Vorlesungsskript

Elliptische partielle Differentialgleichungen

Hans–Dieter Alber

Inhaltsverzeichnis

4. Innere Regularität.

4.1 Schwache Lösung von quasilinearen elliptischen Gleichungen. 4.2 Gleichmäßige Elliptizität von quasilinearen Differentialoperatoren. 4.4 Eindeutigkeit der Lösung. 4.5 Innere Regularität. 4.9 Kettenregel. 4.10 Äquivalenz von starker und schwacher Formulierung bei H_2–Lösungen. 4.11 Schwache Lösungen sind starke Lösungen. 4.13 Höhere Regularität der Lösungen linearer elliptischer partieller Differentialgleichungen.

5. Regularität am Rand, Maximumprinzip.

5.1 Mengen der Klasse C_k. 5.2 Regularität der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen am Rand. 5.3 Maximimprinzip für schwache Lösungen elliptischer Gleichungen. 5.3.2 Schwaches Maximumprinzip für schwache Lösungen von Gleichungen in Divergenzform.

A Anhang: Schwache Randwerte, Rellichscher Auswahlsatz.

A.1 Lipschitzstetige Funktionen. A.2 Lipschitzrand. A.3 Randintegral. A.4 Spuroperator. A.5 Dichtheit von $\overset{\circ}{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ in $H_1^p(\Omega)$. A.7 Äußere Normale. A.8 Gaußscher Satz. A.10 Randwerte der Funktionen aus $H_1^p(\Omega)$. A.11 Rellichscher Auswahlsatz.

1 Einführung, Beispiele, Inhalt der Vorlesung

1.1 Definition elliptischer partieller Differentialgleichungen, Randwertprobleme. In dieser Vorlesung werde ich mich mit elliptischen partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung beschäftigen. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Für $1 \leq i, j \leq n$ seien

$$a_{ij} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

und

$$b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

gegebene Funktionen. Ein Ausdruck der Form

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + b\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) = 0 \tag{1.1}$$

heißt quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die unbekannte Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Hierbei seien $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ und

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} u(x) \right) .$$

Jede Funktion, die die Gleichung (1.1) erfüllt, heißt Lösung der partiellen Differentialgleichung. Die Funktionen a_{ij} und b heißen Koeffizientenfunktionen der partiellen Differentialgleichung.

Die partielle Differentialgleichung (1.1) heißt quasilinear, weil die Gleichung in den höchsten Ableitungen, also den zweiten Ableitungen der Lösung u , linear ist, oder anders ausgedrückt, weil die Koeffizienten a_{ij} und b nicht explizit von den höchsten Ableitungen der Lösung u abhängen. Die partielle Differentialgleichung heißt linear, wenn sie linear in u und in allen Ableitungen von u ist, also wenn sie die Form

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + a(x) u(x) = f(x) \tag{1.2}$$

hat mit gegebenen Koeffizientenfunktionen

$$a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R},\, a_i : \Omega \to \mathbb{R},\, a : \Omega \to \mathbb{R} \,,$$

und der gegebenen “rechten Seite”

$$f:\Omega\to\mathbb{R}\,.$$

Natürlich ist (1.2) ein Spezialfall von (1.1). Man nennt

$$Lu(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u(x)+b\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big)$$

Differentialoperator. In der Regel nimmt man an, daß für die Koeffizienten in diesem Differentialoperator $a_{ij}=a_{ji}$ gilt. Dann ist die Koeffizientenmatrix

$$\Big(a_{ij}(x,u,p)\Big)_{i,j=1}^{n}$$

für alle $(x,u,p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ symmetrisch und hat nur reelle Eigenwerte. Sei eine Funktion $u:\Omega\to\mathbb{R}$ gegeben. Der Differentialoperator L heißt elliptisch im Punkt $x\in\Omega$ zur Funktion u, wenn in diesem Punkt x die Koeffizientenmatrix $(a_{ij}(x,u(x),\nabla u(x)))_{i,j=1,\dots,n}$ positiv definit ist, das heißt wenn

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big)\xi_i\xi_j>0$$

ist für alle $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ mit $\xi\neq 0$. Für den kleinsten Eigenwert $\lambda(x,u(x),\nabla u(x))$ und den größten Eigenwert $\Lambda(x,u(x),\nabla u(x))$ der Koeffizientenmatrix gilt dann

$$\begin{aligned}0<\lambda\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big)|\xi|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big)\xi_i\xi_j\\ &\leq \Lambda\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big)|\xi|^2\end{aligned}$$

falls $\xi\neq 0$. Der Operator L heißt elliptisch in Ω, wenn

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,u,p)\xi_i\xi_j>0$$

gilt für alle $\xi\neq 0$ und alle $(x,u,p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

Die Differentialgleichung (1.1) kann man in der kurzen Form $Lu(x)=0$ schreiben. Wenn u eine Lösung dieser Differentialgleichung ist, zu der der

Differentialoperator L elliptisch ist im Punkt x, dann sagt man, die Differentialgleichung sei im Punkt x zur Lösung u von elliptischem Typ. Der Typ einer Differentialgleichung kann also sowohl von der Lösung u als auch vom Ort x abhängen. Wenn aber L ein elliptischer Differentialoperator in Ω ist, dann ist die Differentialgleichung $Lu = 0$ in jedem Punkt $x \in \Omega$ und zu jeder Lösung elliptisch. Dann sagt man, die Differentialgleichung sei von elliptischem Typ.

Das besondere Charakteristikum von elliptischen Differentialgleichungen – und dies rechtfertigt die angegebene Klassifizierung – ist, daß unter geringfügigen technischen Zusatzbedingungen ihre Lösungen immer die höchstmögliche Differenzierbarkeitsordnung haben, die die Koeffizienten zulassen. Damit ist folgendes gemeint: Wenn in der elliptischen Gleichung (1.2) die Koeffizienten a_{ij}, a_i, a und f reell analytisch sind, dann ist auch jede Lösung reell analytisch. Ebenso folgt, daß wenn f und alle Koeffizienten in (1.2) beliebig oft differenzierbar sind, dann auch jede Lösung u. Wenn jedoch alle Koeffizienten a_{ij}, a_i und a stetig sind aber f nicht stetig ist, dann kann die Lösung u nicht zweimal stetig differenzierbar sein, weil sonst die linke Seite von (1.2) stetig wäre, nicht aber die rechte Seite. Diese Regularitätseigenschaft der Lösungen elliptischer Gleichungen beeinflußt alle Teile der Theorie dieser Gleichungen.

Die Theorie der elliptischen Gleichungen ist heutzutage sehr weit entwickelt. Es hat sich herausgestellt, daß insbesondere die Theorie der Sobolevräume in Verbindung mit vielen Resultaten der Funktionalanalysis ein sehr geeignetes Hilfsmittel zum Studium elliptischer partieller Differentialgleichungen ist. Auch mit der Variationsrechnung ist die Theorie der elliptischen Gleichungen eng verbunden.

Um die Lösung zu einer partiellen Differentialgleichung in einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eindeutig zu machen, braucht man in der Regel noch Bedingungen für die Lösung, die auf dem ganzen Rand $\partial\Omega$ von Ω oder auf Teilen davon erfüllt sein müssen. Natürlich kann man nicht beliebige Bedingungen am Rande stellen, weil es nicht zu jeder Bedingung am Rand auch eine Lösung der partiellen Differentialgleichung zu geben braucht, die diese Bedingung erfüllt. Was für Bedingungen man am Rand stellen kann, hängt also von der gegebenen partiellen Differentialgleichung ab. Es passen nicht alle Bedingungen zur partiellen Differentialgleichung. Ein weiteres Charakteristikum von elliptischen Gleichungen ist nun, daß die zu diesem Gleichungstyp passenden Bedingungen diejenigen sind, die auf dem ganzen Rand gestellt werden. Insbesondere für elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung benötigt man zur eindeutigen Lösung eine einzige Bedingung für die Werte der Lösung und ihrer ersten Ableitungen, die am gesamten Rand gestellt sein muß.

Ein Problem, bei dem man die Lösung einer partiellen Differentialgleichung in einer offenen Menge sucht, und bei dem die Lösung am gesamten Rand gestellte Bedingungen erfüllen soll, heißt Randwertproblem, im Gegensatz etwa zum Anfangswertproblem, bei dem Bedingungen nur auf Teilen des Randes gestellt werden. Zu elliptischen partiellen Differentialgleichungen gehören also Randwertprobleme.

Zwei Arten von Randwertproblemen spielen dabei eine besonders wichtige Rolle, das **Dirichletsche** und das **Neumannsche** Randwertproblem. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit Rand $\partial\Omega$ und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Gesucht ist eine Lösung $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ der partiellen Differentialgleichung (1.1). Beim Dirichletschen Randwertproblem ist u so gesucht, daß für alle $x \in \partial\Omega$ gilt

$$u(x) = g(x)\,.$$

Beim Neumannschen Randwertproblem zur Gleichung (1.1) verlangt man dagegeben, daß für alle $x \in \partial\Omega$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \nu_i(x) a_{ij}\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) = g(x)$$

ist, wobei $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ den Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$ im Punkt $x \in \partial\Omega$ bedeute, der aus Ω herauszeigt.

1.2 Beispiele. Ich will nun eine Reihe von Beispielen besprechen für elliptische partielle Differentialgleichungen und für Probleme, in denen solche Gleichungen auftreten.

1.2.1 Laplacegleichung und Poissongleichung. Das Hauptbeispiel für eine elliptische partielle Differentialgleichung ist die Gleichung

$$\Delta u(x) = f(x)\,, \tag{1.3}$$

wobei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist und

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

den Laplaceoperator bezeichnet. Mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

gilt

$$\Delta u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) .$$

Die Koeffizientenmatrix ist positiv definit wegen

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = |\xi|^2 ,$$

also ist Δ ein linearer elliptischer Operator mit konstanten Koeffizienten. Die Gleichung (1.3) heißt Poissongleichung. Wenn $f = 0$ ist heißt sie Laplace– oder Potentialgleichung. Eine Funktion, die die Laplacegleichung löst, nennt man auch harmonische Funktion. Die fundamentalen Eigenschaften von elliptischen Gleichungen und ihren Lösungen kann man alle an der Poissongleichung studieren. Sie ist die erste elliptische Gleichung, zu der im vergangenen Jahrhundert Randwertprobleme gelöst wurden.

Der Name Potentialgleichung stammt daher, daß das Newtonsche Gravitationspotential und das elektrostatische Potential diese Gleichung erfüllen: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge, die einen elektrisch geladenen Körper darstelle. Sei $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{B}$ das Äußere von B. Das von diesem geladenen Körper in seinem Äußeren erzeugte elektrostatische Potential $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ erhält man als Lösung des Dirichletschen Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 , && x \in \Omega \\ u(x) &= u_0(x) , && x \in \partial\Omega , \\ u(x) &\to 0 && \text{für } |x| \to \infty , \end{aligned} \tag{1.4}$$

wobei $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ die gegebene elektrische Spannung im Punkt x der Oberfläche $\partial B = \partial\Omega$ von B ist. Die Bedingung (1.4) heißt Ausstrahlungsbedingung. Sie ist nötig, um die Lösung des Randwertproblems eindeutig zu machen. Man kann sie als Randbedingung im Unendlichen auffassen. Da das Komplement von Ω beschränkt ist, nennt man dieses Problem ein Außenraumproblem.

Wenn B den Hohlraum im Innern einer geladenen Fläche ∂B darstellt, erhält man das Potential in B in entsprechender Weise als Lösung des Dirichletschen Innenraumproblems

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0\,, & x \in B\\ u(x) &= u_0(x)\,, & x \in \partial B\,.\end{aligned}$$

Seien $B_1, \ldots, B_m$ beschränkte, paarweise disjunkte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, die m Körper repräsentieren. Die Anziehungskraft, die diese Körper gegenseitig aufeinander ausüben, erhält man folgendermaßen:

Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei $\varrho(x) \geq 0$ die Massendichte im Punkt x. Da außerhalb von $\bigcup_{i=1}^m B_i$ keine Massen vorhanden sein sollen, gilt

$$\varrho(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B_i\,.$$

Sei nun $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Lösung von

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= -4\pi G \varrho(x)\,, & x \in \mathbb{R}^3\\ u(x) &\to 0 & \text{für } |x| \to \infty\,,\end{aligned}$$

mit der Gravitationskonstanten $G = 6.672 \cdot 10^{-8}\text{cm}^3\ \text{g}^{-1}\ \text{sec}^{-2}$. u ist also die Lösung eines "Ganzraumproblems" für die Poissongleichung und heißt Newtonsches Gravitationspotential. Die Gravitationskraft K_j, die auf den Körper B_j wirkt, erhält man aus

$$K_j = \int_{B_j} \nabla u(x) \varrho(x) dx\,.$$

Wenn $B_j = \{y_j\}$ Massenpunkte mit den Massen M_j sind, ergibt sich für das Newtonsche Gravitationspotential

$$u(x) = G \frac{M_1}{|x - y_1|} + \ldots + G \frac{M_m}{|x - y_m|}\,.$$

Auch in der Funktionentheorie spielt die Potentialgleichung eine Rolle. Denn sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$f(x) = f(x + iy) = g(x, y) + ih(x, y)\,.$$

Hierbei seien x und y der Real– und Imaginärteil von z und g sowie h der Real– und und Imaginärteil von f .Dann gelten die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$g_x = h_y\,,\; g_y = -h_x\,.$$

Differenziert man die erste Gleichung nach x und die zweite nach y , dann folgt

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} = h_{yx} - h_{xy} = 0$$

und ebenso

$$\Delta h = h_{xx} + h_{yy} = -g_{yx} + g_{xy} = 0\,.$$

Also erfüllen der Real– und Imaginärteil von f die Potentialgleichung. Die Funktionentheorie kann man also als Teilgebiet der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen auffassen.

Die Neumannsche Randbegingung zu Δ nimmt wegen $a_{ij} = \delta_{ij}$ die Form

$$\frac{\partial}{\partial\nu}u(x) = \nu(x) \cdot \nabla u(x) = g(x)$$

an. In diesem Fall wird die Normalableitung auf dem Rand vorgeschrieben.

1.2.2 Helmholtzsche Schwingungsgleichung. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $Z = \Omega \times \mathbb{R}_0^+$ ein "Zylinder" in $\mathbb{R}^{n+1}$. Sei $u : \overline{Z} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) = \Delta u(x, t)\,,\; (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+$$

die entweder die Dirichletsche Randbedingung

$$u(x, t) = 0\,, (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+$$

oder die Neumannsche Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u(x,t) = 0\,,\ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+$$

erfülle.

Viele Wellenausbreitungsvorgänge können durch dieses mathematische Modell beschrieben werden. Zum Beispiel sei für $n = 3$ die Menge Ω ein mit einem Gas oder einer Flüssigkeit gefülltes Gebiet des Raumes. Wenn dann u die Wellengleichung löst, beschreibt $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ den Druck und $\nabla_x u(x,t)$ die Strömungsgeschwindigkeit am Ort x zur Zeit t einer Schallwelle mit kleiner Amplitude. Die Neumannsche Randbedingung muß man dabei verwenden, wenn Ω eine "schallharte" und die Dirichletsche Randbedingung, wenn Ω eine "schallweiche" Berandung hat.

Die Wellengleichung ist allerdings eine hyperbolische Gleichung. Ich nehme nun aber an, es läge ein zeitlich periodischer, "eingeschwungener" Wellenausbreitungsvorgang der Form

$$u(x,t) = \cos(kt)v(x)$$

vor mit einer Funktion $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Hierbei ist $k \geq 0$ die Frequenz und $v(x)$ die Amplitute der Schwingung am Ort $x \in \Omega$. Ich setze diesen Ausdruck in die Wellengleichung ein und erhalte, daß

$$\Big(\Delta v(x) + k^2 v(x)\Big) \cos(kt) = 0\,,\ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+$$

sowie

$$\cos(kt)v(x) = 0\,,\ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+$$

oder

$$\cos(kt)\frac{\partial}{\partial \nu}v(x) = 0\,,\ (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+$$

gelten muß. Dies kann nur sein, wenn v Lösung von

$$\Delta v(x) + k^2 v(x) = 0\,,\ x \in \Omega \tag{1.5}$$

zur Dirichletschen Randbedingung

$$v(x) = 0\,,\ x \in \partial\Omega \tag{1.6}$$

oder zur Neumannschen Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial \nu} v(x) = 0 \, , \; x \in \partial\Omega \tag{1.7}$$

ist. Die partielle Differentialgleichung (1.5) heißt Helmholtzsche Schwingungsgleichung. Da sie denselben Hauptteil hat wie die Poissongleichung, ist sie elliptisch.

Sowohl die partielle Differentialgleichung (1.5) als auch die beiden Randbedingungen (1.6) und (1.7) sind homogen. Beide Randwertprobleme haben daher immer $v \equiv 0$ als Lösung. Nicht verschwindende Lösungen können also nur existieren, wenn die Lösung nicht eindeutig ist. Es wird sich zeigen, daß nur für gewisse Werte von k^2 die Lösung nicht eindeutig ist. Diese Werte von k^2 heißen Eigenwerte des Randwertproblems (1.5), (1.6) oder des Randwertproblems (1.5), (1.7) und die zugehörigen nicht verschwindenden Lösungen Eigenlösungen. Man spricht auch von Eigenschwingungen. Diese Resultate gehören zur Spektraltheorie für lineare partielle Differentialoperatoren.

1.2.3 Wärmeausbreitung. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Körper. Innerhalb des Körpers soll Wärme produziert werden. Dies geschieht zum Beispiel in einem von elektrischem Strom durchflossenen metallenen Körper, oder bei der Deformation eines Festkörpers durch innere Reibung. Über den Rand des Körpers soll Wärme zu– oder abgeführt werden.

Ich nehme an, daß die Wirkung der Wärmequellen zeitlich konstant ist, und daß sich der Körper zeitlich im thermischen Gleichgewicht befindet, das heißt die Temperatur innerhalb des Körpers darf räumlich variieren, soll aber an jedem Punkt des Körpers zeitlich konstant sein.

Sei $f(x)$ die im Punkt $x \in \Omega$ in einer Zeit– und Volumeneinheit produzierte Wärme, oder genauer, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ die spezifische Wärmeerzeugung. $u(x) \in \mathbb{R}$ sei die Temperatur im Punkt $x \in \Omega$ und $q(x) = (q_1(x), q_2(x), q_3(x)) \in \mathbb{R}^3$ der Wärmefluß. Wenn die Temperatur zeitlich konstant ist, ist auch die in jedem Teilvolumen V von Ω enthaltene Wärme zeitlich konstant. Also muß die in V produzierte Wärme $\int_V f(x)dx$ der aus V über den Rand abfließenden Wärme $\int_{\partial V} \nu(x) \cdot q(x)\, dS(x)$ gleich sein:

$$\int_{\partial V} \nu(x) \cdot q(x)\, dS(x) = \int_V f(x)dx \, . \tag{1.8}$$

Das Integral auf der linken Seite kann man mit dem Gaußschen Satz in ein Volumenintegral transformieren. Es folgt

$$\int_V \Big[\operatorname{div} q(x) - f(x)\Big] dx = 0$$

mit $\operatorname{div} q(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} q_i(x_1, x_2, x_3)$. Diese Gleichung muß für jede Teilmenge V von Ω gelten. Dies kann nur sein, wenn der Integrand identisch verschwindet, also folgt

$$\operatorname{div} q(x) = f(x)\,,\ x \in \Omega\,. \tag{1.9}$$

Wenn f bekannt ist, ist dies eine Gleichung für die drei unbekannten Komponenten des Wärmeflusses. Weil man nicht erwarten kann, aus einer Gleichung drei unbekannte Funktionen bestimmen zu können, sind weitere Gleichungen nötig.

Um diese Gleichungen zu erhalten, nimmt man an, daß q durch den Temperaturgradienten $\nabla u(x)$ bestimmt ist:

$$q(x) = Q\Big(x, \nabla u(x)\Big)\,, \tag{1.10}$$

mit einer Funktion $Q = \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Die Funktion Q hängt von den Materialeigenschaften des Körpers ab und muß durch Experimente bestimmt werden. Aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik folgt aber, daß für jedes Material die zugehörige Funktion Q die Ungleichung

$$\nabla u(x) \cdot Q\Big(x, \nabla u(x)\Big) \leq 0 \tag{1.11}$$

erfüllen muß für jeden möglichen Wert des Temperaturgradienten $\nabla u(x)$. Dies bedeutet, daß Wärme nicht von kälteren Orten zu wärmeren Orten fließen kann. Häufig nimmt man an, daß das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz

$$q(x) = -k\nabla u(x)$$

gilt mit einer positiven Konstanten k. Setzt man (1.10) in (1.9) ein, erhält man eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Temperatur u , die **Divergenzform** hat

$$\operatorname{div} Q\Big(x, \nabla u(x)\Big) = f(x)\,. \tag{1.12a}$$

Mit der Kettenregel kann man diese Gleichung nach Multiplikation mit -1 auch in der Form

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_i} Q_j\big(x, \nabla u(x)\big) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u(x) - \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} Q_j\right) \big(x, \nabla u(x)\big) = -f(x) \tag{1.12b}$$

schreiben, wobei $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_i} Q_j\big(x, \nabla u(x)\big) &= \frac{\partial}{\partial \xi_i} Q_j(x, \xi)_{|\xi = \nabla u(x)} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} Q_j\big(x, \nabla u(x)\big) &= \frac{\partial}{\partial x_j} Q_j(x, \xi)_{|\xi = \nabla u(x)} \end{aligned}$$

sei. Diese Gleichung hat die Form von (1.1) wenn man

$$a_{ij}\big(x, \nabla u(x)\big) = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} Q_j\big(x, \nabla u(x)\big)$$

und

$$b\big(x, \nabla u(x)\big) = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} Q_j\big(x, \nabla u(x)\big) + f(x)$$

setzt. Im Fall des Fourierschen Wärmeleitungsgesetzes erhält man wieder die Poissongleichung

$$\operatorname{div}\big(k \nabla u(x)\big) = k \Delta u(x) = -f(x)\,.$$

Ob die Gleichung (1.12) im allgemeinen Fall elliptisch ist, hängt von den Eigenschaften der Funktion Q ab. Die notwendigerweise erfüllte Bedingung (1.11) ist nicht ausreichend für die Elliptizität von (1.12). In der Regel erfüllt $Q^* = -Q$ aber die Gleichung

$$Q^*(x, 0) = 0\,,$$

weil bei verschwindendem Temperaturgradienten auch kein Wärmefluß auftritt, und die folgende Bedingung:

Für alle $x \in \Omega$ existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\big(Q^*(x, \xi) - Q^*(x, \eta)\big) \cdot (\xi - \eta) \geq c\,|\xi - \eta|^2\,. \tag{1.13}$$

Man prüft sofort nach, daß aus diesen beiden Eigenschaften von Q die Bedingung (1.11) folgt.

Ein Vektorfold Q^*, das (1.13) erfüllt, heißt koerzitiv. Es gilt nun: Wenn Q^* koerzitiv und differenzierbar ist, ist die Differentialgleichung (1.12) elliptisch.

Zum Beweis dieser Aussage sei

$$\begin{aligned} A(x,\xi) &= \Big(\frac{\partial}{\partial \xi_i} Q_j^*(x,\xi)\Big)_{i,j=1,2,3} = -\Big(\frac{\partial}{\partial \xi_i} Q_j(x,\xi)\Big)_{i,j=1,2,3} \\ &= \Big(a_{ij}(x,\xi)\Big)_{i,j=1,2,3} \end{aligned}$$

die Matrix der ersten partiellen Ableitungen von Q^*. Es muß gezeigt werden, daß diese Matrix positiv definit ist. Aus der Differenzierbarkeit folgt für $x \in \Omega$ sowie $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ und $t \in \mathbb{R}$

$$Q^*(x, \xi + t\eta) - Q^*(x,\xi) = A(x,\xi)t\eta + o(t)t, \quad t \to 0\,,$$

und somit ergibt sich aus der Koerzitivität von Q^* für $\eta \neq 0$

$$\begin{aligned} ct^2|\eta|^2 &\leq \Big[Q^*(x,\xi + t\eta) - Q^*(x,\xi)\Big] \cdot t\eta \\ &= t^2\Big[A(x,\xi)\eta + o(t)\Big] \cdot \eta\,, \end{aligned}$$

also

$$\eta A(x,\xi)\eta \geq c|\eta|^2 - \eta\, o(t)\,.$$

Für $t \to 0$ folgt hieraus

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x,\xi)\eta_i\eta_j = \eta A(x,\xi)\eta \geq c|\eta|^2\,.$$

Folglich ist $A(x,\xi)$ positiv definit und (1.12) elliptisch.

Die Dirichletrandbedingung zu (1.12) ist

$$u(x) = u_0(x)\,, x \in \partial\Omega\,.$$

Es wird also die Temperatur am Rand vorgeschrieben. Man kann auch die in Normalenrichtung durch den Rand fließende Wärmemenge vorschreiben:

$$\nu(x) \cdot Q\Big(x, \nabla u(x)\Big) = u_1(x)\,,\ x \in \partial\Omega\,.$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Neumannschen Randbedingung zur nichtlinearen Gleichung (1.12). Aus (1.12a) und dem Gaußschen Satz oder direkt aus (1.8) erhält man jedoch

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{\partial\Omega} \nu(x) \cdot Q\Big(x, \nabla u(x)\Big) dS_x = \int_{\partial\Omega} u_1(x) dS(x)\,.$$

Man kann also f und u_1 nicht unabhängig voneinander vorschreiben, vielmehr muß die in Ω erzeugte Wärmemenge gleich der durch den Rand abfließenden sein, was diese Gleichung ausdrückt.

1.2.4 Eulergleichung zu Variationsproblemen. Von großer Bedeutung sind auch elliptische Differentialoperatoren, die sich als Subdifferentiale konvexer Variationsfunktionale ergeben, oder einfacher ausgedrückt, elliptische Gleichungen die Eulergleichungen zu Variationsproblemen sind. Ich skizziere die Herleitung dieser Gleichungen ohne auf technische Einzelheiten einzugehen.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und

$$D = \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : u \in C_2(\overline{\Omega})\,, u_{|\partial\Omega} = u_0\}\,.$$

Weiterhin sei $F \in C_2(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Ich betrachte das durch

$$I(v) = \int_\Omega F\Big(x, v(x), \nabla v(x)\Big) dx$$

definierte Variationsfunktional $I : D \to \mathbb{R}$. Gesucht ist $u \in D$ mit

$$I(u) = \min_{v \in D} I(v)\,.$$

Die Untersuchung dieses Problems ist der Gegenstand der Variationsrechnung.

Ich nehme an, daß ein solches u existiert. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ und für jede Funktion $\varphi \in C_1(\overline{\Omega})$ mit $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$ ist dann $u + t\varphi \in D$, und die reelle Funktion

$t \mapsto I(u+t\varphi)$ hat ein Minimum für $t=0$. Also folgt für jedes solches φ

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} I(u+t\varphi)_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \int_\Omega F\Big(x, u(x)+t\varphi(x), \nabla\big(u(x)+t\varphi(x)\big)\Big) dx_{|t=0} \\
&= \int_\Omega \frac{d}{dt} F\Big(x, u(x)+t\varphi(x),\ \nabla u(x)+t\nabla\varphi(x)\Big)_{|t=0} dx \\
&= \int_\Omega \Big[F_u\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big)\varphi(x) + \nabla_\xi F\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big)\cdot\nabla\varphi(x)\Big] dx\,,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

mit

$$\begin{aligned}
F_u\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big) &= \frac{\partial}{\partial w} F\Big(x,w,\nabla u(x)\Big)\Big|_{w=u(x)} \\
\nabla_\xi F\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big) &= \nabla_\xi F\Big(x,u(x),\xi\Big)\Big|_{\xi=\nabla u(x)}.
\end{aligned}$$

Die für jedes $\varphi \in C_1(\overline{\Omega})$ mit $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$ gültige Gleichung (1.14) heißt Eulergleichung zum Variationsfunktional I in der schwachen Form.

Man wendet nun partielle Integration auf der rechten Seite von (1.14) an. Wegen $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$ treten dabei keine Randterme auf. Das Ergebnis ist

$$0 = \int_\Omega \Big(F_u\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big) - \operatorname{div}\Big[\nabla_\xi F\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big)\Big]\Big)\varphi(x)dx\,.$$

Weil diese Gleichung für alle $\varphi \in C_1(\overline{\Omega})$ mit $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$ gelten muß schließt man, daß

$$\operatorname{div} a\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big) - b\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big) = 0, x \in \Omega \tag{1.15}$$

gelten muß, wobei ich

$$\begin{aligned}
a(x,u,\xi) &= \Big(a_1(x,u,\xi),\ldots,a_n(x,u,\xi)\Big) = \nabla_\xi F(x,u,\xi) \in \mathbb{R}^n \\
b(x,u,\xi) &= F_u(x,u,\xi) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

gesetzt habe. Die Gleichung (1.15) heißt **Eulergleichung** zum Variationsfunktional I. Diese Gleichung hat Divergenzform. Mit der Kettenregel kann man sie in der Form

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} a_j\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u} a_j\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} a_j\right) \Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) - b\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) \;=\; 0$$

schreiben. Wegen $\frac{\partial}{\partial \xi_i} a_j(x,u,\xi) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} F(x,u,\xi)$ ist diese Gleichung elliptisch, genau dann wenn die Hessesche Matrix

$$\nabla_\xi^2 F(x,u,\xi)$$

positiv definit ist für alle $(x,u,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Daß die Hessesche Matrix positiv definit ist, ist etwas mehr vorausgesetzt als strikte Konvexität von $\xi \mapsto F(x,u,\xi)$.

Unsere Überlegungen zeigen, daß wenn ein Minimum $u \in D$ des Variationsfunktionals I gefunden werden kann, dann dieses Minimum Lösung des Dirichletschen Randwertproblems

$$\begin{aligned} \operatorname{div} a(x,u(x),\nabla u(x)) - b(x,u(x),\nabla u(x)) &= 0\,, \qquad & x \in \Omega \\ u(x) &= u_0(x)\,, \qquad & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

zur Eulergleichung des Variationsfunktionals ist. Die Lösung eines Randwertproblems zu einer quasilinearen partiellen Differentialgleichung ist damit auf die Bestimmung eines Minimum eines Funktionals zurückgeführt. In seiner Dissertation aus dem Jahr 1851 nannte Riemann dieses Prinzip zur Lösung eines Randwertproblems "Dirichletsches Prinzip". Die Schwierigkeiten, die beim Beweis der Existenz eines Minimums auftreten, waren Riemann allerdings nicht bewußt. Aus der Existenz eines Infimums des Variationsfunktionals hat er bereits auf die Existenz des Minimums geschlossen. Später hat Weierstraß auf diese Lücke in den Argumenten von Riemann hingewiesen, aber erst Hilbert bewies für viele Variationsfunktionale die Existenz von Minima mit den von ihm eingeführten "Hilbertraummethoden".

Als Beispiel nehme man an, daß $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet sei und daß der Graph der Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine Membran darstelle, die am Rand von

Ω so eingespannt ist, daß $u_{|\partial\Omega}$ mit der gegebenen Funktion $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ übereinstimmt. Also ist $u \in D$. Sei $I(u)$ die potentielle Energie der Membran. Die Membran wird dann eine solche Lage einnehmen, daß ihre potentielle Energie $I(u)$ unter allen möglichen anderen Lagen, die durch Graphen von Funktionen $v \in D$ dargestellt werden, minimal wird. Also muß $u \in D$ eine Lösung des Variationsproblems

$$I(u) = \min_{v \in D} I(v)$$

sein. Welche Form das Funktional I hat, hängt von den elastischen Eigenschaften der Membran ab. Nimmt man für die Membran einen linearen Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung an, dann ergibt sich für die potentielle Energie nach Normierung

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \,.$$

Die obenstehenden Überlegungen können angewandt werden mit $n = 2$ und $F(x, u, \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^2$. Es ist

$$a(x, u, \xi) = \nabla_\xi F(x, u, \xi) = \nabla_\xi \frac{1}{2}|\xi|^2 = \xi$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_i \partial\xi_j} F(x, u, \xi) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \,.$$

Als Eulergleichung erhält man also wieder die Laplacegleichung

$$\Delta u(x) = 0 \,,\; x \in \Omega$$

mit der Randbedingung

$$u(x) = u_0(x) \,, x \in \partial\Omega \,.$$

Dagegen wird bei einer Seifenhaut die potentielle Energie nur durch die konstante Oberflächenspannung erzeugt. Die potentielle Energie wird also proportional zur Oberfläche der Seifenhaut sein, und die zwischen einem Drahtbügel, der durch den Graphen von $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ dargestellt werde, ausgespannte Seifenhaut wird diejenige Lage einnehmen, bei der ihre Oberfläche minimal wird. Die Oberfläche der durch den Graphen von $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ dargestellten Seifenhaut ist

$$I(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} dx \, .$$

Folglich muß $u \in D$ so bestimmt werden, daß

$$I(u) = \int_\Omega F(\nabla u(x)) dx = \min_{v \in D} I(v)$$

gilt mit

$$F(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2} \, .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \nabla_\xi F(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} \, , \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} F(\xi) &= (1 + |\xi|^2)^{-1/2} \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{1 + |\xi|^2} \right) \, , \end{aligned}$$

und die Eulergleichung lautet

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right) = 0 \, ,$$

oder

$$\Delta u - \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial_i u \partial_j u}{1 + |\nabla u|^2} \partial_{ij}^2 u = 0 \, ,$$

wobei $\partial_i u = \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)$ bedeute. Die Randbedingung ist

$$u(x) = u_0(x) \, , \; x \in \partial\Omega \, .$$

Dieses **Minimalflächenproblem** ist eines der bekanntesten Probleme der Variationsrechnung. Die Minimalflächengleichung ist elliptisch, denn die symmetrische Koeffizientenmatrix $\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} F(\xi) \right)_{i,j=1,2}$ ist positiv definit. Bekanntlich folgt dies, weil

$$\left(1 + |\xi|^2 \right)^{1/2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} F(\xi) = 1 - \frac{\xi_1^2}{1 + |\xi|^2} \geq 1 - \frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} = \frac{1}{1 + |\xi|^2} > 0 \, ,$$

und weil für die Determinante

$$\det\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}F(\xi)\Big)_{i,j=1,2}$$

$$= (1+|\xi|^2)^{-1}\Big[\Big(1-\frac{\xi_1^2}{1+|\xi|^2}\Big)\Big(1-\frac{\xi_2^2}{1+|\xi|^2}\Big)-\frac{\xi_1^2\xi_2^2}{(1+|\xi|^2)^2}\Big] = (1+|\xi|^2)^{-2} > 0$$

gilt.

1.2.5 Reibungsfreie, kompressible, stationäre, wirbelfreie Strömung. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, die von einem reibungsfreien, kompressiblen Gas durchströmt werde. Die Strömung sei stationär. Zur Berechnung dieser Strömung leitet man aus den Prinzipien der Massen– und Impulserhaltung partielle Differentialgleichungen her.

Sei V eine offene Teilmenge von Ω. Bei einer stationären Strömung ist die Gesamtmasse des Gases in V zeitlich konstant, also muß sich die durch den Rand von V abfließende Masse zu jeder Zeit die Waage halten mit der einfließenden Masse. Sei $\varrho(x) > 0$ die Dichte und $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_3(x)) \in \mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit des Gases am Ort $x \in \Omega$. Die durch den Rand von V pro Zeiteinheit abfließende Masse ist dann gegeben durch $\int_{\partial V} \varrho(x)\nu(x)\cdot v(x)dS(x)$, also muß

$$\int_{\partial V} \varrho(x)\nu(x)\cdot v(x)\,dS(x) = 0 \qquad (1.16)$$

gelten. Aus dem Gaußschen Satz folgt also

$$\int_V \operatorname{div}(\varrho(x)v(x))dx = 0\,.$$

Weil diese Gleichung für jede offene Teilmenge von Ω gelten muß, folgt

$$\operatorname{div}(\varrho(x)v(x)) = 0\,,\ x \in \Omega\,.$$

Diese partielle Differentialgleichung heißt **Kontinuitätsgleichung**.

Auch der Gesamtimpuls der Gasströmung in V muß konstant sein. Nach dem Newtonschen Bewegungsgesetz erhöht sich der Gesamtimpuls in V durch die Kraft, die von der V umgebenden Gasmasse durch den Druck $p(x) \in \mathbb{R}$

auf die Gasmasse in V ausgeübt wird. Weil die Druckkraft senkrecht zur Oberfläche wirkt, ist diese Kraft gegeben durch

$$-\int_{\partial V} \nu(x)p(x)\, dS(x)\,.$$

Der Gesamtimpuls in V nimmt ab durch das Gas, das V über den Rand verläßt und Impuls mitträgt. Pro Zeiteinheit ist die Abnahme dieses Impulses gegeben durch

$$\int_{\partial V} (\nu(x)\cdot v(x))\varrho(x)v(x)\, dS(x)\,.$$

Weil der Gesamtimpuls in V konstant sein muß, folgt

$$\int_{\partial V} (\nu(x)\cdot v(x))\varrho(x)v(x)\, dS(x) = -\int_{\partial V} \nu(x)p(x)\, dS(x)\,.$$

Durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf die drei Komponenten dieser Gleichung folgt

$$\operatorname{div}(\varrho v_i(x)v(x)) + \frac{\partial}{\partial x_i}p(x) = 0\,,\ i = 1,2,3\,.$$

Wegen $\operatorname{div}(\varrho v_i v) = v_i \operatorname{div}(\varrho v) + \varrho v \cdot \nabla v_i$ ergibt sich zusammen mit der Kontinuitätsgleichung, daß

$$\varrho(x)(v(x)\cdot\nabla)v(x) + \nabla p(x) = 0\,,\ x\in\Omega\,.$$

Diese Gleichung drückt den Impulserhaltungssatz aus. Kontinuitätsgleichung und Impulserhaltungssatz zusammen ergeben vier Gleichungen für die fünf Unbekannten ϱ, v und p. Also ist eine weitere Gleichung erforderlich. Diese weitere Gleichung ist die Zustandsgleichung, die einen Zusammenhang zwischen Dichte und Druck herstellt. Dieser Zusammenhang hängt von den Eigenschaften des betrachteten Gases ab. Bei einem polytropen Gas lautet die Zustandsgleichung

$$p(x) = A\varrho(x)^\gamma$$

mit Materialkonstanten $A > 0\,, \gamma > 1$.

Aus Kontinuitätsgleichung, Impulserhaltungssatz und Zustandsgleichung kann die Gasströmung berechnet werden.

Zur Vereinfachung will ich nun annehmen, daß die Strömung wirbelfrei sei, das heißt, daß rot $v = 0$ gelte in Ω. Durch Umrechnen ergibt sich

$$(v \cdot \nabla)v = \frac{1}{2}\nabla|v|^2 - v \times \text{ rot } v\,,$$

also kann der Impulserhaltungssatz in der Form

$$\nabla\Big(\frac{1}{2}|v(x)|^2\Big) + \frac{1}{\varrho(x)}\nabla p(x) = \varrho(x)v(x) \times \text{ rot } v(x)$$

geschrieben werden. Aus der Zustandsgleichung folgt

$$\frac{1}{\varrho}\nabla p = \gamma A \varrho^{\gamma-2}\nabla\varrho = \nabla h(\varrho)$$

mit $h(\varrho) = \frac{\gamma}{\gamma-1}A\varrho^{\gamma-1}$. Zusammen mit rot $v = 0$ resultiert aus dem Impulserhaltungssatz

$$\nabla\Big[\frac{1}{2}|v(x)|^2 + h(\varrho(x))\Big] = 0\,.$$

In einer zusammenhängenden Menge Ω gilt also das **starke Bernoullische Gesetz**

$$\frac{1}{2}\,|v(x)|^2 + h(\varrho(x)) = c$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Löst man diese Gleichung nach ϱ auf und setzt sie in die Kontinuitätsgleichung ein, resultiert

$$\operatorname{div}\Big(\Big(\frac{\gamma-1}{\gamma A}(c - \frac{1}{2}|v(x)|^2)\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}v(x)\Big) = 0\,.$$

Wenn rot $v = 0$ gilt und Ω einfach zusammenhängend ist, gibt es nach dem Satz von Stokes eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $v(x) = \nabla\varphi(x)$. v ist eine Potentialströmung. Setzt man dies für v ein, ergibt sich

$$\operatorname{div}\Big(\Big(c - \frac{1}{2}|\nabla\varphi(x)|^2\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}\nabla\varphi(x)\Big) = 0\,. \tag{1.17}$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ in Divergenzform. Entsprechend den früheren Überlegungen lautet die Neumannsche Randbedingung für dieses Problem

$$\begin{aligned}\nu(x)\cdot\Big[\Big(c - \tfrac{1}{2}|\nabla\varphi(x)|^2\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}\,\nabla\varphi(x)\Big] &= \Big(c - \tfrac{1}{2}|\nabla\varphi(x)|^2\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\partial}{\partial\nu}\,\varphi(x)\\ &= f(x), x \in \partial\Omega\,.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial\nu}\varphi(x) = \nu(x)\cdot\nabla\varphi(x) = \nu(x)\cdot v(x)$ und

$$\Big(\frac{\gamma-1}{\gamma A}(c-\frac{1}{2}|\nabla\varphi(x)|^2)\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \Big(\frac{\gamma-1}{\gamma A}(c-\frac{1}{2}|v(x)|^2)\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \varrho$$

kann man diese Randbedingung auch als

$$\nu(x)\cdot(\varrho(x)v(x)) = \Big(\frac{\gamma-1}{\gamma A}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} f(x)\,,\ x\in\partial\Omega\,,$$

schreiben. Man sieht hieraus, daß bei der Neumannsche Randbedingung die Normalkomponente der Impulsdichte der Strömung am Rand vorgeschrieben wird. Wie in 1.2.3 erhält man aus dem Gaußschen Satz

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f(x)dS(x) &= \int_{\partial\Omega}\nu(x)\Big(\Big(c-\frac{1}{2}|\nabla\varphi(x)|^2\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}\nabla\varphi(x)\Big)\,dS(x)\\ &= \int_{\Omega}\operatorname{div}\Big(\Big(c-\frac{1}{2}|\nabla\varphi(x)|^2\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}\nabla\varphi(x)\Big)\,dx = 0\,.\end{aligned}$$

Diese Gleichung schränkt die Wahl von f ein. Sie entspricht der Gleichung (1.16) und verlangt, daß die einströmende und ausströmende Masse sich das Gleichgewicht halten muß.

Sei die Funktion $F:\{\xi\in\mathbb{R}^3 : |\xi|^2\le 2c\}\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$F(\xi) = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\Big(c-\frac{1}{2}|\xi|^2\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\,.$$

Wegen

$$\nabla F(\xi) = \Big(c-\frac{1}{2}|\xi|^2\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}\xi$$

kann die Gleichung (1.17) ähnlich wie die Minimalflächengleichung als

$$\operatorname{div} a(\nabla\varphi(x)) = 0$$

geschrieben werden mit $a(\xi) = \nabla F(\xi)$. Mit der Kettenregel kann man die Gleichung (1.17) auch in der Form

$$\Delta\varphi - \frac{1}{\gamma-1}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial_i\varphi\partial_j\varphi}{c-\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2}\partial_i\partial_j\varphi = 0$$

schreiben. Die Koeffizienten der höchsten Ableitungen sind

$$\left(c - \frac{1}{2}|\xi|^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} F(\xi) = \delta_{ij} - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\xi_i \xi_j}{c - \frac{1}{2}|\xi|^2}.$$

Hiermit kann der Typ der Gleichung (1.17) untersucht werden. Wie früher verwende ich dabei das folgende Kriterium: Eine symmetrische Matrix $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,l}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Abschnittsdeterminanten

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ 1 \leq k \leq l$$

positiv sind. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\xi_1^2}{c - \frac{1}{2}|\xi|^2} \\ \Delta_2 &= 1 - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{c - \frac{1}{2}|\xi|^2} \\ \Delta_3 &= 1 - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{|\xi|^2}{c - \frac{1}{2}|\xi|^2}, \end{aligned}$$

und diese drei Ausdrücke sind alle positiv genau dann wenn

$$|\xi|^2 < 2c\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

Mit $\xi = \nabla\varphi = v$ folgt also: Die Gleichung (1.17) ist zu einer gegebenen Lösung φ im Punkt $x \in \Omega$ genau dann elliptisch, wenn

$$|\nabla\varphi(x)| = |v(x)| < \sqrt{2c\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}.$$

Die Gleichung (1.17) wechselt also ihren Typ in Abhängigkeit von der Lösung und vom Ort. Es zeigt sich, daß diese Gleichung hyperbolisch ist für

$$\sqrt{2c\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} < |\nabla\varphi(x)| = |v(x)| < \sqrt{2c}.$$

Um die physikalische Bedeutung der Konstanten $\sqrt{2c\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$ zu ermitteln, beachte man, daß die Schallgeschwindigkeit s gegeben ist durch

$$s = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} = \sqrt{\frac{d}{d\varrho}(A\varrho^\gamma)} = \sqrt{A\gamma\varrho^{\gamma-1}}\,.$$

Die Schallgeschwindigkeit hängt also von $\varrho(x)$ und damit von x ab. Wegen

$$\varrho = \Big(\frac{\gamma-1}{\gamma A}(c - \frac{1}{2}|v(x)|^2)\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

folgt

$$s(x) = \sqrt{(\gamma-1)(c-\frac{1}{2}|v(x)|^2)}\,.$$

Falls die Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit ist, gilt

$$|v(x)| = s(x) = \sqrt{(\gamma-1)\Big(c-\frac{1}{2}|v(x)|^2\Big)}\,.$$

Hieraus folgt $|v(x)| = \sqrt{2c\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$. Für $|v(x)| < \sqrt{2c\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$ ist $|v(x)| < s(x)$ und für $|v(x)| > \sqrt{2c\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$ ist $|v(x)| > s(x)$. Dies zeigt, daß die Gleichung (1.17) elliptisch ist im Bereich, wo die Strömung eine Unterschallströmung ist, und hyperbolisch, wo die Strömung eine Überschallströmung ist.

2 Die Poissongleichung

Fundamentale Eigenschaften elliptischer Gleichungen kann man besonders einfach am Beispiel der Poissongleichung studieren. Die Kenntnis dieser Eigenschaften hilft beim Studium allgemeiner elliptischer Gleichungen. Deswegen untersuche ich in diesem Kapitel die Poissongleichung.

2.1 Satz (Mittelwerteigenschaft). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $u \in C_2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Funktion, die eine der folgenden drei Eigenschaften besitzt:*

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) \leq 0 \ (= 0, \geq 0)$$

für alle $x \in \Omega$. Sei $y \in \Omega$, $R > 0$ und sei

$$B = B_R(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < R\}$$

eine offene Kugel mit Mittelpunkt y und Radius R, die in Ω enthalten ist. Dann gelten

$$\begin{aligned} u(y) &\geq (=, \leq) \quad \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u(x) dS(x) \\ u(y) &\geq (=, \leq) \quad \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B u(x) dx \,, \end{aligned}$$

wobei w_n das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ sei.

Da $n\omega_n R^{n-1}$ der Flächeninhalt der Sphäre ∂B und $\omega_n R^n$ das Volumen der Kugel B ist, bedeutet dies, daß der Wert einer harmonischen Funktion im Mittelpunkt der Kugel B gleich dem Mittelwert von u auf dem Rand ∂B und gleich dem Mittelwert von u auf B ist. Man nennt dies die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

Beweis. Sei $0 < \varrho < R$. Der Gaußsche Satz liefert

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varrho(y)} \frac{\partial u}{\partial n}(x) dS(x) &= \int_{\partial B_\varrho(y)} n(x) \cdot \nabla u(x) dS(x) \\ &= \int_{B_\varrho(y)} \operatorname{div} \nabla u(x) dx \ = \ \int_{B_\varrho(y)} \Delta u(x) dx \ \leq \ (=, \geq) \, 0 \,. \end{aligned}$$

Mit $r = |x-y|$ und $\omega = \frac{x-y}{r}$ ergibt sich durch Transformation des Integrales auf der linken Seite dieser Gleichung auf ein Integral über die Einheitssphäre, daß

$$\begin{aligned} 0 \;\geq\; (=,\leq) \int_{\partial B_\varrho(y)} \frac{\partial u}{\partial n}(x)dS(x) \;&=\; \int_{\partial B_\varrho(y)} \frac{\partial u}{\partial r}(y+\varrho\omega)dS(\varrho\omega) \\ =\; \varrho^{n-1}\int_{|\omega|=1} \frac{\partial u}{\partial \varrho}(y+\varrho\omega)d\omega \;&=\; \varrho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\varrho}\int_{|\omega|=1} u(y+\varrho\omega)d\omega\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß die Funktion

$$\varrho \mapsto \int_{|\omega|=1} u(y)+\varrho\omega)d\omega$$

entweder monoton fallend, konstant oder monoton wachsend ist auf dem Intervall $(0,R)$. Aus der Stetigkeit von u auf $\overline{B_R(y)}$ folgt also

$$\begin{aligned} R^{1-n}&\int_{\partial B_R(y)} u(x)dS(x) = \int_{|\omega|=1} u(y+R\omega)d\omega \\ &= \int_{|\omega|=1} \lim_{\varrho\to R} u(y+\varrho\omega)d\omega \;=\; \lim_{\varrho\to R}\int_{|\omega|=1} u(y+\varrho\omega)d\omega \\ &\leq\; (=,\geq) \lim_{\substack{\varrho\to 0\\ \varrho>0}}\int_{|\omega|=1} u(y+\varrho\omega)d\omega = \int_{|\omega|=1}\lim_{\substack{\varrho\to 0\\ \varrho>0}} u(y+\varrho\omega)d\omega \\ &= \int_{|\omega|=1} u(y)d\omega \;=\; n\omega_n u(y)\,. \end{aligned}$$

Dies beweist die erste Formel des Satzes. Zum Beweis der Zweiten beachte man, daß sich aus

$$\int_{|\omega|=1} u(y+\varrho\omega)d\omega \;\leq\; (=,\geq)\, n\omega_n u(y)$$

durch Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int_B u(x)dx \;&=\; \int_0^R \left(\int_{\partial B_\varrho(y)} u(x)dS(x)\right)d\varrho \\ &=\; \int_0^R \left(\varrho^{n-1}\int_{|\omega|=1} u(y+\varrho\omega)d\omega\right)d\varrho \;\leq\; (=,\geq)\, n\omega_n u(y)\int_0^R \varrho^{n-1}d\varrho \\ &=\; \omega_n R^n u(y)\,. \end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Formel nachgewiesen.

Eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein Gebiet, wenn sie offen und zusammenhängend ist.

2.2 Folgerung (Maximumprinzip, Minimumprinzip). *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und sei* $u \in C_2(\Omega)$ *mit* $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) *in* Ω. *Wenn* $y \in \Omega$ *existiert mit*

$$u(y) = \sup_{x \in \Omega} u(x) \quad \Big(u(y) = \inf_{x \in \Omega} u(x) \Big)\,,$$

dann ist u *konstant in* Ω.

Beweis. Ich betrachte zunächst den Fall $\Delta u \geq 0$ in Ω. Mit $M = \sup_{x \in \Omega} u(x)$ setze

$$\Omega_M = \{ x \in \Omega \mid u(x) = M \}\,.$$

Nach Voraussetzung ist diese Menge nichtleer. Da u stetig ist, ist sie relativ abgeschlossen in Ω. Um zu zeigen, daß diese Menge auch relativ offen ist, sei $z \in \Omega_M$ und sei B eine offene Kugel um z mit $\overline{B} \subseteq \Omega$. Die Funktion $u - M$ erfüllt $u - M \leq 0$ in Ω und $\Delta(u - M) \geq 0$ in Ω. Aus dem voranstehenden Satz resultiert folglich

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B \Big(u(x) - M \Big) dx \leq 0\,,$$

also $\int_B (u(x) - M) dx = 0$, und somit $u = M$ in B. Dies bedeutet, daß $B \subseteq \Omega_M$ ist, also ist die nichtleere Menge Ω_M relativ offen und relativ abgschlossen in der zusammenhängenden Menge Ω, also $\Omega = \Omega_M$. Es folgt, daß $u = M$ in Ω gilt.

Für $\Delta u \leq 0$ ergibt sich die Behauptung, wenn man in diesen Argumenten u durch $-u$ ersetzt.

Eine Funktion u heißt subharmonisch, wenn $\Delta u \geq 0$ gilt, und superharmonisch, wenn $\Delta u \leq 0$ gilt. Wenn eine Funktion u die Eigenschaft hat, daß aus der Existenz von $y \in \Omega$ mit $u(y) = \sup_{x \in \Omega} u(x)$ folgt, daß u konstant ist, dann sagt man, u erfülle das starke Maximumprinzip. Folgerung 2.2 zeigt, daß subharmonische Funktionen das starke Maximumprinzip und superharmonische Funktionen das entsprechend definierte starke Minimumprinzip erfüllen.

2.3 Folgerung (schwaches Maximumprinzip, schwaches Minimumprinzip). *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet und sei* $u \in C_2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *mit* $\Delta u \geq 0$ $(\Delta u \leq 0)$ *in* Ω. *Dann gilt*

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{y \in \partial\Omega} u(y) \quad \Big(\inf_{x \in \Omega} u(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} u(y) \Big)\,.$$

Wenn $\Delta u = 0$ ist in Ω, folgt somit

$$\inf_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u(y)$$

für alle $x \in \overline{\Omega}$.

Man sagt, eine subharmonische Funktion erfülle das schwache Maximumprinzip und eine superharmonische Funktion das schwache Minimumprinzip.

Beweis. Sei $\Delta u \geq 0$ in Ω. Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist, und da u stetig ist in $\overline{\Omega}$, gibt es ein $z \in \overline{\Omega}$ mit

$$u(z) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) .$$

Wenn $z \in \partial\Omega$ ist, braucht nichts gezeigt zu werden. Wenn $z \in \Omega$ ist, resultiert aus Folgerung 2.2, daß u konstant ist in Ω und damit in $\overline{\Omega}$. Folglich gilt die Behauptung auch in diesem Fall. Für den Fall $\Delta u \leq 0$ verläuft der Beweis analog.

2.4 Folgerung (Eindeutigkeit der Lösung des Dirichletproblems zur Poissongleichung). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $f \in C(\Omega)$. Das Dirichletproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \text{ in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} &= u_0 \end{aligned}$$

besitzt im Raum $C_2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ höchstens eine Lösung.

Beweis: Seien $u, v \in C_2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösungen dieses Dirichletproblems. Sei $w = u - v$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & w \in C_2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ & \Delta w = \Delta u - \Delta v = f - f = 0 \qquad && \text{in } \Omega \\ & w\big|_{\partial\Omega} = u_0 - u_0 = 0 && \text{auf } \partial\Omega . \end{aligned}$$

Nach Folgerung 2.3 gilt also

$$0 = \inf_{y \in \partial\Omega} w(y) \leq w(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} w(y) = 0$$

für alle $x \in \overline{\Omega}$, und somit $u = v$ in $\overline{\Omega}$. Folglich besitzt das Dirichletproblem höchstens eine Lösung.

2.5 Definition (Fundamentallösung). Sei $n = 2$ oder $n = 3$. Für $n = 2$ sei $\Gamma : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|\,.$$

Für $n = 3$ sei $\Gamma : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}\,.$$

Γ heißt Fundamentallösung von Δ in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$.

2.6 Lemma. *Für $x \neq y$ gilt*

$$\begin{aligned} \nabla_x\Gamma(x-y) &= \frac{1}{n\omega_n|x-y|^{n-1}}\,\frac{x-y}{|x-y|} \\ \Delta_x\Gamma(x-y) &= \operatorname{div}_x\left(\frac{x-y}{n\omega_n|x-y|^n}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Beweis: Durch Rechnung.

2.7 Satz (Darstellungsformel). *Für $n = 2,3$ sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, dessen Rand $\partial\Omega$ zur Klasse C_1 gehört. Sei $u \in C_2(\Omega) \cap C_1(\overline{\Omega})$ mit $\Delta u \in C(\overline{\Omega})$. Dann gilt für alle $y \in \Omega$*

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial}{\partial n}u(x)dS(x) + \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(x)dx\,.$$

Beweis: Sei $B_\varrho(y)$ eine Kugel um $y \in \Omega$ mit Radius $\varrho > 0$, die ganz in Ω enthalten ist, und sei $\Omega_\varrho = \Omega\backslash B_\varrho(y)$. Weil u und $x \mapsto \Gamma(x-y)$ zweimal stetig differenzierbar sind in Ω_ϱ und stetig differenzierbar bis zum Rand, folgt aus der zweiten Greenschen Formel

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega_\varrho} \Big(\frac{\partial}{\partial n}u(x)\Gamma(x-y) - u(x)\frac{\partial}{\partial nx}\Gamma(x-y)\Big)dS(x) \\ &\quad = \int_{\Omega_\varrho} \Big(\Delta u(x)\Gamma(x-y) - u(x)\Delta_x\Gamma(x-y)\Big)dx \qquad (2.1) \\ &\quad = \int_{\Omega_\varrho} \Delta u(x)\Gamma(x-y)dx\,. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung lasse man auf beiden Seiten ϱ gegen Null konvergieren. Wegen $x \mapsto \Gamma(x-y) \in L^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho\to 0} \int_{\Omega_\varrho} \Delta u(x)\Gamma(x-y)dx &= \lim_{\varrho\to 0} \int_{\Omega\setminus B_\varrho(y)} \Delta u(x)\Gamma(x-y)dx \\ &= \int_\Omega \Delta u(x)\Gamma(x-y)dx\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Um den Grenzübergang auf der linken Seite durchzuführen, beachte man, daß $\partial\Omega_\varrho = \partial\Omega \cup \partial B_\varrho(y)$, und daß $n(x) = -(x-y)/|x-y|$ gilt für $x \in \partial B_\varrho(y)$. Also folgt mit Lemma 2.6

$$\begin{aligned} &-\lim_{\varrho\to 0} \int_{\partial B_\varrho(y)} u(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\Gamma(x-y)dS(x) \\ &\quad= -\lim_{\varrho\to 0} \int_{\partial B_\varrho(y)} u(x)n(x)\cdot\nabla_x\Gamma(x-y)dS(x) \\ &\quad= \lim_{\varrho\to 0} \int_{\partial B_\varrho(y)} u(x)\frac{x-y}{|x-y|}\cdot\nabla_x\Gamma(x-y)dS(x) \\ &\quad= \lim_{\varrho\to 0} \int_{\partial B_\varrho(y)} u(x)\frac{(x-y)\cdot(x-y)}{n\omega_n|x-y|^{n+1}}dS(x) \\ &\quad= \lim_{\varrho\to 0} \frac{1}{n\omega_n\varrho^{n-1}} \int_{\partial B_\varrho(y)} u(x)dS(x) \\ &\quad= \lim_{\varrho\to 0} \frac{1}{n\omega_n} \int_{|\omega|=1} u(y+\varrho\omega)dS(\omega) = \frac{1}{n\omega_n}\int_{|\omega|=1} \lim_{\varrho\to 0} u(y+\varrho\omega)dS(\omega) \\ &\quad= u(y)\frac{1}{n\omega_n}\int_{|\omega|=1} dS(\omega) = u(y)\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Weiterhin folgt mit $\Gamma^*(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\log\varrho$ für $n=2$ und $\Gamma^*(\varrho) = -(4\pi\varrho)^{-1}$ für $n=3$, daß

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho\to 0} \Big| \int_{\partial B_\varrho(y)} \frac{\partial}{\partial n}u(x)\Gamma(x-y)dS(x)\Big| &\le \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\nabla u(x)| \lim_{\varrho\to 0} \int_{\partial B_\varrho(y)} |\Gamma(x-y)|dS(x) \\ &= \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\nabla u(x)| \lim_{\varrho\to 0} nw_n\varrho^{n-1}|\Gamma^*(\varrho)| = 0\,. \end{aligned}$$

Wegen $\partial\Omega_\varrho = \partial\Omega \cup \partial B_\varrho(y)$ folgt die Behauptung aus dieser Relation und aus (2.1) – (2.3).

2.8 Folgerung (Newtonsches Potential). *Sei $n = 2,3$ und $u \in \mathring{C}_2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n$*

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)\Delta u(x)dx\,.$$

Beweis. Sei $y \in \mathbb{R}^n$ und sei $R > |y|$ so groß, daß die Kugel $B_R(0)$ den kompakten Träger von u enthält. Dann folgt aus der Darstellungsformel

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_{|x|=R} u(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial}{\partial n_x}u(x)dS(x) \\ &\quad + \int_{B_R(0)} \Gamma(x-y)\Delta u(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)\Delta u(x)dx\,. \end{aligned}$$

2.9 Greensche Funktion. Sei $\Delta u = f$ in Ω. Mit der Darstellungsformel kann die Lösung u dieser Gleichung allein aus der Kenntnis der Werte von u am Rande und der Werte der Normalableitung $\frac{\partial}{\partial n}u$ am Rande berechnet werden: Für $y \in \Omega$ folgt

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial}{\partial n_x}u(x)dS(x) \\ &\quad + \int_{\Omega} \Gamma(x-y)f(x)dx\,. \end{aligned}$$

Diese Formel ist jedoch nicht geeignet, um die Lösung von Randwertproblemen zu berechnen: Beim Dirichletschen Randwertproblem sind in der Aufgabenstellung nur die Werte von u am Rande und beim Neumannschen Randwertproblem nur die Werte von $\frac{\partial}{\partial n}u$ am Rande gegeben, nicht beide Größen. Um Lösungen von Randwertproblemen darzustellen, benutzt man die Greensche Funktion.

2.9.1 Definition (Greensche Funktion erster Art). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge, deren Rand zur Klasse C_1 gehöre.
Sei $\Gamma_D : \overline{\Omega} \times \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Gamma_D(x,y) = \Gamma(x-y) + w(x,y)\,,$$

wobei für jedes $y \in \Omega$ die Funktion $x \mapsto w(x,y)$ zu $C_2(\Omega) \cap C_1(\overline{\Omega})$ gehöre mit

$$\begin{aligned} \Delta_x w(x,y) &= 0\,,\; x \in \Omega \\ w(x,y) &= -\Gamma(x-y)\,,\; x \in \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Dann heißt Γ_D Greensche Funktion zum Dirchletproblem von Δ in Ω oder Greensche Funktion erster Art.

2.10 Lemma (Darstellung der Lösung des Dirichletproblems). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge, deren Rand zur Klasse C_1 gehöre, sei $u_0 \in C_1(\partial\Omega)$, sei $f \in C(\overline{\Omega})$ und sei $u \in C_2(\Omega) \cap C_1(\overline{\Omega})$ Lösung von*

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= f(x)\,,\; x \in \Omega \\ u(x) &= u_0(x)\,,\; x \in \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u_0(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \Gamma_D(x,y)\, dS(x) + \int_\Omega \Gamma_D(x,y) f(x)\, dx\,.$$

Beweis. Aus der zweiten Greenschen Formel folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} w(x,y) u(x) &- w(x,y) \frac{\partial}{\partial n} u(x)\, dS(x) \\ &= \int_\Omega \Delta_x w(x,y) u(x) - w(x,y) \Delta u(x)\, dx \\ &= -\int_\Omega w(x,y) f(x)\, dx\,. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun durch Addition dieser Gleichung zur Darstellungsformel aus Satz 2.7.

Auch für die Lösung des Neumannschen Randwertproblems kann eine Darstellungsformel hergeleitet werden. Die Formel ist jedoch etwas komplizierter, weil zwischen den Randwerten und der rechten Seite des Neumannproblems

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= f(x)\,,\; x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} u(x) &= u_1(x)\,,\; x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

die Beziehung

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega \Delta u(x)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} u(x)dS(x) = \int_{\partial\Omega} u_1(x)dS(x)$$

gelten muß, und weil mit u auch die Funktion $x \mapsto u(x)+c$ für jede Konstante c eine Lösung des Neumannschen Randwertproblems ist. Die Lösung ist also nicht eindeutig.

2.11 Definition (Greensche Funktion zweiter Art). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge, deren Rand zur Klasse C_1 gehöre. Sei $\Gamma_N : \overline{\Omega} \times \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Gamma_N(x,y) = \Gamma(x-y) + w(x,y)\,,$$

wobei für jedes $y \in \Omega$ die Funktion $x \mapsto w(x,y)$ zu $C_2(\Omega) \cap C_1(\overline{\Omega})$ gehöre mit

$$\begin{aligned} \Delta_x w(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial n_x} w(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial n_x}\Gamma(x-y) + \left[\int_{\partial\Omega} dS(z)\right]^{-1}\,,\ x \in \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Dann heißt Γ_N Greensche Funktion zum Neumannproblem von Δ in Ω oder Greensche Funktion zweiter Art.

In der Randbedingung für w ist die Konstante $[\int_{\partial\Omega} dS(z)]^{-1}$ nötig, weil eine Funktion $w(x,y)$ mit den geforderten Eigenschaften nur existieren kann, wenn der Mittelwert der Randwerte verschwindet. Um zu zeigen, daß diese Bedingung erfüllt ist, wende man die Darstellungsformel aus Satz 2.7 auf die konstante Funktion $u(x) = 1$ an. Wegen $\Delta u = 0$ folgt dann für alle $y \in \Omega$

$$1 = u(y) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x}\Gamma(x-y)dS(x)\,.$$

Somit resultiert für alle $y \in \Omega$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} w(x,y)dS(x) &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x}\Gamma(x-y)dS(x) + \int_{\partial\Omega}\left[\int_{\partial\Omega} dS(z)\right]^{-1} dS(x) \\ &= -1 + \left[\int_{\partial\Omega} dS(z)\right]^{-1}\int_{\partial\Omega} dS(x) = 0\,. \end{aligned}$$

2.12 Lemma (Darstellung der Lösung des Neumannproblems). *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine beschränkte, offene Menge, deren Rand zur Klasse* C_1 *gehöre, sei* $u_1 \in C(\partial\Omega)$, *sei* $f \in C(\overline{\Omega})$ *und sei* $u \in C_2(\Omega) \cap C_1(\overline{\Omega})$ *Lösung von*

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= f(x)\,,\; x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} u(x) &= u_1(x)\,,\; x \in \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} u(y) &= -\int_{\partial\Omega} \Gamma_N(x,y) u_1(x) dS(x) + \left[\int_{\partial\Omega} dS(z)\right]^{-1} \int_{\partial\Omega} u(x) dS(x) \\ &\quad + \int_\Omega \Gamma_N(x,y) f(x) dx\,. \end{aligned}$$

2.12.1 Bemerkung. Der Term $[\int_{\partial\Omega} dS(z)]^{-1} \int_{\partial\Omega} u(x)dS(x)$ enthält den Mittelwert über die in der Formulierung des Neumannschen Randwertproblems nicht vorgegebenen Randwerte der Lösung u. Jedoch ist auch

$$v(y) = -\int_{\partial\Omega} \Gamma_N(x,y) u_1(x) dS(x) + \int_\Omega \Gamma_N(x,y) f(x) dx$$

Lösung des Neumannproblems. Es gilt

$$v(y) = u(y) + c\,,$$

wobei die Konstante c so gewählt ist, daß

$$c = -\left[\int_{\partial\Omega} dS(z)\right]^{-1} \int_{\partial\Omega} u(x) dS(x)\,,$$

weil dann

$$\int_{\partial\Omega} v(x) dS(x) = \int_{\partial\Omega} \big(u(x) + c\big) dS(x) = 0$$

folgt.

Aus der Darstellungsformel zum Neumannproblem folgt auch, daß sich zwei Lösungen u_1, u_2 desselben Neumannproblems höchstens um eine Konstante unterscheiden. Denn $u = u_1 - u_2$ ist dann Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0\,,\; x \in \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} u(x) &= 0\,,\; x \in \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

und somit ergibt die Darstellungsformel für $y \in \Omega$

$$u_1(y) - u_2(y) = u(y) = \Big[\int_{\partial\Omega} dS(z)\Big]^{-1} \int_{\partial\Omega} \big(u_1(x) - u_2(x)\big) dS(x) = \text{ const} .$$

Der **Beweis** von Lemma 2.12 verläuft genau wie der Beweis von Lemma 2.10.

Bei der Herleitung dieser Darstellungsformeln wurde vorausgesetzt, daß die Lösung u des Dirichletschen oder Neumannschen Randwertproblems existiert. Zur Berechnung der Integrale auf der rechten Seite der Darstellungsformeln braucht man nur die entsprechenden Randwerte und die rechte Seite der Differentialgleichung zu kennen. Man kann also ohne Kenntnis der Lösung des Randwertproblems die rechten Seiten der Darstellungsformeln benützen, um eine Funktion u zu definieren. Aus den bisherigen Überlegungen folgt noch nicht, daß die so definierte Funktion u eine Lösung ist. Wenn das Dirichletsche oder Neumannsche Randwertproblem eine Lösung hat, muß die so definierte Funktion u jedoch beim Dirichletproblem mit der eindeutigen Lösung übereinstimmen und beim Neumannproblem eine der Lösungen sein, die sich alle nur um eine Konstante unterscheiden.

Wenn bekannt ist, daß die Greenschen Funktionen existieren, kann man beweisen, daß die durch die rechten Seiten der Darstellungsformeln definierten Funktionen Lösungen der entsprechenden Randwertprobleme sind. Auf diese Weise kann man zeigen, daß Lösungen für diese Randwertprobleme existieren. Die wesentliche Schwierigkeit ist dabei nachzuweisen, daß die durch die Darstellungsformeln definierten Funktionen zweimal stetig differenzierbar sind. Jedoch muß man schon bei der Konstruktion der Greenschen Funktionen ein Dirichletsches ode Neumannsches Randwertproblem lösen. Ob die Dirichletschen und Neumannschen Randwertprobleme lösbar sind, bleibt zunächst also weiterhin offen. Ein Existenzbeweis wird erst später auf andere Weise geführt.

An dieser Stelle soll nur noch der Fall, wo Ω der Kreis oder die Kugel ist, untersucht werden. In diesem Fall kann die Greensche Funktion zum Dirichletproblem explizit angegeben werden.

2.13 Satz (Greensche Funktion zum Dirichletproblem für den Kreis und die Kugel). *Sei* $n = 2, 3$, *sei* $R > 0$ *und sei* $K : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to$

$\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *die Funktion*

$$K(y) = R^2 \frac{y}{|y|^2}\,.$$

(Spiegelung an der Sphäre mit Radius R.)
Sei $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$. *Die Greensche Funktion zum Dirichletproblem von* Δ *in* B_R *ist gegeben durch*

$$\Gamma_D(x,y) = \begin{cases} \Gamma(x-y) - \Gamma\Big(\frac{|y|}{R}\big(x - K(y)\big)\Big)\,, & 0 < |y| < R \\ \Gamma(x) - \Gamma^*(R)\,, & y = 0 \end{cases}$$

mit $\Gamma^*(R) = \frac{1}{2\pi}\log(R)$ *für* $n = 2$ *und* $\Gamma^*(R) = -\frac{1}{4\pi R}$ *für* $n = 3$. *Also folgt für* $0 < |y| < R$, *daß*

$$\Gamma_D(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{R|x-y|}{|y|\,|x - R^2\frac{y}{|y|^2}|}\,, & n = 2 \\ -\dfrac{1}{4\pi|x-y|} + \dfrac{R}{4\pi|y|}\dfrac{1}{|x - R^2\frac{y}{|y|^2}|}\,, & n = 3\,. \end{cases}$$

Beweis: Für $y \in B_R$ und $x \in \overline{B}_R$ sei

$$w(x,y) = \begin{cases} -\Gamma\Big(\dfrac{|y|}{R}\big(x - K(y)\big)\Big)\,, & 0 < |y| < R \\ -\Gamma^*(R)\,, & y = 0\,. \end{cases}$$

Ich zeige, daß $\big(x \mapsto w(x,y)\big) \in C_2(\overline{B}_R)$ gilt mit

$$\begin{aligned} \Delta_x w(x,y) &= 0\,,\ x \in B_R \\ w(x,y) &= -\Gamma(x-y)\,,\ x \in \partial B_R\,. \end{aligned}$$

Nach Definition ist dann Γ_D Greensche Funktion zu Δ in B_R.
Dies ist klar für $y = 0$, weil für die Konstante $-\Gamma^*(R)$ gilt

$$\begin{aligned} \Delta\big(-\Gamma^*(R)\big) &= 0 \\ -\Gamma^*(R) &= -\Gamma(x)\,,\ |x| = R\,. \end{aligned}$$

Sei also $0 < |y| < R$. Dann gilt

$$|K(y)| = |R^2 \frac{y}{|y|}| = \frac{R^2}{|y|} > R\,.$$

Folglich ist $x - K(y) \neq 0$ für alle $x \in \overline{B}_R$, und somit $x \mapsto w(x,y) = -\Gamma(\frac{|y|}{R}(x - K(y))) \in C_2(\overline{B}_R)$. Aus Lemma 2.6 folgt

$$\Delta_x w(x,y) = -\left(\frac{|y|}{R}\right)^2 \big(\Delta\Gamma\big) \left(\frac{|y|}{R}\big(x - K(y)\big)\right) = 0\,,\ x \in B_R\,.$$

Um zu zeigen, daß $w(x,y)$ auch die richtige Randbedingung erfüllt, sei $|x| = R$. Dann gilt

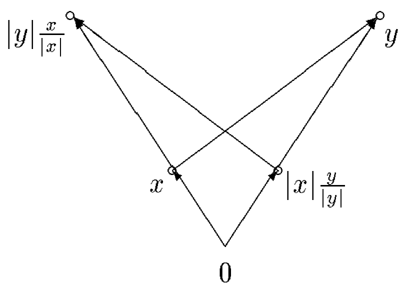
$$\begin{aligned} \frac{|y|}{R}\big(x - K(y)\big) &= \frac{|y|}{R}\left(x - R^2\frac{y}{|y|^2}\right) \\ &= \frac{|y|}{|x|}\left(x - |x|^2\frac{y}{|y|^2}\right) = |y|\frac{x}{|x|} - |x|\frac{y}{|y|}\,. \end{aligned}$$

Es ist $|y|\frac{x}{|x|}$ ein Vektor in Richtung von x mit Länge $|y|$, und $|x|\frac{y}{|y|}$ ein Vektor in Richtung von y mit Länge $|x|$. Der Differenzvektor

$$|y|\frac{x}{|x|} - |x|\frac{y}{|y|}$$

hat dieselbe Länge wie der Vektor $y - x$. Also folgt

$$\left|\frac{|y|}{R}\big(x - K(y)\big)\right| = |y - x| = |x - y|\,.$$



Dies impliziert für $|x| = R$

$$\begin{aligned} w(x,y) &= -\,\Gamma\left(\frac{|y|}{R}\big(x - K(y)\big)\right) \\ &= -\,\Gamma^*\left(\left|\frac{|y|}{R}\big(x - K(y)\big)\right|\right) \\ &= -\,\Gamma^*(|x-y|) \\ &= -\,\Gamma(x-y)\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

2.14 Poissonsche Lösungsformel. Setzt man diese Greensche Funktion in die Darstellungsformel aus der Folgerung 2.10 für die Lösung des Dirichletproblems ein, dann erhält man eine explizite Formel für diese Lösung. Hierzu muß $\frac{\partial}{\partial n_x}\Gamma_D(x,y)$ für $|x| = R$ berechnet werden. Aus Lemma 2.6 folgt für $0 < |y| < R$

$$\begin{aligned}\nabla_x \Gamma_D(x,y) &= \nabla_x \Gamma(x-y) - \nabla_x \Gamma\Big(\frac{|y|}{R}(x - K(y))\Big) \\ &= \frac{x-y}{n\omega_n |x-y|^n} - \frac{\frac{|y|}{R}(x-K(y))}{n\omega_n |\frac{|y|}{R}(x-K(y))|^n}\,\frac{|y|}{R}\,.\end{aligned}$$

Gerade wurde gezeigt, daß für $|x| = R$ gilt

$$|\frac{|y|}{R}(x-K(y))| = |x-y|\,.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\nabla_x \Gamma_D(x,y) &= \frac{x - y - \Big(\frac{|y|}{R}\Big)^2\Big(x - R^2\frac{y}{|y|^2}\Big)}{n\omega_n|x-y|^n} \\ &= \frac{1-\Big(\frac{|y|}{R}\Big)^2}{n\omega_n|x-y|^n}x = \frac{1}{R^2}\frac{R^2-|y|^2}{n\omega_n|x-y|^n}x\,.\end{aligned}$$

Wegen $n(x) = x/|x|$ ergibt sich somit

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\Gamma_D(x,y) = n(x)\cdot\nabla_x\Gamma_D(x,y) = \frac{1}{R}\frac{R^2-|y|^2}{n\omega_n|x-y|^n}\,.$$

Man rechnet sofort nach, daß diese Formel auch für $y = 0$ gilt. Damit folgt:

2.15 Satz. (Lösung des Dirichletproblems im Kreis und in der Kugel.) *Sei $n = 2,3$. Für $R > 0$ sei*

$$B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}\,.$$

Sei $u_0 \in C_1(\partial B_R)$ und sei $u \in C_2(B_R)\cap C_1(\overline{B}_R)$ die Lösung von

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0\,,\ x \in B_R \\ u(x) &= u_0(x)\,,\ |x| = R\,.\end{aligned}$$

Dann folgt für $y \in B_R$

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R} \int_{|x|=R} \frac{R^2 - |y|^2}{|x-y|^n} u_0(x) dS(x)\,.$$

Diese Formel nennt man **Poissonsche Lösungsformel**.

2.16 Folgerung. (Regularität der Lösung des Dirichletproblems.)
Sei $u \in C_2(B_R) \cap C_1(\overline{B}_R)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0\,,\ x \in B_R \\ u(x) &= u_0(x)\,,\ |x| = R \end{aligned}$$

mit $u_0 \in C_1(\partial B_R)$. Dann ist u reell analytisch in B_R, d.h. zu jedem Punkt $y_0 \in B_R$ gibt es eine Umgebung $U(y_0)$ mit

$$u(y) = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha(y_0)(y - y_0)^\alpha\,,\ y \in U(y_0)\,.$$

Beweis: Nach einem Satz aus der Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher genügt es zu zeigen, daß

$$u(y) = u(y_1, \ldots, y_n)$$

analytisch ist bezüglich jeder Variablen y_i, wenn die anderen festgehalten werden. (Siehe L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, North Holland, 1973, S. 28)
Sei $y_0 \in B_R(0)$. Ich setze

$$\hat{y}_i = (y_{0,1,\ldots}, y_{0,i-1}, y_i, y_{0,i+1,\ldots}, y_{0,n}) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Der Abstand von y_0 zum Rand $\partial B_R(0)$ ist gleich $R - |y_0|$. Für alle $x \in \partial B_R(0)$ und für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y - y_0| < R - |y_0|$ ist somit $|x - y| \neq 0$. Wegen $|y_i - y_{0,i}| = |\hat{y}_i - y_0|$ folgt, daß

$$y_i \mapsto \frac{R^2 - |\hat{y}_i|^2}{|x - \hat{y}_i|^n}$$

analytisch ist in der Kugel $|y_i - y_{0,i}| < R - |y_0|$. Also kann diese Funktion in eine Potenzreihe um $y_{0,i}$ mit Konvergenzradius $R - |y_0|$ entwickelt werden. Es folgt, daß

$$\frac{R^2 - |\hat{y}_i|^2}{|x - \hat{y}_i|^n} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x, y_0)(y_i - y_{0,i})^m \tag{2.4}$$

gilt mit

$$\frac{1}{\limsup_{m\to\infty} |a_m(x, y_0)|^{1/m}} \geq R - |y_0|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| = R$. Dies impliziert, daß m_0 existiert mit

$$|a_m(x, y_0)|^{1/m} \leq \frac{4}{3} \frac{1}{R - |y_0|}$$

für alle $m \geq m_0$, also

$$|a_m(x, y_0)(y_i - y_{0,i})^m| < \left(\frac{2}{3}\right)^m$$

für alle $m \geq m_0$, alle $y_i \in \mathbb{R}$ mit $|y_i - y_{0,i}| < \frac{1}{2}(R - |y_0|)$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| = R$. Somit konvergiert die Reihe in (2.4) gleichmäßig bezüglich $x \in \partial B_R$, und also darf in der folgenden Umformung die Integration mit der Summation vertauscht werden:

$$\begin{aligned}
u(\hat{y}_i) &= \frac{1}{n\omega_n R} \int_{|x|=R} \frac{R^2 - |y|^2}{|x - y|^n} u_0(x) dS(x) \\
&= \frac{1}{n\omega_n R} \int_{|x|=R} \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x, y_0)(y_i - y_{0,i})^m u_0(x)\right] dS(x) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n R} \int_{|x|=R} a_m(x, y_0) u_0(x) dS(x)\, (y_i - y_{0,i})^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} A_m(y_0)(y_i - y_{0,i})^m .
\end{aligned}$$

Hierbei sei $A_m(y_0) = \frac{1}{n\omega_n R} \int_{|x|=R} a_m(x, y_0) u_0(x) dS(x)$. Folglich ist u reell analytisch in B_R.

3 Existenz– und Spektraltheorie für lineare elliptische Gleichungen

3.1 Schwache Lösungen. In diesem Abschnitt werde ich Hilbertraummethoden verwenden, um für lineare elliptische Gleichungen Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen und die zugehörige Spektraltheorie zu studieren. Ich werde dabei annehmen, daß die Differentialgleichung Divergenzform hat:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + c(x)u(x) = f(x) \, . \tag{3.1}$$

Kürzer kann man diese Gleichung schreiben als

$$\operatorname{div} \big(A(x) \nabla u(x) \big) + B(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) = f(x) \, ,$$

mit $A(x) = \big(a_{ij}(x) \big)_{i,j=1,\ldots,n}$ und $B(x) = \big(b_1(x), \ldots, b_n(x) \big)$. Diese Annahme ist keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, weil lineare partielle Differentialgleichungen, deren Koeffizienten differenzierbar sind, immer in Divergenzform geschrieben werden können. Denn sei

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + c(x) \, u(x) = f(x)$$

gegeben. In Divergenzform lautet diese Gleichung

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \Big) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{n} \Big[c_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} c_{ij}(x) \Big] \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + c(x) \, u(x) = f(x) \, . \end{aligned}$$

Man erhält die Form der Gleichung (3.1), wenn man

$$a_{ij} = c_{ij} \, , \qquad b_i = c_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} c_{ij}$$

setzt.

Zunächst soll der Begriff einer Lösung des Dirichletschen Randwertproblems zur Differentialgleichung (3.1) verallgemeinert werden. Hierzu definiert man die Klasse der schwachen Lösungen. Zur Motivation nehme ich an, daß $a_{ij} \in C_1(\Omega)$, b_i, $c \in C(\Omega)$ und $u \in C_2(\Omega)$ sind. Unter diesen Voraussetzungen ist u eine Lösung der Gleichung (3.1), genau dann wenn für alle Testfunktionen $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ die Gleichung

$$\int_\Omega \Big(-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x)$$
$$+ \Big[\sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + c(x)u(x) - f(x) \Big] \varphi(x) \Big) dx = 0$$

oder kürzer

$$\int_\Omega \Big(-\big(A(x)\nabla u(x)\big) \cdot \nabla\varphi(x) + \big[B(x)\nabla u(x) + c(x)u(x) - f(x)\big]\varphi(x)\Big) dx = 0 \tag{3.2}$$

erfüllt ist. Zum Beweis beachte man, daß unter den angegebenen Voraussetzungen die Funktionen $x \mapsto a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)$ stetig differenzierbar sind. Auf Grund des Gaußschen Satzes ist also 3.2 äquivalent zu

$$\int_\Omega \Big[\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u(x)\big) + B(x)\nabla u(x) + c(x)u(x) - f(x)\Big]\varphi(x) dx = 0\,,$$

und wegen des Fundamentallemmas der Variationsrechnung (siehe Skriptum "Variationsrechnung und Sobolevräume", Lemma 3.7), ist diese Gleichung äquivalent zu (3.1).

Die Gleichung (3.2) ist bereits dann sinnvoll, wenn $u \in C_1(\Omega)$ anstelle von $u \in C_2(\Omega)$ vorausgesetzt wird, aber für (3.1) genügt diese schwächere Voraussetzung nicht. Ohne die Voraussetzung $u \in C_2(\Omega)$ sind also (3.1) und (3.2) im allgemeinen nicht mehr äquivalent. Funktionen, die (3.2) erfüllen, nennt man schwache Lösungen von (3.1).

Damit ist der Begriff einer Lösung der Differentialgleichung (3.1) verallgemeinert. Um schwache Lösungen von Randwertproblemen zu definieren, muß auch die Randbedingung verallgemeinert werden. Hierzu benützt man, daß für jede offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nach Definition des Sobolevraumes $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$

$$\overset{\circ}{H}_1(\Omega) = \overline{\overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)}^{H_1(\Omega)}$$

gilt (siehe Skriptum "Variationsrechnung und Sobolevräume, Definition 2.15), und somit jedes $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ durch eine Folge von Funktionen bezüglich der Norm des Sobolevraumes $H_1(\Omega)$ approximiert werden kann, die alle in einer Umgebung des Randes $\partial\Omega$ verschwinden. Denn zu jeder Funktion aus $\overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ gibt es eine Umgebung von $\partial\Omega$, in der diese Funktion verschwindet. Zur Verallgemeinerung der Bedingung $u_{|\partial\Omega} = 0$ verlangt man daher $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Wenn u zu diesem Sobolevraum gehört, sagt man, u erfülle die Randbedingung

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

im schwachen Sinn.

Für lineare Differentialgleichungen ist es sinnvoll und oft hilfreich, komplexwertige Lösungen $u : \Omega \to \mathbb{C}$ zuzulassen. Wenn nichts anderes gesagt ist, sind daher in diesem Kapitel mit $L^2(\Omega)$, $H_m(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}_m(\Omega)$, ... die Räume $L^2(\Omega, \mathbb{C})$, $H_m(\Omega, \mathbb{C})$, $\overset{\circ}{H}_m(\Omega, \mathbb{C})$ mit den Skalarprodukten

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx\,, (u, v)_{m,\Omega} = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha u(x)\overline{D^\alpha v(x)}\,dx$$

gemeint. Natürlich können die folgenden Definitionen und Resultate durch Einschränkung auf reellwertige Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ spezialisiert werden.

Zusammen erhält man nun folgende Definition:

3.1.1 Definition (Schwache Lösung des homogenen Dirichletschen Randwertproblems). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, seien $a_{ij}, b_i, c \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ und sei $f \in L^2(\Omega)$. Eine Funktion $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ heißt schwache Lösung zum homogenen Dirichletschen Randwertproblem

$$\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) + B(x)\cdot\nabla u(x) + c(x)u(x) = f(x)\,,\ x \in \Omega \tag{3.3}$$

$$u(x) = 0\,,\ x \in \partial\Omega\,, \tag{3.4}$$

wenn für alle $v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ gilt

$$-\,(A\nabla u, \nabla v)_\Omega + (B\cdot\nabla u + cu - f\,, v)_\Omega = 0\,. \tag{3.5}$$

Die Gleichung (3.5) erhält man aus (3.2), indem man $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ durch $v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ ersetzt. Obwohl also die Gültigkeit von (3.5) für eine größere Menge von Funktionen als (3.2) gefordert wird, ist dies keine Verschärfung von (3.2), weil $\overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ dicht ist in $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ und weil unter den angegebenen Voraussetzungen $A\nabla u$, $B \cdot \nabla u + cu - f \in L^2(\Omega)$ sind. Wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes gilt somit (3.5) für alle $v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$, genau dann wenn diese Gleichung für alle $v \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ erfüllt ist.

Bisher wurden nur schwache Lösungen des Dirichletproblems zur homogenen Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ definiert. Um schwache Lösungen des Dirichletproblems zur inhomogenen Randbedingung

$$u|_{\partial\Omega} = g$$

zu definieren, beachte man, daß wenn $G \in C_2(\overline{\Omega})$ gegeben ist mit $g = G_{|\partial\Omega}$, dann formal für $w = u - G$ gilt

$$w|_{\partial\Omega} = 0$$

und

$$\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla w(x)\Big) + B(x) \cdot \nabla w(x) + c(x)w(x) = h(x)\,,$$

wobei

$$h(x) = f(x) - \operatorname{div}\Big(A(x)\nabla G(x)\Big) - B(x) \cdot \nabla G(x) - c(x)G(x)$$

sei. Also definiert man

3.1.2 Definition (Schwache Lösung des inhomogenen Dirichletschen Randwertproblems). Seien $g \in H_2(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Eine Funktion $u \in H_1(\Omega)$ heißt schwache Lösung von

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) + B(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) = f(x)\,,\ x \in \Omega\\ u(x) = g(x)\,,\ x \in \partial\Omega\,,\end{gathered}$$

wenn $w = u - g \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ gilt mit

$$-\,(A\nabla w, \nabla v)_\Omega + (B \cdot \nabla w + cw - h, v)_\Omega = 0 \tag{3.6}$$

für alle $v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$, wobei

$$h(x) = f(x) - \operatorname{div}\Big(A(x)\nabla g(x)\Big) - B(x)\cdot\nabla g(x) - c(x)g(x)\,.$$

sei.

Es sei $M(g)$ die Menge der schwachen Lösungen zur Funktion g. Diese Menge hängt nur von den Randwerten von g ab. Seien also $g_1, g_2 \in H_2(\Omega)$ Funktionen mit denselben Randwerten, also mit $g_1 - g_2 \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Dann gilt $M(g_1) = M(g_2)$.

Denn sei $u \in M(g_1)$. Dann ist $u = w + g_1$, wobei $w \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ Lösung von (3.6) ist mit zu g_1 gehörendem h. Schreibe u in der Form $u = w + (g_1 - g_2) + g_2$. Man prüft sofort nach, daß $w + g_1 - g_2 \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ Lösung von (3.6) ist mit zu g_2 gehörendem h. Folglich gilt $u \in M(g_2)$, also $M(g_1) \subseteq M(g_2)$. Durch Vertauschen der Rollen von g_1 und g_2 folgt die Gleichheit der Lösungsmengen. Falls insbesondere zu einer gegebenen Funktion $g_1 \in H_2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung u existiert, ergibt sich dieselbe Lösung u bei jeder anderen Wahl von $g_2 \in H_2(\Omega)$ mit $g_2 - g_1 \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$.

Damit ist die Lösung des Dirichletschen Randwertproblems zur inhomogenen Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = g$ auf die Lösung eines Dirichletschen Randwertproblems mit homogener Randbedingung zurückgeführt, weil sich die Lösung u des inhomogenen Problems in der Form $u = w + g$ darstellen läßt, wobei w Lösung von (3.6) und damit Lösung eines Dirichletproblems mit homogener Randbedingung ist. Es genügt also, im folgenden Dirichletprobleme mit homogener Randbedingung zu behandeln.

Die Bedeutung von schwachen Lösungen ergibt sich aus der Existenztheorie für Randwertprobleme zu elliptischen Gleichungen, die in diesem Kapitel behandelt wird. Diese Theorie ergibt in natürlicher Weise die Existenz von schwachen Lösungen. Ob die erhaltenen schwachen Lösungen sogar klassische Lösungen sind, muß nachträglich untersucht werden. Der Beweis, daß (3.3), (3.4) klassische Lösungen besitzt, wird also in zwei getrennte Schritte zerlegt: Im ersten Schritt wird die Existenz der schwachen Lösung gezeigt, und im zweiten Schritt wird die Regularität dieser schwachen Lösung untersucht. In diesem Kapital beschäftige ich mich mit den Existenzuntersuchungen des ersten Schrittes, wobei ich voraussetzen muß, daß die partielle Differentialgleichung nicht nur elliptisch, sondern gleichmäßig elliptisch ist.

3.2 Definition (Gleichmäßige Elliptizität). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Der Differentialoperator

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + c(x) u(x)$$

heißt gleichmäßig elliptisch in Ω, wenn a_{ij}, b_i, $c \in C(\Omega, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ sind und wenn eine Konstante $c_0 > 0$ existiert mit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Man nennt c_0 Elliptizitätskonstante des Differentialoperators. Die Differentialgleichung (3.1) heißt gleichmäßig elliptisch in Ω, wenn der Differentialoperator auf der linken Seite dieser Gleichung gleichmäßig elliptisch ist in Ω.

3.3 Sesquilinearform zum Differentialoperator. Es sei

$$\operatorname{div} \big(A(x) \nabla u(x) \big) + B(x) \cdot \nabla u(x) + c(x) u(x)$$

ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator in Ω. Für $u, v \in H_1(\Omega, \mathbb{C})$ sei

$$a(u,v) = (A \nabla u, \nabla v)_\Omega - (B \cdot \nabla u + cu, v)_\Omega .$$

Die Abbildung $a : H_1(\Omega, \mathbb{C}) \times H_1(\Omega, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ hat folgende Eigenschaften: Für $u, v, w \in H_1(\Omega, \mathbb{C})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} a(\lambda u + \mu v, w) &= \lambda a(u,w) + \mu a(v,w) \\ a(u, \lambda v + \mu w) &= \overline{\lambda} a(u,v) + \overline{\mu} a(u,w) . \end{aligned}$$

Also ist a eine Sesquilinearform auf dem komplexen Hilbertraum $H_1(\Omega, \mathbb{C})$ und Bilinearform auf dem reellen Raum $H_1(\Omega, \mathbb{R})$. Man nennt a die zum Differentialoperator $\operatorname{div}(A \nabla u) + B \cdot \nabla u + cu$ gehörende Sesquilinearform beziehungsweise Bilinearform. Nach Definition 3.1.1 ist $u \in \mathring{H}_1(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems (3.3), (3.4), genau dann wenn

$$a(u,v) = -(f,v)_\Omega$$

gilt für alle $v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Um zu zeigen, daß schwache Lösungen des Randwertproblems existieren, muß also diese Hilbertraumgleichung gelöst werden.

Ich werde erst den einfacheren Fall betrachten, daß der Differentialoperator von der Form $\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + \lambda u(x)$ ist mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und symmetrischer Matrix $A(x)$. Zunächst werde ich reelle Funktionenräume zugrunde legen.

3.4 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Der Differentialoperator $\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x))$ sei gleichmäßig elliptisch in Ω, es gelte $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n^2})$, und für alle $x \in \Omega$ sei $A(x)$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt:*
(i) Für $\lambda < 0$ ist die zugehörige Bilinearform

$$a_\lambda(u,v) = (A\nabla u, \nabla v)_\Omega - \lambda(u,v)_\Omega$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum $H_1(\Omega,\mathbb{R})$. Für die zugehörige Norm $a_\lambda(u,u)^{1/2}$ gilt

$$\min(c_0, -\lambda)^{1/2}\|u\|_{2,1,\Omega} \le a_\lambda(u,u)^{1/2} \le \max(\|A\|_{\infty,0,\Omega}\,, -\lambda)^{1/2}\|u\|_{2,1,\Omega}$$

wobei c_0 die Elliptizitätskonstante von $\operatorname{div}(A\nabla u)$ ist.
(ii) Sei Ω beschränkt. Dann ist $a_\lambda(u,v)$ ein Skalarprodukt auf $\overset{\circ}{H}_1(\Omega,\mathbb{R})$ für alle $\lambda < \frac{c_0}{d^2}$ mit

$$\min\left(\frac{c_0}{2}\,, \frac{c_0}{d^2} - \lambda\right)^{1/2} \|u\|_{2,1,\Omega} \le a_\lambda(u,u)^{1/2} \le \max\left(\|A\|_{\infty,0,\Omega}\,, |\lambda|\right)^{1/2} \|u\|_{2,1,\Omega}\,,$$

wobei $d = \sup\limits_{x,y\in\Omega} |x-y|$ der Durchmesser von Ω sei.

Beweis. (i) $a_\lambda(u,v)$ ist bilinear und wegen der Symmetrie von $A(x)$ auch symmetrisch. Denn es gilt

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big(A(x)\nabla u(x)\Big) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \Big(A(x)\nabla v(x)\Big) dx = a(v,u)\,.$$

Wegen der Elliptizität von $\operatorname{div}(A\nabla u)$ ist

$$\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) \cdot \nabla u(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u \, \frac{\partial}{\partial x_j} u \ge c_0 |\nabla u(x)|^2\,.$$

Also gilt für $u \in H_1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
a_\lambda(u,u) &= \int_\Omega \Big[\Big(A(x)\nabla u(x)\Big)\cdot \nabla u(x) - \lambda|u(x)|^2\Big]dx \\
&\geq \int_\Omega c_0|\nabla u(x)|^2 - \lambda|u(x)|^2 dx \\
&\geq \min(c_0,-\lambda)\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 dx \\
&= \min(c_0,-\lambda)\|u\|^2_{2,1,\Omega}\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß $a_\lambda(u,v)$ ein Skalarprodukt ist. Wegen dieser Abschätzung und wegen

$$\begin{aligned}
a_\lambda(u,u)^{1/2} &= \Big[\int_\Omega \Big(A(x)\nabla u(x)\Big)\cdot \nabla u(x) - \lambda|u(x)|^2 dx\Big]^{1/2} \\
&\leq \Big(\|A\nabla u\|_{2,0,\Omega}\,\|\nabla u\|_{2,0,\Omega} - \lambda\|u\|^2_{2,0,\Omega}\Big)^{1/2} \\
&\leq \max\Big(\|A\|_{\infty,0,\Omega}\,,\,-\lambda\Big)^{1/2}\Big(\|\nabla u\|^2_{2,0,\Omega} + \|u\|^2_{2,0,\Omega}\Big)^{1/2} \\
&= \max\Big(\|A\|_{\infty,0,\Omega}\,,\,-\lambda\Big)^{1/2}\|u\|_{2,1,\Omega}
\end{aligned}$$

ist die zugehörige Norm äquivalent zu $\|\cdot\|_{2,1,\Omega}$.
(ii) Für $u \in \mathring{H}_1(\Omega)$ folgt aus der obenstehenden Ungleichung

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\geq c_0|u|^2_{2,1,\Omega} = \frac{c_0}{2}|u|^2_{2,1,\Omega} + \frac{c_0}{2}|u|^2_{2,1,\Omega} \\
&\geq \frac{c_0}{2}|u|^2_{2,1,\Omega} + \frac{c_0}{d^2}\,\|u\|^2_{2,0,\Omega}\,,
\end{aligned}$$

wobei die für beschränkte Gebiete und für $u \in \mathring{H}_1(\Omega)$ gültige Poincarésche Ungleichung

$$\|u\|_{2,0,\Omega} \leq 2^{-1/2} d|u|_{2,1,\Omega}$$

angewandt wurde. Hierbei ist

$$|u|_{2,1,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=1}\|D^\alpha u\|^2_{2,0,\Omega}\right)^{1/2} = \|\nabla u\|_{2,0,\Omega}\,.$$

Somit folgt

$$a_\lambda(u,u) \geq \frac{c_0}{2}\,|u|^2_{2,1,\Omega} + \Big(\frac{c_0}{d^2} - \lambda\Big)\,\|u\|^2_{2,0,\Omega} \geq \min\Big(\frac{c_0}{2}\,,\,\frac{c_0}{d^2} - \lambda\Big)\,\|u\|^2_{2,1,\Omega}\,.$$

Also ist $a_\lambda(u,v)$ ein Skalarprodukt auf $\mathring{H}_1(\Omega)$. Die Äquivalenz der Normen folgt wie oben.

3.5 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, der Differentialoperator* $\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x))$ *sei gleichmäßig elliptisch in Ω, es gelte $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n^2})$, und für alle $x \in \Omega$ sei $A(x)$ symmetrisch.*
(i) Sei $\lambda < 0$. Dann existiert zu jedem $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ ein eindeutiges $u \in \mathring{H}_1(\Omega, \mathbb{R})$ mit

$$a_\lambda(u,v) = -(f,v)_\Omega$$

für alle $v \in \mathring{H}_1(\Omega, \mathbb{R})$. Für u gilt

$$\|u\|_{2,1,\Omega} \le \frac{1}{\min(c_0, -\lambda)} \|f\|_{2,0,\Omega}\,.$$

(ii) Sei Ω beschränkt und sei $\lambda \le \frac{c_0}{d^2}$. Dann existiert zu jedem $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ ein eindeutiges $u \in \mathring{H}_1(\Omega, \mathbb{R})$ mit

$$a_\lambda(u,v) = (-f,v)_\Omega$$

für alle $v \in \mathring{H}_1(\Omega, \mathbb{R})$. Für u gilt

$$\|u\|_{2,1,\Omega} \le \frac{2}{\min(\frac{c_0}{2}, \frac{c_0}{d^2} - \lambda)} \|f\|_{2,0,\Omega}\,.$$

Beweis. (i) Betrachte den Raum $\mathring{H}_1(\Omega, \mathbb{R})$ als Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $a_\lambda(u,v)$. Durch $F(v) = -(f,v)_\Omega$ wird ein lineares Funktional $F : \mathring{H}_1(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert. Dieses Funktional ist stetig. Denn es gilt für $v \in \mathring{H}_1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |F(v)| &= |-(f,v)_\Omega| \le \|f\|_{2,0,\Omega}\,\|v\|_{2,0,\Omega} \\ &\le \|f\|_{2,0,\Omega}\,\|v\|_{2,1,\Omega} \le \|f\|_{2,0,\Omega}\,\frac{1}{\min(c_0,-\lambda)^{1/2}}\,a_\lambda(v,v)^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei zur Abschätzung von $\|v\|_{2,1,\Omega}$ Satz 3.4 angewandt wurde. Also gilt für die Norm von F

$$\|F\| \le \frac{1}{\min(c_0,-\lambda)^{1/2}} \|f\|_{2,0,\Omega}\,. \tag{3.7}$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es nun ein eindeutiges $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega, \mathbb{R})$ mit

$$a_\lambda(u, v) = F(v) = -(f, v)_\Omega\,, \quad v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega, \mathbb{R})\,,$$

und mit $a_\lambda(u, u)^{1/2} = \|F\|$, weil $a_\lambda(v, v)^{1/2}$ die zum Skalarprodukt $a_\lambda(v, w)$ gehörende Norm auf $\overset{\circ}{H}_1(\Omega, \mathbb{R})$ ist. Durch erneute Anwendung von Satz 3.4 folgt somit aus (3.7)

$$\|u\|_{2,1,\Omega} \le \frac{1}{\min(c_0, -\lambda)^{1/2}}\, a_\lambda(u, u)^{1/2} \le \frac{1}{\min(c_0, -\lambda)}\, \|f\|_{2,0,\Omega}\,.$$

Dies beweist (i). Der Beweis von (ii) verläuft analog. Anstelle der Abschätzung aus Satz 3.4 (i) wird die Abschätzung aus Teil (ii) dieses Satzes verwendet.

3.6 Folgerung (Existenz von schwachen Lösungen des Dirichletproblems). *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.5 (i) beziehungsweise Satz 3.5 (ii) besitzt des Randwertproblem*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) + \lambda u(x) &= f(x)\,, \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0\,, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

eine eindeutige schwache Lösung $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega, \mathbb{R})$.

Beweis. Definition 3.1.1 und Satz 3.5

Dieses Ergebnis soll nun auf allgemeine Differentialoperatoren der Form

$$\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) + B(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) - \lambda u(x)$$

ausgedehnt werden, wobei ich für die Zahl λ, den Eigenwertparameter, auch komplexe Werte zulassen möchte. Dann muß man die Lösung im komplexen Funktionenraum $H_1(\Omega, \mathbb{C})$ suchen. Zur Lösung von Randwertproblemen in diesem Funktionenraum braucht man den Satz von Lax-Milgram:

3.7 Satz (von Lax-Milgram). *Sei H ein reeller oder komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt (u,v) und Norm $\|u\|$, und sei*

$$a : H \times H \to \mathbb{C}$$

eine Sequilinearform (beziehungsweise Bilinearform im reellen Fall). Wenn positive Konstanten c, C existieren mit

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq C\|u\|\,\|v\| \\ |a(u,u)| &\geq c\|u\|^2 \end{aligned}$$

für alle $u, v \in H$, dann existiert eine bijektive, stetige lineare Abbildung $M : H \to H$ mit

$$a(u,v) = (u, Mv)$$

für alle $u, v \in H$. Weiter gilt

$$\|M\| \leq C\,, \quad \|M^{-1}\| \leq \frac{1}{c}\,.$$

Beweis. Für jedes $v \in H$ ist

$$u \mapsto a(u,v) : H \to \mathbb{C}$$

eine lineare Abbildung. Wegen

$$|a(u,v)| \leq C\|v\|\,\|u\|$$

ist diese Abbildung stetig. Also existiert nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein eindeutiges Element, das mit Mv bezeichnet wird, so daß

$$a(u,v) = (u, Mv)$$

gilt für alle $u \in H$. Außerdem folgt aus dem Rieszschen Satz, daß

$$\|Mv\| \leq C\|v\|\,.$$

Der Operator M ist linear. Denn für $v, w \in H$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und alle $u \in H$ gilt

$$\begin{aligned} \big(u, M(\lambda v + \mu w)\big) &= a(u, \lambda v + \mu w) = \overline{\lambda} a(u,v) + \overline{\mu} a(u,w) \\ &= \overline{\lambda}(u, Mv) + \overline{\mu}(u, Mw) = (u, \lambda Mv + \mu Mw)\,. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß

$$M(\lambda v + \mu w) = \lambda M v + \mu M w$$

ist. Somit ist M ein linearer Operator, der beschränkt, also stetig ist.

Für alle $u \in H$ gilt

$$c\|u\|^2 \leq |a(u,u)| = |(u, Mu)| \leq \|u\| \, \|Mu\| \, .$$

Folglich ist

$$\|u\| \leq \frac{1}{c}\|Mu\| \, .$$

Hieraus folgt $u = 0$, falls $Mu = 0$ ist, also ist $N(M) = \{0\}$, und somit ist M injektiv. Es folgt auch, daß der Wertebereich von M abgeschlossen ist. Denn sei $v \in \overline{M(H)}$. Dann existiert eine Folge $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ mit $Mu_m \to v$. Dies bedeutet, daß

$$\|u_m - u_\ell\| \leq \frac{1}{c}\|M(u_m - u_\ell)\| = \frac{1}{c}\|Mu_m - Mu_\ell\| \to 0$$

für $\ell, m \to \infty$. Somit ist $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ eine Cauchy–Folge in H. Wegen der Stetigkeit von M gilt für den Grenzwert u dieser Folge

$$Mu = M(\lim_{m\to\infty} u_m) = \lim_{m\to\infty} Mu_m = v \, ,$$

also $v \in M(H)$. Dies bedeutet, daß $M(H)$ abgeschlossen ist.

Es bleibt zu zeigen, daß M surjektiv ist. Wäre $M(H) \neq H$, existierte nach dem Projektionssatz ein $w \neq 0$ mit $(w, v) = 0$ für alle $v \in M(H)$. Insbesondere würde für $v = Mw$ gelten

$$0 = |(w, Mw)| = |a(w,w)| \geq c\|w\|^2 \, ,$$

also muß doch $w = 0$ sein, und folglich ist M surjektiv, also bijektiv. Aus obenstehender Ungleichung folgt

$$\|M^{-1}u\| \leq \frac{1}{c}\|MM^{-1}u\| = \frac{1}{c}\|u\| \, ,$$

also

$$\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{c} \, .$$

Um dieses Resultat auf die Sesquilinearform zu einem Differentialoperator anwenden zu können, benötigt man folgendes Resultat:

3.8 Satz (Gårdingsche Ungleichung). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei*

$$\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) + B(x)\cdot\nabla u(x) + c(x)u(x)$$

ein linearer, gleichmäßig elliptischer Differentialoperator in Ω mit Koeffizienten $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n^2})$, $B \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

(i) Es existiert eine Konstante C_1, so daß für die zu diesem Differentialoperator gehörende Sesquilinearform a und für alle $u, v \in H_1(\Omega, \mathbb{C})$

$$|a(u,v)| \leq C_1 \|u\|_{2,1,\Omega}\|v\|_{2,1,\Omega}$$

gilt mit $C_1 = \|A\|_{\infty,0,\Omega} + \|B\|_{\infty,0,\Omega}, + \|c\|_{\infty,0,\Omega}$, wobei

$$\|A\|_{\infty,0,\Omega} = \Bigg\| \Bigg[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}(\cdot)^2\Bigg]^{1/2} \Bigg\|_{\infty,0,\Omega}, \quad \|B\|_{\infty,0,\Omega} = \Bigg\| \Bigg[\sum_{i=1}^{n} b_i(\cdot)^2\Bigg]^{1/2} \Bigg\|_{\infty,0,\Omega}$$

sei.

(ii) Sei c_0 die Elliptizitätskonstante. Dann gilt für alle $u \in H_1(\Omega, \mathbb{C})$

$$Re\ a(u,u) \geq \frac{c_0}{2}|u|^2_{2,1,\Omega} - c_1\|u\|^2_{2,0,\Omega}$$

mit

$$c_1 = \frac{1}{2c_0}\|B\|^2_{\infty,0,\Omega} + \|c\|_{\infty,0,\Omega} \geq 0\,.$$

(Gårdingsche Ungleichung)

Beweis. (i) Es gilt für $u, v \in H_1(\Omega, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= |(A\nabla u, \nabla v)_\Omega - (B\nabla u + cu, v)_\Omega| \\
&\leq \|A\|_{\infty,0,\Omega}|u|_{2,1,\Omega}|v|_{2,1,\Omega} + \|B\|_{\infty,0,\Omega}|u|_{2,1,\Omega}\|v\|_{2,0,\Omega} \\
&\quad + \|c\|_{\infty,0,\Omega}\|u\|_{2,0,\Omega}\|v\|_{2,0,\Omega} \\
&\leq \Big(\|A\|_{\infty,0,\Omega} + \|B\|_{\infty,0,\Omega} + \|c\|_{\infty,0,\Omega}\Big)\|u\|_{2,1,\Omega}\|v\|_{2,1,\Omega}\,.
\end{aligned}$$

(ii) Für $u = v + iw$ mit $v, w \in H_1(\Omega, \mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}
(A\nabla u, \nabla u)_\Omega &= \Big(A(\nabla v + i\nabla w)\,, \nabla v + i\nabla w\Big)_\Omega \\
&= (A\nabla v, \nabla v)_\Omega + (A\nabla w, \nabla w)_\Omega + i(A\nabla w, \nabla v)_\Omega - i(A\nabla v, \nabla w)_\Omega \\
&= (A\nabla v, \nabla v)_\Omega + (a\nabla w, \nabla w)_\Omega + i\Big[(A\nabla w, \nabla v)_\Omega - (\nabla w, A\nabla v)_\Omega\Big] \\
&= (A\nabla v, \nabla v)_\Omega + (A\nabla w, \nabla w)_\Omega + i\Big((A - A^T)\nabla w, \nabla v\Big)_\Omega\,.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde benützt, daß $(A\nabla v, \nabla w)_\Omega = (\nabla w, A\nabla v)_\Omega$ ist, weil alle auftretenden Funktionen ihre Werte in $\mathbb{R}^n$ oder in $\mathbb{R}^{n^2}$ annehmen. Wegen Re $[i((A - A^T)\nabla w, \nabla v)_\Omega] = 0$ folgt also mit der Elliptizitätskonstanten c_0

$$
\begin{aligned}
&\text{Re } a(u,u)\\
&\quad = \text{ Re } \Big[(A\nabla u, \nabla u)_\Omega - (B\nabla u + cu, u)_\Omega\Big]\\
&\quad = (A\nabla v, \nabla v)_\Omega + (A\nabla w, \nabla w)_\Omega - \text{ Re } (B\nabla u + cu, u)_\Omega\\
&\quad = \int_\Omega \sum_{j,i=1}^n a_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}v(x)\frac{\partial}{\partial x_i}v(x)dx + \int_\Omega \sum_{j,i=1}^n a_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}w(x)\frac{\partial}{\partial x_i}w(x)dx\\
&\qquad - \text{ Re } (B\nabla u + cu, u)_\Omega\\
&\quad \geq c_0 \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 + |\nabla w(x)|^2 dx - |(B\nabla u + cu, u)_\Omega|\\
&\quad \geq c_0\|\nabla u\|_{2,0,\Omega}^2 - \|B\|_{\infty,0,\Omega}\|\nabla u\|_{2,0,\Omega}\|u\|_{2,0,\Omega} - \|c\|_{\infty,0,\Omega}\|u\|_{2,0,\Omega}^2\,,\\
&\quad \geq c_0|u|_{2,1,\Omega}^2 - \|B\|_{\infty,0,\Omega}\left(\frac{\delta}{2}|u|_{2,1,\Omega}^2 + \frac{1}{2\delta}\|u\|_{2,0,\Omega}^2\right) - \|c\|_{\infty,0,\Omega}\|u\|_{2,0,\Omega}^2\,,
\end{aligned}
$$

wobei die für alle $\delta > 0$ gültige Ungleichung $ab \leq \frac{\delta}{2}a^2 + \frac{1}{2\delta}b^2$ verwendet wurde. Mit $\delta = c_0/\|B\|_{\infty,0,\Omega}$ folgt

$$\text{Re } a(u,u) \geq \frac{c_0}{2}|u|_{2,1,\Omega}^2 - \left(\frac{1}{2c_0}\|B\|_{\infty,0,\Omega}^2 + \|c\|_{\infty,0,\Omega}\right)\|u\|_{2,0,\Omega}^2\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

3.9 Definitionsbereich einer Sesquilinearform. Sei H ein Hilbertraum, V ein linearer Teilraum von H und $a : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform. Man sagt dann auch, a sei eine Sesquilinearform auf H mit dem Definitionsbereich $V \times V$.
Als Beispiel betrachte man die zu div $(A\nabla u) + B \cdot \nabla u + cu$ gehörende Sesquilinearform

$$a(u,v) = (A\nabla u, \nabla v)_\Omega - (B \cdot \nabla u + cu, v)_\Omega\,,$$

die unter den Bedingungen, die in diesem Kapitel an den Differentialoperator gestellt werden, für alle $u, v \in H_1(\Omega)$ definiert ist. a ist also eine Sesquilinearform auf $H_1(\Omega) \times H_1(\Omega)$. Wenn V ein linearer Teilraum von $H_1(\Omega)$ ist, erhält man durch Einschränkung von a auf $V \times V$ eine Sesquilinearform auf diesem Raum. Beispielsweise setzt man häufig $V = \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ und betrachtet a als Sesquilinearform auf $\overset{\circ}{H}_1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Oft ist es aber vorteilhaft, a als Sesquilinearform auf $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ zu betrachten mit dem Definitionsbereich $D(a) = V \times V$, der ein Teilraum von $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ist.

3.10 Definition. Sei H ein Hilbertraum mit Norm $\| \cdot \|$, $V \subseteq H$ ein Teilraum, und a eine Sesquilinearform auf H mit Definitionsbereich $D(a) = V \times V$. Die Menge

$$\theta(a) = \{a(u,u) \mid u \in V, \|u\| = 1\}$$

heißt numerischer Wertebereich von a.

Beachte, daß in der Definition von $\theta(a)$ die Norm des übergeordneten Raumes H auftritt.

3.11 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, sei*

$$\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) + B(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x)$$

ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator in Ω mit Koeffizienten $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n^2})$, $B \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Sei V ein Teilraum von $H_1(\Omega, \mathbb{C})$ und sei a die zu diesem Differentialoperator gehörende Sesquilinearform auf $L^2(\Omega, \mathbb{C}) \times L^2(\Omega, \mathbb{C})$ mit Definitionsbereich $V \times V$. Dann existieren Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$, so daß für die Sesquilinearform

$$a_\lambda(u,v) = a(u,v) - \lambda(u,v)_\Omega$$

mit Definitionsbereich $V \times V$

(i) $$|a_\lambda(u,v)| \le (c_1 + |\lambda|)\, \|u\|_{2,1,\Omega}\, \|v\|_{2,1,\Omega}$$

und

(ii) $$\|u\|_{2,1,\Omega}^2 \le \Big(\frac{c_2}{\operatorname{dist}(\lambda, \theta(a))} + c_3\Big)\, |a_\lambda(u,u)|$$

gilt, wenn $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{C} \backslash \overline{\theta(a)}$.

Beweis. Die Ungleichung (i) folgt direkt aus der Definition von a_λ und aus Satz 3.8. Zum Beweis von (ii) sei $u \in V \subseteq H_1(\Omega)$ mit $u \neq 0$ und sei

$$v = \frac{u}{\|u\|_{2,0,\Omega}}\,.$$

Wegen $\|v\|_{2,0,\Omega} = 1$ gilt

$$\begin{aligned} |a_\lambda(u,u)| &= |a(u,u) - \lambda(u,u)_\Omega| \\ &= |a(v,v) - \lambda(v,v)_\Omega|\, \|u\|^2_{2,0,\Omega} \\ &= |a(v,v) - \lambda|\, \|u\|^2_{2,0,\Omega} \geq \operatorname{dist}\big(\lambda, \theta(a)\big)\, \|u\|^2_{2,0,\Omega}\,, \end{aligned}$$

wegen $a(v,v) \in \theta(a)$. Hieraus und aus der Gårdingschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |u|^2_{2,1,\Omega} &\leq \frac{2}{c_0}\Big(\operatorname{Re} a(u,u) + c_1\|u\|^2_{2,0,\Omega}\Big) \leq \frac{2}{c_0}\Big(|a(u,u)| + c_1\|u\|^2_{2,0,\Omega}\Big) \\ &\leq \frac{2}{c_0}\Big(|a(u,u) - \lambda(u,u)_\Omega| + |\lambda(u,u)_\Omega| + c_1\|u\|^2_{2,0,\Omega}\Big) \\ &\leq \frac{2}{c_0}\left(1 + \frac{|\lambda| + c_1}{\operatorname{dist}(\lambda,\theta(a))}\right) |a(u,u) - \lambda(u,u)_\Omega|\,. \end{aligned}$$

Zusammen resultiert

$$\|u\|^2_{2,1,\Omega} = \|u\|^2_{2,0,\Omega} + |u|^2_{2,1,\Omega} \leq \left[\frac{\frac{2}{c_0}(|\lambda| + c_1) + 1}{\operatorname{dist}(\lambda,\theta(a))} + \frac{2}{c_0}\right] |a_\lambda(u,u)|\,.$$

Dies ist die Ungleichung (ii).

3.12 Folgerung (Existenz von schwachen Lösungen zu allgemeinen Differentialoperatoren. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Der Differentialoperator*

$$\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u(x)\big) + B(x)\cdot\nabla u(x) + c(x)u(x)$$

erfülle die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes. Sei a die zu diesem Differentialoperator gehörende Sesquilinearform auf $L^2(\Omega,\mathbb{C}) \times L^2(\Omega,\mathbb{C})$ mit Definitionsbereich $\mathring{H}_1(\Omega,\mathbb{C}) \times \mathring{H}_1(\Omega,\mathbb{C})$. Dann gibt es zu jedem $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\theta(a)}$

und zu jedem $f \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$ *eine eindeutige schwache Lösung* $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega, \mathbb{C})$ *des Randwertproblems*

$$\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) + B(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) + \lambda u(x) = f(x)\,, \quad x \in \Omega$$

$$u(x) = 0\,, \quad x \in \partial\Omega\,.$$

Für die Lösung gilt mit den Konstanten c_2 *und* c_3 *aus Satz 3.11*

$$\|u\|_{2,1,\Omega} \leq \left(\frac{c_2}{\operatorname{dist}(\lambda, \theta(a))} + c_3\right) \|f\|_{2,0,\Omega}\,.$$

Beweis. Zu zeigen ist, daß zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ ein eindeutiges $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ existiert mit

$$a_\lambda(u, v) = -(f, v)_\Omega\,, \quad v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)\,,$$

wobei $a_\lambda(u, v) = a(u, v) - \lambda(u, v)_\Omega$ sei.

Wie früher definiere man eine stetige und lineare Abbildung $F : \overset{\circ}{H}_1(\Omega) \to \mathbb{C}$ durch

$$F(v) = -(v, f)_\Omega\,.$$

Die Stetigkeit von F folgt aus

$$|F(v)| = |(v, f)_\Omega| \leq \|v\|_\Omega \, \|f\|_\Omega \leq \|f\|_\Omega \, \|v\|_{1,\Omega}\,.$$

Hieraus ergibt sich auch $\|F\| \leq \|f\|_\Omega$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es also ein eindeutiges $w \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ mit $\|w\|_{1,\Omega} \leq \|f\|_\Omega$ und mit

$$(v, w)_{1,\Omega} = -(v, f)_\Omega$$

für alle $v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$.

Aus Satz 3.11 folgt, daß die Sequilinearform $a_\lambda(u, v)$ auf $\overset{\circ}{H}_1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ alle Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram erfüllt und damit auch die Sesquilinearform

$$a^*_\lambda(u, v) = \overline{a_\lambda(v, u)}\,.$$

Also existiert eine bijektive stetige lineare Abbildung $M : \overset{\circ}{H}_1(\Omega) \to \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ mit

$$a^*_\lambda(v, \tilde{v}) = (v, M\tilde{v})_{1,\Omega}$$

für alle $v, \tilde{v} \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Außerdem folgt aus dem Satz von Lax-Milgram und aus Satz 3.11, daß

$$\|M^{-1}\| \leq \left(\frac{c_2}{\operatorname{dist}(\lambda, \theta(a))} + c_3\right).$$

Setze $u = M^{-1}w$. Dann folgt für alle $v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$, daß

$$a_\lambda^*(v, u) = (v, Mu)_{1,\Omega} = (v, w)_{1,\Omega} = -(v, f)_\Omega$$

und somit

$$a_\lambda(u, v) = \overline{a_\lambda^*(v, u)} = -\overline{(v, f)_\Omega} = -(f, v)_\Omega .$$

Also ist u schwache Lösung des Randwertproblems. Für die Norm von u gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\Omega} &\leq \|M^{-1}\| \, \|w\|_{1,\Omega} \leq \|M^{-1}\|_{1,\Omega} \, \|f\|_{0,\Omega} \\ &\leq \left(\frac{c_2}{\operatorname{dist}(\lambda, \theta(a))} + c_3\right) \|f\|_{0,\Omega} . \end{aligned}$$

u ist die einzige schwache Lösung. Denn sei $\tilde{u}$ eine zweite schwache Lösung. Dann folgt

$$\begin{aligned} a_\lambda(u, -\tilde{u}, u-\tilde{u}) &= a_\lambda(u, u-\tilde{u}) - a_\lambda(\tilde{u}, u-\tilde{u}) \\ &= (f, u-\tilde{u})_\Omega - (f, u-\tilde{u})_\Omega = 0 , \end{aligned}$$

also nach Satz 3.11

$$\|u-\tilde{u}\|_{1,\Omega}^2 \leq \left(\frac{c_2}{\operatorname{dist}(\lambda, \theta(a))} + c_3\right) |a_\lambda(u-\tilde{u}, u-\tilde{u})| = 0 ,$$

und somit $\tilde{u} = u$. Damit ist der Satz bewiesen.

Um dieses Resultat bei einem gegebenen Differentialoperator anwenden zu können, muß der numerische Wertebereich der zum Differentialoperator gehörenden Sequilinearform bestimmt werden. Es gilt:

3.13 Lemma (Numerischer Wertebereich). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, sei c_0 die Elliptizitätskonstante des Differentialoperators* $\operatorname{div}\big(A(x)\nabla u(x)\big) + B(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x)$ *mit* $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n^2})$, $B \in$

$L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. Sei a die zum Differentialoperator gehörende Sequilinearform auf $L^2(\Omega,\mathbb{C}) \times L^2(\Omega,\mathbb{C})$ mit Definitionsbereich $\overset{\circ}{H}_1(\Omega,\mathbb{C}) \times \overset{\circ}{H}_1(\Omega,\mathbb{C})$. Dann ist der numerische Wertebereich $\theta(a)$ enthalten in der Menge aller $\mu \in \mathbb{C}$ mit

$$\operatorname{Re}\mu \geq -c_1 = -\Big(\frac{1}{2}\,\|B\|^2_{\infty,0,\Omega} + \|c\|_{\infty,0,\Omega}\Big) \tag{3.8}$$

$$|\operatorname{Im}\mu| \leq \frac{2}{c_0}\,\|A - A^T\|_{\infty,0,\Omega}\,(\operatorname{Re}\mu + c_1) + \|B\|_{\infty,0,\Omega}\sqrt{\frac{2}{c_0}\,(\operatorname{Re}\mu + c_1)}\,. \tag{3.9}$$

Ist Ω beschränkt, dann gilt anstelle der ersten Ungleichung

$$\operatorname{Re}\mu \geq \frac{c_0}{(\operatorname{diam}\Omega)^2} - c_1\,.$$

Beweis. Im Beweis von Satz 3.8 wurde gezeigt, daß für $u = v+iw \in H_1(\Omega,\mathbb{C})$ gilt

$$\operatorname{Im}\,(A\nabla u, \nabla u)_\Omega = \Big((A - A^T)\nabla w, \nabla v\Big)_\Omega\,.$$

Also folgt für $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega,\mathbb{C})$ mit $\|u\|_{2,0,\Omega} = 1$

$$\begin{aligned}
\Big|\operatorname{Im} a(u,u)\Big| &= \Big|\operatorname{Im}\Big[(A\nabla u, \nabla u)_\Omega - (B\nabla u + cu, u)_\Omega\Big]\Big| \\
&\leq \Big|\Big((A - A^T)\nabla w, \nabla v\Big)_\Omega\Big| + \Big|(B\nabla u, u)_\Omega\Big| \\
&\leq \|A - A^T\|_{\infty,0,\Omega}\,|w|_{2,1,\Omega}\,|v|_{2,1,\Omega} + \|B\|_{\infty,0,\Omega}\,|u|_{2,1,\Omega} \\
&\leq \|A - A^T\|_{\infty,0,\Omega}\,|u|^2_{2,1,\Omega} + \|B\|_{\infty,0,\Omega}\,|u|_{2,1,\Omega}\,.
\end{aligned}$$

Aus der Gårdingschen Ungleichung (Satz 3.8) folgt

$$0 \leq \frac{c_0}{2}\,|u|^2_{2,1,\Omega} \leq \operatorname{Re} a(u,u) + c_1\,.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen zusammen folgen die im Lemma angegebenen Abschätzungen für $\theta(a)$ bei beliebigem Ω. Bei beschränktem Ω folgt die angegebene Abschätzung aus der Gårdingschen Ungleichung und aus der Poincaréschen Ungleichung

$$|u|^2_{2,1,\Omega} \geq \frac{2}{(\operatorname{diam}\Omega)^2}\,\|u\|^2_{2,0,\Omega} = \frac{2}{(\operatorname{diam}\Omega)^2}\,,$$

die für $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ erfüllt ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

3.14 Numerischer Wertebereich für spezielle Operatoren. Aus den Ungleichungen (3.8) und (3.9) folgt, daß $\overline{\theta(a)}$ in einem Sektor der Form

$$S(\gamma,k)=\Big\{\mu\in\mathbb{C}\;\Big|\;|\operatorname{Im}\mu|\le\gamma(\operatorname{Re}\mu+k)\Big\}$$

enthalten ist mit geeigneten Konstanten $k,\gamma\ge 0$. Für alle $\lambda\in\mathbb{C}\backslash S(\gamma,k)$ besitzt das homogene Dirichletproblem eine eindeutige schwache Lösung. Wenn der Differentialoperator und die Menge Ω spezielle Eigenschaften haben, kann man den numerischen Wertebereich weiter eingrenzen:
(i) Wenn die Matrix $A(x)$ für jedes $x\in\Omega$ symmetrisch ist, dann ist $\theta(a)$ im parabolischen Bereich

$$\Big\{\mu\in\mathbb{C}\;\Big|\;|\operatorname{Im}\mu|\le\|B\|_\infty\sqrt{\frac{2}{c_0}\,(\operatorname{Re}\mu+c_1)}\Big\}$$

enthalten.
(ii) Wenn $B\equiv 0$ ist und die Matrix $A(x)$ für jedes $x\in\Omega$ symmetrisch ist, dann ist der Differentialoperator symmetrisch, und der numerische Wertebereich $\theta(a)$ ist eine Teilmenge der reellen Zahlen:

$$\theta(a)\subseteq\Big\{\mu\in\mathbb{R}\;\Big|\;\mu\ge k\Big\}\,,$$

mit $k=-\|c\|_{\infty,0,\Omega}$ bei beliebigem Ω und mit $k=-\|c\|_{\infty,0,\Omega}+c_0(\operatorname{diam}\Omega)^{-2}$ bei beschränktem Ω. Für alle λ außerhalb dieser reellen Halbachse ist das Dirichletsche Randwertproblem eindeutig lösbar.

3.15 Friedrichsche Erweiterung. Die bisher gewonnenen Ergebnisse sollen nun in die Spektraltheorie unbeschränkter Operatoren, eines Teilgebietes der Funktionalanalysis, eingeordnet werden. Hierzu muß man eine "schwache Fortsetzung" des gegebenen Differentialoperators definieren. Von jetzt ab werde ich Differentialoperatoren der Form

$$-\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big)+B(x)\cdot\nabla u(x)+c(x)u(x)-\lambda u(x)$$

betrachten, wobei das gegenüber der bisherigen Konvention umgekehrte Vorzeichen des Hauptteils und des Terms $\lambda u(x)$ nur technische Gründe hat.

Für $A\in C_1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ und $B,c\in C(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ gehören alle Funktionen $u\in\overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ zum Definitionsbereich dieser Operatoren. Genauso wie man durch die Einführung von schwachen Ableitungen den Differentialoperator ∇ vom Raum der C_1–Funktionen auf den Raum $H_1(\Omega)$ fortsetzt, kann man den Differentialoperator $-\mathrm{div}\,(A\nabla u) + B \cdot \nabla u + cu$ vom Raum $\overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ zu einem linearen Operator L auf einem größeren Raum fortzusetzen:

3.15.1 Definition Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, seien $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n^2})$, $B \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und sei

$$a(u,v) = (A\nabla u, \nabla v)_\Omega + (B\nabla u + cu, v)_\Omega\,. \tag{3.10}$$

Der Operator $L : D(L) \to L^2(\Omega)$ mit Definitionsbereich $D(L) \subseteq L^2(\Omega)$ sei folgendermaßen definiert: Eine Funktion u gehört zu $D(L)$, genau dann wenn $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ ist und wenn $f \in L^2(\Omega)$ existiert mit

$$a(u,v) = (f,v)_\Omega$$

für alle $v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Mit diesem zu $u \in D(L)$ gehörenden f definiert man den Operator L durch

$$Lu = f\,.$$

L heißt **Friedrichsche Erweiterung** des Differentialoperators $-\mathrm{div}\,(A\nabla u) + B \cdot \nabla u + cu$.

Man sagt auch, L sei ein Operator auf $L^2(\Omega)$ mit Definitionsbereich $D(L)$.

Diese Definition ist sinnvoll, weil das zu der Funktion u gehörende f eindeutig bestimmt ist. Denn sei $\tilde{f}$ eine andere Funktion mit

$$a(u,v) = (\tilde{f},v)_\Omega$$

für alle $v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Dann folgt

$$(f,v)_\Omega = a(u,v) = (\tilde{f},v)_\Omega\,,$$

also $(f-\tilde{f},v)_\Omega = 0$, also $f = \tilde{f}$, weil $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ dicht ist in $L^2(\Omega)$.

Man prüft sofort nach, daß $D(L)$ ein linearer Unterraum von $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ ist, und L ein linearer Operator ist. Aus der Definition von L und aus der Definition 3.1.1 von schwachen Lösungen von Randwertproblemen ergibt sich auch unmittelbar das folgende Resultat:

3.15.2 Lemma. *u ist schwache Lösung des Randwertproblems*

$$-\mathrm{div}\,\big(A(x)\nabla u(x)\big) + B(x)\cdot\nabla u(x) + c(x)u(x) - \lambda u(x) = f(x)\,, \quad x \in \Omega$$

$$u(x) = 0\,, \quad x \in \partial\Omega$$

genau dann wenn $u \in D(L)$ und

$$(L - \lambda I)u = f$$

gilt. Hierbei ist I die Identität auf $L^2(\Omega)$.

In vielen Fällen gilt über die in Definition 3.15.1 gemachten Voraussetzungen hinaus, daß $A \in C_1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ist. Ich will einige Konsequenzen aus der Definition von L erläutern, die sich unter dieser zusätzlichen Voraussetzung ergeben.

In diesem Fall erhält man sofort, daß

$$\overset{\circ}{C}_\infty(\Omega) \subseteq D(L)$$

gilt, und daß für $u \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$

$$Lu = -\mathrm{div}\,\big(A(x)\nabla u(x)\big) + B(x)\cdot\nabla u(x) + c(x)u(x)$$

ist, wobei alle Ableitungen auf der rechten Seite im "klassischen Sinn" zu verstehen sind. Das bedeutet, daß die Einschränkung $L|_{\overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)}$ mit dem klassischen Differentialoperator übereinstimmt. Deswegen schreibt man für alle $u \in D(L)$ anstelle von Lu auch

$$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) + B\cdot\nabla u + cu\,.$$

$\overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ und damit auch $D(L)$ ist eine dichte Teilmenge von $L^2(\Omega)$. Daher nennt man L einen dicht definierten Operator auf $L^2(\Omega)$.

Wegen $D(L) \subseteq \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ ist in der Definition von L die homogene Dirichletsche Randbedingung enthalten. Häufig betrachtet man daher L als eine zur homogenen Dirichletschen Randbedingung gehörende Fortsetzung des "klassischen" Differentialoperators $-\mathrm{div}\,(A\nabla\varphi) + B\cdot\nabla\varphi + c\varphi$ mit Definitionsbereich $\overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$. Auf ähnliche Weise kann man zu anderen Randbedingungen gehörende Fortsetzungen dieses klassischen Differentialoperators konstruieren.

3.16 Resolvente. Als direkte Konsequenz von Lemma 3.15.2 erhält man folgende Aussage: Das homogene Dirichletsche Randwertproblem

$$-\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) + B(x)\cdot\nabla u(x) + c(x)u(x) - \lambda u(x) = f(x)\,,\ x \in \Omega$$
$$u(x) = 0\,,\ x \in \partial\Omega\,,$$

besitzt genau dann zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung u, wenn der Operator $(L - \lambda I) : D(L) \subseteq L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ eine Inverse

$$(L-\lambda I)^{-1} : L^2(\Omega) \to D(L) \subseteq L^2(\Omega)$$

besitzt. Es gilt dann $u = (L-\lambda I)^{-1} f$.

3.16.1 Definition. Die Menge $\rho(L)$ aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die der lineare Operator $L - \lambda I : D(L) \to L^2(\Omega)$ eine stetig Inverse $(L-\lambda I)^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ besitzt, heißt Resolventenmenge von L. Die Menge $\Sigma(L) = \mathbb{C}\backslash\rho(L)$ heißt Spektrum von L. Die Abbildung

$$\lambda \mapsto (L-\lambda I)^{-1} : \rho(L) \to B\Big(L^2(\Omega), L^2(\Omega)\Big)$$

heißt Resolvente von L.

Anstelle von $(L-\lambda I)^{-1}$ benütze ich auch die Bezeichnung $R(\lambda, L)$. Als unmittelbare Konsequenz aus Folgerung 3.12 ergibt sich

3.17 Satz (Spektrum und numerischer Wertebereich). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, sei*

$$\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) - B(x)\cdot\nabla u(x) - c(x)u(x)$$

ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator in Ω mit Koeffizienten $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n^2})$, $B \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und sei L die Friedrichsche Erweiterung des Operators $-\operatorname{div}(A\nabla u) + B\nabla u + cu$. Dann gilt

$$\Sigma(L) \subseteq \overline{\theta(a)}\,,$$

mit der Sesquilinearform $a(u,v) = (A\nabla u, \nabla v)_\Omega + (B\nabla u + cu, v)_\Omega$. Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\theta(a)}$ gilt mit den Konstanten c_2, c_3 aus Satz 3.11

$$\|R(\lambda, L)\| \le \left(\frac{c_2}{\operatorname{dist}(\lambda, \theta(a))} + c_3\right).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß

$$\mathbb{C} \backslash \overline{\theta(a)} \subseteq \rho(L)$$

ist. Sei also $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \overline{\theta(a)}$. Nach Folgerung 3.12 besitzt das Randwertproblem

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) - B(x) \cdot \nabla u(x) - c(x)u(x) + \lambda u(x) = -f(x)\,,\ x \in \Omega \\ u(x) = 0\,,\ x \in \partial\Omega \end{gathered}$$

zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung u . Nach 3.16 bedeutet dies, daß $R(\lambda, L)$ existiert und daß $u = R(\lambda, L)f$. Aus der in Folgerung 3.12 angegebenen Abschätzung folgt

$$\|R(\lambda, L)f\|_{2,0,\Omega} = \|u\|_{2,0,\Omega} \le \|u\|_{2,1,\Omega} \le \left(\frac{c_2}{\operatorname{dist}(\lambda, \theta(a))} + c_3\right)\|f\|_{2,0,\Omega}\,.$$

Dies bedeutet, daß $R(\lambda, L) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ stetig ist mit

$$\|R(\lambda, L)\| \le \left(\frac{c_2}{\operatorname{dist}\Big(\lambda, \theta(a)\Big)} + c_3\right).$$

Folglich ist $\lambda \in \rho(L)$, also $\mathbb{C} \backslash \overline{\theta(a)} \subseteq \rho(L)$.

3.18 Folgerung (Eigenschften der Friedrichschen Erweiterung).
Seien die Voraussetzungen von Satz 3.17 erfüllt. Dann gilt:
(i) Die Friedrichsche Erweiterung ist ein abgeschlossener, dicht definierter Operator.
(ii)

$$\Sigma(L) \subseteq \overline{\theta(a)}\,,\ \rho(L) \ne \emptyset\,.$$

(iii) Für $u \in D(L), v \in \mathring{H}_1(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \overline{\theta(a)}$ gilt

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (Lu, v)_\Omega \\ \Big|\Big((L - \lambda)u, u\Big)_\Omega\Big| &\ge \frac{\operatorname{dist}(\lambda, \theta(a))}{c_2 + c_3 \operatorname{dist}(\lambda, \theta(a))}\|u\|^2_{2,1,\Omega}\,. \end{aligned}$$

(iv) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Existiert $(L - \lambda I)^{-1}$, dann ist $\lambda \in \rho(L)$ und die Inverse ist stetig.

Beweis. (ii) Der erste Teil dieser Aussage wurde in Satz 3.17 bewiesen. Die Resolventenmenge ist nicht leer, weil sie das Komplement von $\overline{\theta(a)}$ umfaßt, und weil $\overline{\theta(a)}$ nach Lemma 3.13 in einem Sektor enthalten ist.
(iii) Daß $a(u,v) = (Lu,v)_\Omega$ gilt für alle $u \in D(L)$ und $v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ ergibt sich direkt aus der Definition von L. Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\theta(a)}$ ergibt sich aus dieser Gleichung mit $v = u$ und aus Satz 3.11, daß

$$\begin{aligned}\left|\Big((L-\lambda)u,u\Big)_\Omega\right| &= |a(u,u) - \lambda(u,u)_\Omega| = |a_\lambda(u,u)| \\ &\leq \left(\frac{c_2}{\operatorname{dist}(\lambda,\theta(a))} + c_3\right)^{-1} \|u\|^2_{2,1,\Omega}\,.\end{aligned}$$

(i) Sei $\lambda_0 \in \rho(L)$. Dann ist die Inverse $R(\lambda_0, L)$ von $(L - \lambda_0 I)$ ein stetiger, also abgeschlossener Operator, folglich ist auch $(L - \lambda_0 I)$ abgeschlossen und damit auch $L - \lambda I$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist L abgeschlossen. Wäre $\overline{D(L)} \neq L^2(\Omega)$, dann existierte $u \in L^2(\Omega)$ mit $u \neq 0$ und $(u,v)_\Omega = 0$ für alle $v \in D(L)$. Für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\theta(a)}$ und alle $w \in L^2(\Omega)$ würde dann $(u, R(\lambda,L)w)_\Omega = 0$ gelten wegen $R(\lambda,L)(L^2(\Omega)) = D(L)$. Aus (iii) folgte also

$$\begin{aligned}0 = \left|\Big(u, R(\lambda,L)u\Big)_\Omega\right| &= \left|\Big(\big[L-\lambda\big]R(\lambda,L)u, R(\lambda,L)u)\Big)_\Omega\right| \\ &\geq \frac{\operatorname{dist}(\lambda,\theta(a))}{c_2 + c_3\operatorname{dist}(\lambda,\theta(a))}\|R(\lambda,L)u\|^2_{2,1,\Omega}\,,\end{aligned}$$

also $R(\lambda,L)u = 0$ und somit $u = [L-\lambda]R(\lambda,L)u = 0$, im Widerspruch zur Annahme. Also ist $D(L)$ eine dichte Teilmenge von $L^2(\Omega)$.
(iv) Wenn $(L-\lambda I)^{-1}$ existiert, ist dieser Operator abgeschlossen, weil $L-\lambda I$ abgeschlossen ist nach (i). Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist somit $(L-\lambda I)^{-1}$ stetig als abgeschlossener, auf dem ganzen Banachraum $L^2(\Omega)$ definierter Operator. Folglich gilt $\lambda \in \rho(L)$.

3.19 Operaten mit kompakter Resolvente. Nach 3.16 besitzt das homogene Dirichletsche Randwertproblem bei gegebenem Eigenwertparameter λ genau dann eine Lösung für alle $f \in L^2(\Omega)$, wenn $(L-\lambda I)^{-1}$ existiert und nach Folgerung 3.18 ist dies genau dann der Fall, wenn $\lambda \in \rho(L)$ ist, also wenn λ nicht zum Spektrum von L gehört. Um genaue Aussagen über die Lösbarkeit des Dirichletschen Randwertproblems machen zu können, muß also das Spektrum $\Sigma(L)$ der Friedrichschen Erweiterung bestimmt werden.

Nach Satz 3.17 ist das Spektrum eine Teilmenge des Abschlusses $\overline{\theta(a)}$ des numerischen Wertebereiches. Das Spektrum braucht jedoch nicht mit $\overline{\theta(a)}$ übereinstimmen, sondern kann eine echte Teilmenge davon sein. Ich will die genaue Form des Spektrums nur im Fall beschränkter Gebiete studieren. Hierzu wende ich folgenden Satz an (siehe T. Kato: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer 1966, S. 187).

3.19.1 Satz. *Sei T ein abgeschlossener Operator auf einem Banachraum X. Es sei $\rho(T) \neq \emptyset$ und es existiere wenigstens ein $\mu \in \rho(T)$, für das $R(\mu, T)$ ein kompakter Operator ist. Dann besteht das Spektrum von T nur aus abzählbar vielen Eigenwerten endlicher Vielfachheit, die sich im Endlichen nicht häufen, und $R(\lambda, T)$ ist ein kompakter Operator für alle $\lambda \in \rho(T)$.*

Durch Anwendung dieses Satzes ergibt sich

3.20 Satz (Spektrum von Randwertproblemen mit beschränktem Gebiet). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge, sei*

$$\operatorname{div}\Big(A(x)\nabla u(x)\Big) - B(x)\cdot\nabla u(x) - c(x)u(x)$$

ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator in Ω mit Koeffizienten $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n^2})$, $B \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ und sei L die Friedrichsche Erweiterung des Operators $-\operatorname{div}(A\nabla u) + B\cdot\nabla u + cu$. Dann besteht das Spektrum von L nur aus abzählbar vielen Eigenwerten endlicher Vielfachheit, die sich im Endlichen nicht häufen, und die Resolvente $R(\lambda, L)$ ist ein kompakter Operator für alle $\lambda \in \rho(L)$.

Beweis. Nach Folgerung 3.18 ist L ein abgeschlossener Operator mit nichtleerer Resolventenmenge. Also folgen alle Aussagen aus Satz 3.19.1, wenn noch gezeigt ist, daß $R(\lambda, L) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt ist für ein $\lambda_0 \in \rho(L)$.

Nach Lemma 3.13 ist $\overline{\theta(a)}$ in einem Sektor enthalten, also ist $\mathbb{C}\backslash\overline{\theta(a)} \neq \emptyset$. Wähle $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\overline{\theta(a)}$. Nach Satz 3.17 gehört λ_0 zu $\rho(L)$ und nach 3.16 ist die durch $u = R(\lambda_0, L)f$ gegebene Funktion schwache Lösung zum homogenen Dirichletschen Randwertproblem zur rechten Seite $f \in L^2(\Omega)$. Also ist $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$, und nach Folgerung 3.12 gilt

$$\|R(\lambda_0, L)f\|_{2,1,\Omega} = \|u\|_{2,1,\Omega} \leq \Big(\frac{c_2}{\operatorname{dist}(\lambda_0, \theta(a))} + c_3\Big)\|f\|_{2,0,\Omega}\,,$$

also kann man die Resolvente auch als stetigen Operator von $L^2(\Omega)$ nach $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ auffassen. Diesen Operator bezeichne ich mit $\hat{R}(\lambda_0, L)$. Es gilt dann

$$R(\lambda_0, L) = J\hat{R}(\lambda_0, L),$$

wobei $J : \overset{\circ}{H}_1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ die Einbettungsabbildung ist. Nach dem im Anhang bewiesenenRellichschen Auswahlsatz ist J ein kompakter Operator, also auch $J\hat{R}(\lambda_0, L)$ als Hintereinanderausführung eines stetigen und eines kompakten Operators. Folglich ist $R(\lambda_0, L) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt. Der Satz ist bewiesen.

3.21 Friedrichsche Erweiterung von symmetrischen Differentialoperatoren. Zum Schluß betrachte ich symmetrische Differentialoperatoren der Form $\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + c(x)u(x)$ mit symmetrischer Koeffizientenmatrix $A(x)$. Weil die Friedrichsche Erweiterung L ein dicht definierter Differentialoperator ist, kann man den adjungierten Operator L^* definieren:

Sei $u \in L^2(\Omega)$. Es gilt $u \in D(L^*)$ genau dann wenn $w \in L^2(\Omega)$ existiert mit

$$(Lv, u)_\Omega = (v, w)_\Omega$$

für alle $v \in D(L)$. Mit dem zu u gehörenden w setzt man dann $L^*u = w$. Diese Definition ist sinnvoll. Denn sei $\tilde{w}$ ein anderes Element mit $(Lv, u)_\Omega = (v, \tilde{w})_\Omega$ für alle $v \in D(L)$. Dann folgt $(v, w - \tilde{w})_\Omega = 0$ für alle $v \in D(L)$, also $w - \tilde{w} = 0$ wegen der Dichte von $D(L)$ in $L^2(\Omega)$.

3.21.1 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) - c(x)u(x)$ ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator in Ω mit Koeffizienten $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n^2})$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, wobei $A(x)$ eine symmetrische Matrix sei für alle $x \in \Omega$. Dann ist die Friedrichsche Erweiterung L zum Differentialoperator $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + c(x)u(x)$ ein selbstadjungierter Operator, das heißt es gilt $L = L^*$.*

Beweis. Für die zum Differentialoperator $-\operatorname{div}(A\nabla u) + cu$ gehörende Sesquilinearform gilt

$$\begin{aligned} a(u,v) &= (A\nabla u, \nabla v)_\Omega + (cu, v)_\Omega \\ &= \int_\Omega \Big(A(x)\nabla u(x)\Big) \cdot \overline{\nabla v(x)} + c(x)u(x)\overline{v(x)}dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\overline{A(x)\nabla v(x)} + c(x)u(x)\overline{v(x)}dx} \\
&= \overline{\int_\Omega \overline{\nabla u(x)}\cdot A(x)\nabla v(x) + c(x)\overline{u(x)}v(x)dx} \\
&= \overline{(A\nabla v,\nabla u)_\Omega + (cv,u)_\Omega} = \overline{a(v,u)}\,.
\end{aligned}
$$

Für $u,v \in D(L)$ resultiert also aus Folgerung 3.18

$$
(Lu,v)_\Omega = a(u,v) = \overline{a(v,u)} = \overline{(Lv,u)_\Omega} = (u,Lv)_\Omega\,.
$$

Hieraus folgt $v \in D(L^*)$ und $L^*v = Lv$, also $D(L) \subseteq D(L^*)$ und $L^*|_{D(L)} = L$. Also genügt es zu zeigen, daß $D(L) = D(L^*)$ ist.

Angenommen, es gäbe $v \in D(L^*)\backslash D(L)$. Weil nach Lemma 3.13 die Menge $\overline{\theta(a)}$ in einem Sektor der Form $\{\mu \in \mathbb{C} \bigm| |\mathrm{Im}\,\mu| \le \gamma(\,\mathrm{Re}\,\mu + k)\}$ enthalten ist, gilt $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\theta(a)} \subseteq \rho(L)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda < -k$. Ich wähle ein solches λ. Dann gilt $(L-\lambda I)D(L) = L^2(\Omega)$, also existiert ein $u \in D(L)$ mit

$$
(L-\lambda I)u = (L^*-\lambda I)v\,.
$$

Wegen $(L^*-\lambda I)u = (L-\lambda I)u$ folgte $(L^*-\lambda I)(v-u) = 0$. Für alle $w \in D(L)$ bedeutet dies

$$
\begin{aligned}
0 &= \Big(w,(L^*-\lambda I)(v-u)\Big)_\Omega \\
&= \Big(w,L^*(v-u)\Big)_\Omega - \lambda(w,v-u)_\Omega \\
&= \Big((L-\lambda I)w,v-u\Big)_\Omega\,.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt $v-u=0$, weil $(L-\lambda I)D(L) = L^2(\Omega)$ ist. Wegen $u \in D(L)$ muß also doch $v \in D(L)$ sein im Widerspruch zur Annahme, und somit ist $D(L^*) = D(L)$, also $L^* = L$.

3.22 Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren. Nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren gilt also für symmetrische Differentialoperatoren, daß $\Sigma(L) \subseteq \mathbb{R}$ ist. Dies wurde bereits in 3.14 gezeigt. Dort wurde sogar gezeigt, daß das Spektrum nach unten beschränkt ist. Auch hier möchte ich nur den Fall beschränkter Gebiete genauer studieren:

3.22.1 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge, sei* $\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) - c(x)$ *ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator in* Ω *mit Koeffizienten* $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n^2})$, $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, *wobei* $A(x)$ *für alle* $x \in \Omega$ *eine symmetrische Matrix sei. Dann besteht das Spektrum der Friedrichschen Erweiterung* L *von* $-\operatorname{div}(A\nabla u) + c$ *aus abzählbar unendlich vielen reellen Eigenwerten endlicher Vielfachheit, die sich nur bei* $+\infty$ *häufen. Außerdem gibt es ein im Hilbertraum* $L^2(\Omega)$ *vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen von* L.

Seien $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots$ *die Eigenwerte von* L, *wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner geometrischen Vielfachheit wiederholt sei, und sei*

$$a(u,v) = (A\nabla u, \nabla v)_\Omega + (cu, v)_\Omega$$

die zum Differentialoperator gehörende Sesquilinearform. Dann kann das vollständige Orthonormalsystem $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ *so gewählt werden, daß* u_m *Eigenfunktion zum Eigenwert* λ_m *ist. Es gilt dann:*

(i) Es ist $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$, *genau dann wenn*

$$\sum_{m=1}^\infty \lambda_m |(u, u_m)_\Omega|^2 < \infty\,.$$

Für $u, v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ *gilt*

$$a(u,v) = \sum_{m=1}^\infty \lambda_m (u, u_m)_\Omega \overline{(v, u_m)_\Omega}\,.$$

(ii) Es ist $u \in D(L)$, *genau dann wenn*

$$\sum_{m=1}^\infty \lambda_m^2 |(u, u_m)|^2 < \infty\,.$$

Dann gilt

$$Lu = \sum_{m=1}^\infty \lambda_m (u, u_m)_\Omega u_m\,.$$

Beweis. Nach Satz 3.20 besteht das Spektrum von L nur aus abzählbar vielen Eigenwerten endlicher Vielfachheit, die sich im Endlichen nicht häufen, und die im Abschluß des numerischen Wertebereichs von a enthalten sind. Nach 3.14 ist bei einem symmetrischen Differentialoperator der numerische Wertebereich eine nach unten beschränkte Teilmenge der reellen Achse, also sind die Eigenwerte reell und können sich höchstens bei $+\infty$ häufen. Zwei Eigenfunktionen u und v zu verschiedenen Eigenwerten λ und μ sind orthogonal. Denn es gilt wegen der Selbstadjungiertheit von L

$$\lambda(u,v)_\Omega = (Lu,v)_\Omega = (u,Lv)_\Omega = (u,\mu v)_\Omega = \mu(u,v)_\Omega\,,$$

also

$$(\lambda-\mu)(u,v)_\Omega = 0$$

und somit $(u,v)_\Omega = 0$. Sei X der von allen Eigenfunktionen von L aufgespannte Teilraum von $L^2(\Omega)$. Es gilt

$$\overline{X} = L^2(\Omega)\,.$$

Zum Beweis nehme ich an, dies sei nicht der Fall. Dann ist der Orthogonalraum $X^\perp$ von X ein nichttrivialer abgeschlossener Teilraum von $L^2(\Omega)$.

Sei $\mu < \inf\theta(a)$. Dann ist $\mu \in \rho(L)$, also existiert $R(\mu,L)$, und für alle $u \in X^\perp$ gilt $R(\mu,L)u \in X^\perp$. Denn sei w eine Eigenfunktion von L zum Eigenwert λ. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Big(R(\mu,L)u,w\Big)_\Omega &= \Big(R(\mu,L)u,\frac{1}{\lambda-\mu}(L-\mu I)w\Big)_\Omega\\ &= \frac{1}{\lambda-\mu}\Big((L-\mu I)R(\mu,L)u,w\Big)_\Omega = \frac{1}{\lambda-\mu}(u,w)_\Omega = 0\,.\end{aligned}$$

Weil die Eigenfunktionen von L eine Basis von X bilden, folgt hieraus $(R(\mu,L)u,v)_\Omega = 0$ für alle $v\in X$, also $R(\mu,L)u \in X^\perp$.
Für alle $v \in L^2(\Omega)$ gilt $|(R(\mu,L)v,v)_\Omega| \le \|R(\mu,L)\|\;\|v\|^2_{2,0,\Omega}$, und für $v\neq 0$ ist sogar

$$(R(\mu,L)v,v)_\Omega > 0\,.$$

Denn für $v\neq 0$ ist $R(\mu,L)v\neq 0$. Setze $w = R(\mu,L)v \;/\; \|R(\mu,L)v\|^2_{2,0,\Omega}$. Dann gilt $\|w\|_{2,0,\Omega} = 1$ und $w\in D(L)$, also

$$\Big(R(\mu,L)v,v\Big)_\Omega = \Big(R(\mu,L)v,[L-\mu I]R(\mu,L)v\Big)_\Omega$$

$$
\begin{aligned}
&= \|R(\mu,L)v\|_{2,0,\Omega}^2\Big([L-\mu I]w,w\Big)_\Omega \\
&= \|R(\mu,L)v\|_{2,0,\Omega}^2\Big[(Lw,w)_\Omega-\mu\Big] \\
&= \|R(\mu,L)v\|_{2,0,\Omega}^2\Big[a(w,w)-\mu\Big] > 0\,,
\end{aligned}
$$

wegen $a(w,w)\in\theta(a)$ und $\mu<\inf\theta(a)$. Also existiert

$$\sup_{\substack{v\in X^\perp\\ \|v\|_{2,0,\Omega}=1}} \Big(R(\mu,L)v,v\Big)_\Omega = \lambda_0\,,$$

und es gilt $\lambda_0>0$.
Ich werde zeigen, daß das Maximum angenommen wird, und daß die Stelle, wo das Maximum angenommen wird, eine Eigenfunktion von L ist. Hierzu sei $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ eine Folge mit $v_m\in X^\perp$, $\|v_m\|_{2,0,\Omega}=1$ und

$$\lim_{m\to\infty}\Big(R(\mu,L)v_m,v_m\Big)_\Omega=\lambda_0\,.$$

Weil die abgeschlossene Einheitskugel von $L^2(\Omega)$ schwach folgenkompakt ist, besitzt $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ eine in der Einheitskugel schwach konvergente Teilfolge. Ich nehme an, daß bereits $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ selbst schwach konvergiert. Der Grenzwert sei u. Es gilt $u\in X^\perp$ mit $\|u\|_{2,0,\Omega}\le 1$.

Aufgrund des Rellichschen Einbettungssatzes (siehe Anhang) ist $R(\mu,L)$ ein kompakter Operator. Dies wurde im Beweis von Satz 3.20 gezeigt. Da ein kompakter Operator schwach konvergente Teilfolgen in normkonvergente Teilfolgen abbildet, ist die Folge $\{R(\mu,L)v_m\}_{m=1}^\infty$ in $L^2(\Omega)$ konvergent gegen die Funktion $R(\mu,L)u$. Weil das Skalarprodukt einer normkonvergenten Folge und einer schwach konvergenten Folge gegen das Skalarprodukt der jeweiligen Grenzwerte konvergiert, folgt

$$\Big(R(\mu,L)u,u\Big)_\Omega=\lim_{m\to\infty}\Big(R(\mu,L)v_m,v_m\Big)_\Omega=\lambda_0\,.$$

Wegen $\lambda_0>0$ ist $u\neq 0$. Wäre $\|u\|_{2,0,\Omega}<1$, dann wäre $w=u/\|u\|_{2,0,\Omega}\in X^\perp$ mit $\|w\|_{2,0,\Omega}=1$ und

$$\Big(R(\mu,L)w,w\Big)_\Omega=\frac{1}{\|u\|_{2,0,\Omega}^2}\Big(R(\mu,L)u,u\Big)_\Omega=\frac{\lambda_0}{\|u\|_{2,0,\Omega}^2}>\lambda_0\,,$$

im Widerspruch zur Definition von λ_0. Also gilt $\|u\|_{2,0,\Omega} = 1$.

Zum Beweis, daß u eine Eigenfunktion von L ist, sei $v \in X^\perp$. Für alle $t \in \mathbb{R}$, die hinreichend nahe bei 0 liegen, ist dann $u+tv \neq 0$, und die reelle Funktion

$$\begin{aligned} t \mapsto g(t) &= \left(R(\mu, L)\Big(\frac{u+tv}{\|u+tv\|_{2,0,\Omega}}\Big), \frac{u+tv}{\|u+tv\|_{2,0,\Omega}}\right)_\Omega \\ &= \frac{\Big(R(\mu, L)(u+tv), u+tv\Big)_\Omega}{\|u+tv\|^2_{2,0,\Omega}} \end{aligned}$$

hat ein Maximum an der Stelle $t = 0$. Also ist $g'(0) = 0$. Weil $R(\mu, L)$ selbstadjungiert ist als Inverse des selbstadjungierten Operators $L - \mu I$, gilt

$$\begin{aligned} &\Big(R(\mu, L)(u+tv), u+tv\Big)_\Omega \\ &= \Big(R(\mu, L)u, u\Big)_\Omega + t^2\Big(R(\mu, L)v, v\Big)_\Omega + t\Big[\Big(R(\mu, L)v, u\Big)_\Omega + \Big(R(\mu, L)u, v\Big)_\Omega\Big] \\ &= \Big(R(\mu, L)u, u\Big)_\Omega + t^2\Big(R(\mu, L)v, v\Big)_\Omega + 2t \text{ Re } \Big(R(\mu, L)u, v\Big)_\Omega . \end{aligned}$$

Also folgt für die Ableitung

$$\begin{aligned} 0 = g'(0) &= 2 \text{ Re } \Big(R(\mu, L)u, v\Big)_\Omega - \Big(R(\mu, L)u, u\Big)_\Omega 2 \text{ Re } (u, v)_\Omega \\ &= 2 \text{ Re } \Big(\Big[R(\mu, L) - \lambda_0 I\Big]u, v\Big)_\Omega . \end{aligned}$$

Ersetzt man v durch iv, dann folgt hieraus auch

$$\text{Im } \Big(\Big[R(\mu, L) - \lambda_0 I\Big]u, v\Big)_\Omega = 0 ,$$

also insgesamt $([R(\mu, L) - \lambda_0 I]u, v)_\Omega = 0$ für alle $v \in X^\perp$. Wegen $R(\mu, L)u - \lambda_0 u \in X^\perp$ folgt somit

$$R(\mu, L)u - \lambda_0 u = 0 ,$$

also $u \in D(L) \cap X^\perp$ mit

$$u = (L - \mu I)R(\mu, L)u = \lambda_0(L - \mu I)u ,$$

oder

$$Lu = \Big(\mu + \frac{1}{\lambda_0}\Big)u .$$

Also ist die von Null verschiedene Funktion u eine Eigenfunktion.
Dies ist aber ein Widerspruch zu $u \in X^\perp$, also muß die Annahme falsch sein und $\overline{X} = L^2(\Omega)$ gelten. Der von den Eigenfunktionen von L aufgespannte Raum ist also dicht in $L^2(\Omega)$.

Sei $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ die Folge der Eigenwerte von L, wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner geometrischen Vielfachheit wiederholt sei, und sei u_m eine normierte Eigenfunktion zu λ_m, die so gewählt sei, daß sie orthogonal ist zu allen Funktionen $u_1, \ldots, u_{m-1}$ ist. Dann ist $\{u_1, u_2, \ldots\}$ eine Basis von X aus paarweise orthogonalen Elementen, und somit ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\Omega)$ wegen der Dichte von X in $L^2(\Omega)$. Weil $L^2(\Omega)$ unendlichdimensional ist, muß diese Basis abzählbar unendlich sein, und somit gibt es auch abzählbar unendlich viele Eigenwerte.

Zum Beweis von (i) sei μ wie oben gewählt. Setze $\mu_m = \lambda_m - \mu$ und $a_\mu(u,v) = a(u,v) - \mu(u,v)$. Es gilt dann $\mu_m > 0$, und wegen $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$ ist auch

$$a_\mu(u,v) = \overline{a_\mu(v,u)}.$$

Aus den Abschätzungen von Satz 3.11 folgt dann, daß a_μ ein Skalarprodukt auf dem Raum $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ ist, dessen zugehörige Norm äquivalent ist zur Norm $\|u\|_{2,1,\Omega}$. Für das Orthonormalsystem $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ und für $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ gilt dann nach Folgerung 3.18

$$\begin{aligned} a_\mu(u_m, u) &= a(u_m, u) - \mu(u_m, u)_\Omega = (Lu_m, u)_\Omega - \mu(u_m, u)_\Omega \\ &= (\lambda_m - \mu)(u_m, u)_\Omega = \mu_m (u_m, u)_\Omega , \end{aligned}$$

und insbesondere

$$a_\mu(u_m, u_\ell) = \mu_m (u_m, u_\ell)_\Omega = \mu_m \delta_{m\ell} .$$

Für $v_m = \frac{1}{\sqrt{\mu_m}} u_m$ gilt also $a_\mu(v_m, v_m) = 1$, und somit ist $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ ein Orthonormalsystem in $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ bezüglich des Skalarproduktes $a_\mu(u,v)$. Dieses Orthonormalsystem ist vollständig. Denn sei $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ mit $a_\mu(v_m, u) = 0$ für alle m. Dann folgt

$$(u_m, u)_\Omega = \frac{1}{\mu_m} a_\mu(u_m, u) = \frac{1}{\sqrt{\mu_m}} a_\mu(v_m, u) = 0 ,$$

also $u = 0$, weil $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ vollständig ist in $L^2(\Omega)$. Dies bedeutet, daß $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ vollständig ist in $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$.

Aus der Theorie der vollständigen Orthonormalsysteme folgt nun: Genau dann ist $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$, wenn

$$\begin{aligned}\infty > \sum_{m=1}^{\infty} |a_\mu(u, v_m)|^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m |(u, u_m)_\Omega|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m |(u, u_m)_\Omega|^2 - \mu \sum_{m=1}^{\infty} |(u, u_m)_\Omega|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m |(u, u_m)_\Omega|^2 - \mu \|u\|_{2,0,\Omega}^2 .\end{aligned}$$

Es gilt dann

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} a_\mu(u, v_m) v_m$$

und für $u, v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$

$$\begin{aligned}a_\mu(u, v) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_\mu(u, v_m)\overline{a_\mu(v, v_m)} = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m (u, u_m)_\Omega \overline{(v, u_m)}_\Omega \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (u, u_m)_\Omega \overline{(v, u_m)}_\Omega - \mu \sum_{m=1}^{\infty} (u, u_m)_\Omega \overline{(v, u_m)}_\Omega \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (u, u_m)_\Omega \overline{(v, u_m)}_\Omega - \mu (u, v)_\Omega ,\end{aligned}$$

also

$$a(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (u, u_m)_\Omega \overline{(v, u_m)}_\Omega .$$

Aus diesen Relationen folgen die Aussagen in (i). Zum Beweis von (ii) beachte man zunächst, daß für μ wie oben

$$u_m = R(\mu, L)(L - \mu I) u_m = (\lambda_m - \mu) R(\mu, L) u_m ,$$

also

$$R(\mu, L) u_m = \frac{1}{\lambda_m - \mu} u_m$$

gilt. Sei nun $u \in D(L)$. Dann existiert $v \in L^2(\Omega)$ mit $u = R(\mu, L)v$. Es gilt

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} (v, u_m)_\Omega u_m \,, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |(v, u_m)_\Omega|^2 < \infty \,.$$

Wegen der Stetigkeit von $R(\mu, L)$ auf $L^2(\Omega)$ resultiert

$$\begin{aligned} u &= R(\mu, L)v = R(\mu, L)\left(\sum_{m=1}^{\infty} (v, u_m)_\Omega u_m \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (v, u_m)_\Omega R(\mu, L) u_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m - \mu} (v, u_m)_\Omega u_m \,. \end{aligned}$$

Andererseits ist $u = \sum_{m=1}^{\infty} (u, u_m)_\Omega u_m$. Wegen der Eindeutigkeit der Fourierreihenentwicklung folgt

$$(u, u_m)_\Omega = \frac{1}{\lambda_m - \mu} (v, u_m)_\Omega \,,$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 |(u, u_m)_\Omega|^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_m - \mu} \right)^2 |(v, u_m)_\Omega|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda_m - \mu} \right)^2 |(v, u_m)_\Omega|^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{dist}(\mu, \theta(a))} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} |(v, u_m)_\Omega|^2 < \infty \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Lu &= (L - \mu I)u + \mu u = v + \mu u = \sum_{m=1}^{\infty} (v, u_m)_\Omega u_m + \mu u \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_m - \mu)(u, u_m)_\Omega u_m + \mu \sum_{m=1}^{\infty} (u, u_m)_\Omega u_m = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (u, u_m)_\Omega u_m \,. \end{aligned}$$

Sei umgekehrt $u \in L^2(\Omega)$ mit $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 |(u, u_m)_\Omega|^2 < \infty$. Setze

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_m - \mu)(u, u_m)_\Omega u_m \,.$$

Dann ist $v \in L^2(\Omega)$ wegen

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_m - \mu)^2 |(u, u_m)_\Omega|^2 < \infty \,,$$

und es gilt

$$\begin{aligned} R(\mu, L)v &= R(\mu, L)\Big(\sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_m - \mu)(u, u_m)_\Omega u_m \Big) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_m - \mu)(u, u_m)_\Omega R(\mu, L) u_m = \sum_{m=1}^{\infty} (u, u_m)_\Omega u_m = u \end{aligned}$$

also $u \in D(L)$, weil $D(L) = R(\mu, L)(L^2(\Omega))$.

4 Innere Regularität

Nachdem in Abschnitt 3 die Existenz von schwachen Lösungen zu Randwertproblemen studiert wurde, soll nun die Regularität dieser Lösungen untersucht werden. In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf die Untersuchung der "inneren Regularität" der Lösungen, schließen also Randpunkte des Gebietes Ω bei den Untersuchungen aus. Die Randregularität werden wir im nächsten Abschnitt studieren.

Die wichtigsten Untersuchungen dieses Abschnittes führen wir nicht nur für lineare Gleichungen durch, sondern betrachten gleich nichtlineare elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Hauptteil Divergenzform hat. Studiert werden also Gleichungen der Form

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) + b\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) = 0\,, \tag{4.1}$$

mit

$$a_j, b : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,.$$

Definiert man $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$A(x,u,\xi) = \Big(a_1(x,u,\xi), \ldots, a_n(x,u,\xi)\Big)\,,$$

dann können diese Gleichungen auch in der Form

$$\operatorname{div} A\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) + b\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) = 0$$

geschrieben werden. Insbesondere werden wir das Hauptergebnis dieses Abschnittes, Satz 4.5, für derartige nichtlineare Gleichungen formulieren, die allerdings noch der Einschränkung unterliegen, daß die Funktionen a_j nicht explizit von $u(x)$ abhängen dürfen. Für nichtlineare Gleichungen bringt die Verwendung komplexwertiger Funktionen keinen Vorteil. Daher werden wir ab jetzt nur reellwertige Funktionen und Lösungen betrachten.

Zunächst müssen die Definitionen 3.1 und 3.2 für schwache Lösungen des homogenen Dirichletschen Randwertproblems und für gleichmäßig elliptische Differentialoperatoren auf nichtlineare Gleichungen verallgemeinert werden. Zur Definition von schwachen Lösungen benötigen wir folgende Voraussetzungen an Ω und an die Funktionen a_j und b aus (4.1):

(i) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine offene, beschränkte Menge.
(ii) Sei $a_j \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und es existiere eine Konstante C_1 mit

$$|a_j(x,u,\xi)| \le C_1(|\xi|+1)$$

für alle $(x,u,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
(iii) Sei

$$b(x,u,\xi) = c(x,u,\xi) + f(x),$$

mit $f \in L^2(\Omega)$ und $c \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, und es existiere eine Konstante C_2 mit

$$|c(x,u,\xi)| \le C_2(|\xi|+|u|+1).$$

Unter diesen Voraussetzungen folgt aus der Theorie der meßbaren Funktionen, daß $x \mapsto a_j(x,u(x),\nabla u(x))$ und $x \mapsto b(x,u(x),\nabla u(x))$ meßbar sind für jede Funktion $u \in H_1(\Omega) = H_1^2(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \left|a\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big)\right| &\le C_1\Big(|\nabla u(x)|+1\Big) \\ \left|b\Big(x,u(x),\nabla u(x)\Big)\right| &\le C_2\Big(|\nabla u(x)|+|u(x)|+1\Big) + |f(x)|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $a(x,u(x),\nabla u(x)), b(x,u(x),\nabla u(x)) \in L^2(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \left\|a\Big(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot)\Big)\right\|_{2,\Omega} &\le C_1\|\nabla u\|_{2,\Omega} + C_1\Big(\int_\Omega dx\Big)^{1/2} \\ \left\|b\Big(\cdot,u(\cdot),\nabla u(\cdot)\Big)\right\|_{2,\Omega} &\le C_2\|\nabla u\|_{2,\Omega} + C_2\|u\|_{2,\Omega} \\ &\quad + \|f\|_{2,\Omega} + C_2\Big(\int_\Omega dx\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

4.1 Definition (Schwache Lösung von quasilinearen elliptischen Gleichungen). (i) Eine Funktion $u \in H_1^{\mathrm{loc}}(\Omega) = H_1^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ heißt schwache Lösung der Gleichung

$$\operatorname{div} A(x,u(x),\nabla u(x)) + b(x,u(x),\nabla u(x)) = 0$$

in Ω, wenn

$$\int_\Omega \Big(-A(x,u(x),\nabla u(x))\cdot\nabla\varphi(x) + b(x,u(x),\nabla u(x))\,\varphi(x)\Big)\,dx = 0$$

gilt für alle $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$.

(ii) Eine Funktion $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega) = \overset{\circ}{H}{}_1^2(\Omega)$ heißt schwache Lösung zum homogenen Dirichletschen Randwertproblem

$$\begin{gathered}\operatorname{div} A\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) + b\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) = 0\,, \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0\,, \quad x \in \partial\Omega\,,\end{gathered}$$

wenn für alle $v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega \Big(- A\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) \cdot \nabla v(x) + b\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) v(x)\Big) dx = 0\,. \quad (4.2)$$

Hierbei sei

$$A\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) \cdot \nabla v(x) = \sum_{j=1}^n a_j\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) \frac{\partial}{\partial x_j} v(x)\,.$$

4.2 Definition (Gleichmäßige Elliptizität von quasilinearen Differentialoperatoren). Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
Der Differentialoperator

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_j\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big)$$

heißt gleichmäßig elliptisch in V, wenn die Funktionen

$$\Big((x, u, \xi) \mapsto a_j(x, u, \xi)\Big) : V \to \mathbb{R}$$

bezüglich ξ differenzierbar sind und folgende Eigenschaften haben:

$$a_j \in C(V)\,, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_i} a_j \in C(V)\,,$$

und es existieren Konstanten $c, C > 0$ mit

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial p_j} a_j(x, u, p) \xi_i \xi_j \geq c|\xi|^2$$

$$|\nabla_p A(x, u, p)| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \Big(\frac{\partial}{\partial p_i} a_j(x, u, p)\Big)^2} \leq C$$

für alle $(x, u, p) \in V$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, wobei $p = (p_1, \dots, p_n), \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und $A(x, u, p) = (a_1, (x, u, p), \dots, a_n(x, u, p))$ sei.

Die Differentialgleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) + b\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) = 0\,.$$

heißt gleichmäßig elliptisch in V, wenn der Differentialoperator zweiter Ordnung in dieser Gleichung gleichmäßig elliptisch ist in V.

4.3 Folgerung. *Sei* $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(x, u(x), \nabla u(x))$ *gleichmäßig elliptisch in* $V = V' \times \mathbb{R}^n$ *mit* $V' \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, *und sei*

$$A(x, u, p) = \Big(a_1(x, u, p), \dots, a_n(x, u, p)\Big)\,.$$

(i) Dann existiert eine Konstante C *mit*

$$|A(x, u, \xi) - A(x, u, \eta)| \leq C|\xi - \eta|$$

für alle $(x, u) \in V'$ *und* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. *Insbesondere gilt*

$$|A(x, u, p)| \leq C|p| + |A(x, u, 0)|$$

für alle $(x, u, p) \in V$.
(ii) A *ist koerzitiv, das heißt es existiert eine Konstante* $c > 0$ *mit*

$$\Big(A(x, u, \xi) - A(x, u, \eta)\Big) \cdot (\xi - \eta) \geq c|\xi - \eta|^2$$

für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ *und* $(x, u) \in V'$.

Beweis. (i) Aus dem Schrankensatz und aus der Definition 4.2 folgt

$$\begin{aligned} |A(x, u, \xi) - A(x, u, \eta)| &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |\frac{d}{dt} A\Big(x, u, t(\xi - \eta) + \eta\Big)| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |\nabla_p A\Big(x, u, t\xi + (1-t)\eta\Big) \cdot (\xi - \eta)| \leq C|\xi - \eta|\,. \end{aligned}$$

(ii) Für $(x, u) \in V'$ und $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ betrachte die Funktion

$$t \mapsto A\Big(x, u, t(\xi - \eta) + \eta\Big) \cdot (\xi - \eta) : [0, 1] \to \mathbb{R}\,.$$

Nach Definition 4.2 ist diese Funktion stetig differenzierbar. Also folgt aus dem Mittelwertsatz für eine Zahl t^* zwischen 0 und 1

$$
\begin{aligned}
&A(x,u,\xi)\cdot(\xi-\eta) - A(x,u,\eta)\cdot(\xi-\eta) \\
&= \frac{d}{dt}\Big[A\Big(x,u,t(\xi-\eta)+\eta\Big)\cdot(\xi-\eta)\Big]_{t=t^*} \\
&= \sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)\frac{d}{dt}a_j\Big(x,u,t(\xi-\eta)+\eta\Big)_{|t=t^*} \\
&= \sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\eta_j)\Big[\nabla_p a_j\Big(x,u,t^*(\xi-\eta)+\eta\Big)\Big]\cdot(\xi-\eta) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_i}a_j\Big(x,u,t^*\xi+(1-t^*)\eta\Big)(\xi_i-\eta_i)(\xi_j-\eta_j) \\
&\geq c|\xi-\eta|^2\,,
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt eine der Eigenschaften aus Definition 4.2 verwendet wurde. Hieraus folgt die Behauptung.

4.4 Lemma (Eindeutigkeit der Lösung). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und sei $divA(x,\nabla u(x))$ ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator in $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n$. Dann besitzt das Dirichletproblem*

$$
\begin{aligned}
div\ A\Big(x,\nabla u(x)\Big) &= f(x)\,,\ x\in\Omega \\
u(x) &= 0\,,\ x\in\partial\Omega
\end{aligned}
$$

zu jedem $f\in L^2(\Omega)$ höchstens eine Lösung, und es existiert eine Konstante $C>0$ mit

$$
\|\nabla u\|_\Omega \leq C\Big(\|f\|_\Omega + \|A(\cdot,0)\|_\Omega\Big)
$$

für alle $f\in L^2(\Omega)$ und für die zugehörende schwache Lösung u.

Hierbei sei $\|w\|_\Omega = (\int_\Omega |w(x)|^2dx)^{1/2}$ die L^2–Norm. Man beachte, daß $x\mapsto A(x,0)$ auf der kompakten Menge $\overline{\Omega}$ stetig und somit beschränkt ist, weil der Differentialoperator auf $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n$ gleichmäßig elliptisch ist. Also existiert $\|A(\cdot,0)\|_\Omega$.

Beweis. Seien $u, v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ zwei schwache Lösungen zum selben $f \in L^2(\Omega)$. Weil $u - v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ ist, ergibt die Definition der schwachen Lösung, daß

$$\begin{aligned} -\Big(A\big(\cdot, \nabla u(\cdot)\big), \nabla(u-v)\Big)_\Omega &= (f, u-v)_\Omega \\ -\Big(A\big(\cdot, \nabla v(\cdot)\big), \nabla(u-v)\Big)_\Omega &= (f, u-v)_\Omega\,, \end{aligned}$$

also

$$-\Big(A\big(\cdot, \nabla u(\cdot)\big) - A\big(\cdot, \nabla v(\cdot)\big), \nabla u - \nabla v\Big)_\Omega = 0\,.$$

Wegen Folgerung 4.3 gilt

$$\Big(A\big(x, \nabla u(x)\big) - A\big(x, \nabla v(x)\big)\Big) \cdot \big(\nabla u(x) - \nabla v(x)\big) \geq c|\nabla u(x) - \nabla v(x)|^2\,,$$

also

$$c\|\nabla u - \nabla v\|_\Omega^2 \leq \Big(A\big(\cdot, \nabla u(\cdot)\big) - A\big(\cdot, \nabla v(\cdot)\big), \nabla u - \nabla v\Big)_\Omega = 0\,.$$

Hieraus folgt $\|\nabla(u-v)\|_\Omega = 0$.
Wegen $u - v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ liefert die Poincarésche Ungleichung

$$\|u - v\|_\Omega \leq \frac{d}{\sqrt{2}}\|\nabla(u-v)\|_\Omega = 0\,,$$

mit d = diam (Ω). Also resultiert $u = v$, und das Problem hat höchstens eine schwache Lösung.

Um die behauptete Abschätzung zu beweisen, benütze man wieder Folgerung 4.3. Diese Folgerung liefert

$$\Big(A\big(x, \nabla u(x)\big) - A(x,0)\Big) \cdot \nabla u(x) \geq c|\nabla u(x)|^2\,,$$

also

$$\begin{aligned} c\|\nabla u\|_\Omega^2 &\leq \Big(A\big(\cdot, \nabla u(\cdot)\big) - A(\cdot, 0), \nabla u\Big)_\Omega \\ &= \Big(A\big(\cdot, \nabla u(\cdot)\big), \nabla u\Big)_\Omega - \Big(A(\cdot,0), \nabla u\Big)_\Omega \\ &= -(f, u)_\Omega - \Big(A(\cdot,0), \nabla u\Big)_\Omega \\ &\leq \|f\|_\Omega \|u\|_\Omega + \|A(\cdot,0)\|_\Omega \|\nabla u\|_\Omega \\ &\leq \Big(\frac{d}{\sqrt{2}}\|f\|_\Omega + \|A(\cdot,0)\|_\Omega\Big)\|\nabla u\|_\Omega\,, \end{aligned}$$

und somit

$$c\|\nabla u\|_\Omega \le \frac{d}{\sqrt{2}}\|f\|_\Omega + \|A(\cdot,0)\|_\Omega\,,$$

wobei wieder die Poincarésche Ungleichung verwendet wurde.

4.5 Satz (Innere Regularität). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Der Differentialoperator*

$$\mathit{div}\ A\Big(x, \nabla u(x)\Big)$$

sei gleichmäßig elliptisch in $K \times \mathbb{R}^n$ für jede kompakte Teilmenge K von Ω, und zu jeder solchen kompakten Menge K existiere eine Konstante M mit

$$|A(x,\xi) - A(y,\xi)| \le M(|\xi| + 1)|x - y| \tag{4.3}$$

für alle $x, y \in K$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Sei $f \in L^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ und sei $u \in H_1^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ schwache Lösung der Differentialgleichung

$$\mathit{div}\ A\Big(x, \nabla u(x)\Big) = f(x)$$

in Ω, das heißt es gelte

$$\int_\Omega \Big(- A\Big(x, \nabla u(x)\Big) \cdot \nabla\varphi(x) - f(x)\varphi(x)\Big)dx = 0 \tag{4.4}$$

für alle $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$. Dann ist

$$u \in H_2^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)\,.$$

Bemerkung: Wenn A die angegebenen Voraussetzungen erfüllt, also insbesondere nicht explizit von $u(x)$ abhängt, kann man mit diesem Satz auch die Regularität von Lösungen der Gleichung (4.1) studieren: Ist $u \in H_1(\Omega)$ eine schwache Lösung von (4.1) und erfüllt b die vor Definition 4.1 angegebenen Voraussetzungen, dann ist $x \mapsto b(x, u(x), \nabla u(x)) \in L^2(\Omega)$. Foglich ist die schwache Lösung von

$$\operatorname{div} A(x, \nabla u(x)) = f(x) = -b(x, u(x), \nabla u(x))$$

nach Satz 4.5 in $H_2^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ enthalten.

Zum Beweis dieses Satzes benötige ich Ergebnisse aus der Theorie der Sobolevräume, die in den beiden folgenden Lemmata formuliert sind:

4.6 Lemma. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $e_i \in \mathbb{R}^n$ der Einheitsvektor in Richtung der i–ten Koordinatenachse. Für $u \in L^2(\Omega)$, $x \in \Omega$, $1 \le i \le n$ und $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ sei*

$$\partial_i^h u(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}\Big(u(x+he_i) - u(x)\Big), & \textit{falls } x + he_i \in \Omega \\ 0, & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Falls Konstanten $M, \varepsilon > 0$ existieren mit

$$\|\partial_i^h u\|_\Omega = \Big(\int_\Omega |\partial_i^h u(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \le M$$

für alle $|h| < \varepsilon, h \neq 0$ und alle $i = 1, \ldots, n$, dann ist $u \in H_1(\Omega)$ mit

$$\partial_i^h u \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial x_i} u \textit{ für } h \to 0, \textit{ und } \|\frac{\partial}{\partial x_i} u\|_\Omega \le M.$$

Beweis. Sei $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$. Dann gilt $\delta = \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi, \mathbb{R}^n \backslash \Omega) > 0$, und somit ist $x + he_i \in \Omega$ für alle $x \in \operatorname{supp}\varphi$ und $|h| < \delta$. Für solche h resultiert

$$\begin{aligned} (\partial_i^h u, \varphi)_\Omega &= \int_\Omega \partial_i^h u(x)\varphi(x)dx = \int_{\operatorname{supp}\varphi} \partial_i^h u(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_{\operatorname{supp}\varphi} \frac{1}{h}\Big(u(x+he_i) - u(x)\Big)\varphi(x)dx \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_{\operatorname{supp}\varphi(\cdot - he_i)} u(x)\varphi(x-he_i)dx - \int_{\operatorname{supp}\varphi} u(x)\varphi(x)dx\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_\Omega u(x)\varphi(x-he_i)dx - \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx\right] \qquad (4.5) \\ &= \int_\Omega u(x)\frac{1}{h}\Big(\varphi(x-he_i) - \varphi(x)\Big)dx \\ &= \int_\Omega u(x)\partial_i^{-h}\varphi(x)dx = (u, \partial_i^{-h}\varphi)_\Omega. \end{aligned}$$

Sei nun $\{h_l\}_{l=1}^\infty$ eine Folge mit $0 = |h_l| < \varepsilon$ und mit $h_l \to 0$. Ich setze

$$\partial_i^l u = \partial_i^{h_l} u, \quad \partial_i^{-l} u = \partial_i^{-h_l} u.$$

Die Folge $\{\partial_i^l u\}_{l=1}^\infty$ gehört zur abgeschlossenen Kugel $\overline{B_R}$ in $L^2(\Omega)$ um den Nullpunkt mit Radius R, die schwach folgenkompakt ist. Also besitzt diese

Folge eine in $\overline{B_R}$ schwach konvergente Teilfolge $\{\partial_i^{l_k}u\}_{k=1}^{\infty}$. Der Grenzwert sei $v \in \overline{B_R}$. Ich zeige, daß v schwache Ableitung von u ist. Hierzu sei $\varphi \in \overset{\circ}{C}_{\infty}(\Omega)$. Wegen (4.5) gilt

$$
\begin{aligned}
(v,\varphi)_\Omega &= \lim_{k\to\infty}(\partial_i^{l_k}u,\varphi)_\Omega = \lim_{k\to\infty}(u,\partial_i^{-l_k}\varphi)_\Omega \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega u(x)\frac{1}{h_{l_k}}\Big(\varphi(x-h_{l_k}e_i)-\varphi(x)\Big)dx \\
&= \int_\Omega u(x)\lim_{k\to\infty}\frac{1}{h_{l_k}}\Big(\varphi(x-h_{l_k}e_i)-\varphi(x)\Big)dx \qquad (4.6) \\
&= \int_\Omega u(x)\left(-\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\right)dx = -\Big(u,\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\Big)_\Omega .
\end{aligned}
$$

Den Grenzwert durfte man hierbei nach dem Satz von Lebesgue mit der Integration vertauschen, da nach dem Mittelwertsatz

$$
|\frac{1}{h}\Big(\varphi(x+he_i)-\varphi(x)\Big)| \leq \operatorname{supp}_{y\in\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi(y)| < \infty
$$

gilt, und da

$$
\frac{1}{h}\Big(\varphi(x-he_i)-\varphi(x)\Big) = 0
$$

für alle x außerhalb der kompakten Menge

$$
K = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(y, \operatorname{supp}\varphi) \leq \varepsilon\}.
$$

Mit der charakteristischen Funktion χ_K von K ist also

$$
\operatorname{supp}_{y\in\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi(y)|\,|\chi_K u|
$$

eine integrierbare Dominante für alle Integranden. Die Gleichung (4.6) impliziert, daß v die schwache partielle Ableitung von u nach x_i ist, für die folglich gilt

$$
\partial_i^{l_k}u \rightharpoonup v = \frac{\partial}{\partial x_i}u .
$$

Es folgt, daß alle schwach konvergenten Teilfolgen nach $\{\partial_i^l u\}_{l=1}^{\infty}$ denselben Grenzwert $\frac{\partial}{\partial x_i}u$ haben, also ist die Folge $\{\partial_i^l u\}_{l=1}^{\infty}$ selbst schwach konvergent gegen $\frac{\partial}{\partial x_i}u$, also $\partial_i^h u \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial x_i}u$. Da dies für alle $1 \leq i \leq n$ gilt, hat u schwache partielle Ableitungen nach allen Variablen, also $u \in H_1(\Omega)$.

4.7 Lemma. *Seien Ω' und Ω offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und es existiere $\delta > 0$ mit*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ dist\,(x, \Omega') < \delta\} \subseteq \Omega\,.$$

Sei $u \in H_1(\Omega)$. Für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < |h| < \delta$ gilt dann

$$\|\partial_i^h u\|_{\Omega'} \leq \|\nabla u\|_\Omega\,.$$

Für $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ folgt insbesondere

$$\|\partial_i^h u\|_\Omega \leq \|\nabla u\|_\Omega\,.$$

Beweis. Da die Menge $C_\infty(\Omega) \cap H_1(\Omega) = \{\varphi \in C_\infty(\Omega) \mid \|\varphi\|_{2,1,\Omega} < \infty\}$ dicht ist in $H_1(\Omega)$, genügt es die Behauptung für $\varphi \in C_\infty(\Omega) \cap H_1(\Omega)$ zu beweisen. Sei $|h| < \delta$ und $x \in \Omega'$. O.B.d.A. nehme ich an, daß $h > 0$ sei. Es folgt

$$\begin{aligned}
|\partial_i^h \varphi(x)|^2 &= \Big|\frac{1}{h}[\varphi(x + he_i) - \varphi(x)]\Big|^2 \\
&= \frac{1}{h^2}\Big|\int_0^h \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x + te_i)dt\Big|^2 \\
&\leq \frac{1}{h^2} h \int_0^h \Big|\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x + te_i)\Big|^2 dt\,,
\end{aligned}$$

wobei die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung verwendet wurde. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|\partial_i^h \varphi\|_{\Omega'}^2 &= \int_{\Omega'} |\partial_i^h \varphi(x)|^2 dx \ \leq \ \frac{1}{h}\int_{\Omega'}\int_0^h |\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x + te_i)|^2 dt dx \\
&= \frac{1}{h}\int_0^h \int_{\Omega'} |\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x + te_i)|^2 dx dt \ \leq \ \frac{1}{h}\int_0^h \int_\Omega |\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)|^2 dx dt \\
&= \int_\Omega |\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)|^2 dx \ \leq \ \|\nabla\varphi\|_\Omega^2\,.
\end{aligned}$$

Setzt man $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega')$ durch Null auf Ω fort, dann ist $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega) \subseteq H_1(\Omega)$, und aus der eben bewiesenen Ungleichung folgt $\|\partial_i^h u\|_{\Omega'} \leq \|\nabla u\|_\Omega = \|\nabla u\|_{\Omega'}$. Man kann nun Ω' durch Ω ersetzen.

4.8 Beweis von Satz 4.5.

4.8.1 Vorbemerkung I. Sei $y \in \Omega$, sei B_ρ die offene Kugel mit Mittelpunkt y und Radius ρ, und sei $R > 0$ mit $\overline{B_R} \subseteq \Omega$. Für $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(B_R)$ und $A(x,\xi) = a_1(x,\xi), \dots, a_n(x,\xi))$ kann (4.4) in der Form

$$- \Big(A\big(\cdot, \nabla u(\cdot)\big), \nabla\varphi \Big)_{B_R} = (f, \varphi)_{B_R} \tag{4.7}$$

geschrieben werden. Weil nach Voraussetzung der Differentialoperator div A auf $\overline{B_R}$ gleichmäßig elliptisch ist, folgt aus Folgerung 4.3

$$|A\big(x, \nabla u(x)\big)| \le C|\nabla u(x)| + |A(x,0)| .$$

Hieraus, weil $u \in H_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, also insbesondere $u \in H_1(B_R)$, und weil die stetige Funktion $x \mapsto A(x,0)$ auf der kompakten Menge $\overline{B_R}$ beschränkt ist, folgt

$$A\big(\cdot, \nabla u(\cdot)\big) \in L^2(B_R) .$$

Folglich existiert das Integral

$$\Big(A\big(\cdot, \nabla u(\cdot)\big), \nabla v \Big)_{B_R} = \int_{B_R} \sum_{j=1}^n a_j\big(x, \nabla u(x)\big) \frac{\partial}{\partial x_j} v(x) dx$$

für jede Funktion $v \in H_1(B_R)$. Wegen der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |(A(\cdot, \nabla u(\cdot)), \nabla v)_{B_R}| &\le \|A(\cdot, \nabla u(\cdot))\|_{B_R} \|\nabla v\|_{B_R} \\ &\le \|A(\cdot, \nabla u(\cdot))\|_{B_R} \|v\|_{2,1,B_R} \end{aligned}$$

ist $v \mapsto (A(\cdot, \nabla u(\cdot)), \nabla v)_{B_R}$ sogar eine stetige Linearform auf $H_1(B_R)$. Hierbei sei

$$\|v\|_{2,1,B_R} = \left(\sum_{|\alpha| \le 1} \|D^\alpha v\|^2_{2,B_R} \right)^{1/2}$$

die Norm auf $H_1(B_R)$. Es folgt, daß die für $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(B_R)$ gültige Gleichung (4.7) stetig auf den Abschluß $\overset{\circ}{H}_1(B_R)$ von $\overset{\circ}{C}_\infty(B_R)$ in $H_1(B_R)$ fortgesetzt werden kann. Also gilt

$$- \Big(A\big(\cdot, \nabla u(\cdot)\big), \nabla v \Big)_{B_R} = (f, v)_{B_R} \tag{4.8}$$

für alle $v \in \overset{\circ}{H}_1(B_R)$.

4.8.2 Vorbemerkung II. Sei $0 < r < R$. Im Beweis von Satz 4.5 wird eine Funktion $\psi \in \overset{\circ}{C}_\infty(B_R)$ benötigt mit

$$0 \leq \psi \leq 1 \text{ und } \psi(x) = 1 \text{ für } x \in B_r\,.$$

Nach Kapitel 3 des Skriptes "Variationsrechnung und Sobolevräume" kann man ein solches ψ folgendermaßen konstruieren: Sei $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(B_1(0))$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. Für $\varepsilon > 0$ setze

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right)\,.$$

$\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ist eine Dirac–Familie. Sei χ die charakteristische Funktion der Kugel B_ϱ mit Radius $\varrho = \frac{1}{2}(R+r)$. Der Rand ∂B_ϱ liegt zwischen den Rändern ∂B_r und ∂B_R und hat von beiden Rändern den Abstand $\frac{1}{2}(R-r)$. Man erhält nun eine Funktion ψ mit den gewünschten Eigenschaften durch

$$\psi = \varphi_\varepsilon * \chi\,,$$

wenn man $\varepsilon < \frac{1}{2}(R-r)$ wählt.

4.8.3 Hauptteil des Beweises von Satz 4.5. Sei $\psi \in \overset{\circ}{C}_\infty(B_R)$ die Funktion aus Vorbemerkung 4.8.2. Weil ψ in einer Umgebung des Randes von B_R verschwindet, gilt sogar

$$\psi \in \overset{\circ}{C}_\infty(B_{r_1})$$

mit einer geeigneten Zahl $r < r_1 < R$. Sei $v \in \overset{\circ}{H}_1(B_{r_1})$. Setzt man v durch Null auf B_R fort, dann gilt $v \in \overset{\circ}{H}_1(B_R)$. Darüberhinaus folgt für $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < R - r_1$, daß $\partial_i^h v \in \overset{\circ}{H}_1(B_R)$, wobei

$$\partial_i^h v(x) = \frac{1}{h}\Big[v(x+he_i) - v(x)\Big]$$

ist, und mit

$$\partial_i^h A\Big(x, \nabla u(x)\Big) = \frac{1}{h}\Big[A\Big(x+he_i, \nabla u(x+he_i)\Big) - A(x, \nabla u(x)\Big)\Big]$$

folgt wie im Beweis von Lemma 4.6, daß

$$\begin{aligned}\Big(\partial_i^h A\big(\cdot,\nabla u(\cdot)\big),\nabla v\Big)_{B_R} &= \Big(A\big(\cdot,\nabla u(\cdot)\big),\partial_i^{-h}\nabla v\Big)_{B_R} \\ &= \Big(A\big(\cdot,\nabla u(\cdot)\big),\nabla\partial_i^{-h} v\Big)_{B_R}.\end{aligned}$$

Wegen $\partial_i^{-h} v \in \overset{\circ}{H}_1(B_R)$ resultiert hieraus und aus (4.8), daß

$$\Big(\partial_i^h A\big(\cdot,\nabla u(\cdot)\big),\nabla v\Big)_{B_R} = -(f,\partial_i^{-h} v)_{B_R}. \tag{4.9}$$

In dieser Gleichung darf man $v = \psi^2(\partial_i^h u)$ setzen. Denn wegen $u \in H_1(B_R)$ gehört

$$\partial_i^h u(x) = \frac{1}{h}\Big(u(x+he_i) - u(x)\Big)$$

für $0 < |h| < R - r_1$ zum Raum $H_1(B_{r_1})$, und somit ist $\psi^2(\partial_i^h u) \in \overset{\circ}{H}_1(B_{r_1})$ wegen $\psi \in \overset{\circ}{C}_\infty(B_{r_1})$, also auch $\psi^2 \in \overset{\circ}{C}_\infty(B_{r_1})$. Aus (4.9) folgt also

$$\Big(\partial_i^h A(\cdot,\nabla u(\cdot)\big),\nabla(\psi^2\partial_i^h u)\Big)_{B_R} = -\Big(f,\partial_i^{-h}(\psi^2\partial_i^h u)\Big)_{B_R}.$$

Wendet man auf der linken Seite die Produktregel an, dann ergibt sich zusammen mit der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}&\Big(\partial_i^h A\big(\cdot,\nabla u(\cdot)\big),\psi^2\partial_i^h\nabla u\Big)_{B_R} \\ &= \; -2\Big(\psi\partial_i^h A\big(\cdot,\nabla u(\cdot)\big),(\nabla\psi)\partial_i^h u\Big)_{B_R} - \Big(f,\partial_i^{-h}(\psi^2\partial_i^h u)\Big)_{B_R} \\ &\le \; 2\|\psi\partial_i^h A\big(\cdot,\nabla u(\cdot)\big)\|_{B_R}\|(\nabla\psi)\partial_i^h u\|_{B_R} + \|f\|_{B_R}\|\partial_i^{-h}(\psi^2\partial_i^h u)\|_{B_R}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Aus Lemma 4.7 folgt nun wegen $\psi^2\partial_i^h u \in \overset{\circ}{H}_1(B_R)$, daß

$$\begin{aligned}\|\partial_i^{-h}(\psi^2\partial_i^h u)\|_{B_R} &\le \|\nabla(\psi^2\partial_i^h u)\|_{B_R} \\ &\le \|2\psi(\nabla\psi)\partial_i^h u\|_{B_R} + \|\psi^2\partial_i^h\nabla u\|_{B_R} \qquad (4.11) \\ &\le 2\|\nabla\psi\|_\infty\|\partial_i^h u\|_{B_{r_1}} + \|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R} \\ &\le 2\|\nabla\psi\|_\infty\|\nabla u\|_{B_R} + \|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R},\end{aligned}$$

und

$$\|(\nabla\psi)\partial_i^h u\|_{B_R} \le \|\nabla\psi\|_\infty \|\partial_i^h u\|_{B_{r_1}} \le \|\nabla\psi\|_\infty \|\nabla u\|_{B_R}\,. \tag{4.12}$$

Wegen Folgerung 4.3 gilt schließlich

$$\begin{aligned}
|\partial_i^h A\big(x,\nabla u(x)\big)| &= \Big|\frac{1}{h}\Big[A\Big(x+he_i,\nabla u(x+he_i)\Big) - A\Big(x,\nabla u(x)\Big)\Big]\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{h}\Big[A\Big(x+he_i,\nabla u(x+he_i)\Big) - A\Big(x+he_i,\nabla u(x)\Big)\Big] \\
&\quad + \frac{1}{h}\Big[A\Big(x+he_i,\nabla u(x)\Big) - A\Big(x,\nabla u(x)\Big)\Big]\Big| \qquad (4.13) \\
&\le C\Big|\frac{1}{h}\big[\nabla u(x+he_i) - \nabla u(x)\big]\Big| + M\Big(|\nabla u(x)|+1\Big) \\
&= C|\partial_i^h \nabla u(x)| + M|\nabla u(x)| + M\,.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Voraussetzung (4.3) verwendet. Setzt man (4.11) – (4.13) in (4.10) ein, dann resultiert

$$\begin{aligned}
&\Big(\partial_i^h A\Big(\cdot,\nabla u(\cdot)\Big),\psi^2\partial_i^h\nabla u\Big)_{B_R} \\
&\le 2\Big(C\|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R} + M\|\psi\nabla u\|_{B_R} + M\|\psi\|_{B_R}\Big)\|\nabla\psi\|_\infty\|\nabla u\|_{B_R} \\
&\quad + \|f\|_{B_R}\Big(2\|\nabla\psi\|_\infty\|\nabla u\|_{B_R} + \|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R}) \qquad (4.14) \\
&\le \Big(2C\|\nabla\psi\|_\infty\|\nabla u\|_{B_R} + \|f\|_{B_R}\Big)\|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R} \\
&\quad + 2\|\nabla\psi\|_\infty\|\nabla u\|_{B_R}\Big(M\|\nabla u\|_{B_R} + \|f\|_{B_R} + M\|\psi\|_{B_R}\Big) \\
&= I_1\|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R} + I_2\,.
\end{aligned}$$

Um die linke Seite dieser Ungleichung abzuschätzen, benütze ich wieder Folgerung 4.3. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\partial_i^h A\Big(x,\nabla u(x)\Big)\cdot\psi(x)^2\partial_i^h\nabla u(x) \\
&= \frac{1}{h}\psi(x)^2\Big[A\Big(x+he_i,\nabla u(x+he_i)\Big) - A\Big(x,\nabla u(x)\Big)\Big]\cdot\partial_i^h\nabla u(x) \\
&= \frac{1}{h^2}\psi(x)^2\Big[A\Big(x+he_i,\nabla u(x+he_i)\Big) - A\Big(x+he_i,\nabla u(x)\Big)\Big] \\
&\quad \cdot\Big[\nabla u(x+he_i) - \nabla u(x)\Big] \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \frac{1}{h}\psi(x)^2\Big[A\Big(x+he_i,\nabla u(x)\Big) - A\Big(x,\nabla u(x)\Big)\Big]\cdot \partial_i^h \nabla u(x) \\
\geq &\quad c\psi(x)^2|\partial_i^h \nabla u(x)|^2 \\
&\quad + \psi(x)^2\frac{1}{h}\Big[A\Big(x+he_i,\nabla u(x)\Big) - A\Big(x,\nabla u(x)\Big)\Big]\cdot \partial_i^h \nabla u(x)\,.
\end{aligned}
$$

Nach Voraussetzung (4.3) gilt

$$
\Big|\frac{1}{h}\Big(A\Big(x+he_i,\nabla u(x)\Big) - A\Big(x,\nabla u(x)\Big)\Big)\Big| \leq M\Big(|\nabla u(x)|+1\Big)\,,
$$

also

$$
\begin{aligned}
&\Big|\Big(\frac{1}{h}\Big[A\Big(\,\cdot+he_i,\nabla u(\cdot)\Big) - A\Big(\cdot,\nabla u(\cdot)\Big)\Big],\psi^2\partial_i^h\nabla u\Big)_{B_R}\Big| \qquad (4.16)\\
&\quad \leq M\Big(\|\psi\nabla u\|_{B_R} + \|\psi\|_{B_R}\Big)\|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R}\,.
\end{aligned}
$$

Setzt man (4.15) in (4.14) ein und benützt (4.16), dann folgt

$$
\begin{aligned}
c\|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R}^2 &\leq I_1\|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R} + I_2 \\
&\quad + M\Big(\|\nabla u\|_{B_R} + \|\psi\|_{B_R}\Big)\|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R} \\
&= I_3\|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R} + I_2 \\
&\leq \delta\|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R}^2 + \frac{1}{\delta}I_3^2 + I_2\,,
\end{aligned}
$$

wobei die Ungleichung

$$
ab = \sqrt{\delta}a\frac{1}{\sqrt{\delta}}b \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta}b^2
$$

verwendet wurde, die für alle $a,b\in\mathbb{R}$ und alle $\delta>0$ gilt. Wählt man $\delta=\frac{c}{2}$, dann folgt

$$
\|\partial_i^h\nabla u\|_{B_r}^2 \leq \|\psi\partial_i^h\nabla u\|_{B_R}^2 \leq \Big(\frac{2}{c}I_3\Big)^2 + \frac{2}{c}I_2
$$

mit

$$
I_2 = 2\|\nabla\psi\|_\infty\|\nabla u\|_{B_R}\Big(M\|\nabla u\|_{B_R} + \|f\|_{B_R} + M\|\psi\|_{B_R}\Big)
$$

und

$$
I_3 = \Big(2C\|\nabla\psi\|_\infty + M\Big)\|\nabla u\|_{B_R} + \|f\|_{B_R} + M\|\psi\|_{B_R}\,.
$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist unabhängig von h für $h \to 0$, und die Ungleichung gilt für alle $i = 1, \ldots, n$. Nach Lemma 4.6 ist also $\frac{\partial}{\partial x_j} u \in H_1(B_r)$, und folglich $u \in H_2(B_r)$. Weil B_r eine Kugel um den beliebigen Punkt $y \in \Omega$ war, bedeutet dies $u \in H_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Hiermit ist Satz 4.5 bewiesen.

4.9 Lemma (Kettenregel). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.*
(i) Sei $A \in C_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit

$$|\nabla A(\xi)| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial}{\partial \xi_i} a_j(\xi)\Big)^2} \leq C$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $A(\nabla u(\cdot)) \in H_1(\Omega)$ für $u \in H_2(\Omega)$, und für die schwache Ableitung gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A\Big(\nabla u(x)\Big) = \nabla A\Big(\nabla u(x)\Big) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla u(x).$$

(ii) Sei $A : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von der Form $A(x, \xi) = A(x)\xi$, mit der Matrix

$$A(x) = \Big(a_{ji}(x)\Big)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Hierbei sei $a_{ji} \in C_1(\Omega) \cap H_1^{\infty}(\Omega)$. Dann ist

$$x \mapsto A(x, \nabla u(x)) = (a_j(x, \nabla u(x)))_{j=1,\ldots,n} = (\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x))_{j=1,\ldots,n} \in H_1(\Omega)$$

für $u \in H_2(\Omega)$ mit schwacher Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_k} a_j\Big(x, \nabla u(x)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ji}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} u(x) + \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right),$$

wobei $A(x, \xi) = (a_j(x, \xi))_{j=1,\ldots,n}$.

Beweis. (i) Beachte zunächst, daß

$$|\nabla A\Big(\nabla u(x)\Big) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla u(x)| \leq C |\frac{\partial}{\partial x_i} \nabla u(x)|,$$

also $\nabla A(\nabla u(\cdot)) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla u \in L^2(\Omega)$.

Sei nun $\varphi_m \in C_\infty(\Omega) \cap H_2(\Omega)$ mit $\|u - \varphi_m\|_{2,\Omega} \to 0$ für $m \to \infty$ und mit

$$\lim_{m\to\infty} \nabla\varphi_m(x) = \nabla u(x)$$

für fast alle $x \in \Omega$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\|\nabla A\big(\nabla u(\cdot)\big)\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u - \nabla A\big(\nabla\varphi_m(\cdot)\big)\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla\varphi_m\|_\Omega \\
&\le \ \|\Big[\nabla A\big(\nabla u(\cdot)\big) - \nabla A\big(\nabla\varphi_m(\cdot)\big)\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u\|_\Omega \\
&\qquad + \|\nabla A\big(\nabla\varphi_m(\cdot)\big)\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u - \frac{\partial}{\partial x_i}\nabla\varphi_m\Big]\|_\Omega \\
&\le \ \Big(\int_\Omega |\Big[\nabla A\big(\nabla u(x)\big) - \nabla A\big(\nabla\varphi_m(x)\big)\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u(x)|^2 dx\Big)^{1/2} \\
&\qquad + C\|\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u - \frac{\partial}{\partial x_i}\nabla\varphi_m\|_\Omega \to 0
\end{aligned}$$

für $m \to \infty$. Denn es gilt

$$\|\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u - \frac{\partial}{\partial x_i}\nabla\varphi_m\|_\Omega \le \|u - \varphi_m\|_{2,\Omega} \to 0\,,$$

und wegen der Stetigkeit von $\nabla A(\xi)$

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\Big[\nabla A\big(\nabla u(x)\big) - \nabla A\big(\nabla\varphi_m(x)\big)\Big] \\
&\qquad = \nabla A\big(\nabla u(x)\big) - \nabla A\Big(\lim_{m\to\infty}\nabla\varphi_m(x)\Big) = 0
\end{aligned}$$

für fast alle $x \in \Omega$. Außerdem folgt

$$\Big|\Big[\nabla A\big(\nabla u(x)\big) - \nabla A\big(\nabla\varphi_m(x)\big)\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u(x)\Big|^2 \le (2C)^2\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u(x)\Big|^2,$$

also ist $(2C)^2\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u\Big|^2$ eine integrierbare Dominante für die Folge der Integranden, und somit ergibt der Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\int_\Omega |\Big[\nabla A\big(\nabla u(x)\big) - \nabla A\big(\nabla\varphi_m(x)\big)\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u(x)|^2 dx \\
&\quad = \int_\Omega \lim_{m\to\infty} |\Big[\nabla A\big(\nabla u(x)\big) - \nabla A\big(\nabla\varphi_m(x)\big)\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u(x)|^2 dx = 0
\end{aligned}$$

Aus Folgerung 4.3 (i) resultiert

$$\begin{aligned}\|A\big(\nabla u(\cdot)\big) - A\big(\nabla\varphi_m(\cdot)\big)\|_\Omega^2 &= \int_\Omega |A\big(\nabla u(x)\big) - A\big(\nabla\varphi_m(x)\big)|^2 dx \\ &\leq C^2 \int_\Omega |\nabla u(x) - \nabla\varphi_m(x)|^2 dx \leq C^2 \|u - \varphi_m\|_{2,\Omega} \to 0\end{aligned}$$

für $m \to \infty$. Schließlich gilt für $\psi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}\Big(\nabla A\big(\nabla\varphi_m(\cdot)\big)\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla\varphi_m, \psi\Big)_\Omega &= \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}A\big(\nabla\varphi_m(\cdot)\big), \psi\Big)_\Omega \\ &= -\Big(A\big(\nabla\varphi_m(\cdot)\big), \frac{\partial}{\partial x_i}\psi\Big)_\Omega .\end{aligned}$$

Zusammen folgt

$$\begin{aligned}&\Big|\Big(\nabla A\big(\nabla u(\cdot)\big)\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u, \psi\Big)_\Omega + \Big(A\big(\nabla u(\cdot)\big), \frac{\partial}{\partial x_i}\psi\Big)_\Omega\Big| \\ \leq\ & \|\nabla A\big(\nabla u(\cdot)\big)\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u - \nabla A\big(\nabla\varphi_m(\cdot)\big)\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla\varphi_m\|_\Omega \|\psi\|_\Omega \\ &+ \Big|\Big(\nabla A\big(\nabla\varphi_m(\cdot)\big)\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla\varphi_m, \psi\Big)_\Omega + \Big(A\big(\nabla\varphi_m(\cdot)\big), \frac{\partial}{\partial x_i}\psi\Big)_\Omega\Big| \\ &+ \|A\big(\nabla u(\cdot)\big) - A\big(\nabla\varphi_m(\cdot)\big)\|_\Omega \|\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\|_\Omega \to 0\end{aligned}$$

für $m \to \infty$, also

$$\Big(\nabla A\big(\nabla u(\cdot)\big)\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u, \psi\Big)_\Omega + \Big(A\big(\nabla u(\cdot)\big), \frac{\partial}{\partial x_i}\psi\Big)_\Omega = 0 .$$

Somit ist $\nabla A(\nabla u(\cdot))\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla u = \frac{\partial}{\partial x_i}A(\nabla u(\cdot))$.
(ii) Wegen $a_{ji} \in C_1(\Omega) \cap H_1^\infty(\Omega)$ gelten $\sup_{x\in\Omega}|a_{ji}(x)| < \infty$, und $\sup_{x\in\Omega}|\frac{\partial}{\partial x_k}a_{ji}(x)| < \infty$, also

$$\begin{gathered}\sum\nolimits_{i=1}^n a_{ji}\frac{\partial}{\partial x_i}u \in L^2(\Omega), \\ \sum\nolimits_{i=1}^n \Big(a_{ji}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}u + \frac{\partial}{\partial x_k}a_{ji}\frac{\partial}{\partial x_i}u\Big) \in L^2(\Omega).\end{gathered}$$

Die Behauptung folgt nun aus der Produktregel für schwache Ableitungen.

4.10 Lemma (Äquivalenz von starker und schwacher Formulierung bei H_2–Lösungen). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. $A : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erfülle eine der beiden Voraussetzungen von Lemma 4.9. Es seien $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H_2(\Omega)$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen (i) und (ii) äquivalent:*
(i)

$$\int_\Omega A\Big(x, \nabla u(x)\Big) \cdot \nabla\varphi(x) + f(x)\varphi(x)dx = 0$$

für alle $\varphi \in \mathring{C}_\infty(\Omega)$.
(ii)

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} a_j\Big(\nabla u(x)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u(x) = f(x)$$

falls $A(x,\xi) = A(\xi) = (a_j(\xi))_{j=1,\dots,n}$, beziehungsweise

$$\sum_{i,j=1}^n \left(a_{ji}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u(x) + \frac{\partial}{\partial x_j}a_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)\right) = f(x)\,,$$

falls $A(x,\xi) = A(x)\xi = (\sum_{i=1}^n a_{ji}(x)\xi_i)_{j=1,\dots,n}$.

Beweis. Sei $A(x,\xi) = (a_j(\xi))_{j=1,\dots,n}$. Da nach Lemma 4.9

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} a_j\Big(\nabla u(x)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u(x)$$

die schwache Ableitung von $a_j(\nabla u(x))$ nach x_j ist, gilt für alle $\varphi \in \mathring{C}_\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} a_j\Big(\nabla u(x)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u(x)\varphi(x)dx &= \int_\Omega \operatorname{div} A\Big(\nabla u(x)\Big)\varphi(x)dx \\ &= -\int_\Omega A\Big(\nabla u(x)\Big)\cdot\nabla\varphi(x)dx\,.\end{aligned}$$

Aus (ii) folgt also

$$-\int_\Omega A\Big(\nabla u(x)\Big)\cdot\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\,.$$

Dies ist die Aussage (i). Wenn umgekehrt (i) erfüllt ist, folgt

$$\int_\Omega \Big(-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} a_j\Big(\nabla u(x)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u(x) + f(x)\Big)\varphi(x)dx = 0\,.$$

Aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung (Siehe Skriptum "Variationsrechnung und Sobolevräume", Lemma 4.7) folgt nun (ii). Für den Fall $A(x,\xi) = (\sum_{i=1}^n a_{ji}(x)\xi_i)_{j=1,\ldots,n}$ verläuft der Beweis genauso.

4.11 Folgerung (Schwache Lösungen sind starke Lösungen). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Der Differentialoperator*

$$\operatorname{div} A\Big(x, \nabla u(x)\Big)$$

sei gleichmäßig elliptisch in $K \times \mathbb{R}^n$ für jede kompakte Teilmenge K von Ω. Dabei sei entweder $A(x,\xi) = A(\xi)$ oder $A(x,\xi) = A(x)\xi$. Im letzten Fall sei $(x \mapsto A(x)) \in C_1(\Omega)$. Sei $f \in L^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ und sei $u \in H_1^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ schwache Lösung der Differentialgleichung

$$\operatorname{div} A\Big(x, \nabla u(x)\Big) = f(x)$$

in Ω. Dann ist $u \in H_2^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ und erfüllt in Ω die Gleichungen

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} a_j\Big(\nabla u(x)\Big) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) = f(x)\,,$$

falls $A(x,\xi) = A(\xi)$, beziehungsweise

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ji}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) = f(x)\,,$$

falls $A(x,\xi) = A(x)\xi$.

Beweis. Der Differentialoperator $\operatorname{div} A(x, \nabla u(x))$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4.5. Um dies zu zeigen, muß nur gezeigt werden, daß im Fall $A(x,\xi) = A(x)\xi$ die Ungleichung (4.3) erfüllt ist. Wegen $(x \mapsto A(x)) \in C_1(\Omega)$ folgt diese Abschätzung aus dem Schrankensatz. Denn sei $K \subseteq \Omega$ eine kompakte Menge. Dann gilt für $x, y \in K$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |A(x,\xi) - A(y,\xi)| &\leq |A(x) - A(y)|\,|\xi| \\ &\leq \sup_{z \in K} |\nabla A(z)|\,|x - y|\,|\xi|\,. \end{aligned}$$

Also ist (4.3) erfüllt mit $M = \sup_{z \in K} |\nabla A(z)|$. Aus Satz 4.5 folgt somit $u \in H_2^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dies bedeutet, daß die Voraussetzungen von Lemma 4.9

und damit von Lemma 4.10 in jeder offenen Kugel $B_r(y)$ mit $\overline{B_r(y)} \subseteq \Omega$ erfüllt sind. Lemma 4.10 zeigt, daß u die behaupteten partiellen Differentialgleichungen in $B_r(y)$ erfüllt. Da Ω mit solchen Kugeln ausgeschöpft werden kann, erfüllt u diese Differentialgleichungen in ganz Ω.

4.12 Bemerkung Die Voraussetzung $\big(x \mapsto A(x)\big) \in C_1(\Omega) \cap H_1^\infty(\Omega)$ in Lemma 4.9, Lemma 4.10 beziehungsweise $\big(x \mapsto A(x)\big) \in C_1(\Omega)$ in Folgerung 4.11 kann abgeschwächt werden. In Lemma 4.9 und Lemma 4.10 genügt es vorauszusetzen, daß $x \mapsto A(x)$ beschränkt und Lipschitzstetig in Ω ist, das heißt, daß eine Konstante M existiert mit

$$|A(x) - A(y)| \leq M|x - y|$$

für alle $x, y \in \Omega$, und in Folgerung 4.11 genügt es vorauszusetzen, daß $x \mapsto A(x)$ lokal Lipschitzstetig ist, das heißt, daß diese Abbildung in jeder kompakten Teilmenge von Ω Lipschitzstetig ist. Denn wie im Anhang gezeigt wird, ist dann $(x \mapsto A(x)) \in H_1^{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$, so daß die schwache Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_j} a_{ji} \in L^{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$$

existiert. Die Behauptungen von Lemma 4.9, Lemma 4.10 und Folgerung 4.11 gelten weiter wenn an den entsprechenden Stellen die klassische Ableitung durch diese schwache Ableitung ersetzt wird.

4.13 Satz (Höhere Regularität der Lösungen linearer elliptischer partieller Differentialgleichungen). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $m \in \mathbb{N}_0$. Der lineare Differentialoperator*

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_j\big(x, \nabla u(x)\big) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)\right)$$

sei gleichmäßig elliptisch in $K \times \mathbb{R}^n$ für jede kompakte Teilmenge K von Ω mit $a_{ji} \in C_{m+1}(\Omega)$.

Sei $f \in H_m^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ und sei $u \in H_1^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ schwache Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)\right) = f(x).$$

Dann ist $u \in H^{2,\mathrm{loc}}_{m+2}(\Omega)$.

Beweis. Für $m = 0$ folgt die Behauptung unmittelbar aus Folgerung 4.11. Sei also $m \geq 1$. Zunächst beachte man, daß der Differentialoperator die Form $\mathrm{div} A(x, \nabla u(x))$ hat mit

$$A(x,\xi) = A(x)\xi\,,\ A(x) = \Big(a_{ji}(x)\Big)_{j,i=1,\ldots,n}.$$

Da u schwache Lösung ist, gilt also

$$\int_\Omega \Big(- A\Big(x, \nabla u(x)\Big) \cdot \nabla\varphi(x) - f(x)\varphi(x)\Big) dx = 0$$

für alle $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$.

Nach Folgerung 4.11 ist u als schwache Lösung einer elliptischen Gleichung in $H^{2,\mathrm{loc}}_2(\Omega)$. Also ist $\frac{\partial}{\partial x_k} u \in H^{2,\mathrm{loc}}_1(\Omega)$, und wir werden zeigen, daß $\frac{\partial}{\partial x_k} u$ schwache Lösung einer elliptischen partiellen Differentialgleichung ist, die man durch Ableiten der ursprünglichen Gleichung erhält. Zunächst wird die partielle Differentialgleichung für $\frac{\partial}{\partial x_k} u$ durch formale Rechnung bestimmt. Leitet man die Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} u(x)\Big) = f(x)$$

formal ab, folgt

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} u(x)\Big)\Big) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} a_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} u(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\,,$$

also

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div} A\left(x, \nabla \frac{\partial}{\partial x_k} u(x)\right) \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) - \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ji}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u(x)\right].
\end{aligned}$$

Wegen $f \in H^{2,\mathrm{loc}}_m(\Omega), a_{ji} \in C_{m+1}(\Omega)$ und $u \in H^{2,\mathrm{loc}}_2(\Omega)$ ist die rechte Seite dieser Gleichung in $L^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ enthalten. Da der Differentialoperator

$\mathrm{div} A(x, \nabla v(x))$ die Voraussetzungen von Folgerung 4.11 erfüllt, ist $\frac{\partial}{\partial x_k} u$ als schwache Lösung dieser Gleichung nach Folgerung 4.11 in $H_2^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ enthalten. Da dies für jedes k gilt, ist $u \in H_3^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Durch m–fache Wiederholung dieses Schrittes erhält man $u \in H_{m+2}^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Zur Vervollständigung des Beweises muß also noch die formale Herleitung der partiellen Differentialgleichung für $\frac{\partial}{\partial x_k} u$ gerechtfertigt werden. Weil u schwache Lösung ist, gilt für $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega A\Big(x, \nabla u(x)\Big) \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi(x) dx = 0 \,,$$

da $\frac{\partial}{\partial x_k} \varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$. Wegen $u \in H_2^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist nach Lemma 4.9 $A(\cdot, \nabla u(\cdot)) \in H_1^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit schwacher Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} a_j\Big(x, \nabla u(x)\Big) &= \sum_{i=1}^n \Big[a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} u(x) \Big) + \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \Big] \\ &= a_j\Big(x, \nabla\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} u(x)\Big)\Big) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \,. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Big[- A\Big(x, \nabla\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} u(x)\Big)\Big) \cdot \nabla \varphi(x) \\ &- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi(x) \Big] dx = 0 \,. \end{aligned}$$

Nun benützt man, daß $f \in H_m^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\frac{\partial}{\partial x_k} a_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i} u \in H_1^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ gilt wegen $a_{ji} \in C_{m+1}(\Omega)$ und wegen $\frac{\partial}{\partial x_i} u \in H_1^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Es folgt

$$\begin{aligned} &\int_\Omega -A\Big(x, \nabla\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} u(x)\Big)\Big) \cdot \nabla \varphi(x) \\ &- \Big[\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) - \sum_{i,j=1}^n \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ji}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u(x) \Big) \Big] \varphi(x) dx = 0 \,. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß $\frac{\partial}{\partial x_k} u$ schwache Lösung der behaupteten partiellen Differentialgleichung ist.

5 Regularität am Rand, Maximumprinzip

In diesem Abschnitt werden wir die Randregularität von Lösungen elliptischer Gleichungen studieren und am Ende des Abschnittes ein Maximumprinzip für schwache Lösungen beweisen.

5.1 Definition (Mengen der Klasse C_k). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge. Man sagt, Ω gehöre zur Klasse C_k, falls sich $\partial\Omega$ durch endlich viele offene Mengen $U^1, \ldots, U^m$ überdecken läßt, so daß $\partial\Omega \cap U^j$ für $j = 1, \ldots, m$ der Graph einer k–fach stetig differenzierbaren Funktion ist und $\Omega \cap U^j$ ganz auf einer Seite dieses Graphen liegt. Genauer gebe es zu jedem $j = 1, \ldots, m$ ein euklidisches Koordinatensystem $(x_1^j, \ldots, x_n^j)$ im $\mathbb{R}^n$, Zahlen $r^j > 0$ und $\varepsilon^j > 0$ und eine Funktion $g^j \in C_k(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$, so daß mit der Bezeichnung $\hat{x}^j = (x_1^j, \ldots, x_{n-1}^j)$ für $x = (x_1^j, \ldots, x_n^j) \in \mathbb{R}^n$ folgendes gelte:

$$\left\{x = (\hat{x}^j, x_n^j) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\hat{x}^j| < r^j\,,\; x_n^j = g^j(\hat{x}^j)\right\} \;\subseteq\; \partial\Omega$$

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\hat{x}^j| < r^j\,,\; g^j(\hat{x}^j) < x_n^j < g^j(\hat{x}^j) + \varepsilon^j\right\} \;\subseteq\; \Omega$$

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\hat{x}^j| < r^j\,,\; g^j(\hat{x}^j) - \varepsilon^j < x_n^j < g^j(\hat{x}^j)\right\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^n \backslash \Omega\,.$$

Ist weiter

$$U^j = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\hat{x}^j| < r^j\,,\; |x_n^j - g^j(\hat{x}^j)| < \varepsilon^j\right\},$$

dann sei $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U^j$.

Man vergleiche auch die Definition A.2 im Anhang.

5.2 Satz (Regularität der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen am Rand). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge der Klasse C_2. Der Differentialoperator*

$$\operatorname{div} A\Big(x, \nabla u(x)\Big)$$

sei gleichmäßig elliptisch in $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Dabei sei entweder $A(x,\xi) = A(\xi)$ oder $A(x,\xi) = A(x)\xi$ mit $(x \mapsto A(x)) \in C_1(\overline{\Omega})$. Sei $f \in L^2(\Omega)$ und sei $u \in \mathring{H}_1(\Omega)$

schwache Lösung des Randwertproblems

$$\operatorname{div} A\Big(x, \nabla u(x)\Big) = f(x)\,, \quad x \in \Omega$$
$$u(x) = 0\,, \quad x \in \partial\Omega.$$

Dann ist $u \in H_2(\Omega)$.

Beweis. Mit den Bezeichnungen von Definition 5.1 sei $Q^j = \Omega \cap U^j$ und

$$\tau^j : V^j = \Big\{(y,h) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, |y| < r^j, 0 \le h < \varepsilon^j\Big\} \to \overline{Q^j} \subseteq \overline{\Omega}\,,$$
$$\tau^j(y,h) = \Big(y, g^j(y) + h\Big)\,.$$

τ^j ist eine eineindeutige Abbildung, die die Scheibe $\Big\{(y,0) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, |y| < r^j\Big\}$ auf einen Teil des Randes $\partial\Omega$ abbildet, und die die einseitige Umgebung V^j dieser Scheibe auf eine Umgebung von $\partial\Omega$ in $\overline{\Omega}$ abbildet.

Sei $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ schwache Lösung von $\operatorname{div} A(x, \nabla u(x)) = f(x)$ in Ω. Dann ist $u \in H_2^{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ und zum Beweis des Satzes genügt es zu zeigen, daß $u \in H_2(Q^j)$ für $j = 1, \ldots, m$.

Ich halte $j \in \{1, \ldots, m\}$ fest und schreibe zur Abkürzung

$$g = g^j\,, \ \tau = \tau^j\,, \ V = V^j\,, \ Q = Q^j\,, \ r = r^j\,, \ \varepsilon = \varepsilon^j\,.$$

Setzt man für $z \in V$
$$\tilde{u}(z) = u\Big(\tau(z)\Big)\,,$$

dann ist $\tilde{u} \in H_1(V) \cap H_2^{2,\mathrm{loc}}(\overset{\circ}{V})$ und hat nach Satz A.4 im Anhang schwache Randwerte $\tilde{u}|_S$ auf der Scheibe

$$S = \Big\{(y,0) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, |y| < r\Big\} = \Big\{(y,0) \in V\Big\}\,.$$

Wegen $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ folgt nach Satz A.10 für die schwachen Randwerte $u|_{\partial\Omega} = 0$, also $\tilde{u}|_S = 0$.

Für alle $\varphi \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega A\Big(x, \nabla u(x)\Big) \cdot \nabla\varphi(x) + f(x)\varphi(x)dx = 0\,.$$

Für $\psi \in \mathring{C}_\infty(\mathring{V})$ ist $\hat{\psi} = \psi \circ \tau^{-1} \in \mathring{H}_1(\Omega)$, also folgt

$$\int_\Omega A\Big(x, \nabla u(x)\Big) \cdot \nabla\hat{\psi}(x) + f(x)\hat{\psi}(x)dx = 0\,.$$

Der Integrand ist nur auf dem Bild von V unter τ von Null verschieden. Um dieses Integral auf ein Integral über V zu transformieren, bezeichne ich mit $\nabla v(x)$ einen Spaltenvektor. Der entsprechende Zeilenvektor sei

$$v'(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}v(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}v(x)\right)\,.$$

Ich benütze, daß

$$(\nabla\hat{\psi}) \circ \tau = (\hat{\psi}' \circ \tau)^T = \Big(\psi'\big[(\tau^{-1})' \circ \tau\big]\Big)^T = \big[(\tau')^{-1}\big]^T \nabla\psi$$

$$\nabla u \circ \tau = (u' \circ \tau)^T = \big[(\tilde{u} \circ \tau^{-1})' \circ \tau\big]^T = \big[(\tau')^{-1}\big]^T \nabla\tilde{u}\,,$$

$$\nabla\tau(z) = \nabla\tau(y,h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\tau_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\tau_1}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial\tau_1}{\partial h} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial\tau_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\tau_n}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial\tau_n}{\partial h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & \\ \frac{\partial g}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial y_{n-1}} & 1 \end{pmatrix},$$

und somit $|\det\nabla\tau(z)| = 1$ gilt, und erhalte

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega A\Big(x, \nabla u(x)\Big) \cdot \nabla\hat{\psi}(x) + f(x)\hat{\psi}(x)dx \\ &= \int_V \Big[A\Big(\tau(z), \nabla u \circ \tau(z)\Big) \cdot \nabla\hat{\psi} \circ \tau(z) + f \circ \tau(z)\hat{\psi} \circ \tau(z)\Big] |\det\nabla\tau(z)|dz \\ &= \int_V \tilde{A}\Big(z, \nabla\tilde{u}(z)\Big) \cdot \nabla\psi(z) + \tilde{f}(z)\psi(z)dz \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{f} = f \circ \tau$$
$$\tilde{A}(z,\xi) = \tau'(z)^{-1} A\Big(\tau(z), \tau'(z)^{-T}\xi\Big)\,.$$

Weil ψ eine beliebige Funktion aus $\overset{\circ}{C}_\infty(\overset{\circ}{V})$ war, bedeutet dies, daß $\tilde{u} \in H_1(\overset{\circ}{V})$ schwache Lösung von

$$\operatorname{div} \tilde{A}\Big(z, \nabla\tilde{u}(z)\Big) = \tilde{f}(z)$$

in $\overset{\circ}{V}$ ist mit

$$\tilde{u}\big|_S = 0\,.$$

Wegen $g \in C_2(\mathbb{R}^{n-1})$ ist $\tau \in C_2(\overline{V})$. Hieraus folgt, daß der Differentialoperator $\operatorname{div} \tilde{A}(z, \nabla\tilde{u}(z))$ gleichmäßig elliptisch in $V \times \mathbb{R}^n$ ist. Insbesondere gilt

$$\nabla_\xi \tilde{A}(z,\xi) = \tau'(z)^{-1}\nabla_p A\Big(\tau(z), \tau'(z)^{-T}\xi\Big)\tau'(z)^{-T}\,,$$

und somit für $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\eta^T \nabla_\xi \tilde{A}(z,\xi)\eta &= \eta^T\tau'(z)^{-1}\nabla_p A\Big(\tau(z), \tau'(z)^{-T}\xi\Big)\tau'(z)^{-T}\eta \\
&= \Big[\tau'(z)^{-T}\eta\Big]^T \nabla_p A\Big(\tau(z), \tau'(z)^{-T}\xi\Big)\Big[\tau'(z)^{-T}\eta\Big] \\
&\geq c|\tau'(z)^{-T}\eta|^2 \geq \frac{c}{\|\tau'(z)\|^2}|\eta|^2 \geq c_1|\eta|^2
\end{aligned}$$

wegen

$$|\eta| = |\tau'(z)^T\tau'(z)^{-T}\eta| \leq \|\tau'(z)^T\|\,|\tau'(z)^{-T}\eta|\,.$$

Die anderen Bedingungen an $\tilde{A}$ für die gleichmäßige Elliptizität prüft man entsprechend nach. Wegen

$$V = \Big\{(y,h)\ \Big|\ |y| < r,\ 0 \leq h < \varepsilon\Big\}$$

ist mit $z \in V$ auch $z + \lambda e_i \in V$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda|$ hinreichend klein. Genau wie im Beweis der inneren Regularität (Satz 4.5) kann deswegen durch Bildung der Differenzen $\partial_i^\lambda \nabla\tilde{u}$ für $1 \leq i \leq n-1$ gezeigt werden, daß

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\nabla\tilde{u} \in L^2(\overset{\circ}{V}) \tag{5.1}$$

ist für $1 \leq i \leq n-1$. Hierbei wird benötigt, daß $\tilde{u}\big|_S = 0$, weil dann nach Satz A.10 im Anhang.

$$\psi\tilde{u} \in \overset{\circ}{H}_1(\overset{\circ}{V})$$

gilt für alle $\psi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\hat{V})$ mit

$$\hat{V} = \Big\{z \in \mathbb{R}^n\ \Big|\ |(z_1,\ldots,z_{n-1})| < r, |z_n| < \varepsilon\Big\}\,.$$

Im Beweis von Satz 4.5 wird gezeigt, daß dann $\frac{\partial}{\partial z_i}\nabla(\psi\tilde{u}) \in L^2(\overset{\circ}{V})$. Wählt man ψ so, daß $\psi = 1$ gilt in einer in $\hat{V}$ enthaltenen Kugel

$$B_\delta(y,0) = \Big\{z \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; |z-(y,0)| < \delta\Big\},$$

dann folgt $\frac{\partial}{\partial z_i}\nabla\tilde{u} \in L^2(B_\delta(y,0) \cap \overset{\circ}{V})$ für $1 \le i \le n-1$. Nach Verkleinerung von r und somit Verkleinerung von V resultiert hieraus (5.1).

Es bleibt zu beweisen, daß $\frac{\partial^2}{\partial z_n^2}\tilde{u} \in L^2(\overset{\circ}{V})$ gilt. Hierbei beachte man, daß $\tilde{u} \in H_2^{\mathrm{loc}}(\overset{\circ}{V}) \cap H_1(\overset{\circ}{V})$ ist. Weil im Fall $A(x,\xi) = A(x)\xi$ auch

$$\tilde{A}(z,\xi) = \tau'(z)^{-1}A\Big(\tau(z), \tau'(z)^{-T}\xi\Big) = \tau'(z)^{-1}A\Big(\tau(z)\Big)\tau'(z)^{-T}\xi = \tilde{A}(z)\xi$$

gilt, ergibt Folgerung 4.11, angewandt auf die Gleichung $\operatorname{div}\tilde{A}\Big(z, \nabla\tilde{u}(z)\Big) = \tilde{f}(z)$, daß

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ji}(z)\,\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\,\tilde{u}(z) = \tilde{f}(z) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j}\,\tilde{a}_{ji}(z)\,\frac{\partial}{\partial z_i}\,\tilde{u}(z)\,, \tag{5.2a}$$

wobei $\tilde{a}_{ji}(z)$ die Koeffizienten der Matrix $\tilde{A}(z)$ seien. Um eine derartige Gleichung für den Fall $A(x,\xi) = A(\xi)$ herzuleiten, beachte man, daß aus $(\tau')^{-T} \in C_1(V)$ und $\tilde{u} \in H_2^{\mathrm{loc}}(\overset{\circ}{V})$

$$(\tau')^{-T}\nabla\tilde{u} \in H_1^{\mathrm{loc}}(\overset{\circ}{V})$$

folgt, wobei sich die schwache Ableitung dieser Funktion aus der Produktregel ergibt. Lemma 4.9 liefert nun, daß

$$A\Big([(\tau')^{-T}\nabla\tilde{u}](\cdot)\Big) \in H_1^{\mathrm{loc}}(\overset{\circ}{V})\,,$$

und daß die schwache Ableitung nach der Kettenregel berechnet werden kann. Hieraus und aus $(\tau')^{-1} \in C_1(V)$ folgt wie oben, daß

$$\tau'(\cdot)^{-1}A\Big(\tau'(\cdot)^{-T}\nabla\tilde{u}(\cdot)\Big) \in H_1^{\mathrm{loc}}(\overset{\circ}{V})\,,$$

und die schwache Ableitung kann wie gewohnt mit Produktregel und Kettenregel berechnet werden. Wie in Lemma 4.10 schließt man jetzt mit $\tilde{A}(z,\xi) = \Big(\tilde{a}_1(z,\xi),\ldots,\tilde{a}_n(z,\xi)\Big)$, daß

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\,\tilde{a}_j\Big(z,\nabla\tilde{u}(z)\Big)\,\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\,\tilde{u}(z) = \tilde{f}(z) - \tilde{b}\Big(z,\nabla\tilde{u}(z)\Big)\,, \tag{5.2b}$$

wobei $\tilde{b}(z,\xi) = \operatorname{div}\tau'(z)^{-1}A\Big(\tau'(z)^{-T}\xi\Big)$ sei. Es gilt

$$\tilde{b}\Big(\cdot,\nabla\tilde{u}(\cdot)\Big) \in L^2(\mathring{V})$$

wegen $\nabla\tilde{u} \in L^2(\mathring{V})$ und wegen

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial}{\partial z_i}A\Big(\tau'(z)^{-T}\xi\Big)\Big| &= \Big|\Big[\nabla_\xi A\Big(\tau'(z)^{-T}\xi\Big)\Big]\,\Big[\frac{\partial}{\partial z_i}\tau'(z)^{-T}\Big]\xi\Big| \\
&\leq \Big\|\nabla_\xi A\Big(\tau'(z)^{-T}\xi\Big)\Big\|\,\Big\|\frac{\partial}{\partial z_i}\,\tau'(z)^{-T}\Big\|\,|\xi|\,.
\end{aligned}$$

Man beachte, daß auch die Gleichung (5.2a) in der Form (5.2b) geschrieben werden kann, da im Fall $\tilde{A}(z,\xi) = \tilde{A}(z)\xi$

$$\tilde{a}_j(z,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ji}\xi_i$$

und somit

$$\tilde{a}_{ji}(z) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\,\tilde{a}_j(z,\xi)$$

gilt.

In beiden Fällen gilt nun wegen der gleichmäßigen Elliptizität für $\eta = (0,\ldots,0,1)$, daß

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n}\,\tilde{a}_n(z,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\tilde{a}_j(z,\xi)\eta_i\eta_j \geq c|\eta|^2 = c > 0\,,$$

also können (5.2a) und (5.2b) nach $\frac{\partial^2}{\partial z_n^2}\,\tilde{u}(z)$ aufgelöst werden, und man erhält

$$\frac{\partial^2}{\partial z_n^2}\,\tilde{u}(z) = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \xi_n}\tilde{a}_n\Big(z,\nabla\tilde{u}(z)\Big)}\,g(z) \in L^2(\mathring{V})\,,$$

wobei man benützt, daß für $(i,j) \neq (n,n)$ bereits $\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \tilde{u} \in L^2(\mathring{V})$ bewiesen ist, woraus

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j)\neq(n,n)}}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \tilde{a}_j\Big(\cdot, \nabla \tilde{u}(\cdot)\Big) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \tilde{u} \in L^2(\mathring{V})$$

folgt. Beachte hierbei, daß wegen der gleichmäßigen Elliptizität von $\operatorname{div} \tilde{A}\Big(z, \nabla \tilde{u}(z)\Big)$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial \xi_i} \tilde{a}_j(z,\xi)\Big| \leq \Big|\nabla_\xi \tilde{A}(z,\xi)\Big| \leq C$$

gilt für alle $(z,\xi) \in \mathring{V} \times \mathbb{R}^n$. Insgesamt folgt $\tilde{u} \in H_2(\mathring{V})$ und nach Rücktransformation $u \in H_2(Q^j)$. Damit ist der Satz bewiesen.

5.3 Maximumprinzip für schwache Lösungen elliptischer Gleichungen. Als nächstes werde ich zeigen, daß schwache Lösungen elliptischer Gleichungen ein Maximumprinzip erfüllen. Hierzu benötige ich folgende

5.3.1 Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge. Seien $1 \leq p < \infty$, $E \subseteq \overline{\Omega}$ und $u \in H_1^p(\Omega)$. Man sagt, es sei $u \geq 0$ auf E im Sinne von $H_1^p(\Omega)$, wenn eine Folge $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ mit $\varphi_m \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ und mit

$$\|u - \varphi_m\|_{p,1,\Omega} \to 0\,, \quad m \to \infty$$
$$\varphi_m(x) \geq 0\,, \quad x \in E$$

existiert. Für $u, v \in H_1^p(\Omega)$ sagt man, es gelte $u \leq v$ auf E im Sinne von $H_1^p(\Omega)$, wenn im Sinn von $H_1^p(\Omega)$

$$v - u \geq 0$$

gilt auf E. Wenn sowohl $v - u \geq 0$ und $u - v \geq 0$ gilt, dann sagt man, es sei $v = u$ im Sinne von $H_1^p(\Omega)$. Mit

$$K = \Big\{M \in \mathbb{R} \mid u \leq M \text{ auf } E \text{ im Sinn von } H_1^p(\Omega)\Big\}$$

setzt man

$$\sup_E u = \begin{cases} \inf K\,, & \text{falls } K \neq \emptyset \\ \infty \quad , & \text{falls } K = \emptyset\,. \end{cases}$$

Damit haben wir eine Halbordnung auf $H_1^p(\Omega)$ definiert. Man beachte, daß E eine Nullmenge sein kann, und daß $u \leq v$ nicht äquivalent ist zu $u(x) \leq v(x)$ fast überall.

Als Beispiel betrachte man ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ mit Lipschitzrand und $u \in H_1^p(\Omega)$ mit $u(x) \equiv 1$. Der Rand $\partial\Omega$ ist eine Nullmenge. Aus Satz A.5 im Anhang folgt, daß $u \geq 0$ auf $\partial\Omega$ im Sinne von $H_1^p(\Omega)$ gilt, und aus der Stetigkeit des Spuroperators B aus Satz A.4 ergibt sich, daß die Relation $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ nicht gelten kann, also gilt $u > 0$ auf $\partial\Omega$ im Sinne von $H_1^p(\Omega)$. Es gilt folgender

5.3.2 Satz (Schwaches Maximumprinzip für schwache Lösungen von Gleichungen in Divergenzform.) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge. Für die Funktion $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ im Differentialoperator*

$$\operatorname{div} A\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big)$$

gelte $A \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, und es existiere eine Konstante C_1 und eine meßbare Funktion $c : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to (0, C_1]$ mit

$$|A(x,u,\xi)| \leq C_1(|\xi| + 1) \tag{5.3}$$

$$A(x,u,\xi) \cdot \xi \geq c(x,u,\xi)|\xi|^2 \tag{5.4}$$

für alle $(x,u,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Sei $f \in L^2(\Omega)$ mit $f(x) \geq 0$ für fast alle $x \in \Omega$ und sei $u \in H_1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$\operatorname{div} A\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) = f(x)$$

in Ω. Dann gilt

$$u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u$$

für fast alle $x \in \Omega$. Das Supremum über $\partial\Omega$ ist im Sinne von Definition 5.3.1 zu nehmen.

5.3 und 5.4 sind sehr schwache Voraussetzungen. Folgerung 4.3 zeigt, daß sie zum Beispiel erfüllt sind, wenn $\operatorname{div} A(x, u(x), \nabla u(x))$ gleichmäßig elliptisch ist in $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und wenn zusätzlich $A(x,u,0) = 0$ gilt, weil dann A koerzitiv ist.

Zum Beweis dieses Satzes benötige ich folgendes Resultat:

5.4 Satz. *(i) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $1 \leq p < \infty$ und sei $u \in H_1^p(\Omega)$. Dann sind $|u|, \sup(u,0) \in H_1^p(\Omega)$, und es gibt eine Nullmenge N, so daß für alle $x \in \Omega \backslash N$ gilt*

$$\nabla u(x) = 0\,, \quad \textit{falls } u(x) = 0\,,$$

$$\nabla |u(x)| = \begin{cases} \nabla u(x)\,, & \textit{falls } u(x) > 0 \\ 0\,, & \textit{falls } u(x) = 0 \\ -\nabla u(x)\,, & \textit{falls } u(x) > 0 \end{cases}$$

$$\nabla[\sup(u(x),0)] = \begin{cases} \nabla u(x)\,, & \textit{falls } u(x) > 0 \\ 0\,, & \textit{falls } u(x) \leq 0\,. \end{cases}$$

(ii) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $1 < p < \infty$ und sei $u \in H_1^p(\Omega)$ mit

$$\sup_{\partial\Omega} u = M < \infty$$

im Sinne von $H_1^p(\Omega)$. Dann ist

$$\sup(u - M, 0) \in \overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega)\,.$$

Ich beweise zunächst Satz 5.3.2 und dann Satz 5.4.

Beweis von Satz 5.3.2. Wegen (5.3) ist $A(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \in L^2(\Omega)$ für $u \in H_1(\Omega)$. Da u schwache Lösung von

$$\operatorname{div} A\big(x, u(x), \nabla u(x)\big) = f(x)$$

ist in Ω, folgt also für alle $\varphi \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$

$$\int_\Omega A\big(x, u(x), \nabla u(x)\big) \cdot \nabla\varphi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\,.$$

Sei $M = \sup\limits_{\partial\Omega} u$ im Sinne von $H_1(\Omega)$. Wenn $M = \infty$ gilt, ist nichts zu zeigen. Sei also $M < \infty$. Nach Satz 5.4 (ii) ist $v = \sup(u - M, 0) \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$. Also kann v für die Funktion φ in obenstehender Gleichung eingesetzt werden. Es folgt

$$\int_\Omega A\big(x, u(x), \nabla u(x)\big) \cdot \nabla v(x)dx = -\int_\Omega f(x)v(x)dx \leq 0\,.$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen $f(x) \geq 0$ und $v(x) \geq 0$ fast überall. Nach Satz 5.4 (i) ist $\nabla v(x) = \nabla u(x)$ falls $\nabla v(x) \neq 0$. Also gilt

$$\int_\Omega A\Big(x, u(x), \nabla v(x)\Big) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega A\Big(x, u(x), \nabla u(x)\Big) \cdot \nabla v(x) dx \leq 0\,,$$

und zusammen mit (5.4) folgt

$$\int_\Omega c\Big(x, u(x), \nabla v(x)\Big) |\nabla v(x)|^2 dx \leq \int_\Omega A\Big(x, u(x), \nabla v(x)\Big) \cdot \nabla v(x) dx \leq 0\,,$$

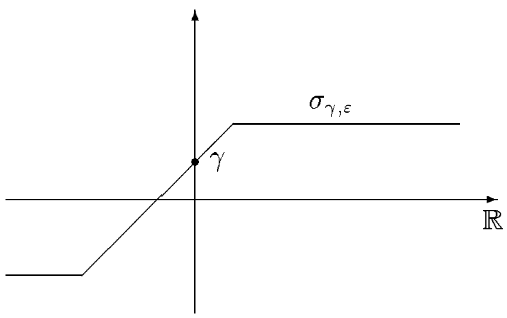
also

$$c\Big(x, u(x), \nabla v(x)\Big) |\nabla v(x)|^2 = 0$$

für fast alle $x \in \Omega$. Wegen $c(x, u(x), \nabla v(x)) > 0$ resultiert $\nabla v(x) = 0$ fast überall. Wegen $v \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega)$ und weil Ω beschränkt ist, ergibt die Poincarésche Ungleichung $\|v\|_{2,0,\Omega} = 0$, also $v(x) = 0$ fast überall, und somit $u(x) - M \leq 0$ für fast alle $x \in \Omega$. Dies ist die Behauptung.

Beweis von Satz 5.4 (i) Für jedes $\gamma \in [-1, 1]$ und $\varepsilon > 0$ setze

$$\sigma_{\gamma,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \max(-1, \gamma + t/\varepsilon)\,, & -\infty < t < 0 \\ \gamma\,, & t = 0 \\ \min(1, \gamma + t/\varepsilon)\,, & 0 < t < \infty \end{cases}$$



und

$$\theta_{\gamma,\varepsilon}(t) = \int_0^t \sigma_{\gamma,\varepsilon}(\tau) d\tau\,, \quad -\infty < t < \infty\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_{\gamma,\varepsilon}(t) = \operatorname{sign}_\gamma(t) = \begin{cases} -1\,, & t < 0 \\ \gamma\,, & t = 0 \\ 1\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\theta_{\gamma,\varepsilon}(t) = \int_0^t \operatorname{sgn}_\gamma(\tau)d\tau = |t|\,.$$

Außerdem gilt $\theta_{\gamma,\varepsilon} \in C_1(\mathbb{R})$ und $|\theta'_{\gamma,\varepsilon}(t)| = |\sigma_{\gamma,\varepsilon}(t)| \leq 1$. Genau wie im Beweis von Lemma 4.9 folgt hieraus für $u \in H_1^p(\Omega)$, daß $\theta_{\gamma,\varepsilon}\big(u(\cdot)\big) \in H_1^p(\Omega)$ ist mit

$$\nabla\theta_{\gamma,\varepsilon}\big(u(x)\big) = \sigma_{\gamma,\varepsilon}\big(u(x)\big)\,\nabla u(x)\,.$$

für fast alle $x \in \Omega$.

Es gilt nun $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\theta_{\gamma,\varepsilon}\big(u(x)\big) = |u(x)|$ und $|\theta_{\gamma,\varepsilon}\big(u(x)\big)| \leq |u(x)|$. Also folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\theta_{\gamma,\varepsilon}\big(u(\cdot)\big) - |u|\,\|_{p,0,\Omega} = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_\Omega \Big|\theta_{\gamma,\varepsilon}\big(u(x)\big) - |u(x)|\,\Big|^p\,dx\Big)^{1/p} = 0\,, \quad (5.5)$$

weil $\big(2|u(x)|\big)^p$ eine integrierbare Majorante der Integranden ist. Ebenso folgt aus

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\nabla\theta_{\gamma,\varepsilon}\big(u(x)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_{\gamma,\varepsilon}\big(u(x)\big)\,\nabla u(x) = \operatorname{sgn}_\gamma\big(u(x)\big)\,\nabla u(x)$$

und

$$|\,\nabla\theta_{\gamma,\varepsilon}\big(u(x)\big)| \leq |\,\nabla u(x)|\,,$$

daß

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\nabla\theta_{\gamma,\varepsilon}\big(u(\cdot)\big) - \operatorname{sgn}_\gamma\big(u(\cdot)\big)\nabla u\|_{p,0,\Omega} = 0\,.$$

Aus dieser Relation und aus (5.5) folgt, daß $|u(\cdot)| \in H_1^p(\Omega)$ ist, und daß es eine Nullmenge $N(\gamma) \subseteq \Omega$ gibt mit

$$\nabla|u(x)| = \operatorname{sgn}_\gamma\big(u(x)\big)\nabla u(x)$$

für alle $x \in \Omega\backslash N(\gamma)$. Setzt man $\gamma = \pm 1$ und $N = N(1) \cup N(-1)$, dann resultiert hieraus für alle $x \in \Omega\backslash N$

$$\nabla|u(x)| = \begin{cases} \nabla u(x)\,, & \text{falls } u(x) \geq 0 \\ -\nabla u(x)\,, & \text{falls } u(x) < 0 \end{cases}$$

sowie

$$\nabla|u(x)| = \begin{cases} \nabla u(x)\,, & \text{falls } u(x) > 0 \\ -\nabla u(x)\,, & \text{falls } u(x) \leq 0 \end{cases}$$

Dies impliziert $\nabla|u(x)| = \nabla u(x) = 0$ für alle $x \in \Omega \backslash N$ mit $u(x) = 0$. Außerdem ergibt sich

$$\sup(u,0) = \frac{1}{2}(u+|u|) \in H_1^p(\Omega)$$

und

$$\nabla[\sup(u,0)](x) = \frac{1}{2}\Big(1+\operatorname{sgn}_{-1}\big(u(x)\big)\Big)\nabla u(x) = \begin{cases} \nabla u(x)\,, & u(x) > 0 \\ 0\,, & u(x) \leq 0 \end{cases}$$

für alle $x \in \Omega \backslash N$.

(ii) Sei zunächst $u \in \overset{\circ}{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $M = \sup\limits_{\partial\Omega} u$. Für $\varepsilon > 0$ gilt dann $\sup\limits_{x\in\partial\Omega}\big(u(x)-M-\varepsilon\big) = -\varepsilon$, also gibt es wegen der Stetigkeit von u auf $\mathbb{R}^n$ und der Kompaktheit von $\partial\Omega$ eine Zahl $\delta > 0$ mit $u(x)-M-\varepsilon \leq 0$ für alle $x \in \Omega$ mit $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < \delta$. Weil nach (i) auch $\sup(u-M-\varepsilon,0) \in H_1^p(\Omega)$ ist, ergibt Folgerung 3.8.1 aus dem Skriptum "Variationsrechnung und Sobolevräume", daß

$$\sup(u-M-\varepsilon,0) \in \overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega)\,.$$

Aus

$$\Big|\sup\big(u(x)-M-\varepsilon,0\big)-\sup\big(u(x)-M,0\big)\Big| \leq \Big|\big(u(x)-M-\varepsilon\big)-\big(u(x)-M\big)\Big| = \varepsilon$$

ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\sup(u-M-\varepsilon,0)-\sup(u-M,0)\|_{p,0,\Omega} = 0\,. \tag{5.6}$$

Nach (i) gilt

$$\nabla[\sup(u-M-\varepsilon,0)](x) = \begin{cases} \nabla u(x)\,, & u(x)-M-\varepsilon > 0\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

$$\|\nabla[\sup(u-M-\varepsilon,0)]\|_{p,0,\Omega} \leq \|\nabla u\|_{p,0,\Omega}\,,$$

also ist die Folge $\{\sup(u-M-\frac{1}{m}\,,\,0)\}_{m=0}^\infty$ in $\overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega)$ beschränkt. Da in $\overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$ die abgeschlossene Einheitskugel schwach folgenkompakt ist, besitzt diese Folge eine in $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge. Weil die Einschränkung auf $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ jeder stetigen Linearform aus dem Dualraum von $L^p(\Omega)$ eine stetige Linearform auf $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ ergibt, konvergiert diese Teilfolge auch schwach in $L^p(\Omega)$ gegen denselben Grenzwert, aufgefaßt als Element von $L^p(\Omega)$. Aus (5.6) folgt, daß diese Teilfolge in $L^p(\Omega)$ gegen $\sup(u-M,0)$ konvergiert. Da schwacher und starker Grenzwert übereinstimmen, konvergiert diese Teilfolge auch schwach in $L^p(\Omega)$ gegen $\sup(u-M,0)$, und damit auch in $\mathring{H}_1^p(\Omega)$, also gilt

$$\sup(u-M,0) \in \mathring{H}_1^p(\Omega)\,.$$

Im letzten Schritt des Beweises sei nun $u \in H_1^p(\Omega)$ mit $\sup\limits_{\partial\Omega} u = M$ im Sinne von $H_1^p(\Omega)$. Dies bedeutet, daß zu jedem $m > M$ eine Folge $\{u_\ell^{(m)}\}_{\ell=1}^\infty$ existiert mit

$$u_\ell^{(m)} \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^n)\,, \quad \sup_{\partial\Omega} u_\ell^{(m)} \le m\,,$$

$$\|u - u_\ell^{(m)}\|_{p,1,\Omega} \to 0\,, \quad \ell \to \infty\,,$$

jedoch für kein $m < M$. Hieraus folgt

$$\liminf_{m\to\infty} \sup_{\partial\Omega} u_\ell^{(m)} \ge M\,,$$

weil sonst im Widerspruch hierzu $\delta > 0$ und eine Teilfolge $\{u_{\ell_k}^{(m)}\}_{k=1}^\infty$ gewählt werden könnten mit

$$\sup_{\partial\Omega} u_{\ell_k}^{(m)} \le m = M - \delta < M\,.$$

Somit kann man eine Folge $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ konstruieren mit

$$v_k \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^n)\,, \quad M - \frac{1}{k} \le \sup_{\partial\Omega} v_k \le M + \frac{1}{k}\,, \quad \|u - v_k\|_{p,1,\Omega} < \frac{1}{k}\,.$$

Dazu setze man

$$v_k = u_\ell^{(M+1/k)}$$

mit ℓ so groß, daß $\sup\limits_{\partial\Omega} u_\ell^{(M+1/k)} \ge M - \frac{1}{k}$ und $\|u - u_\ell^{(M+1/k)}\|_{p,1,\Omega} < 1/k$.

Sei $M_k = \sup\limits_{\partial\Omega} v_k$. Es gilt dann $M_k \to M$, und aus dem bereits Bewiesenen folgt

$$w_k = \sup(v_k - M_k, 0) \in \overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega)$$

mit

$$\nabla w_k = \chi_k \nabla v_k\,,$$

wobei χ_k die charakteristische Funktion der Menge $\{x \in \Omega \mid w_k(x) > 0\}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned}&\Big|\sup\Big(v_k(x) - M_k, 0\Big) - \sup\Big(u(x) - M, 0\Big)\Big| \\ &\qquad \le \Big|\Big(v_k(x) - M_k\Big) - \Big(u(x) - M\Big)\Big| \le \Big|v_k(x) - u(x)\Big| + \Big|M_k - M\Big|\end{aligned}$$

folgt

$$\|w_k - \sup(u - M, 0)\|_{p,0,\Omega} \le \|v_k - u\|_{p,0,\Omega} + \|M_k - M\|_{p,0,\Omega} \to 0$$

für $k \to \infty$. Zusammen mit

$$\|\nabla w_k\|_{p,0,\Omega} = \|\chi_k \nabla v_k\|_{p,0,\Omega} \le \|\nabla v_k\|_{p,0,\Omega} \le C$$

folgt durch Wiederholung der Schlüsse von oben, daß $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine in $\overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega)$ schwach gegen $\sup(u - M, 0)$ konvergente Teilfolge besitzt, also

$$\sup(u - M, 0) \in \overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega)\,.$$

Damit ist Satz 5.4 bewiesen.

A Anhang: Schwache Randwerte, Rellichscher Auswahlsatz.

In diesem Anhang werden wir schwache Randwerte von Funktionen im Sobolevraum $H_1^p(\Omega)$ und den Rellichschen Auswahlsatz behandeln. Die Untersuchungen und Ergebnisse dieses Abschnittes gehören zur Theorie der Sobolevräume.

Bei der Definition von schwachen Lösungen des Dirichletschen Randwertproblems im Raum $H_1(\Omega)$ haben wir vermieden, von den Randwerten der Lösung zu sprechen. Denn $H_1(\Omega)$ ist ein Teilraum von $L^2(\Omega)$ und besteht deshalb aus Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich höchstens auf Nullmengen unterscheiden. Für Gebiete Ω mit glattem Rand $\partial\Omega$ ist aber $\partial\Omega$ eine Nullmenge. Daher ist nicht klar, was $u\,|_{\partial\Omega}$ bedeuten soll für $u \in H_1(\Omega)$. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß Randwerte von u für Mengen Ω mit Lipschitzrand sinnvoll definiert werden können. Schließlich werden wir zeigen, daß der Gaußsche Satz für solche Funktionen und Mengen gilt, und daß $\overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega)$ gerade aus denjenigen Funktionen von $H_1^p(\Omega)$ besteht, deren Randwerte verschwinden. Zum Schluß werden wir den Rellichschen Auswahlsatz beweisen, ein anderes wichtiges Ergebnis aus der Theorie der Sobolevräume.

In diesem Anhang benötigen wir mehrfach Ergebnisse aus dem Skriptum "Variationsrechnung und Sobolevräume". In entsprechenden Zitaten beziehen wir uns mit der Abkürzung "VS" auf dieses Skriptum.

A.1 Lipschitzstetige Funktionen. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitzstetig, wenn

$$\operatorname{lip}(g) = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} < \infty$$

gilt. Die Zahl $\operatorname{lip}(g)$ heißt Lipschitzkonstante von g. Die Menge aller beschränkten Lipschitzstetigen Funktionen auf Ω werde mit $C_{0,1}^\infty(\Omega)$ bezeichnet. Es gilt

$$C_{0,1}^\infty(\Omega) \subseteq H_1^\infty(\Omega)$$

und

$$\|g\|_{\infty,1,\Omega} \le \sup_{x\in\Omega} |g(x)| + n \,\mathrm{lip}(g)$$

für alle $g \in C^{\infty}_{0,1}(\Omega)$.

Denn natürlich gilt $g \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$\|g\|_{\infty,0,\Omega} \le \sup_{x\in\Omega} |g(x)| \,.$$

Sei e_i der Einheitsvektor in Richtung der i–ten Koordinatenachse und $\varphi \in \mathring{C}_\infty(\Omega)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
|\int_\Omega g(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)dx| &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} |\int_\Omega g(x)\,\frac{\varphi(x+he_i)-\varphi(x)}{h}\,dx| \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} |\int_\Omega \frac{g(x-he_i)-g(x)}{h}\,\varphi(x)dx| \\
&\le \int_\Omega \mathrm{lip}(g)\,|\varphi(x)|\,dx = \mathrm{lip}(g)\,\|\varphi\|_{1,0,\Omega}\,.
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß

$$\varphi \mapsto \int_\Omega g(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)dx : \mathring{C}_\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$$

eine lineare und stetige Abbildung ist, wenn man $\mathring{C}_\infty(\Omega)$ als Teilraum von $L^1(\Omega)$ auffaßt und mit der L^1–Norm versieht. Da $\mathring{C}_\infty(\Omega)$ dicht ist in $L^1(\Omega)$, kann also diese Abbildung in eindeutiger Weise zu einer linearen und stetigen Abbildung auf $L^1(\Omega) = \overline{\mathring{C}_\infty(\Omega)}^{L^1(\Omega)}$ fortgesetzt werden. Aus der Theorie der Lebesgue-Räume weiß man aber, daß der Dualraum von $L^1(\Omega)$ isomorph ist zu $L^\infty(\Omega)$. Dies bedeutet, daß zu jeder stetigen und linearen Abbildung $F : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein eindeutiges $f \in L^\infty(\Omega)$ existiert mit $\|f\|_{\infty,0,\Omega} = \|F\|$ und mit

$$F(\varphi) = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

für alle $\varphi \in L^1(\Omega)$. Also gibt es auch ein eindeutiges $f_i \in L^\infty(\Omega)$ mit $\|f_i\|_{\infty,0,\Omega} \le \mathrm{lip}(g)$ und mit

$$\int_\Omega g(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f_i(x)\,\varphi(x)\,dx$$

für alle $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$. Also hat g die schwache Ableitung $-f_i \in L^\infty(\Omega)$, und damit ist $g \in H_1^\infty(\Omega)$ mit

$$\|g\|_{\infty,1,\Omega} = \|g\|_{\infty,0,\Omega} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{\infty,0,\Omega} \le \sup_{x\in\Omega} |g(x)| + n\,\mathrm{lip}(g)\,.$$

Bemerkung. Es gilt sogar $C_{m-1,1}^\infty(\Omega) = H_m^\infty(\Omega)$, siehe H.W. Alt, Lineare Funktionalanalysis, Springer 1985, S. 163 ff.

A.2 Lipschitzrand. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge. Man sagt, Ω habe Lipschitzrand, falls sich $\partial\Omega$ durch endlich viele offene Mengen $U^1, \ldots, U^m$ überdecken läßt, so daß $\partial\Omega \cap U^j$ für $j = 1, \ldots, m$ der Graph einer Lipschitzstetigen Funktion ist und $\Omega \cap U^j$ ganz auf einer Seite dieses Graphen liegt. Genauer gebe es zu jedem $j = 1, \ldots, m$ ein euklidisches Koordinatensystem $(x_1^j, \ldots, x_n^j)$ im $\mathbb{R}^n$, Zahlen $r^j > 0$ und $\varepsilon^j > 0$ und eine Lipschitzstetige Funktion $g^j : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, so daß mit der Bezeichnung $\hat{x}^j = (x_1^j, \ldots, x_{n-1}^j)$ für $x = (x_1^j, \ldots, x_n^j) \in \mathbb{R}^n$ folgendes gelte:

$$\left\{x = (\hat{x}^j, x_n^j) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\hat{x}^j| < r^j\,,\ x_n^j = g^j(\hat{x}^j)\right\} \subseteq \partial\Omega$$

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\hat{x}^j| < r^j\,,\ g^j(\hat{x}^j) < x_n^j < g^j(\hat{x}^j) + \varepsilon^j\right\} \subseteq \Omega$$

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\hat{x}^j| < r^j\,,\ g^j(\hat{x}^j) - \varepsilon^j < x_n^j < g^j(\hat{x}^j)\right\} \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \Omega\,.$$

Ist weiter

$$U^j = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\hat{x}^j| < r^j\,,\ |x_n^j - g^j(\hat{x}^j)| < \varepsilon^j\right\},$$

dann sei $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U^j$. Wir können dann noch eine offene Menge U^0 mit $\overline{U^0} \subseteq \Omega$ hinzunehmen, so daß $\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{j=0}^{m} U^j$ gilt.

Sei $\{\eta^j\}_{j=0}^m$ eine der Überdeckung $\{U^j\}_{j=0}^m$ untergeordnete Partition der Eins auf $\overline{\Omega}$ mit $0 \le \eta^j \le 1$, $\eta^j \in \overset{\circ}{C}_\infty(U^j)$ und $\sum_{j=0}^m \eta^j(x) = 1$ für $x \in \overline{\Omega}$. Für $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $u \in H_k^p(\Omega)$ ist dann

$$u = \sum_{j=0}^{m} \eta^j u$$

mit

$$\eta^0 u \in \overset{\circ}{H}{}^p_k(\Omega)\,, \quad \eta^j u \in H^p_k(\Omega)\,, \quad j = 1, \dots, m\,.$$

Setzt man insbesondere $Q^j = \Omega \cap U^j$, dann ist $\eta^j u \in H^p_k(Q^j)$ und $(\eta^j u)(x) = 0$ für $x \in \Omega \backslash Q^j$.

A.3 Randintegral. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine offene und beschränkte Menge mit Lipschitzrand. Ich wähle die Bezeichnungen wie im vorangehenden Abschnitt. Für $1 \leq j \leq m$ sei $T^j : \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \bigm| |y| < r^j\} \to \partial\Omega \cap U^j$ die Abbildung, die jedem y dasjenige $x = (\hat{x}^j, g^j(\hat{x}^j)) \in \partial\Omega \cap U^j$ zuordnet mit $\hat{x}^j = y$, also

$$T^j(x) = (y, g^j(y))\,,$$

wobei $(y, g^j(y))$ die Koordinaten von $T^j(y)$ im U^j zugeordneten Koordinatensystem sind. Dann ist T^j eine Parametrisierung von $\partial\Omega \cap U^j$.

Eine Funktion $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, wenn jede der Funktionen

$$y \mapsto f(T^j(y)) : \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \bigm| |y| < r^j\} \to \mathbb{R}$$

integrierbar ist für $1 \leq j \leq m$. In diesem Fall sei

$$\int_{\partial\Omega} f(x) dS = \sum_{j=1}^m \int_{\partial\Omega} \eta^j(x)\, f(x)\, dS$$

mit

$$\int_{\partial\Omega} \eta^j(x)\, f(x)\, dS = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\eta^j f)(T^j(y)) \sqrt{1 + |\nabla g^j(y)|^2}\, dy\,.$$

Hierbei ist $\frac{\partial}{\partial x_i} g^j \in L^\infty(\{y \in \mathbb{R}^{n-1} \bigm| |y| < r^j\})$ die schwache Ableitung der Lipschitzstetigen Funktion g^j. Das Integral existiert, weil

$$\|\frac{\partial}{\partial x_i} g^j\|_{\infty,0} \leq \mathrm{lip}(g^j)\,.$$

Diese Definition ist eine Verallgemeinerung der Definition für Randintegrale auf glattem Rand. Für $1 \leq p < \infty$ sei nun

$$L^p(\partial\Omega) = \{f : \partial\Omega \to \mathbb{R} \bigm| f \text{ ist integrierbar und } \int_{\partial\Omega} |f(x)|^p\, dS < \infty\}$$

und

$$\|f\|_{p,0,\partial\Omega} = [\int_{\partial\Omega} |f(x)|^p dS]^{1/p}\,.$$

A.4 Satz (Spuroperator). *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine offene und beschränkte Menge mit Lipschitzrand und sei* $1 \leq p < \infty$. *Dann gibt es genau eine stetige linear Abbildung*

$$B : H_1^p(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

mit $Bu = u_{|\partial\Omega}$ *für alle* $u \in C_1(\overline{\Omega})$.

Bemerkung. Für $u \in H_1^p(\Omega)$ sagt man, Bu seien die schwachen Randwerte von u . Gewöhnlich schreibt man $u_{|\partial\Omega}$ anstelle von Bu . Satz A.4 ist eine Version des **Sobolevschen Einbettungssatzes**. Er kann in viele Richtungen verallgemeinert werden. Insbesondere gilt er auch für $p = \infty$ und kann auf unbeschränkte Gebiete verallgemeinert werden. Andere Versionen des Sobolevschen Einbettungssatzes machen Aussagen darüber, wann Funktionen aus $H_m^p(\Omega)$ stetig oder differenzierbar sind.

Beweis. Wir beschränken uns im Beweis auf den Fall $1 < p < \infty$ und überlassen die naheliegenden Änderungen des Beweises für den Fall $p = 1$ dem Leser. Die Bezeichnungen seien wie in A.2 gewählt. Zunächst sei $u \in C_1(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$u = \sum_{j=0}^{m} \eta^j u \,, \quad u_{|\partial\Omega} = \sum_{j=1}^{m} \eta^j \, u_{|\partial\Omega}$$

und $(\eta^j u)(x) = 0$ für $x \in \overline{\Omega} \backslash U^j$, also insbesondere für $x = (\hat{x}^j, x_n^j)$ mit $x_n^j = g^j(\hat{x}^j) + \varepsilon^j$. Außerdem ist $\eta^j |u|^p \in C_1(\overline{\Omega})$ für $1 < p < \infty$.

Für $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $|y| < r^j$ folgt also aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\eta^j(T^j(y))\,|u(T^j(y))|^p = (\eta^j|u|^p)((y, g^j(y))) = -\int_{g^j(y)}^{g^j(y)+\varepsilon^j} \frac{\partial}{\partial s}\,(\eta^j|u|^p)((y,s))\,ds$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} \eta^j(x)\,|u(x)|^p dS = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \eta_j(T^j(y))\,|u(T^j(y))|^p \sqrt{1 + |\nabla g^j(y)|^2}\,dy \\
&\leq \int_{|y|<r^j} \int_{g^j(y)}^{g^j(y)+\varepsilon^j} |\,\frac{\partial}{\partial s}\,(\eta^j|u|^p)((y,s))|\,ds\,\sqrt{1 + \|g^j\|_{\infty,1}^2}\,dy \\
&= \sqrt{1 + \|g^j\|_{\infty,1}^2} \int_{Q^j} |\,\frac{\partial}{\partial x_n^j}\,(\eta^j|u|^p)(x)|\,dx
\end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{1+\|g^j\|_{\infty,1}^2}\int_\Omega |\nabla(\eta^j|u|^p)|\,dx$$

$$\leq \sqrt{1+\|g^j\|_{\infty,1}^2}\int_\Omega |\nabla\eta^j|\,|u|^p + p\eta^j|u|^{p-1}\,|\nabla u|\,dx$$

$$\leq \sqrt{1+\|g^j\|_{\infty,1}^2}\left[\max_{x\in\mathbb{R}^n}|\nabla\eta^j(x)|\int_\Omega |u|^p dx + p\int_\Omega |u(x)|^{p-1}\,|\nabla u(x)|\,dx\right]$$

$$\leq \sqrt{1+\|g^j\|_{\infty,1}^2}\left[\max_{x\in\mathbb{R}^n}|\nabla\eta^j(x)|\,\|u\|_{p,0,\Omega}^p + p\left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/q}\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx\right)^{1/p}\right]$$

mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Im letzten Schritt haben wir die Höldersche Ungleichung angewandt. Aus der Youngschen Ungleichung

$$ab \leq \frac{1}{q}\,a^q + \frac{1}{p}\,b^p$$

(siehe VS, Beweis von Lemma 2.7) folgt nun mit $a = \|u\|_{p,0}^{p/q}$, $b = \|\,|\nabla u|\,\|_{p,0}$

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/q}\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \frac{1}{q}\,\|u\|_{p,0}^p + \frac{1}{p}\,\|\,|\nabla u|\,\|_{p,0}^p\,.$$

Zusammen folgt also

$$\begin{aligned}\|u\|_{p,0,\partial\Omega}^p &= \int_{\partial\Omega}|u(x)|^p dS = \sum_{j=1}^m \int_{\partial\Omega}\eta^j(x)\,|u(x)|^p dS\\ &\leq C\sum_{j=1}^m\left(\|u\|_{p,0,\Omega}^p + \|\,|\nabla u|\,\|_{p,0,\Omega}^p\right) = mC\left(\|u\|_{p,0,\Omega}^p + \|\,|\nabla u|\,\|_{p,0,\Omega}^p\right)\,,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\|u\|_{p,0,\partial\Omega} &\leq (mC)^{1/p}\left[\|u\|_{p,0,\Omega}^p + \|\,|\nabla u|\,\|_{p,0,\Omega}^p\right]^{1/p}\\ &\leq (mC)^{1/p}\left(\|u\|_{p,0,\Omega} + \|\,|\nabla u|\,\|_{p,0,\Omega}\right) \leq C_1\,\|u\|_{p,1,\Omega}\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß die Abbildung $B : C_1(\overline{\Omega}) \to L^p(\partial\Omega)$ mit

$$Bu := u_{|\partial\Omega}$$

linear und stetig ist, wenn $C_1(\overline{\Omega})$ mit der Norm von $H_1^p(\Omega)$ versehen wird. Also kann B in eindeutiger Weise zu einer linearen und stetigen Abbildung

$$B : \overline{C_1(\overline{\Omega})}^{H_1^p(\Omega)} \to L^p(\partial\Omega)$$

fortgesetzt werden. Die Behauptung des Satzes folgt also, wenn gezeigt ist, daß $C_1(\overline{\Omega})$ dicht ist in $H_1^p(\Omega)$. Dies wird im nächsten Satz gezeigt.

A.5 Satz (Dichtheit von $\overset{\circ}{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ in $H_1^p(\Omega)$). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge mit Lipschitzrand. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist*

$$\{u_{|\Omega} \;\big|\; u \in \overset{\circ}{C}_\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

dicht in $H_1^p(\Omega)$.

Bemerkung. Nach VS, Satz 2.14 ist $C_\infty(\Omega) \cap H_1^p(\Omega)$ dicht in $H_1^p(\Omega)$ bei beliebigem $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktionen in $C_\infty(\Omega) \cap H_1^p(\Omega)$ brauchen am Rande nicht beschränkt zu sein, wohl aber die Einschränkungen auf Ω von Funktionen aus $\overset{\circ}{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Die Bezeichnungen seien wie in A.2. Zerlege u in der Form

$$u = \sum_{j=0}^{m} \eta^j u \,.$$

Es genügt zu zeigen, daß jede der Funktionen $\eta^j u$ in $H_1^p(\Omega)$ durch Funktionen $w_{|\Omega}$ mit $w \in \overset{\circ}{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ approximiert werden kann. Für $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\,\varphi(\frac{x}{\varepsilon}) \,,$$

mit $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. Nach VS, 3.4 ist $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ eine Dirac–Familie, und nach Lemma 3.2 ist $\varphi_\varepsilon * (\eta^0 u) \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$. Nach VS, 3.8 konvergiert außerdem $\varphi_\varepsilon * (\eta^0 u)$ gegen $\eta^0 u$ in $H_1(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$.

Um $\eta^j u$ mit $1 \leq j \leq m$ zu approximieren, genügt es nicht, $\varphi_\varepsilon * (\eta^j u)$ zu betrachten, weil nach VS, 3.8 die Funktion $\varphi_\varepsilon * (\eta^j u)$ gegen $\eta^j u$ konvergiert in $H_1(\Omega')$ für jede offene Menge Ω' mit $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$, aber nicht in $H_1(\Omega)$.

Daher sei $(x_1^j, \dots, x_n^j)$ das Koordinatensystem wie in A.2, und es sei e_n der Einheitsvektor, der in Richtung der n–ten Koordinatenachse dieses Koordinatensystems zeigt. Nach Definition von Q^j gilt

$$Q^j = \left\{ (\hat{x}^j, x_n^j) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |\hat{x}^j| < r^j \,,\ \hat{g}^j(\hat{x}^j) < x_n^j < \hat{g}^j(\hat{x}^j) + \varepsilon^j \right\} .$$

Für $\delta > 0$ setze man

$$\begin{aligned} Q_\delta^j &= \left\{ (\hat{x}^j, x_n^j) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |\hat{x}^j| < r^j \,,\ \hat{g}^j(\hat{x}^j) - \delta < x_n^j < \hat{g}^j(\hat{x}^j) + \varepsilon^j \right\} \\ v_\delta(x) &= (\eta^j u)(x + \delta e_n) \,, \quad x \in Q_\delta^j \,. \end{aligned}$$

Es ist $v_\delta \in H_1^p(\Omega \cup Q_\delta^j)$, und nach VS, Lemma 3.3 gilt

$$\|\eta^j u - v_\delta\|_{p,0,\Omega} \to 0$$

und

$$\|\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta^j u) - \frac{\partial}{\partial x_i} v_\delta\|_{p,0,\Omega} \to 0 \,,$$

also

$$\|\eta^j u - v_\delta\|_{p,1,\Omega} \to 0$$

für $\delta \to 0$. Es gilt $v_\delta(x) = 0$ für alle $x \in \Omega \cup Q_\delta^j$, die nicht zum Träger der Funktion $x \mapsto \eta^j(x + \delta e_n)$ gehören. Da $\operatorname{supp}[\eta^j(\cdot + \delta e_n)] \cap \overline{\Omega}$ eine kompakte Teilmenge ist mit

$$\operatorname{supp}[\eta^j(\cdot + \delta e_n)] \cap \overline{\Omega} \subseteq \Omega \cup Q_\delta^j \,,$$

ergibt sich aus VS, 3.8, daß für die Funktion

$$(\varphi_\varepsilon * v_\delta)(x) = \int_{Q_\delta^j} \varphi_\varepsilon(x - y)\, v_\delta(y) dy \in \overset{\circ}{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$$

gilt

$$\|\varphi_\varepsilon * v_\delta - v_\delta\|_{p,1,\Omega} \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$ bei festem $\delta > 0$. Für $\theta > 0$ gilt also

$$\|\eta^j u - \varphi_\varepsilon * v_\delta\|_{p,1,\Omega} \le \|\eta^j u - v_\delta\|_{p,1,\Omega} + \|v_\delta - \varphi_\varepsilon * v_\delta\|_{p,1,\Omega} < \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta \,,$$

wenn erst $\delta = \delta(\theta)$ und dann $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \theta)$ genügend klein gewählt werden. Damit ist der Satz A.5 und folglich auch Satz A.4 bewiesen.

A.6 Folgerung. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge mit Lipschitzrand. Dann gilt $Bu = 0$ für $u \in \overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$.*

Beweis. Wähle eine Folge $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subseteq \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ mit $\|u - u_m\|_{p,1,\Omega} \to 0$ für $m \to \infty$. Nach Satz A.4 gilt dann

$$\|Bu\|_{p,0,\partial\Omega} = \lim_{m\to\infty} \|Bu_m\|_{p,0,\partial\Omega} = \lim_{m\to\infty} \|u_m\|_{p,0,\partial\Omega} = 0\,,$$

also $Bu = 0$.

A.7 Äußere Normale. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und habe Lipschitzrand. Seien $x_1^j, \dots, x_n^j$ das euklidische Koordinatensystem und g^j die zugehörige Lipschitzstetige Funktion aus A.2 sowie T^j die Parametrisierung von $\partial\Omega \cap U^j$ aus A.3. Für jedes $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $|y| < r^j$ ist $T^j(y) = (y, g^j(y)) \in \partial\Omega$, also sind

$$\frac{\partial}{\partial y_i} T^j(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \partial_i g^j(y) \end{pmatrix}$$

Tangentialvektoren an $\partial\Omega$ im Punkt $x = T^j(y)$ für $i = 1, \dots, n-1$. Der Vektor

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g^j(y)|^2}} \begin{pmatrix} \nabla g^j(y) \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist ein Einheitsvektor, der orthogonal steht zu allen diesen Tangentialvektoren, also ist $n(x)$ ein Normalenvektor an $\partial\Omega$ im Punkt $x = T^j(y)$, und zwar der nach außen zeigende Normalenvektor. Beachte, daß ∇g^j die schwache Ableitung von g^j ist. Also ist n eine Funktion aus $L^\infty(\partial\Omega)$.

A.8 Gaußscher Satz. *$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen, beschränkt und habe Lipschitzrand.*

a.) Für $u \in H_1^1(\Omega)$ gilt $\int_\Omega \nabla u(x) dx = \int_{\partial\Omega} n(x)\, u(x)\, dS$.

b.) Für $u \in H_1^p(\Omega)$ und $v \in H_1^q(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$ und mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\int_\Omega (u(x)\nabla v(x) + v(x)\nabla u(x)) dx = \int_{\partial\Omega} n(x)\, u(x)\, v(x)\, dS\,.$$

Beachte, daß $u_{|\partial\Omega} = Bu \in L^1(\partial\Omega)$ nach Satz A.4. Wegen $n \in L^\infty(\partial\Omega)$ existiert also das Randintegral in a.). Die Integrale in b.) existieren wegen $\nabla v \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $u_{|\partial\Omega} = Bu \in L^p(\partial\Omega)$, $v_{|\partial\Omega} = Bv \in L^q(\partial\Omega)$.

Beweis. Es sei zunächst $u \in \overset{\circ}{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ und sei $\{\eta^j\}_{j=0}^m$ die Zerlegung der Eins aus A.2. Die Behauptung aus a.) kann dann in der Form

$$\sum_{j=0}^m \int_\Omega \nabla(\eta^j u)dx = \sum_{j=0}^m \int_{\partial\Omega} n(\eta^j u)dS$$

geschrieben werden; sie folgt also für u, wenn sie für jedes $\eta^j u$ bewiesen ist. Wegen $\eta^0 u \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ folgt

$$\int_\Omega \nabla(\eta^0 u)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla(\eta^0 u)dx = \int_{\partial\Omega} n(\eta^0 u)dS = 0$$

aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Um die Behauptung für $\eta^j u$ mit $1 \le j \le m$ zu beweisen, benutzen wir, daß $\eta^j u \in \overset{\circ}{C}_\infty(U^j)$ ist. Setzt man

$$\Omega^j = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; y \in \mathbb{R}^{n-1}\,,\ s > g^j(y)\}\,,$$

dann kann deswegen die Behauptung mit der Definition des Randintegrals in A.3 und mit der Definition von $n(x)$ in A.7 auch in der Form

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^j} \nabla(\eta^j u)(x)dx = \int_{\partial\Omega} n(\eta^j u)dS \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\eta^j u)(y, g^j(y)) \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla g^j(y)|^2}} \begin{pmatrix} \nabla g^j(y) \\ -1 \end{pmatrix} \sqrt{1+|\nabla g^j(y)|^2}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\eta^j u)(y, g^j(y)) \begin{pmatrix} \nabla g^j(y) \\ -1 \end{pmatrix} dy \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}$$

geschrieben werden. Sei nun $\{\varphi_{\frac{1}{m}}\}_{m=1}^\infty$ eine Dirac-Familie mit

$$\varphi_{\frac{1}{m}} \in \overset{\circ}{C}_\infty \left(\{y \in \mathbb{R}^{n-1} \;\Big|\; |y| < \frac{1}{m}\}\right)$$

und sei

$$g_m^j = \varphi_{\frac{1}{m}} * g^j .$$

Dann ist $g_m^j \in C_\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ nach VS, Lemma 3.2. Ersetzt man in (A.1) g^j durch g_m^j und Ω^j durch

$$\Omega_m^j = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; y \in \mathbb{R}^{n-1} , \; s > g_m^j(y)\} ,$$

dann ist die Formel (A.1) richtig, weil dies dann der klassische Gaußsche Integralsatz ist für $\partial\Omega \in C_\infty$. Wegen

$$g^j \in L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \subseteq L^{1,loc}(\mathbb{R}^{n-1})$$

gilt nach VS, Lemma 3.5, daß g_m^j in $L^{1,loc}(\mathbb{R}^{n-1})$ gegen g^j konvergiert für $n \to \infty$. Nach einem Satz der Lebesgueschen Integrationstheorie gibt es dann eine Teilfolge $\{g_{m_k}^j\}_{k=1}^\infty$ mit

$$\lim_{k\to\infty} g_{m_k}^j(y) = g^j(y)$$

für fast alle $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dies bedeutet für die charakteristischen Funktionen χ^j, χ_m^j von Ω^j und Ω_m^j, daß

$$\lim_{k\to\infty} \chi_{m_k}^j(x) = \chi^j(x)$$

gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, und somit liefert der Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_{m_k}^j} \nabla(\eta^j u)dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{m_k}^j \nabla(\eta^j u)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi^j \nabla(\eta^j u)dx = \int_{\Omega^j} \nabla(\eta^j u)dx . \end{aligned} \tag{A.2}$$

Weil $\eta^j u \in \overset{\circ}{C}_\infty(U^j)$ ist, folgt außerdem

$$\lim_{k\to\infty} (\eta^j u)(y, g_{m_k}^j(y)) = (\eta^j u)(y, g^j(y))$$

für fast alle $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $(\eta^j u)(y, g_{m_k}^j(y)) = 0$ für $|y| > r^j$ und

$$\sup_{y\in R^{n-1}} |(\eta^j u)(y, g_{m_k}^j(y))| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(\eta^j u)(x)| < \infty .$$

Nach dem Satz von Lebesgue gilt damit

$$\begin{aligned}
&\|(\eta^j u)(\cdot, g^j_{m_k}(\cdot)) - (\eta^j u)(\cdot, g^j(\cdot))\|^2_{2,0,\mathbb{R}^{n-1}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(\eta^j u)(y, g^j_{m_k}(y)) - (\eta^j u)(y, g^j(y))|^2 dy \to 0 \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

für $k \to \infty$.

Schließlich folgt aus VS, 3.8 wegen $g^j \in H^\infty_1(\mathbb{R}^{n-1}) \subseteq H^{2,loc}_1(\mathbb{R}^{n-1})$, daß g^j_m in $H^{2,loc}_1(\mathbb{R}^{n-1})$ gegen g^j und somit ∇g^j_m in $L^{2,loc}(\mathbb{R}^{n-1})$ gegen ∇g^j konvergiert. Hieraus und aus (A.3) ergibt sich, daß

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\eta^j u)(y, g^j_{m_k}(y)) \begin{pmatrix} \nabla g^j_{m_k}(y) \\ -1 \end{pmatrix} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\eta^j u)(y, g^j(y)) \begin{pmatrix} \nabla g^j(y) \\ -1 \end{pmatrix} dy
\end{aligned}$$

gilt. Aus dieser Formel und aus (A.1), (A.2) folgt zusammen, daß

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^j} \nabla(\eta^j u) dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega^j_{m_k}} \nabla(\eta^j u) dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\eta^j u)(y, g^j_{m_k}(y)) \begin{pmatrix} \nabla g^j_{m_k}(y) \\ -1 \end{pmatrix} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\eta^j u)(y, g^j(y)) \begin{pmatrix} \nabla g^j(y) \\ -1 \end{pmatrix} dy\,.
\end{aligned}$$

Damit ist Teil a.) von Satz A.8 bewiesen für $u \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Um diesen Teil für $u \in H^p_1(\Omega)$ zu beweisen, wähle man eine Folge $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subseteq \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u - u_m\|_{1,1,\Omega} \to 0$ für $m \to \infty$. Nach Satz A.5 ist dies möglich, und nach Satz A.4 und dem eben bewiesenen folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} n(x) u(x) dS &= \lim_{m\to\infty} \int_{\partial\Omega} n(x) u_m(x) dS \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \nabla u_m(x) dx = \int_\Omega \nabla u(x) dx\,.
\end{aligned}$$

Damit ist a.) bewiesen.

b.) Durch Approximation von $u \in H_1^p(\Omega)$ und $v \in H_1^q(\Omega)$ mit Funktionen in $\overset{\circ}{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ folgt $uv \in H_1^1(\Omega)$ mit

$$\nabla(uv) = v\,\nabla u + u\,\nabla v$$

und

$$B(uv) = B(u)\,B(v) \in L^1(\partial\Omega)\,.$$

Die Behauptung folgt nun direkt aus a.).

A.9 Folgerung. *Sei* $\Omega_- \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine offene, beschränkte Menge mit Lipschitzrand, und sei* $\Omega_+ = \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$. *Sei* $1 \leq p < \infty$, *sei* $u_- \in H_1^p(\Omega_-)$, $u_+ \in H_1^p(\Omega_+)$ *und*

$$u(x) = \begin{cases} u_+(x) & , \quad x \in \Omega_+ \\ u_-(x) & , \quad x \in \Omega_-\,. \end{cases}$$

Seien $B_\pm$ *die Randwertoperatoren bezüglich der Gebiete* $\Omega_\pm$. *Dann gilt* $u \in H_1^p(\mathbb{R}^n)$ *genau dann, wenn* $B_+u_+ = B_-u_-$.

Beweis. Sei $u \in H_1^p(\mathbb{R}^n)$. Nach VS, Satz 2.14 gibt es dann eine Folge $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subseteq C_\infty(\mathbb{R}^n) \cap H_1^p(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u - u_m\|_{p,1,\mathbb{R}^n} \to 0$. Sei

$$u_m^+ = u_{m|\Omega_+}\,, \quad u_m^- = u_{m|\Omega_-}\,.$$

Dann folgt $\|u_+ - u_m^+\|_{p,1,\Omega_+} \to 0$, $\|u_- - u_m^-\|_{p,1,\Omega_-} \to 0$, also wegen der Stetigkeit von $B_\pm$:

$$\begin{aligned} B_+u_+ &= \lim_{m\to\infty} B_+u_m^+ = \lim_{m\to\infty} u^+_{m|\partial\Omega_+} = \lim_{m\to\infty} u^-_{m|\partial\Omega_-} \\ &= \lim_{m\to\infty} B_-u_m^- = B_-u_-\,. \end{aligned}$$

Sei umgekehrt $B_+u_+ = B_-u_-$, seien $n_\pm : \partial\Omega_\pm \to \mathbb{R}^3$ die äußeren Normalen an Ω_+ beziehungsweise Ω_- und sei

$$v(x) = \begin{cases} \nabla u_+(x) & , \quad x \in \Omega_+ \\ \nabla u_-(x) & , \quad x \in \Omega_- \end{cases}\,.$$

VS, Lemma 3.12 ergibt nun für $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$, daß $\varphi u_+ \in H_1^p(\Omega_+)$, $\varphi u_- \in H_1^p(\Omega_-)$ und $\nabla(\varphi u_\pm) = u_\pm \nabla\varphi + \varphi\nabla u_\pm$ gilt. Durch Approximation von $u_\pm$ durch $C_1(\overline{\Omega}_\pm)$–Funktionen folgt wie im Beweis von Satz A.8 b.), daß $B_\pm(\varphi u_\pm) = \varphi B_\pm(u_\pm)$ gilt. Aus Satz A.8 folgt also

$$\int_{\mathbb{R}^n}(u\nabla\varphi + \varphi v)dx = \int_{\Omega_+}(u_+\nabla\varphi + \varphi\nabla u_+)dx + \int_{\Omega_-}(u_-\nabla\varphi + \varphi\nabla u_-)dx$$

$$= \int_{\partial\Omega_+} n_+(x)(B_+u_+)(x)\,\varphi(x)\,dS + \int_{\partial\Omega_-} n_-(x)(B_-u_-)(x)\,\varphi(x)\,dS = 0\,,$$

wegen $\partial\Omega_+ = \partial\Omega_-$ und $B_+u_+ = B_-u_-$. Also ist $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ die schwache Ableitung von u, und das heißt $u \in H_1^p(\mathbb{R}^n)$.

A.10 Satz (Randwerte der Funktionen aus $H_1^p(\Omega)$). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit Lipschitzrand, und sei $1 \le p < \infty$. Dann gilt*

$$\overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega) = \left\{u \in H_1^p(\Omega) \;\middle|\; Bu = 0\right\}.$$

Beweis. Nach Folgerung A.6 ist $Bu = 0$ für jedes $u \in \overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega)$. Sei umgekehrt $u \in H_1^p(\Omega)$ mit $Bu = 0$. Sei $\{\eta^j\}_{j=0}^m$ die Zerlegung der Eins aus A.2. Dann ist $\eta^j u \in H_1^p(\Omega)$ für $j = 1, \ldots, m$ mit

$$B(\eta^j u) = B(\eta^j)\,B(u) = \eta^j\,Bu = 0\,.$$

Setzt man also $(\eta^j u)(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n\backslash\overline{\Omega}$, dann ist $\eta^j u \in H_1^p(\mathbb{R}^n)$ nach Folgerung A.9, also für $\delta > 0$ auch

$$v_\delta^j(x) = (\eta^j u)(x - \delta e_n)\,,$$

wobei e_n der Einheitsvektor in Richtung der n–ten Koordinatenachse des Koordinatensystems $(x_1^j, \ldots, x_n^j)$ aus A.2 ist. Außerdem gilt

$$\|\eta^j u - v_\delta^j\|_{p,1,\Omega} \to 0$$

für $\delta \to 0$ (siehe Beweis von Satz A.5). Auch für

$$u_\delta = \eta^0 u + \sum_{j=1}^m v_\delta^j$$

gilt also

$$\|u - u_\delta\|_{p,1,\Omega} = \|\sum_{j=1}^{m}(\eta^j u - v_\delta^j)\|_{p,1,\Omega} \to 0$$

falls $\delta \to 0$. Nach Konstruktion des Koordinatensystems $(x_1^j, \ldots, x_n^j)$ gilt schließlich $u_\delta(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$ mit $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \theta$, mit $\delta > 0$ und einer geeigneten Zahl $\theta = \theta(\delta) > 0$. Nach Folgerung VS, 3.8 kann also u_δ durch Funktionen aus $\mathring{C}_\infty(\Omega)$ approximiert werden in der Norm von $H_1^p(\Omega)$, also ist $u_\delta \in \mathring{H}_1^p(\Omega)$, und damit auch u, weil $\mathring{H}_1^p(\Omega)$ abgeschlossen ist.

A.11 Satz (Rellichscher Auswahlsatz). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge, sei $1 \leq p < \infty$ und sei $m \in \mathbb{N}$. Dann besitzt jede in $\mathring{H}_m^p(\Omega)$ beschränkte Folge eine im Raum $\mathring{H}_{m-1}^p(\Omega)$ konvergente Teilfolge.*

Bemerkung. Es ist $\mathring{H}_m^p(\Omega) \subseteq \mathring{H}_{m-1}^p(\Omega)$. Sei $J : \mathring{H}_m^p(\Omega) \to \mathring{H}_{m-1}^p(\Omega)$ der Einbettungsoperator. Der voranstehende Satz bedeutet, daß für jede Folge $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ mit $u_k \in \mathring{H}_m^p(\Omega)$ und mit

$$\|u_k\|_{p,m,\Omega} \leq 1$$

die Bildfolge $\{Ju_k\}_{k=1}^\infty$ in $\mathring{H}_{m-1}^p(\Omega)$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Also ist die Einbettung $J : \mathring{H}_m^p(\Omega) \to \mathring{H}_{m-1}^p(\Omega)$ eine kompakte Einbettung.

Beweis. Es sei $m = 1$ und sei $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ eine Folge mit $u_k \in \mathring{H}_1^p(\Omega)$ und mit $\|u_k\|_{p,1,\Omega} \leq 1$. Setze u_k durch 0 von Ω auf $\mathbb{R}^n$ fort. Dann ist die fortgesetzte Funktion, die ich wieder mit u_k bezeichne, in $\mathring{H}_1^p(\mathbb{R}^n)$ enthalten. Sei $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ eine Dirac-Familie mit $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ und $\varphi \in \mathring{C}_\infty\big(B_1(0)\big)$, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. Es ist dann

$$\varphi_\varepsilon * u_k \in \mathring{C}_\infty(\Omega_\varepsilon)$$

mit

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(x, \Omega) < \varepsilon\},$$

und die Folge $\{\varphi_\varepsilon * u_k\}_{k=1}^\infty$ ist gleichmäßig gleichgradig stetig auf der kompakten Menge $\overline{\Omega}_\varepsilon$, das heißt zu jedem $\theta > 0$ gibt es $\delta > 0$, so daß für alle

$k \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \overline{\Omega}_\varepsilon$ mit $|x-y| < \delta$ gilt

$$|(\varphi_\varepsilon * u_k)(x) - (\varphi_\varepsilon * u_k)(y)| < \theta\,.$$

Denn es gilt

$$\begin{aligned}
\Big|(\varphi_\varepsilon * u_k)(x) - (\varphi_\varepsilon * u_k)(y)\Big| &= \Big|\int_0^1 \frac{d}{dt}\,(\varphi_\varepsilon * u_k)\Big(t(x-y)+y\Big)\,dt\Big| \\
&= \Big|\int_0^1 \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon\Big(t(x{-}y)+y-z\Big)u_k(z)dz\,dt\Big| \\
&= \Big|\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt}\,\varphi_\varepsilon\Big(t(x{-}y)+y-z\Big)u_k(z)dz\,dt\Big| \\
&= \Big|\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} (x{-}y)\cdot\nabla\varphi_\varepsilon\Big(t(x{-}y)+y-z\Big)u_k(z)dz\,dt\Big| \\
&= \Big|-(x{-}y)\cdot\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon\Big(t(x{-}y)+y-z\Big)\,\nabla u_k(z)dz\,dt\Big| \\
&\le |x-y|\int_0^1 \|\varphi_\varepsilon\Big(t(x{-}y)+y-\cdot\Big)\|_{q,0,\mathbb{R}^n}\,\|\nabla u_k\|_{p,0,\mathbb{R}^n}\,dt \\
&= |x-y|\,\|\varphi_\varepsilon\|_{q,0,\mathbb{R}^n}\,\|\nabla u_k\|_{p,0,\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, also $q=\infty$ falls $p=1$. Wegen

$$\|\nabla u_k\|_{p,0,\mathbb{R}^n} \le \|u_k\|_{p,1,\mathbb{R}^n} \le 1$$

folgt hieraus die gleichmäßige, gleichgradige Stetigkeit. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli gibt es eine Teilfolge $\{u_{k_\ell}\}_{\ell=1}^\infty$, so daß die Folge $\{\varphi_\varepsilon * u_{k_\ell}\}_{\ell=1}^\infty$ auf der kompakten Menge $\overline{\Omega}_\varepsilon$ gleichmäßig konvergiert. Die Folge $\{\varphi_\varepsilon * u_{k_\ell}\}_{\ell=1}^\infty$ konvergiert dann auch in $L^p(\Omega_\varepsilon)$ und folglich auch in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Sei $\{u_k^1\}_{k=1}^\infty$ die Teilfolge von $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, für die $\{\varphi_1 * u_k^1\}_{k=1}^\infty$ konvergiert. Aus $\{u_k^1\}_{k=1}^\infty$ kann man eine Teilfolge $\{u_k^2\}_{k=1}^\infty$ auswählen, für die $\{\varphi_{1/2} * u_k^2\}_{k=1}^\infty$ konvergiert. Durch Induktion kann man aus $\{u_k^{j-1}\}_{k=1}^\infty$ eine Teilfolge $\{u_k^j\}_{k=1}^\infty$ auswählen, für die $\{\varphi_{1/j} * u_k^j\}_{k=1}^\infty$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Mit der Abschätzung

$$\|v - \varphi_\varepsilon * v\|_{p,0,\mathbb{R}^n} \le \varepsilon \|\,|\nabla v|\,\|_{p,0,\mathbb{R}^n}\,, \tag{A.4}$$

die für $v \in \overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega)$ gilt, und die unten bewiesen wird, kann man nun zeigen, daß die Diagonalfolge $\{u_j^j\}_{j=1}^\infty$ in $L^p(\Omega)$ konvergiert. Denn zu $\theta > 0$ wähle man j_0 mit $1/j_0 < \theta$ und j_1 mit

$$\|\varphi_{1/j_0} * u_j^j - \varphi_{1/j_0} * u_k^k\|_{p,0,\mathbb{R}^n} < \theta$$

für alle $j,k \geq j_1$. Für $j,k \geq j_1$ folgt dann

$$\begin{aligned}
\|u_j^j - u_k^k\|_{p,0,\mathbb{R}^n} &\leq \|u_j^j - \varphi_{1/j_0} u_j^j\|_{p,0,\mathbb{R}^n} + \|\varphi_{1/j_0} u_j^j - \varphi_{1/j_0} u_k^k\|_{p,0,\mathbb{R}^n} \\
&\quad + \|\varphi_{1/j_0} u_k^k - u_k^k\|_{p,0,\mathbb{R}^n} \\
&\leq \frac{1}{j_0}\|\nabla u_j^j\|_{p,0,\mathbb{R}^n} + \theta + \frac{1}{j_0}\|\nabla u_k^k\|_{p,0,\mathbb{R}^n} \;\leq\; \frac{2}{j_0} + \theta \;\leq\; 3\theta\,.
\end{aligned}$$

Also genügt es, die Ungleichung (A.4) zu beweisen.

Hierzu sei $v \in \overset{\circ}{H}{}_1^p(\Omega)$ und $f(x,y) = v(y) - v(x)$, $x,y \in \mathbb{R}^n$. Wegen $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon dx = 1$ folgt nun

$$\begin{aligned}
(\varphi_\varepsilon * v)(x) - v(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\big(v(y) - v(x)\big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\, f(x,y)dy\,.
\end{aligned}$$

Nach VS, Satz 3.1 folgt hieraus

$$\begin{aligned}
\|(\varphi_\varepsilon * v) - v\|_{p,0,\mathbb{R}^n} &\leq \|\varphi_\varepsilon\|_{1,0,\mathbb{R}^n} \sup_{h \in \operatorname{supp}\varphi} \|f(\cdot,\cdot - h)\|_{p,0,\mathbb{R}^n} \\
&\leq \sup_{|h|\leq\varepsilon} \|v(\cdot - h) - v\|_{p,0,\mathbb{R}^n}\,.
\end{aligned}$$

Falls $v \in \overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
\|v(\cdot - h) - v\|_{p,0,\mathbb{R}^n}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_0^1 \nabla v(x+th)\cdot h\, dt\Big|^p dx \\
&\leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 |\nabla v(x+th)|^p dt\, dx \\
&= |h|^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x+th)|^p dx\, dt \\
&= |h|^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p dx \;=\; |h|^p\, \|\,|\nabla v|\,\|_{p,0,\Omega}^p\,.
\end{aligned}$$

Wegen der Dichte von $\overset{\circ}{C}_\infty(\Omega)$ in $\overset{\circ}{H}{}^p_1(\Omega)$ gilt diese Ungleichung auch für $v \in \overset{\circ}{H}{}^p_1(\Omega)$. Aus den beiden letzten Ungleichungen zusammen folgt (A.4). Damit ist Satz A.11 für $m = 1$ bewiesen. Um den Satz für $m > 1$ zu beweisen, wende diese Schlüsse auf $\{D^\alpha u_k\}_{k=1}^\infty$ an mit $|\alpha| \leq m - 1$.