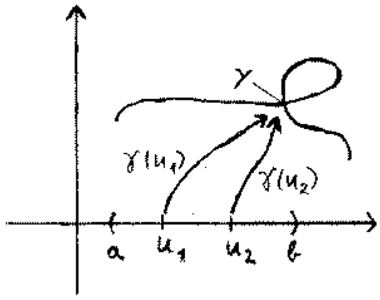
Definition: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge. Eine Parametrisierung $\gamma : U \to \mathbb{R}^n$ eines p–dimensionalen Flächenstückes heißt einfach, wenn

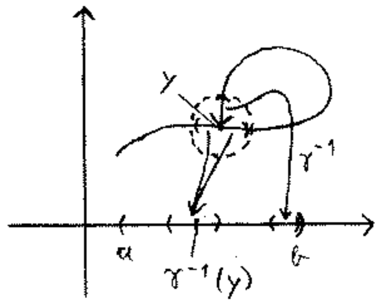
(i) γ injektiv ist

(ii) γ^{-1} stetig ist.

Ein p–dimensionales Flächenstück heißt einfach, wenn es eine einfache Parametrisierung zuläßt, d. h. wenn die Äquivalenzklasse eine einfache Parametrisierung enthält.

$U = (a, b)$





γ ist nicht injektiv:
$y = \gamma(u_1) = \gamma(u_2)$

γ^{-1} ist nicht stetig: Jede Kugel um y wird durch γ^{-1} abgebildet in eine einseitige Umgebung von b und in eine Umgebung von $\gamma^{-1}(y) \neq b$.

Für einfache Flächenstücke gilt:

Satz: Seien $\gamma : U \to \mathbb{R}^n$ und $\hat{\gamma} : \hat{U} \to \mathbb{R}^n$ zwei einfache Parametrisierungen p–dimensionaler Flächenstücke mit übereinstimmender Bildmenge $\gamma(U) = \hat{\gamma}(\hat{U}) = M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\hat{\gamma}^{-1} \circ \gamma : U \to \hat{U}$$

ein Diffeormorphismus.

Einen *Beweis* findet man in Barner-Flohr, Analysis II, S. 384 ff.

Folgerung: Seien $\gamma : U \to M$, $\hat{\gamma} : \hat{U} \to M$ zwei Parametrisierungen einfacher p–dimensionaler Flächenstücke mit übereinstimmender Bildmenge $\gamma(U) = \hat{\gamma}(\hat{U}) = M$. Dann sind γ und $\hat{\gamma}$ äquivalent.

Beweis: Seien $\gamma^* : U^* \to \mathbb{R}^n$ und $\hat{\gamma}^* : \hat{U}^* \to \mathbb{R}^n$ zu γ beziehungsweise $\hat{\gamma}$ äquivalente einfache Parametrisierungen. Dann gilt

$$\gamma^*(U^*) = \gamma(U) = \hat{\gamma}(\hat{U}) = \hat{\gamma}^*(\hat{U}^*) = M\,,$$

also ist $\varphi = (\hat{\gamma}^*)^{-1} \circ \gamma^* : U^* \to \hat{U}^*$ ein Diffeomorphismus. Wegen $\gamma^* = \hat{\gamma}^* \circ \varphi$ sind folglich γ^* und $\hat{\gamma}^*$ äquivalent, also sind auch γ und $\hat{\gamma}$ äquivalent. ∎

Alle Parametrisierungen $\gamma : U \to \mathbb{R}^n$ einer Äquivalenzklasse eines p–dimensionalen Flächenstückes haben dieselbe Bildmenge $M = \gamma(U)$. Einem p–dimensionalen Flächenstück kann man also diese Bildmenge zuordnen. Aus dem letzten Satz folgt, daß bei einem einfachen Flächenstück diese Zuordnung injektiv ist: Zu jeder Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt es höchstens ein einfaches p–dimensionales Flächenstück, so daß die Parametrisierungen aus dieser Äquivalenzklasse M als Bildmenge haben. Daher bezeichne ich auch eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ als einfaches p–dimensionales Flächenstück, wenn eine einfache Parametrisierung γ existiert, die M als Bildmenge hat, und identifiziere somit M mit der Klasse aller zu γ äquivalenten Parametrisierungen.

Definition: Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt p-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem $x \in M$ eine n-dimensionale Umgebung V von x gibt, so daß $V \cap M$ ein einfaches p–dimensionales Flächenstück ist. Die Umkehrabbildung $\kappa = \gamma^{-1} : V \cap M \to U \subseteq \mathbb{R}^n$ einer einfachen Parameterdarstellung $\gamma : U \to V \cap M$ des Flächenstücks $V \cap M$ heißt Karte der Untermannigfaltigkeit M.

Für Untermannigfaltigkeiten gilt:

Satz: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit und seien U, $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^p$ sowie V, $\hat{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen. Mit $W = V \cap M$ und $\hat{W} = \hat{V} \cap M$ seien $\kappa : W \to U$ und $\hat{\kappa} : \hat{W} \to \hat{U}$ zwei Karten von M. Schließlich sei $D = W \cap \hat{W}$. Dann ist D ein einfaches p–dimensionales Flächenstück, $\kappa^{-1} : \kappa(D) \to D$ und $\hat{\kappa}^{-1} : \hat{\kappa}(D) \to D$ sind äquivalente Parameterdarstellungen von D, und

$$\hat{\kappa} \circ \kappa^{-1} : \kappa(D) \subseteq U \to \hat{\kappa}(D) \subseteq \hat{U}$$

ist ein Diffeomorphismus.

Beweis: Weil κ^{-1} und $\hat{\kappa}^{-1}$ stetige Abbildungen sind, sind die Mengen $\kappa(D)$ und $\hat{\kappa}(D)$ offen im $\mathbb{R}^p$ als Urbilder der offenen Teilmenge $V \cap \hat{V}$ des $\mathbb{R}^n$ unter diesen Abbildungen. Folglich sind $\kappa^{-1}|_{\kappa(D)}$ und $\hat{\kappa}^{-1}|_{\hat{\kappa}(D)}$ einfache Parametrisierungen von D und somit äquivalent, nach der obenstehenden Folgerung. Dies bedeutet, daß $\hat{\kappa} \circ \kappa^{-1} : \kappa(D) \to \hat{\kappa}(D)$ ein Diffeomorphismus ist. ∎

Sei M eine p–dimensionale Untermannigfaltigkeit. Weil es zu jedem $y \in M$ eine Umgebung V in $\mathbb{R}^n$ gibt, so daß $V \cap M$ ein einfaches Flächenstück ist, folgt aus einem oben gezeigten Satz, daß es eine Umgebung $\hat{V}$ von y in $\mathbb{R}^n$ mit $\hat{V} \subseteq V$ und eine Parametrisierung $\gamma : U \subseteq \mathbb{R}^p \to \hat{V} \cap M$ der Form

$$(x_1, \ldots, x_p) \mapsto \gamma(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p, f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_{n-p}(x_1, \ldots, x_p))$$

gibt mit einer stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$. Also besteht die Menge $\hat{V} \cap M$ aus den Lösungen des Gleichungssystems

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) \;:=\; x_{p+1} - f_1(x_1, \ldots, x_p) = 0$$

$$\vdots$$

$$g_{n-p}(x_1,\dots,x_n) \ := \ x_n - f_{n-p}(x_1,\dots,x_p) = 0\,,$$

und ist somit Nullstellenmenge der stetig differenzierbaren Funktion

$$g = (g_1,\dots,g_{n-p}) : U \times \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}^{n-p}\,,$$

deren Ableitung an jeder Stelle den (höchstmöglichen) Rang $n-p$ hat. Lokal ist also jede p–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ Nullstellenmenge einer solchen Funktion.

Andererseits ist die Nullstellenmenge $M = \{x \mid g(x) = 0\}$ einer beliebig vorgegebenen stetig differenzierbaren Abbildung

$$g : D \to \mathbb{R}^{n-p} \quad (D \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen})\,,$$

deren Ableitung überall den Rang $n-p$ hat, eine p–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.
Denn sei $y \in M$, also $y \in D$ und $g(y) = 0$. Wegen Rang $(g'(y)) = n-p$ sind $n-p$ Zeilen in der Jacobi-Matrix $g'(y)$ linear unabhängig. Nach Umnummerieren der Koordinaten kann erreicht werden, daß dies die letzten $n-p$ Spalten sind. Mit $\xi = (y_1,\dots,y_p) \in \mathbb{R}^p$ und $\eta = (y_{p+1},\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{n-p}$ gilt also

$$g(\xi,\eta) = 0$$

und $\det\left(\frac{\partial g(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right) \neq 0$, also existiert nach dem Satz über implizite Funktionen eine offene Umgebung U von ξ in $\mathbb{R}^p$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ mit

$$g(\zeta, f(\zeta)) = 0$$

für alle $\zeta \in U$. Für jedes $\zeta \in U$ ist folglich

$$\gamma(\zeta) = (\zeta, f(\zeta)) \in M\,,$$

und die hierdurch definierte Funktion $\gamma : U \to M$ ist eine einfache Parametrisierung des p–dimensionalen Flächenstückes $V \cap M$, wobei $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x_1,\dots,x_p) \in U\}$ sei. Zu beliebigem $y \in M$ ist also eine offene Umgebung V von y in $\mathbb{R}^n$ gefunden, so daß $V \cap M$ eine einfaches p–dimensionales Flächenstück ist, also ist die Nullstellenmenge M von g eine p–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Diese Nullstellenmengen sind selbstdurchdringungsfrei, da man zu $x_0 \in M$ immer eine Umgebung in $\mathbb{R}^n$ finden kann, in der alle Lösungen von $g(x) = 0$ durch $x = \gamma(u)$ gegeben sind mit einer einfachen Parameterdarstellung γ.

Definition: Seien D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $g : D \to \mathbb{R}^{n-p}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Für alle $x \in D$ habe die Jacobi-Matrix $g'(x)$ den Rang $n-p$. Falls die Menge

$$M = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$$

nicht leer ist, wird sie als gleichungsdefinierte p-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

II b.) Integration auf Flächenstücken

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge und sei $\gamma : U \to M$ eine Parameterdarstellug eines p-dimensionalen Flächenstückes im $\mathbb{R}^n$. Die Bildmenge sei $M = \gamma(U)$. Obwohl nicht vorausgesetzt ist, daß M ein einfaches Flächenstück ist, werde ich im folgenden doch M als p-dimensionales Flächenstück bezeichnen und dabei annehmen, daß M mit γ oder einer dazu äquivalenten Parametrisierung parametrisiert wird.
Für $1 \leq i, j \leq p$ seien die stetigen Funktionen $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_{ij}(u) = \frac{\partial \gamma}{\partial u_i}(u) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial u_j}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_i}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial u_i}(u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_j}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial u_j}(u) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \gamma_k}{\partial u_i}(u) \frac{\partial \gamma_k(u)}{\partial u_j} \quad .$$

Definition: Für $u \in U$ sei

$$G(u) = \begin{pmatrix} g_{11}u(u) & \dots & g_{1p}(u) \\ \vdots & & \\ g_{p1}(u) & \dots & g_{pp}(u) \end{pmatrix}$$

Die durch $g(u) := \det(G(u))$ definierte Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ heißt Gramsche Determinante zur Parameterdarstellung γ.

Definition: Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt integrierbar über dem p-dimensionalen Flächenstück M, falls die Funktion

$$u \to f(\gamma(u))\sqrt{g(u)}$$

über U integrierbar ist. Man definiert dann das Integral von f über M durch

$$\int\limits_M f(x)dS(x) := \int\limits_U f(\gamma(u))\sqrt{g(u)}du \,.$$

Nachher wird gezeigt, daß $g(u) > 0$ ist und daß diese Definition sinnvoll ist, d. h. daß der Wert des Integrals $\int\limits_U f(\gamma(u))\sqrt{g(u)}du$ sich nicht ändert wenn die Parametrisierung γ durch eine äquivalente ersetzt wird.
Man nennt $dS(x)$ das p-dimensionale Flächenelement von M an der Stelle x. Symbolisch gilt

$$dS(x) = \sqrt{g(u)}du \,, \quad x = \gamma(u) \,.$$

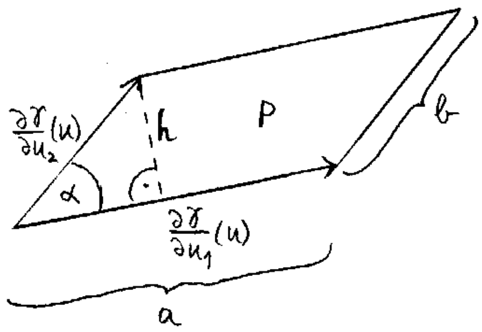
Zur **Motivation** sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\gamma : U \to M \subseteq \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung eines zweidimensionalen Flächenstückes im $\mathbb{R}^3$.

$$h \to \gamma(u) + \gamma'(u)h$$

ist dann die Parameterdarstellung eines ebenen Flächenstückes, das im Punkt $\gamma(u)$ tangential ist an das Flächenstück $u \to \gamma(u)$. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial\gamma}{\partial u_1}(u)$, $\frac{\partial\gamma}{\partial u_2}(u)$ sind Vektoren, die im Tangentialraum von M im Punkt $\gamma(u)$ liegen, einem zweidimensionalen linearen Unterraum von $\mathbb{R}^3$, und diesen Unterraum sogar aufspannen, weil die Matrix $\gamma'(u)$ nach Voraussetzung den Rang 2 hat. $\frac{\partial\gamma}{\partial u_1}(u)$, $\frac{\partial\gamma}{\partial u_2}(u)$ heißen Tangentialvektoren von M im Punkt $\gamma(u)$.

Die Menge

$$P = \left\{ r\frac{\partial\gamma}{\partial u_1}(u) + s\frac{\partial\gamma}{\partial u_2}(u) \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R},\ 0 \le r\,,\ s \le 1 \right\}$$



ist eine Teilmenge des Tangentialraumes, ein Parallelogramm, und $\sqrt{g(u)}$ ist gleich dem Flächeninhalt dieses Parallelogramms. Denn mit $a = |\frac{\partial\gamma}{\partial u_1}(u)|$ und $b = |\frac{\partial\gamma}{\partial u_2}(u)|$ gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{g(u)} &= \sqrt{\det(G(u))} \\
&= \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial\gamma}{\partial u_1}(u)\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial\gamma}{\partial u_1}(u)\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial\gamma}{\partial u_2}(u)\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial\gamma}{\partial u_2}(u)\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial u_2}(u) \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\alpha \\ ab\cos\alpha & b^2 \end{vmatrix}} \\
&= \sqrt{a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\alpha} = ab\sqrt{1-\cos^2\alpha} = ab\sin\alpha = b\cdot h = \text{Fläche von } P\,.
\end{aligned}$$

Natürlich ist die Definition des Flächenintegrals insbesondere auch dadurch motiviert, daß es unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist. Dies ergibt sich aus folgendem

Satz: Seien $U, \tilde U \subseteq \mathbb{R}^p$ offene Mengen, seien $\gamma : U \to M$ sowie $\tilde\gamma : \tilde U \to M$ äquivalente Parameterdarstellungen des Flächenstückes M und sei $\varphi : \tilde U \to U$ ein Diffeomorphismus mit $\tilde\gamma = \gamma \circ \varphi$. Die Gramschen Determinanten zu den Parameterdarstellungen γ und $\tilde\gamma$ werden mit $g : U \to \mathbb{R}$ beziehungsweise $\tilde g : \tilde U \to \mathbb{R}$ bezeichnet.

(i) Dann gilt

$$\tilde g(x) = g(\varphi(x))|\det\varphi'(x)|^2$$

für alle $x \in \tilde{U}$.
(ii) Ist $(f \circ \gamma)\sqrt{g}$ über U integrierbar, dann auch $(f \circ \tilde{\gamma})\sqrt{\tilde{g}}$ über $\tilde{U}$ und es gilt

$$\int_U f(\gamma(x))\sqrt{g(x)}dx = \int_{\tilde{U}} f(\tilde{\gamma}(y))\sqrt{\tilde{g}(y)}dy\,.$$

Beweis: (i) Es gilt

$$g_{ij}(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \gamma_k(u)}{\partial u_i} \frac{\partial \gamma_k(u)}{\partial u_j}\,,$$

also ist

$$G(u) = [\gamma'(u)]^T \gamma'(u)\,.$$

Nach der Kettenregel und dem Determinantenmultiplikationssatz gilt also

$$\begin{aligned}
\tilde{g} &= \det \tilde{G} = \det([\tilde{\gamma}']^T \tilde{\gamma}') \\
&= \det([(\gamma' \circ \varphi)\varphi']^T (\gamma' \circ \varphi)\varphi') = \det(\varphi'^T [\gamma' \circ \varphi]^T [\gamma' \circ \varphi]\varphi') \\
&= (\det \varphi') \det([\gamma' \circ \varphi]^T [\gamma' \circ \varphi])(\det \varphi') = (\det \varphi')^2 (g \circ \varphi)\,.
\end{aligned}$$

(ii) Nach dem Transformationssatz ist $(f \circ \gamma)\sqrt{g}$ über U integrierbar, genau dann wenn $(f \circ \gamma \circ \varphi)\sqrt{g \circ \varphi}|\det \varphi'| = (f \circ \tilde{\gamma})\sqrt{\tilde{g}}$ über $\tilde{U}$ integrierbar ist. Außerdem ergeben Teil (i) der Behauptung und der Transformationssatz, daß

$$\begin{aligned}
\int_U f(\gamma(x))\sqrt{g(x)}dx &= \int_{\tilde{U}} f((\gamma \circ \varphi)(y))\sqrt{g(\varphi(y))}|\det \varphi'(y)|dy \\
&= \int_{\tilde{U}} f(\tilde{\gamma}(y))\sqrt{\tilde{g}(y)}dy\,.
\end{aligned}$$

■

Um zu zeigen, daß $g(u) > 0$ ist, sind einige Vorbereitungen nötig:

Satz: Sei $p \leq n$ und seien A, B zwei $(n \times p)$–Matrizen reeller Zahlen. Für

$$1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_p \leq n$$

bezeichne $A_{i_1 \ldots i_p}$ die quadratische Matrix, die aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_p$ der Matrix A besteht. Entsprechend sei $B_{i_1 \ldots i_p}$ definiert. Dann gilt

$$\det(A^T B) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \det(A_{i_1 \ldots i_p}) \det(B_{i_1 \ldots i_p})\,. \qquad (*)$$

(Für $p = n$ besteht die Summe nur aus einem Summanden. Dann ist die Formel gerade der Determinantenmultiplikationssatz.)

Beweis: 1.) Zunächst zeige ich, daß die Formel gültig ist, wenn A eine beliebige Matrix und B eine Matrix der Form

$$B = (e_{j_1}, \dots e_{j_p}) \quad , \quad 1 \leq j_\ell \leq n \, ,$$

ist mit Spaltenvektoren $e_i \in \mathbb{R}^n$ der Form

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i - \text{te Stelle}\, .$$

Zum Beweis prüft man sofort nach, daß die linke Seite von $(*)$ für eine solche Matrix B die Form

$$\det(A^T B) = \det(A_{j_1 \dots j_p})^T = \det(A_{j_1 \dots j_p})$$

annimmt. Sind nicht alle $j_1, \dots, j_p$ paarweise verschieden, dann ist diese Determinante Null.

Um die rechte Seite von $(*)$ umzuformen beachtet man, daß die Matrix $B_{j_1 \dots j_p}$ aus allen von Null verschiedenen Zeilen der Matrix B besteht. Ein Summand auf der rechten Seite von $(*)$ ist also höchstens dann von Null verschieden, wenn $\{i_1, \dots, i_p\} = \{j_1, \dots, j_p\}$ gilt. Sind alle $j_1, \dots, j_p$ paarweise verschieden, dann gibt es genau ein solches p-Tupel, für das außerdem $i_1 < \dots < i_p$ gilt. Sind nicht alle $j_1, \dots, j_p$ paarweise verschieden, dann gibt es kein solches p-Tupel, das beide Bedingungen erfüllt, und alle Summanden auf der rechten Seite von $(*)$ verschwinden. In diesem Fall ist also $(*)$ erfüllt. Im anderen Fall erhält man für den einzigen möglicherweise von Null verschiedenen Summanden auf der rechten Seite von $(*)$ durch gleichzeitiges Vertauschen der Zeilen

$$\det(A_{i_1 \dots i_p}) \det(B_{i_1 \dots i_p}) = \det(A_{j_1 \dots j_p}) \det(B_{j_1 \dots j_p}) = \det(A_{j_1 \dots j_p})$$

wegen $B_{j_1 \dots j_p} = I$. Also ist $(*)$ auch in diesem Fall erfüllt.

2.) Nun wird gezeigt, daß wenn die Formel für die Matrix

$$B = (b_1, \dots, b_p) \, , \; b_j \in \mathbb{R}^n$$

gilt, dann auch für

$$B' = (b_1, \dots, \lambda b_i, \dots, b_p)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

Denn

$$\begin{aligned}\det(A^T B') &= \lambda \det(A^T B) = \lambda \sum_{i_1 < \dots < i_p} \det(A_{i_1 \dots i_p}) \det(B_{i_1 \dots i_p}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \det(A_{i_1 \dots i_p}) \det(B'_{i_1 \dots i_p})\ .\end{aligned}$$

3.) Gilt die Formel für die Matrizen

$$B' = (b_1, \dots, b_i', \dots, b_p) \quad \text{und} \quad B'' = (b_1, \dots, b_i'', \dots, b_p)\ ,$$

dann auch für die Matrix

$$B = (b_1, \dots, b_i' + b_i'', \dots, b_p)\ ,$$

wegen

$$\begin{aligned}\det(A^T B) &= \det(A^T B') + \det(A^T B'') \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \det(A_{i_1 \dots i_p}) \det(B'_{i_1 \dots i_p}) + \sum_{i_1 < \dots < i_p} \det(A_{i_1 \dots i_p}) \det(B''_{i_1 \dots i_p}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \det(A_{i_1 \dots i_p}) \det(B_{i_1 \dots i_p})\ .\end{aligned}$$

4.) Aus den Matrizen B mit der in 1.) angegebenen Form können mit den in 2.) und 3.) angegebenen Umformungen alle Matrizen aufgebaut werden. Zum Beispiel ergibt sich

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ a_n & & & \end{pmatrix} \text{ aus } \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ a_n & & & \end{pmatrix}.$$

■

Folgerung 1: Sei A eine $n \times p$–Matrix mit $p \leq n$. Dann gilt

$$\det(A^T A) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} (\det A_{i_1 \dots i_p})^2\ .$$

Hieraus sieht man, daß die Gramsche Determinante $g(u)$ folgendermaßen aus der Jacobi-Matrix $\gamma'(u)$ berechnet werden kann:

Folgerung 2: Sei $p \leq n$, sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge und sei $\gamma : U \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung des Flächenstückes M. Dann gilt für die Gramsche Determinante zur Parameterdarstellung γ

$$g(u) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \left(\det \frac{\partial(\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_p})}{\partial(u_1, \ldots, u_p)} \right)^2 ,$$

mit

$$\frac{\partial(\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_p})}{\partial(u_1, \ldots, u_p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_{i_1}}{\partial u_1}(u) \ldots \frac{\partial \gamma_{i_1}}{\partial u_p}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial \gamma_{i_p}}{\partial u_1}(u) \ldots \frac{\partial \gamma_{i_p}}{\partial u_p}(u) \end{pmatrix} .$$

Beweis: Wegen

$$G(u) = [\gamma'(u)]^T \gamma'(u)$$

ergibt Folgerung 1

$$g(u) = \det G(u) = \det([\gamma'(u)]^T \gamma'(u)) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \left(\det \frac{\partial(\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_p})}{\partial(u_1, \ldots, u_p)} \right)^2 ,$$

■

Lemma: Für alle $u \in U$ gilt $g(u) > 0$.

Beweis: γ ist die Parameterdarstellung eines Flächenstückes und daher hat $\gamma'(u)$ den Rang p für alle $u \in U$, also gibt es $i_1 < \ldots < i_p$, so daß in der $p \times p$–Matrix

$$\frac{\partial(\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_p})}{\partial(u_1, \ldots, u_p)}$$

alle Zeilen linear unabhängig sind, also ist die Determinante dieser Matrix von Null verschieden. Wegen Folgerung 2 ist somit $g(u) > 0$. ■

Flächenintegrale und Transformationssatz: Zur weiteren Motivation der Definition des Flächenintegrals zeige ich, daß man unter speziellen Voraussetzungen auch die im vorigen Abschnitt bewiesene Transformationsformel zurück erhält: Sei $p < n$, sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ eine offene Menge und sei $\gamma : U \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung des p-dimensionalen Flächenstückes M. Es wird angenommen, daß

$$M \subseteq \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \middle| x_{p+1} = \ldots = x_n = 0 \right\}$$

gilt. M ist also "flach" und liegt in einem p-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Durch die Projektionsabbildung $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$,

$$P(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p)$$

wird M mit einer Teilmenge $V = P(M) \in \mathbb{R}^p$ identifiziert. Dann ist $P \circ \gamma : U \to V$ stetig differenzierbar und nach dem Satz über die inverse Funktion sogar ein Diffeomorphismus. Wegen $P(\gamma(y)) = (\gamma_1(y), \ldots, \gamma_p(y))$ folgt dann aus der Transformationsformel

$$\int\limits_V f(x)dx = \int\limits_U f(P \circ \gamma(u)) \,|\det(P \circ \gamma)'(u)|\, du\,,$$

mit

$$\det(P \circ \gamma')(u) = \det \frac{\partial(\gamma_1 \ldots, \gamma_p)}{\partial(u_1, \ldots, u_p)}\,.$$

Wegen

$$\gamma'(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \gamma_p}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial \gamma_p}{\partial u_p} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

resultiert aus Folgerung 2, daß

$$\sqrt{g(u)} = |\det \frac{\partial(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)}{\partial(u_1, \ldots, u_p)}|\,,$$

also liefert die Definition des Flächenintegrals

$$\begin{aligned} \int\limits_M f(x)dS(x) &= \int\limits_U f(\gamma(u))\sqrt{g(u)}du \\ &= \int\limits_U f(\gamma(u))|\det \frac{\partial(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)}{\partial(u_1, \ldots, u_p)}|du = \int\limits_V f(x)dx\,. \end{aligned}$$

II c.) Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Nun soll die Definition des Integrals von Flächenstücken auf Untermannigfaltigkeiten verallgemeinert werden. Ich beschränke mich dabei auf p-dimensionale Untermannigfaltigkeiten M des $\mathbb{R}^n$, die durch endlich viele Karten überdeckt werden können. Genauer nehme ich an, daß es endlich viele Karten $\kappa_j : V_j \subseteq M \to U_j$ gebe mit $M = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$. Nach Definition von Karten sind dabei $U_j \subseteq \mathbb{R}^p$ offene Mengen und gibt es offene Mengen $T_j \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $V_j = T_j \cap M$. Die Umkehrabbildungen $\gamma_j = \kappa_j^{-1} : U_j \to V_j$ sind einfache Parametrisierungen.

Definition: Unter einer der Überdeckung $\{V_j\}_{j=1,\dots,m}$ von M untergeordneten Partition der Eins aus lokal integrierbaren Funktionen versteht man m Funktionen

$$\alpha_j = M \to \mathbb{R} \quad , \quad j = 1, \dots, m$$

mit

1.) $0 \leq \alpha_j \leq 1 \quad , \quad \alpha_j|_{M \setminus V_j} = 0$

2.) $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x) = 1$ für alle $x \in M$

3.) Die Funktion $\alpha_j \circ \gamma_j : U_j \to \mathbb{R}$ ist lokal integrierbar, d. h. für alle $R > 0$ existiere das Integral

$$\int_{U_j \cap \{|u| < R\}} \alpha_j(\gamma_j(u)) du \, .$$

Beispiel: Sei $W_j := V_j \setminus (\bigcup_{i<j} V_i)$ und sei

$$\alpha_j(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in W_j \\ 0 & , \quad x \in M \setminus W_j \end{cases} \, .$$

Es gilt $W_j \subseteq V_j$, die W_j sind paarweise disjunkt, und $\bigcup_{i=1}^{m} W_j = M$. Denn für $x \in M$ gibt es ein kleinstes j mit $x \in V_j$, also ist $x \in W_j$. Somit sind die Bedingungen 1.) und 2.) erfüllt.

Um zu zeigen, daß $\alpha_j \circ \gamma_j$ lokal integrierbar ist, sei

$$B_R = \{u \in \mathbb{R}^p \mid |u| < R\}$$

eine offene Kugel im $\mathbb{R}^p$. Nach Voraussetzung gibt es offene Mengen T_j von $\mathbb{R}^n$ mit $V_j = T_j \cap M$. Es gilt dann

$$\gamma_j^{-1}(W_j) = \gamma_j^{-1}(V_j \setminus \bigcup_{i<j} V_i) = \gamma_j^{-1}(V_j) \setminus \bigcup_{i<j} \gamma_j^{-1}(V_i) = \underbrace{U_j}_{\text{offen}} \setminus \bigcup_{i<j} \underbrace{\gamma_j^{-1}(T_i)}_{\text{offen}} \, .$$

Also ist $\gamma_j^{-1}(W_j) \cap B_R = \hat{U}_j \setminus \tilde{U}_j$ mit den offenen und beschränkten Mengen $\hat{U}_j = U_j \cap B_R$ und $\tilde{U}_j = [\bigcup\limits_{i<j} \gamma_j^{-1}(T_i)] \cap B_R$. Es seien $\hat{\chi}_j$ und $\tilde{\chi}_j$ die charakteristischen Funktionen von $\hat{U}_j$ und $\tilde{U}_j$. Weil jede offene und beschränkte Menge Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Quadern ist, (siehe Kapitel 1c), sind die charakteristischen Funktionen solcher Mengen integrierbar, also folgt

$$\int\limits_{U_j \cap B_R} \alpha_j \circ \gamma_j(u) du = \int\limits_{U_j \cap B_R} \chi_{\gamma_j^{-1}(W_j)}(u) du = \int\limits_{\gamma_j^{-1}(W_j) \cap B_R} du = \int\limits_{\mathbb{R}^p} \hat{\chi}(u) - \tilde{\chi}(u) du < \infty \, .$$

Die Eigenschaft 3 ist also erfüllt. Somit ist $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$ eine der Überdeckung $\{V_j\}_{j=1}^m$ von M untergeordnete Partition der Eins.

Definition: Es sei M eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, zu der eine endliche Überdeckung $\{V_j\}_{j=1}^m$ existiere mit einfachen Parametrisierungen $\gamma_j : U_j \to V_j$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar über M, falls $f_{|V_j}$ für alle j integrierbar ist. Man setzt dann

$$\int\limits_M f(x) dS(x) = \sum_{j=1}^m \int\limits_{V_j} \alpha_j(x) f(x) dS(x)$$

mit einer der Überdeckung $\{V_j\}_{j=1}^m$ von M untergeordneten Partition der Eins $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$.

Man beachte, daß wegen der vorausgesetzten Eigenschaften von α_j die Funktion $\alpha_j(x)f(x)$ über V_j integrierbar ist. Denn nach Voraussetzung ist $(f \circ \gamma_j)\sqrt{g_j}$ über U_j integrierbar mit der Gramschen Determinanten g_j zur Parametrisierung γ_j. Wegen $0 \leq \alpha_j(x) \leq 1$ ist also auch $(\alpha_j \circ \gamma_j)(f \circ \gamma_j)\sqrt{g_j}$ über U_j integrierbar als Produkt einer integrierbaren und einer beschränkten, lokal integrierbaren Funktion.

Es muß noch gezeigt werden, daß die Definition des Integrals unabhängig von der Wahl der Überdeckung von M durch Karten und von der Wahl der Partition der Eins ist:

Satz: Sei M eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ und seien

$$\begin{aligned} \gamma_k : U_k \to V_k \, , &\quad k = 1, \ldots, m \\ \tilde{\gamma}_j : \tilde{U}_j \to \tilde{V}_j \, , &\quad j = 1, \ldots, l \end{aligned}$$

einfache Parametrisierungen mit $\bigcup\limits_{k=1}^m V_k = \bigcup\limits_{j=1}^l \tilde{V}_j = M$. Das Funktionensystem $\{\alpha_k\}_{k=1}^m$ sei eine der Überdeckung $\{V_k\}_{k=1}^m$ und das System $\{\beta_j\}_{j=1}^l$ eine der Überdeckung $\left\{\tilde{V}_j\right\}_{j=1}^l$

untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{V_k} \alpha_k(x) f(x) dS(x) = \sum_{j=1}^{l} \int_{\tilde{V}_j} \beta_j(x) f(x) dS(x) .$$

Beweis: Zunächst zeige ich, daß $\beta_j \alpha_k f$ sowohl über V_k als auch über $\tilde{V}_j$ integrierbar ist mit

$$\int_{\tilde{V}_j} \beta_j(x)\alpha_k(x) f(x) dS(x) = \int_{V_k} \beta_j(x)\alpha_k(x) f(x) dS(x) .$$

Um dies einzusehen, sei

$$D_{jk} = \tilde{V}_j \cap V_k .$$

Nach einem in Kapitel IIa bewiesenen Ergebnis sind dann $\gamma_k : U_{kj} \to D_{jk}$ und $\tilde{\gamma}_j : \tilde{U}_{kj} \to D_{jk}$ äquivalente Parametrisierungen mit

$$U_{kj} = \gamma_k^{-1}(D_{jk}) , \quad \tilde{U}_{kj} = \tilde{\gamma}_j^{-1}(D_{jk}) .$$

Seien g_k beziehungsweise $\tilde{g}_j$ die Gramschen Determinanten zu γ_k und $\tilde{\gamma}_j$. Wenn die Funktion $[(\alpha_k f) \circ \gamma_k]\sqrt{g_k}$ über U_k integrierbar ist, dann ist diese Funktion auch über U_{kj} integrierbar, weil U_{kj} eine offene Teilmenge von U_k ist. Nach dem im letzten Abschnitt bewiesenen Satz ist dann $[(\alpha_k f) \circ \tilde{\gamma}_j]\sqrt{\tilde{g}_j}$ über $\tilde{U}_{jk}$ integrierbar. Nach Voraussetzung ist $\beta_j \circ \tilde{\gamma}_j$ über $\tilde{U}_j$ lokal integrierbar, also ist diese Funktion auch über $\tilde{U}_{jk}$ lokal integrierbar, weil $\tilde{U}_{jk}$ eine offene Teilmenge von $\tilde{U}_j$ ist. Wegen $0 \leq \beta_j \circ \tilde{\gamma}_j \leq 1$ folgt, daß das Produkt

$$[(\beta_j \alpha_k f) \circ \tilde{\gamma}_j]\sqrt{\tilde{g}_j} = (\beta_j \circ \tilde{\gamma}_j)[(\alpha_k f) \circ \tilde{\gamma}_j]\sqrt{\tilde{g}_j}$$

über $\tilde{U}_{jk}$ integrierbar ist, und wegen der Äquivalenz der Parametrisierungen $\gamma_k : U_{kj} \to D_{jk}$, $\tilde{\gamma}_j : \tilde{U}_{jk} \to D_{jk}$ ergibt sich

$$\int_{\tilde{U}_{jk}} [(\beta_j \alpha_k f) \circ \tilde{\gamma}_j]\sqrt{\tilde{g}_j} du = \int_{U_{kj}} [(\beta_j \alpha_k f) \circ \gamma_k]\sqrt{g_k} du .$$

Da $(\beta_j \alpha_k)(x) = 0$ für alle $x \in M \setminus D_{jk}$, ist $[(\beta_j \alpha_k f) \circ \tilde{\gamma}_j](u) = 0$ für alle $u \in \tilde{U}_j \setminus \tilde{U}_{jk}$ und $[(\beta_j \alpha_k f) \circ \gamma_k](u) = 0$ für alle $u \in U_k \setminus U_{kj}$, also können in der obenstehenden Formel die Integrationsbereiche jeweils ausgedehnt werden ohne Änderung der Integrale. Es folgt

$$\int_{\tilde{U}_j} [(\beta_j \alpha_k f) \circ \tilde{\gamma}_j]\sqrt{\tilde{g}_j} du = \int_{U_k} [(\beta_j \alpha_k f) \circ \gamma_k]\sqrt{g_k} du .$$

Weil $\tilde{\gamma}_j : \tilde{U}_j \to \tilde{V}_j$ und $\gamma_k : U_k \to V_k$ Parametrisierungen sind, bedeutet dies

$$\int\limits_{\tilde{V}_j} (\beta_j \alpha_k f) dS(x) = \int\limits_{V_k} (\beta_j \alpha_k f) dS(x) \,.$$

Es folgt wegen $\sum\limits_{j=1}^{\ell} \beta_j(x) = 1$ und $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k(x) = 1$, daß

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{V_k} \alpha_k(x) f(x) dS(x) = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{V_k} \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j(x) \alpha_k(x) f(x) dS(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{V_k} \beta_j(x) \alpha_k(x) f(x) dS(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\tilde{V}_j} \beta_j(x) \alpha_k(x) f(x) dS(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} \int\limits_{\tilde{V}_j} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x) \beta_j(x) f(x) dS(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \int\limits_{\tilde{V}_j} \beta_j(x) f(x) dS(x) \,.$$

■

II d.) Kurvenintegrale, Bogenlänge, Oberfläche

Sei $p = 1$ und $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. $\gamma : I \to \Gamma = \gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ sei die Parametrisierung einer Kurve im $\mathbb{R}^n$. Die Gramsche Determinante nimmt in diesem Fall die spezielle Form

$$g(t) = \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{d\gamma_i(t)}{dt})^2 = |\gamma'(t)|^2$$

an, und für eine Funktion $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ liefert die Definition des „Flächenintegrals“

$$\int\limits_{\Gamma} f(x) ds(x) := \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \,.$$

Dieses Integral heißt Kurvenintegral. Das Integral

$$\int\limits_{\Gamma} ds = \int\limits_{a}^{b} |\gamma'(t)| dt$$

bezeichnet man als Länge der Kurve Γ. Oft es ist praktisch, anstelle des Parameters t einen neuen Parameter, den Bogenlängenparameter einzuführen. Sei $\ell = \int\limits_{a}^{b} |\gamma'(t)| dt$ und sei die Abbildung

$$\varphi : [a, b] \to [0, \ell]$$

definiert durch

$$\varphi(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| d\tau \,.$$

γ ist stetig differenzierbar und für alle $\tau \in I$ hat $\gamma'(\tau)$ den Rang 1, weil γ eine Parametrisierung ist. Also ist $\gamma'(\tau) \neq 0$ für alle τ. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist folglich φ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\varphi'(\tau) = |\gamma'(\tau)| > 0$, also ist φ ein Diffeomorphismus und

$$\alpha = \gamma \circ \varphi^{-1} : [0, \ell] \to \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine zu γ äquivalente Parametrisierung der Kurve Γ. Diese Parametrisierung heißt Parametrisierung nach der Bogenlänge. Es gilt

$$\begin{aligned} |\alpha'(\sigma)| &= |\gamma'(\varphi^{-1}(\sigma))[\varphi^{-1}]'(\sigma)| \\ &= |\gamma'(\varphi^{-1}(\sigma))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(\sigma))}| = |\gamma'(\varphi^{-1}(\sigma))|\frac{1}{|\gamma'(\varphi^{-1}(\sigma))|} = 1 \,, \end{aligned}$$

also ist

$$\int_\Gamma f(x) ds(x) = \int_0^\ell f(\alpha(\sigma))|\alpha'(\sigma)| d\sigma = \int_0^\ell f(\alpha(\sigma)) d\sigma \,.$$

Beispiele:

1.) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix} .$$

γ ist eine Parametrisierung des Einheitskreises E. Für die Länge des Einheitskreises ergibt sich

$$\begin{aligned} L(E) &= \int_E ds = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(-2\pi \sin 2\pi t)^2 + (2\pi \cos 2\pi t)^2} dt = \int_0^1 2\pi dt = 2\pi \,. \end{aligned}$$

Die Parametrisierung nach der Bogenlänge ist gegeben durch $\alpha(\sigma) = \begin{pmatrix} \cos \sigma \\ \sin \sigma \end{pmatrix}$.

2.) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

ein (stetig differenzierbarer) Weg Γ in $\mathbb{R}^2$, der Graph von f. Für die Länge dieses Weges gilt

$$L(\Gamma) = \int_\Gamma ds = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}dt\,.$$

Speziell sei $[a,b] = [-1,1]$ und $f(t) := \sqrt{1-t^2}$. Dann ist $t \to \gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$ eine Parametrisierung der oberen Hälfte des Einheitskreises, und es gilt natürlich

$$\begin{aligned} L(P) = \int_\Gamma ds &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}})^2}dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}dt \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1-t^2}}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\tau}{\sqrt{1-\sin^2\tau}}d\tau = \pi\,, \end{aligned}$$

mit der Substitution $t = \sin\tau$.

Allgemein definiert man:

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt integrierbare Teilmenge von M, falls die charakteristische Funktion χ_A über M integrierbar ist.

$$\mathrm{Vol}_p(A) = \int_M \chi_A(x)dS(x)$$

heißt p-dimensionales Volumen oder p-dimensionaler Flächeninhalt von A.

Beispiele:

1.) Es soll die Oberfläche der Einheitssphäre

$$S_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$$

im $\mathbb{R}^3$ berechnet werden. Eine Parametrisierung

$$\gamma : (0,\pi) \times (0,2\pi) \to S_2$$

ist gegeben durch

$$(\vartheta,\varphi) \to \gamma(\vartheta,\varphi) = (\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta)$$

Die Gramsche Determinante von S_2 bezüglich dieser Parametrisierung ergibt sich folgendermaßen: Es ist

$$g_{11}(\vartheta,\varphi) = \frac{\partial\gamma}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial\vartheta} = \sum_{i=1}^{3}(\frac{\partial\gamma_i}{\partial\vartheta})^2$$

$$
\begin{aligned}
&= (\cos\varphi\cos\vartheta)^2 + (\sin\varphi\cos\vartheta)^2 + (\sin\vartheta)^2 = 1 \\
g_{12}(\vartheta,\varphi) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\gamma_i}{\partial\vartheta}\frac{\partial\gamma_i}{\partial\varphi} \\
&= -\cos\varphi\cos\vartheta\sin\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\cos\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta = 0 \\
g_{21}(\vartheta,\varphi) &= g_{12}(\vartheta,\varphi) = 0 \\
g_{22}(\vartheta,\varphi) &= \sum_{i=1}^{3} (\frac{\partial\gamma_i}{\partial\varphi})^2 = (\sin\varphi\sin\vartheta)^2 + (\cos\varphi\sin\vartheta)^2 = \sin^2\vartheta\,.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
g(\vartheta,\varphi) = \det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta \end{vmatrix} = \sin^2\vartheta\,.
$$

Folglich gilt für die Oberfläche der Einheitskugel

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_2(S_2) &= \int_{S_2} dS(x) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{g(\vartheta,\varphi)}\,d\vartheta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi = -\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \mid_0^{\pi} d\varphi = 2\cdot 2\pi = 4\pi\,.
\end{aligned}
$$

2.) Sei $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist die durch

$$
\gamma(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ f(u) \end{pmatrix}
$$

definierte Funktion $\gamma : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Parametrisierung des Graphen Γ von f. Es gilt

$$
\gamma'(u) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial u_n} \end{pmatrix},
$$

also ergibt die Folgerung 2 aus Kapitel II b, daß

$$
g(u) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial u_i}(u))^2 = 1 + |\mathrm{grad}\, f(u)|^2
$$

gilt. Somit folgt

$$
\mathrm{Vol}_n(\Gamma) = \int_{\Gamma} dS(x) = \int_U \sqrt{1 + |\mathrm{grad}\, f(u)|^2}\,du\,.
$$

3 III.) Gaußscher und Stokescher Integralsatz, Greensche Formeln

III a.) Normalenvektoren

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\psi : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\operatorname{grad}\psi(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Die Menge

$$M = \{x \in U \mid \psi(x) = 0\}$$

sei nicht leer. Wegen Rang $(\operatorname{grad}\psi(x)) = 1$ für alle $x \in U$ ist M eine gleichungsdefinierte $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

Definition: Für $a \in M$ sei

$$\nu(a) = \frac{\operatorname{grad}\psi(a)}{|\operatorname{grad}\psi(a)|} .$$

Man nennt $\nu(a)$ Einheitsnormalenvektor an M im Punkt a.

Dieser Name rührt daher, daß der Vektor $\nu(a)$ senkrecht steht auf allen Vektoren, die im Punkt a tangential sind an M. Dies ergibt sich aus folgendem

Lemma: Es gilt

1.) $|\nu(a)| = 1$

2.) $\nu(a)$ steht senkrecht auf allen Tangentialvektoren an M im Punkt a.

3.) Es gibt eine Zahl $\delta > 0$ mit

$$\psi(a + \nu(a)t) \begin{cases} < 0 & \text{für} \quad -\delta < t < 0 \\ > 0 & \text{für} \quad 0 < t < \delta \end{cases} .$$

Beweis: 1.) ist klar.

2.) Die Tangentialvektoren im Punkt a sind Elemente des Tangentialraumes $T_a(M)$ an M im Punkt a, eines $(n-1)$-dimensionalen linearen Unterraumes von $\mathbb{R}^n$. Mit einer Parametrisierung $\gamma : V \to M$ von M in einer Umgebung von $a = \gamma(v)$ gilt

$$T_a(M) = \gamma'(v)\mathbb{R}^{n-1} .$$

Hierbei ist V eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n-1}$.

Sei also τ ein beliebiger Tangentialvektor. Dann existiert $h \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $\tau = \gamma'(v)h$, folglich gilt

$$\nu(a) \cdot \tau \quad = \quad \frac{1}{|\operatorname{grad}\psi(a)|} \operatorname{grad}\psi(a) \cdot \gamma'(v)h$$

$$= \frac{1}{|\mathrm{grad}\,\psi(a)|}\psi'(\gamma(v))\gamma'(v)h$$
$$= \frac{1}{|\mathrm{grad}\,\psi(a)|}(\psi\circ\gamma)'(v)h = 0\,,$$

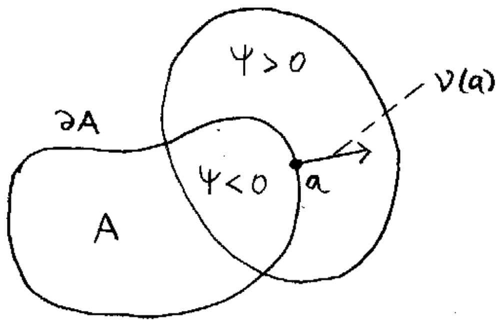
wegen $(\psi\circ\gamma)(y) = 0$ für alle $y \in V$, also $(\psi\circ\gamma)'(v) = 0$.
3.) Für die reelle Funktion $t \to \psi(a+\nu(a)t)$ gilt $\psi(a) = 0$ und

$$\frac{d}{dt}\psi(a+\nu(a)t)_{|t=0} = \mathrm{grad}\,\psi(a)\cdot\nu(a) = |\mathrm{grad}\,\psi(a)| > 0\,,$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Definition: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Man sagt, A habe glatten Rand, wenn es zu jedem $a \in \partial A = \bar{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)}$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ gibt mit folgenden Eigenschaften

1.) $A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \le 0\}$
2.) $\mathrm{grad}\,\psi(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.



Aus dieser Definition folgt, daß der Teil des Randes von A, der innerhalb von U liegt, mit der gleichungsdefinierten Untermannigfaltigkeit $\{x \in U \mid \psi(x) = 0\}$ übereinstimmt. Denn nach Behauptung 3 des vorangehenden Lemmas gibt es zu jedem a aus dieser Untermannigfaltigkeit eine Zahl $\delta > 0$ mit $\psi(a+\nu(a)t) > 0$ für $0 < t < \delta$ und $\psi(a+\nu(a)t) < 0$ für $-\delta < t < 0$, also

$$a+\nu(a)t \in \begin{cases} A & , \quad -\delta < t \le 0 \\ \mathbb{R}^n \setminus A & , \quad 0 < t < \delta\,. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$\partial A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) = 0\}\ .$$

Nach Kapitel II a bedeutet dies, daß für eine kompakte Menge A mit glattem Rand der gesamte Rand ∂A eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

Definition (Äußere Einheitsnormale): Sei $a \in \partial A$. Der Vektor

$$\nu(a) = \frac{\operatorname{grad}\psi(a)}{|\operatorname{grad}\psi(a)|}$$

heißt äußerer Einheitsnormalenvektor an den Rand ∂A im Punkt a.

Bemerkung: Der Vektor $\nu(a)$ ist eindeutig bestimmt durch die ersten beiden Bedingugnen des vorangehenden Lemmas und durch die Forderung, daß er in das Äußere der Menge A zeigen soll.

III b.) Der Gaußsche Integralsatz

Zur Formulierung des Gaußschen Satzes ist eine weitere Definition notwendig:
Definition (Divergenz): Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar. Dann ist die Funktion $\operatorname{div} f : U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\operatorname{div} f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x)\,.$$

Man nennt $\operatorname{div} f$ die Divergenz von f.

Satz (Gaußscher Integralsatz): Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit glattem Rand, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine offene Menge mit $A \subseteq U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int\limits_{\partial A} \nu(x) \cdot f(x) dS(x) = \int\limits_{A} \operatorname{div} f(x) dx\,.$$

Für $n = 1$ lautet der Satz: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann ist

$$f(b) - f(a) = \int\limits_a^b \frac{d}{dx} f(x) dx\,,$$

und man sieht, daß der Gaußsche Satz die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf den $\mathbb{R}^n$ ist.

Der Beweis dieses Satzes wird in vier Lemmata zerlegt, aus denen er sich als einfache Folgerung ergibt:
Lemma: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$f \in C_0^1(U, \mathbb{R}) = C_0(U, \mathbb{R}) \cap C^1(U, \mathbb{R})\,.$$

Dann gilt

$$\int\limits_U \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)dx = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Aus diesem Lemma folgt, daß der Gaußsche Satz für Funktionen gilt, die am Rande Null sind:

Folgerung: Sei $f \in C_0^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int\limits_U \operatorname{div} f(x)dx = 0\,.$$

Beweis des Lemmas: Wähle einen Würfel

$$W_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq a\}$$

mit $\operatorname{supp} f \subseteq \overset{\circ}{W}_a$ und definiere $F : W_a \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in W_a \cap U \\ 0 & , \quad x \in W_a \setminus U\,. \end{cases}$$

Dann ist $F \in C_0^1(\overset{\circ}{W}_a, \mathbb{R})$. Aus dem Satz von Fubini und aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt mit $x = (x', x_i, x'') \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\int\limits_U \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)dx &= \int\limits_{W_a} \frac{\partial}{\partial x_i} F(x)dx \\
&= \int\limits_{\|x'\|_\infty \leq a} \int\limits_{\|x''\|_\infty \leq a} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', x_i, x'')dx_i dx'' dx' \\
&= \int\limits_{\|x'\|_\infty \leq a} \int\limits_{\|x''\|_\infty \leq a} [F(x', a, x'') - F(x', -a, x'')]dx'' dx' = 0\,.
\end{aligned}$$

■

Im nächsten Lemma wird der Gaußsche Satz für Funktionen bewiesen, deren Träger in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Randpunktes $a \in \partial A$ liegt. In Kapitel II a wurde gezeigt, daß die $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ∂A in einer genügend kleinen Umgebung als Graph einer Funktion g dargestellt werden kann. Genauer wurde gezeigt, daß nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten eine offene Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, ein Intervall $I = (\alpha, \beta)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to I \subseteq \mathbb{R}$ existiert, so daß eine Parameterdarstellung $\gamma : U' \to V \subseteq \partial A$ gegeben ist durch

$$\gamma(x') = (x', g(x'))\,,$$

für alle $x' \in U'$. Für die stetig differenzierbare Funktion $x \to \psi(x) = x_n - g(x')$ gilt dann

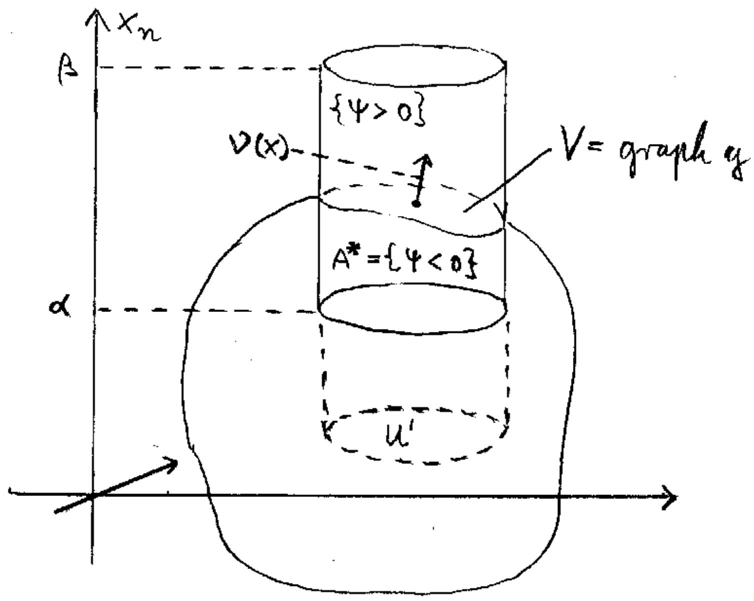
$$V = \{x \in U' \times I \mid \psi(x) = 0\} .$$

Wählt man U' und I hinreichend klein, dann gilt für $A^* = A \cap (U' \times I)$, daß

$$A^* = \{(x', x_n) \in U' \times I \mid x_n \leq g(x)\} .$$

Mit der Funktion ψ gilt für den äußeren Normalen-Einheitsvektor an ∂A im Punkt $x \in V$

$$\nu(x) = \frac{\operatorname{grad} \psi(x)}{|\operatorname{grad} \psi(x)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} g(x')|^2}} \begin{pmatrix} -\operatorname{grad} g(x') \\ 1 \end{pmatrix} .$$



Lemma: Für alle $f \in C_0^1(U' \times I)$ und für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$\int_{A^*} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx = \int_V f(x) \nu_i(x) dS(x) .$$

Folgerung: Für alle $f \in C_0^1(U' \times I)$ gilt

$$\int_{A^*} \operatorname{div} f(x)\, dx = \int_V \nu(x) \cdot f(x) dS(x) .$$

Beweis des Lemmas: Am Ende von Kapitel II b wurde gezeigt, daß die Gramsche Determinante zur Parameterdarstellung $x' \to (x', g(x'))$ gegeben ist durch

$$g(x') = 1 + |\operatorname{grad} g(x')|^2 .$$

Außerdem gilt für $1 \le i \le n-1$

$$\nu_i(x)\sqrt{1+|\operatorname{grad} g(x')|^2} = -\frac{\partial}{\partial x_i} g(x')$$

und

$$\nu_n(x)\sqrt{1+|\operatorname{grad} g(x')|^2} = 1\ .$$

Es sei nun zunächst $1 \le i \le n-1$. Die Funktion $F : U' \times I \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x', z) := \int\limits_{\alpha}^{z} f(x', x_n)dx_n\ .$$

Es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x', z) = f(x', z) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x', z) = \int\limits_{\alpha}^{z} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', x_n)dx_n\ .$$

Daraus folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_{\alpha}^{g(x')} f(x', x_n)dx_n &= \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', g(x')) \\ &= \int\limits_{\alpha}^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', x_n)dx_n + f(x', g(x'))\frac{\partial g(x')}{\partial x_i}\ . \end{aligned}$$

Da die Funktion $x' \to \int\limits_{\alpha}^{g(x')} f(x', x_n)dx_n$ kompakten Träger in U' hat, gilt nach dem oben bewiesenen Lemma

$$\int\limits_{U'} \frac{\partial}{\partial x_i}(\int\limits_{\alpha}^{g(x')} f(x', x_n)dx_n)dx' = 0\ .$$

Diese Formeln implizieren zusammen mit dem Satz von Fubini und der Definition des Flächenintegrals

$$\begin{aligned} \int\limits_{A^*} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx &= \int\limits_{U'}(\int\limits_{\alpha}^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', x_n)dx_n)dx' \\ &= \int\limits_{U'} \frac{\partial}{\partial x_i}(\int\limits_{\alpha}^{g(x')} f(x', x_n)dx_n)dx' - \int\limits_{U'} f(x', g(x'))\frac{\partial g(x')}{\partial x_i}dx' \\ &= \int\limits_{U'} f(x)\nu_i(x)\sqrt{1+|\operatorname{grad} g(x')|^2}dx' = \int\limits_{V} f(x)\nu_i(x)dS(x)\ . \end{aligned}$$

Sei nun $i = n$. Für jedes $x' \in U$ hat die Funktion $x_n \to f(x', x_n)$ kompakten Träger in $I = (\alpha, \beta)$, also folgt

$$\int\limits_{\alpha}^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n)dx_n = f(x', g(x')) \, ,$$

somit

$$\begin{aligned} \int\limits_{A^*} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx &= \int\limits_{U'} (\int\limits_{\alpha}^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n)dx_n)dx' = \int\limits_{U'} f(x', g(x'))dx' \\ &= \int\limits_{U'} f(x)\nu_n(x)\sqrt{1 + |\mathrm{grad}\, g(x')|^2}dx' = \int\limits_{V} f(x)\nu_n(x)dS(x) \, . \end{aligned}$$

■

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und seien $U_1, \ldots, U_k \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen mit $K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} U_j$. In den nächsten beiden Lemmata konstruiere ich eine der Überdeckung $\{U_j\}_{j=1}^k$ von K untergeordnete Zerlegung der Eins aus beliebig oft differenzierbaren Funktionen:

Lemma: Es gibt kompakte Mengen $K_j \subseteq U_j$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} K_j \, .$$

Beweis: Ich konstruiere offene Mengen U'_j mit $K_j := \overline{U'}_j \subseteq U_j$ und mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} U'_j \, .$$

Sei $L = K \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j=2}^{k} U_j)$. Die Menge L ist kompakt als Durchschnitt einer kompakten und einer abgeschlossenen Menge, und es gilt $L \subseteq U_1$. Also gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\mathrm{dist}\,(x, \mathbb{R}^n \backslash U_1) \geq \varepsilon$ für alle $x \in L$. Setze

$$U'_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}\,(x, L) < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \, .$$

Dann ist U'_1 offen und es gilt $\overline{U'}_1 \subseteq U_1$ sowie

$$K \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=2}^{k} U_j) = L \subseteq U'_1 \, ,$$

also $K \subseteq U'_1 \cup \bigcup\limits_{j=2}^{k} U_j$. Folglich ist $\{U'_1, U_2, \ldots, U_k\}$ eine neue offene Überdeckung von K. Mit dieser neuen offenen Überdeckung konstruiere man U'_2 aus U_2 wie eben und fahre fort.

Dies beweist das Lemma. ■

Lemma: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und seien $U_1, \ldots, U_k \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} U_j$. Dann gibt es Funktionen $\alpha_j \in C_0^\infty(U_j)$ mit

$$\alpha_j(x) \geq 0\,, \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(x) \leq 1$$

und mit

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \in K\,.$$

$\{\alpha_j\}_{j=1}^k$ ist also eine der Überdeckung $\{U_j\}_{j=1}^k$ von K untergeordnete Zerlegung der Eins.

Beweis: Wähle kompakte Mengen $K_j \subseteq U_j$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} K_j$. Es gibt dann für alle $j = 1, \ldots, k$ eine Zahl $\varepsilon_j > 0$ mit

$$\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U_j) \geq \varepsilon_j$$

für alle $x \in K_j$. Mit $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ setze man

$$K_j' := \left\{ x \in K_j \;\middle|\; \operatorname{dist}(x, K_j) \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\}\,.$$

Sei $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit $j(x) \geq 0$, mit $\operatorname{supp} j \subseteq \left\{|x| < \frac{\varepsilon}{4}\right\}$ und mit $\int_{\mathbb{R}^n} j(x)dx = 1$. Hiermit definiere man für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\psi_j(x) := \int_{\mathbb{R}^n} j(x-y)\chi_{K_j'}(y)dy\,.$$

Dann ist $\psi_j \in C_0^\infty(U_j)$. Außerdem gilt $0 \leq \psi_j(x) \leq 1$ und für $x \in K_j$ sogar

$$\psi_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} j(x-y)\chi_{K_j'}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} j(x-y)dy = 1\,.$$

Setze $\alpha_1 = \psi_1$ und

$$\alpha_j = \psi_j(1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{j-1})$$

für $j = 2, \ldots, k$. Es gilt dann $\alpha_j \in C_0^\infty(U_j)$, $\alpha_j \geq 0$ und

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \alpha_j &= \psi_1 + \psi_2(1-\psi_1) + \ldots + \psi_k(1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{k-1}) \\
&= 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2) + \ldots + \psi_k(1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{k-1}) \\
&= 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)\ldots(1-\psi_k)\,.
\end{aligned}$$

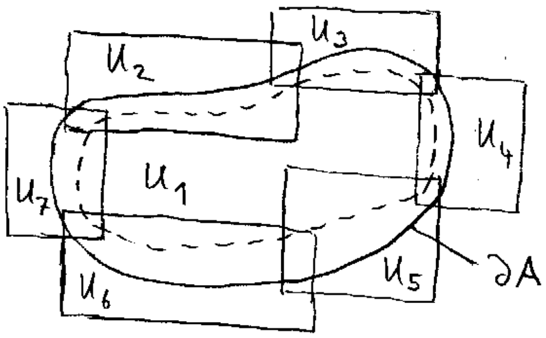
Hieraus folgt die Behauptung des Satzes. ∎

Beweis des Gaußschen Integralsatzes: Weil A eine kompakte Menge mit glattem Rand ist, kann eine offene Überdeckung $\{U_1, \ldots, U_k\}$ von A gefunden werden mit folgender Eigenschaft:
1.) Entweder ist $U_i \subseteq A \setminus \partial A$,
oder
2.) Nach eventueller Umnumerierung der Koordinaten hat U_i die Gestalt

$$U_i = U' \times (\alpha, \beta) \,,$$

mit einer geeigneten offenen Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und einem geeigneten Intervall $I = (\alpha, \beta)$, und es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to (\alpha, \beta)$ mit

$$U_i \cap A = \{(x', x_n) \in U' \times (\alpha, \beta) \mid x_n \leq g(x')\} \ .$$



Natürlich hängen U', α, β, g von i ab. Nach dem vorangehenden Lemma kann man eine der Überdeckung $\{U_1, \ldots, U_k\}$ von A untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ mit $\alpha_i \in C_0^\infty(U_i)$ wählen. Es gilt dann

$$\int_A \operatorname{div} f(x) dx = \int_A \operatorname{div} [\sum_{i=1}^k \alpha_i(x) f(x)] dx = \sum_{i=1}^k \int_A \operatorname{div} [\alpha_i(x) f(x)] \, dx$$

und

$$\int_{\partial A} \nu(x) \cdot f(x) dS(x) = \sum_{i=1}^k \int_{\partial A} \nu(x) \cdot [\alpha_i(x) f(x)] dS(x) \,.$$

Also genügt es, den Gaußschen Satz für jede der Funktionen $\alpha_i f$ zu beweisen. Wegen

$$\operatorname{supp} \alpha_i f \subseteq U_i$$

ergibt sich der Satz für jede dieser Funktionen aus den ersten beiden Lemmata. ∎

Anwendungsbeispiel: Ein Körper A befinde sich in einer Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht c, deren Oberfläche mit der Ebene $x_3 = 0$ zusammenfalle. Der Druck im Punkt $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ist dann

$$-cx_3 \, .$$

Ist $x \in \partial A$, dann erzeugt dieser Druck in diesem Punkt die Kraft

$$-cx_3(-\nu(x)) = cx_3\nu(x)$$

pro Flächeneinheit. $\nu(x)$ ist die äußere Normale an ∂A im Punkt x. Für die gesamte Oberflächenkraft erhält man dann

$$K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \int\limits_{\partial A} cx_3\nu(x)dS(x) \, .$$

Durch komponentenweise Anwendung des Gaußschen Satzes erhält man

$$\begin{aligned} K_1 &= \int\limits_{\partial A} cx_3\nu_1(x)dS(x) = \int\limits_A c\tfrac{\partial}{\partial x_1}x_3dx = 0 \\ K_2 &= \int\limits_{\partial A} cx_3\nu_2(x)dS(x) = \int\limits_A c\tfrac{\partial}{\partial x_2}x_3dx = 0 \\ K_3 &= \int\limits_{\partial A} cx_3\nu_3(x)dS(x) = \int\limits_A c\tfrac{\partial}{\partial x_3}x_3dx = c\int\limits_A dx = c\mathrm{Vol}\,(A) \, . \end{aligned}$$

K ist also in Richtung der positiven x_3-Achse gerichtet, also erfährt A einen Auftrieb. Die Größe der Auftriebskraft ist

$$c\mathrm{Vol}\,(A) = \text{Gewicht der verdrängten Flüssigkeit} \, .$$

III c.) Greensche Formeln

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $A \subseteq U$ sei eine kompakte Menge mit glattem Rand, und für $x \in \partial A$ sei $\nu(x)$ die äußere Einheitsnormale an ∂A im Punkt x.

Definition: Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Dann definiert man die Normalableitung von f auf ∂A durch

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) := f'(x)\nu = \nu(x) \cdot \operatorname{grad} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \nu_i(x) \, .$$

(Die Normalableitung von f ist die Richtungsableitung von f in Richtung von ν.)
Ist $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, dann definiert man die Funktion

$$\triangle f : U \to \mathbb{R}$$

durch

$$\triangle f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) \, .$$

$\triangle$ heißt Laplace-Operator.

Satz: Seien $f, g \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann gilt
1. **Erste Greensche Formel:**

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial A} f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) dS(x) &= \int\limits_{A} [\operatorname{grad} f(x) \cdot \operatorname{grad} g(x) + f(x) \triangle g(x)] dx \\ &= \int\limits_{A} (\nabla f \cdot \nabla g + f \triangle g) dx \end{aligned}$$

mit $\nabla f = \operatorname{grad} f$.
2. **Zweite Greensche Formel:**

$$\int\limits_{\partial A} [f(x) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x) - g(x) \frac{\partial f}{\partial |}(x)] dS(x) =$$

$$= \int\limits_{A} [f(x) \triangle g(x) - g(x) \triangle f(x)] dx = \int\limits_{A} (f \triangle g - g \triangle f) dx \, .$$

Beweis: Zum Beweis der ersten Greenschen Formel wende den Gaußschen Integralsatz auf die stetig differenzierbare Funktion

$$f \operatorname{grad} g : U \to \mathbb{R}^n$$

an. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} f(x)\frac{\partial g}{\partial \nu}(x)dS(x) &= \int_{\partial A} \nu(x)\cdot(f\,\mathrm{grad}\,g)(x)dS(x)\\ &= \int_A \mathrm{div}\,(f\,\mathrm{grad}\,g)(x)dx = \int_A (\mathrm{grad}\,f\cdot\mathrm{grad}\,g + f\triangle g)dx\,.\end{aligned}$$

Für den Beweis der zweiten Greenschen Formel benützt man die erste Greensche Formel: Danach gilt:

$$\begin{aligned}&\int_{\partial A}[f(x)\frac{\partial g}{\partial \nu}(x) - g(x)\frac{\partial f}{\partial \nu}(x)]dS(x)\\ &= \int_A (\nabla f\cdot\nabla g + f\triangle g)dx - \int_A(\nabla f\cdot\nabla g + g\triangle f)dx\\ &= \int_A (f\triangle g - g\triangle f)dx\,.\end{aligned}$$

■

III d.) Der Stokesche Integralsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und sei $A \subseteq U$ eine kompakte Menge mit glattem Rand. Dann ist der Rand ∂A eine stetig differenzierbare Kurve.

Sei $g : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Der Gaußsche Satz lautet nun

$$\int_A \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x)\right)dx = \int_{\partial A}(\nu_1(x)g_1(x) + \nu_2(x)g_2(x))ds(x)$$

mit dem äußeren Normalenvektor $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x))$. Ist $f : U \to \mathbb{R}^2$ eine andere stetig differenzierbare Funktion und wählt man für g im Gaußschen Satz die Funktion

$$g(x) := \begin{pmatrix} f_2(x)\\ -f_1(x)\end{pmatrix},$$

dann erhält man

$$\begin{aligned}\int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\right)dx &= \int_{\partial A}(\nu_1(x)f_2(x) - \nu_2(x)f_1(x))ds(x)\\ &= \int_{\partial A}\tau(x)\cdot f(x)ds(x)\,,\end{aligned}$$

mit

$$\tau(x) = \begin{pmatrix} -\nu_2(x)\\ \nu_1(x)\end{pmatrix}.$$

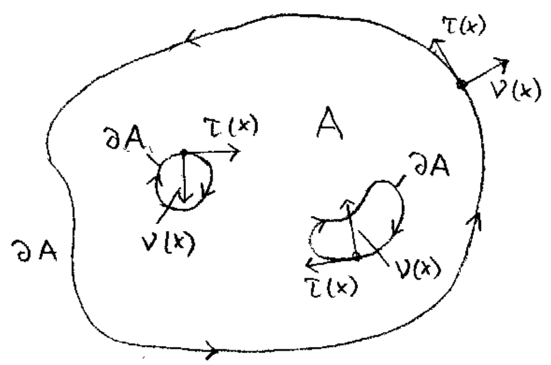
$\tau(x)$ ist ein Einheitsvektor, der senkrecht auf dem Normalenvektor $\nu(x)$ steht, also ist $\tau(x)$ ein Einheitstangentenvektor an ∂A im Punkt $x \in \partial A$, und zwar derjenige, den man aus $\nu(x)$ durch Drehung um 90^o im mathematisch positiven Sinn erhält. Für differenzierbares $f : U \to \mathbb{R}^2$ definiert man die **Rotation** von f durch

$$\operatorname{rot} f(x) := \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) .$$

Hiermit lautet die obenstehende Formel

$$\int\limits_A \operatorname{rot} f(x) dx = \int\limits_{\partial A} \tau(x) \cdot f(x) ds(x) .$$

Diese Formel heißt **Stokescher Satz in der Ebene**. Man beachte, daß A nicht als zusammenhängend oder einfach zusammenhängend vorausgesetzt wurde:



Man kann die Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ mit einer ebenen Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ identifizieren und das Integral über A im Stokeschen Satz mit dem Flächenintegral über diese Untermannigfaltigkeit. Diese Interpretation legt die Vermutung nahe, daß diese Formel verallgemeinert werden kann und der Stokesche Satz nicht nur für ebene Untermannigfaltigkeiten, sondern für allgemeinere 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$ gilt. In der Tat gilt der Stokesche Satz für orientierbare Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$. Bevor ich den allgemeinen Satz formuliere, beweise ich in einem ersten Schritt den Stokeschen Satz für Untermannigfaltigkeiten, die sich als Graph einer Funktion darstellen lassen. Hierzu benötige ich einige Vorbereitungen:

Definition: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Die Funktion

$$\operatorname{rot} f : U \to \mathbb{R}^3$$

sei definiert durch

$$\operatorname{rot} f(x) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Man bezeichnet $\operatorname{rot} f$ als **Rotation** der Funktion f.

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und sei $\varphi : V \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann ist $\Phi : V \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Parametrisierung eines zweidimensionalen Flächenstückes M im $\mathbb{R}^3$. Für $x \in M$ sei $v = \Phi^{-1}(x) = (x_1, x_2)$ und

$$n(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} \varphi(v)|^2}} \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial}{\partial x_1}\varphi(v) \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_2}\varphi(v) \\ 1 \end{pmatrix}$$

der nach oben weisende Einheitsnormalenvektor an M im Punkt x.

Stokescher Satz für das Flächenstück M = graph(Φ): Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge mit $M \subseteq U$ und sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $A \subseteq V$ eine kompakte Menge mit glattem Rand. Für das Flächenstück $B = \Phi(A) \subseteq M$ gilt dann

$$\int_B n(x) \cdot \operatorname{rot} f(x) dS(x) = \int_{\partial B} \tau(x) \cdot f(x) ds(x)\,,$$

wobei ∂B den Rand von B als Teilmenge von M bezeichne, also $\partial B = \Phi(\partial A)$, und wobei $\tau(x) = n(x) \times \nu(x)$ ein Tangenteneinheitsvektor an ∂B ist. $\nu(x) \in T_x(M)$ ist die aus der Fläche B herausweisende Einheitsnormale an ∂B im Punkt $x \in \partial B$. Der Vektor $\nu(x)$ ist also ein Tangentenvektor an M im Punkt x.

Beweis: Der Beweis ergibt sich aus dem Stokeschen Satz in der Ebene. Für $x \in A$ sind

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

Tangentenvektoren an M im Punkt $\Phi(x)$. Man definiere eine stetig differenzierbare Funktion $g : V \to \mathbb{R}^2$ durch

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\Phi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi(x) \\ f(\Phi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\Phi(x) \end{pmatrix} .$$

Für g lautet der Stokesche Satz in der Ebene

$$\int_A (\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x))dx = \int_{\partial A} t(x) \cdot g(x) ds(x) . \qquad (*)$$

Hierbei ist $t(x) \in \mathbb{R}^2$ ein Einheitstangentenvektor an ∂A. Den Integranden auf der linken Seite forme man folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}[(f \circ \Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}] - \frac{\partial}{\partial x_2}[(f \circ \Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}] \\
&= (f' \circ \Phi)\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + (f \circ \Phi) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} - (f' \circ \Phi)\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - (f \circ \Phi)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_1} \\
&= (f' \circ \Phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{pmatrix} - (f' \circ \Phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\
&= - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi \\ -\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1 + |\operatorname{grad} \varphi|^2}\, (\operatorname{rot} f)(\Phi(x)) \cdot n(\Phi(x)) .
\end{aligned}$$

Also gilt für die linke Seite von $(*)$ nach Definition des Flächenintegrals über B

$$\begin{aligned}
\int_A (\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x))dx &= \int_A n(\Phi(x)) \cdot (\operatorname{rot} f)(\Phi(x)) \sqrt{1 + |\operatorname{grad} \varphi(x)|^2} dx \\
&= \int_B n(y) \cdot \operatorname{rot} f(y) ds(y) .
\end{aligned} \qquad (**)$$

Umformung des Integranden auf der rechten Seite von $(*)$ ergibt

$$\begin{aligned} t(x) \cdot g(x) &= \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f \circ \Phi) \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} \\ (f \circ \Phi) \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ &= (f \circ \Phi) \cdot [(t_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi) + (t_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi)] = (f \circ \Phi) \cdot \Phi' t \,. \end{aligned}$$

$\Phi'(x)t = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(x)$ ist die Richtungsableitung von Φ in Richtung des Tangentenvektors $t(x)$ an ∂A, also ist $\Phi'(x)t(x)$ ein Tangentenvektor an ∂B im Punkt $\Phi(x) \in \partial B$. Sei

$$\tau(\Phi(x)) := \frac{\Phi'(x)t(x)}{|\Phi'(x)t(x)|} \,.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} t(x) \cdot g(x) ds(x) = \int_{\partial A} (f \cdot \tau) \circ \Phi(x) \mid \Phi'(x)t(x) \mid ds(x) \\ = \int_{\partial B} f(y) \cdot \tau(y) ds(y) \,, \end{aligned}$$

nach Definition eines Kurvenintegrales. Der Stokesche Satz folgt aus dieser Formel und aus den Gleichungen $(*)$ und $(**)$. Der Beweis, daß $\tau(x)$ die im Satz angegebene Orientierung hat, wird dem Leser überlassen. ■

Der allgemeine Satz von Stokes gilt für orientierbare Untermannigfaltigkeiten. Diese sind folgendermaßen definiert:

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Unter einem Einheitsnormalenfeld n von M versteht man eine stetige Abbildung

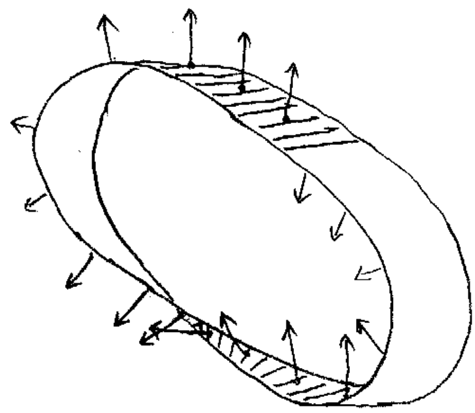
$$n : M \to \mathbb{R}^3$$

mit der Eigenschaft, daß für jedes $a \in M$ der Vektor $n(a)$ ein Einheitsnormalenvektor von M in a ist.

Definition: Eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^3$ heißt orientierbar, wenn ein Einheitsnormalenfeld auf M existiert.

Beispiel: Die Einheitssphäre $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ ist orientierbar. Ein Einheitsnormalenfeld ist $n(a) = \frac{a}{|a|}$, $a \in M$.

Dagegen ist das Möbiusband nicht orientierbar:



Satz von Stokes für Untermannigfaltigkeiten: Sei M eine 2-dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, und sei $n : M \to \mathbb{R}^3$ ein Einheitsnormalenfeld. Sei $B \subseteq M$ eine kompakte Menge mit glattem Rand (d. h. ∂B sei eine differenzierbare Kurve.) Für $x \in \partial B$ sei $\nu(x) \in T_x M$ der aus B hinausweisende Einheitsnormalenvektor. Außerdem sei

$$\tau(x) = n(x) \times \nu(x) \quad x \in \partial B\,.$$

$\tau(x)$ ist ein Einheitstangentenvektor an ∂B. Schließlich seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge mit $B \subseteq U$ und $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\int_B n(x) \cdot \operatorname{rot} f(x) dS(x) = \int_{\partial B} \tau(x) \cdot f(x) ds(x)\,.$$

Beweisidee: Es sei $\{V_j\}_{j=1,\dots,m}$ eine Überdeckung von M durch endlich viele Karten. Man zerlege B in Teilmengen $\{B_j\}_{j=1,\dots,m}$ mit

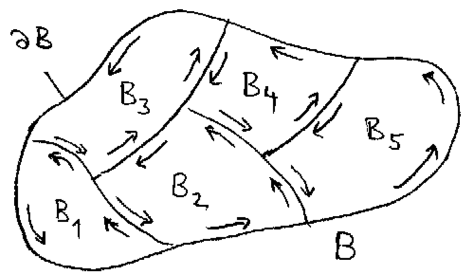
$$B_j \subseteq V_j\,, \quad B_i \cap B_j = \emptyset\,,\ i \neq j\,, \quad B = \bigcup_{j=1}^m B_j\,.$$

Nach dem Vorangehenden gilt dann

$$\int_B n(x) \cdot \operatorname{rot} f(x) dS(x) = \sum_{j=1}^m \int_{B_j} n(x) \cdot \operatorname{rot} f(x) dS(x)$$

$$= \sum_{j=1}^m \int_{\partial B_j} \tau(x) \cdot f(x) ds(x) = \int_{\partial B} \tau(x) \cdot f(x) ds(x)\,,$$

da sich Kurvenintegrale über im Innern von B gelegene Randkurven gegenseitig aufheben. Dies ist allerdings nur richtig, weil M orientierbar ist. ∎



Beispiel: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet im $\mathbb{R}^3$. In Ω existiere ein elektrisches Feld E, das vom Ort $x \in \Omega$ und der Zeit $t \in \mathbb{R}$ abhängt. Also gilt

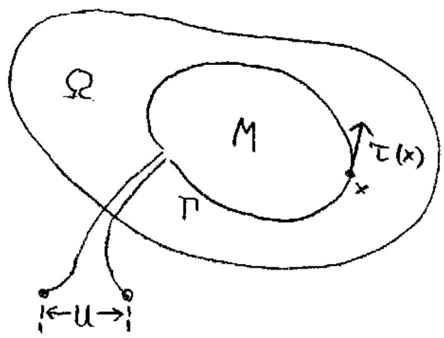
$$E : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 .$$

Ebenso sei

$$B : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

die magnetische Induktion.

Sei $\Gamma \subseteq \Omega$ eine Drahtschleife. Diese Drahtschleife berande eine Fläche $M \subseteq \Omega$:



In Γ wird durch die Änderung von B eine elektrische Spannung U induziert. Diese Spannung kann folgendermaßen berechnet werden: Es gilt für alle $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

$$\mathrm{rot}_x E(x,t) = -\frac{\partial}{\partial t} B(x,t) .$$

Dies ist eine der Maxwellschen Gleichungen. Also folgt aus dem Stokeschen Satz mit einem Einheitsnormalenfeld $n : M \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_\Gamma \tau(x) \cdot E(x,t) ds(x) = \int_M n(x) \cdot \mathrm{rot}_x E(x,t) dS(x) \\ &= -\int_M n(x) \cdot \frac{\partial}{\partial t} B(x,t) dS(x) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_M n(x) \cdot B(x,t) dS(x) . \end{aligned}$$

Das Integral $\int_M n(x) \cdot B(x,t) dS(x)$ heißt **Fluß der magnetischen Induktion durch** M.

Somit ist $U(t)$ gleich der negativen zeitlichen Änderung des Flusses von B durch M.