Skriptum zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

(Analysis III)

Hans–Dieter Alber

1 Einführende Beispiele und Definitionen

1 a.) Freier Fall:

Ein Körper mit der Masse m falle im Schwerefeld der Erde senkrecht nach unten. $y(t)$ sei seine Höhe über dem Erdboden zur Zeit t. Zur Zeit $t = 0$ sei seine Höhe y_0, und seine Geschwindigkeit y_1. $y'(t)$ ist die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t, $y''(t)$ die Beschleunigung. Nach dem Newtonschen Gesetz gilt

$$my''(t) = F(t)\,,$$

wobei $F(t)$ die zur Zeit t auf den Körper wirkende Schwerkraft ist, sein Gewicht. Durchfällt der Körper keine große Strecke, kann das Gewicht als konstant angesetzt werden:

$$F(t) = -m \cdot g\,.$$

Hierbei ist $g = 9{,}81\ \mathrm{m/sec}^2$ die konstante Erdbeschleunigung. Somit erfüllt die Funktion y die Differentialgleichung

$$y''(t) = -g\,,$$

für alle $t \geq 0$ und die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1\,. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung zusammen mit den Anfangsbedingungen nennt man Anfangswertproblem. Jede zweimal differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen erfüllt, heißt Lösung des Anfangswertproblems. Dieses Anfangswertproblem besitzt eine eindeutige Lösung, die folgendermaßen bestimmt werden kann:

Aus der Differentialgleichung folgt

$$\begin{aligned} y'(t) &= \int_0^t y''(\tau)d\tau + y'(0) \\ &= -\int_0^t g d\tau + y_1 = -gt + y_1 \\ y(t) &= \int_0^t y'(\tau)d\tau + y(0) = \int_0^t (-g\tau + y_1)d\tau + y_0 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot gt^2 + y_1 t + y_0\,. \end{aligned}$$

Dies ist die bekannte Formel für die Höhe eines Körpers im freien Fall.

1 b.) Radioaktiver Zerfall

Ein radioaktiver Stoff besitzt die Eigenschaft, daß die Atome, aus denen er besteht, nicht für beliebig lange Zeit stabil sind. Vielmehr zerfallen in jedem Zeitintervall eine kleine Anzahl seiner Atome. Sei $N(t)$ die zu einem Zeitpunkt vorhandene Anzahl seiner Atome. Man beobachtet nun, daß die Anzahl $N(t) - N(t+\tau)$ der in einem Zeitintervall $\tau > 0$ zerfallenden Atome proportional ist zur am Anfang des Zeitintervalls vorhandenen Atomzahl $N(t)$:

$$N(t) - N(t+\tau) = \alpha(\tau)N(t)$$

mit einer positiven, von der Länge des Zeitintervalls abhängigen Zahl $\alpha(\tau)$. Andererseits gilt nach dem Mittelwertsatz

$$N(t+\tau) - N(t) = N'(t^*)\tau$$

mit einer geeigneten Zahl t^* zwischen t und $t+\tau$, also

$$N'(t^*) = -\frac{\alpha(\tau)}{\tau} N(t)\,.$$

Läßt man die Länge des Zeitintervalls τ gegen Null gehen, folgt auch $t^* \to t$, und somit

$$N'(t) = \lim_{\tau\to 0} N'(t^*) = -N(t) \lim_{\tau\to 0} \frac{\alpha(\tau)}{\tau} = -CN(t)$$

mit $C = \lim_{\tau\to 0} \frac{\alpha(\tau)}{\tau}$. Man nennt die nichtnegative Zahl C die Zerfallskonstante. Sie hängt vom Material ab. Bei einem nicht radioaktiven Material ist $C = 0$.

Ist N_0 die zur Zeit $t = 0$ vorhandene Atomzahl, dann erfüllt die Funktion $N : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ also die Differentialgleichung

$$N'(t) = -CN(t)$$

und die Anfangsbedingung

$$N(0) = N_0\,.$$

Gesucht sind Lösungen dieses Anfangswertproblems, also differenzierbare Funktionen $N : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, die sowohl die Anfangsbedingung als auch für jedes $t \geq 0$ die Differentialgleichung erfüllen.

In Kapitel 8 c der Vorlesung Analysis I wurden alle möglichen Lösungen der Differentialgleichung

$$N' = -CN$$

bereits bestimmt. Ich wiederhole die Schlüsse hier: Sei $N(t)$ eine differenzierbare Lösung der Differentialgleichung. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\left(N(t)e^{Ct}\right) = N'(t)e^{Ct} + CN(t)e^{Ct} = -CN(t)e^{Ct} + CN(t)e^{Ct} = 0\,,$$

also

$$N(t)e^{Ct} = A = \text{constant}\,,$$

somit

$$N(t) = Ae^{-Ct}\,.$$

Jede Lösung muß also die Form Ae^{-Ct} haben mit einer Kostanten $A \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen von Ae^{-Ct} in die Differentialgleichung sieht man, daß Ae^{-Ct} für jede Konstante A auch wirklich eine Lösung ist.

Man hat also unendlich viele Lösungen der Differentialgleichung gefunden. Jedoch lösen diese Funktionen nicht notwendig das Anfangswertproblem. Aus der Anfangsbedingung folgt nämlich

$$A = N(0) = N_0\,,$$

also ist

$$N(t) = N_0 e^{-Ct}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

Man kann aus dieser Lösung die Zeit τ_H ausrechenen, die vergeht, bis die Anzahl der unzerfallenen Atome auf die Hälfte der Ausgangsanzahl zurückgegangen ist:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-C\tau_H}\,,$$

also $-C\tau_H = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2\,,$ folglich

$$\tau_H = \frac{\ln 2}{C}\,.$$

Man nennt τ_H die Halbwertszeit des radioaktiven Elements.

1 c.) Bevölkerungswachstum

Als „Modellgleichung“ für das Bevölkerungswachstum der Erde wurde 1838 vom belgischen Mathematiker Verhulst die gewöhnliche Differentialgleichung

$$N'(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)^2$$

vorgeschlagen. Die Anfangsbedingung ist

$$N(0) = N_0\,.$$

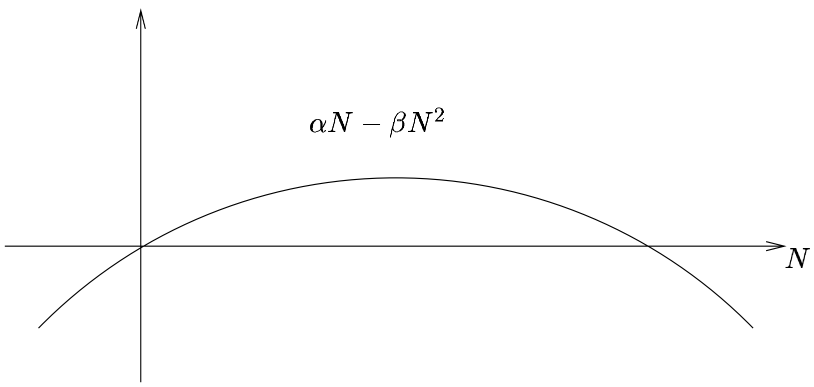
α und β sind gegebene positive Konstanten. Während der Term $\alpha N(t)$ zum schnellen Anwachsen von N führt, also ein starkes Bevölkerungswachstum beschreibt, hat der negative Term $-\beta N(t)^2$ einen das Wachstum bremsenden Effekt. Der Betrag diese quadratischen Terms ist kleiner als $\alpha N(t)$ für kleine positive Werte von $N(t)$, wächst aber schneller als $\alpha N(t)$ bei wachsenden Werten von $N(t)$. Bei großen Werten von $N(t)$ hat er also eine das weitere Wachstum stark bremsende Wirkung.

Ob es jedoch überhaupt eine Lösung zu diesem Anfangswertproblem oder sogar mehrere gibt, ist zunächst nicht klar. Ich will zunächst annehmen, daß es eine Lösung gibt, und das qualitative Verhalten dieser Lösung diskutieren.

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist ein quadratisches Polynom

$$\alpha N - \beta N^2 = N(\alpha - \beta N)$$

mit den Nullstellen $N = 0$ und $N = \frac{\alpha}{\beta}$.



Für $0 < N(t) < \frac{\alpha}{\beta}$ ist die rechte Seite der Differentialgleichung positiv. Eine Lösung N, die zur Zeit $t = 0$ den Anfangswert $N(0) = N_0$ mit $0 < N_0 < \alpha/\beta$ hat, besitzt also zunächst eine positive Ableitung N' und ist wachsend. Solange wie die Werte $N(t)$ im Intervall $[N_0, \alpha/\beta)$ bleiben, ist die Ableitung weiterhin positiv. Es gäbe nun drei Möglichkeiten:

1.) Die Funktion N ist auf der ganzen Halbachse $[0,\infty)$ streng monoton wachsend und es gibt eine Zahl $\delta > 0$, so daß $N(t) \leq \alpha/\beta - \delta$ gilt für alle $t \geq 0$.

2.) N ist auf $[0,\infty)$ streng monoton wachsend und nähert sich für $t \to \infty$ asymptotisch dem Wert α/β an, erreicht ihn aber nie.

3.) N ist in einem Intervall $[0,t_0)$ streng monoton wachsend mit $N(t_0) = \alpha/\beta$. In diesem Fall kann man N vom Intervall $[0,t_0]$ zu einer Lösung der Differentialgleichung auf ganz $[0,\infty)$ fortsetzen, indem man setzt

$$N(t) = \alpha/\beta = \text{const}\,, \quad t \geq t_0\,.$$

Für $t \geq t_0$ gilt dann

$$N'(t) = 0$$

und

$$\alpha N(t) - \beta N(t)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta} = 0\,,$$

also ist die Differentialgleichung nicht nur auf $[0,t_0]$, sondern auch auf $[t_0,\infty)$ erfüllt. (Man überlege sich, daß die so fortgesetzte Funktion an der Stelle $t = t_0$ differenzierbar ist.)

Ich zeige, daß der erste Fall nicht eintreten kann. Gilt nämlich für alle $t \geq 0$, daß $0 < N_0 \leq N(t) \leq \alpha/\beta - \delta$ ist mit einer positiven Zahl $\delta > 0$, dann existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit

$$\alpha N(t) - \beta N(t)^2 \geq \varepsilon$$

für alle $t \geq 0$, also

$$\begin{aligned} N(t) &= \int_0^t N'(\tau)d\tau + N(0) = \int_0^t \alpha N(\tau) - \beta N(\tau)^2 d\tau + N_0 \\ &\geq \int_0^t \varepsilon d\tau + N_0 = \varepsilon t + N_0\,, \end{aligned}$$

folglich

$$\varepsilon t + N_0 \leq N(t) \leq \alpha/\beta - \delta\,,$$

und diese Ungleichung soll für alle positiven t gelten, was unmöglich ist. Somit kann der erste Fall nicht eintreten, und die Lösung nähert sich entweder asymptotisch dem Wert

α/β oder erreicht ihn zu einem Zeitpunkt t_0.

Man kann die Lösung dieses Anfangswertproblems auch explizit bestimmen. Hierzu nehme ich an, N sei ein Lösung der Differentialgleichung

$$N'(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)^2 .$$

Hat für diese Lösung die rechte Seite $\alpha N(t) - \beta N(t)^2$ der Differentialgleichung in einem Intervall $[t_1, t_2]$ keine Nullstelle, dann kann die Differentialgleichung für $t_1 \le t \le t_2$ durch $\alpha N(t) - \beta N(t)^2$ geteilt werden:

$$\frac{N'(t)}{\alpha N(t) - \beta N(t)^2} = 1 .$$

Sei nun F eine Stammfunktion zur Funktion

$$y \mapsto \frac{1}{\alpha y - \beta y^2} .$$

Dann gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} F\Big(N(t)\Big) = F'\Big(N(t)\Big) N'(t) = \frac{N'(t)}{\alpha N(t) - \beta N(t)^2} = 1 ,$$

also

$$F\Big(N(t)\Big) - F\Big(N(t_1)\Big) = \int_{t_1}^{t} \frac{d}{d\tau} F\Big(N(\tau)\Big) d\tau = \int_{t_1}^{t} 1 d\tau = t - t_1 .$$

Mit der Inversen F^{-1} von F folgt also

$$N(t) = F^{-1}\Big(t - t_1 + F\Big(N(t_1)\Big)\Big) .$$

Für $t_1 = 0$ ergibt sich insbesondere

$$N(t) = F^{-1}\Big(t + F(N_0)\Big) .$$

Zur Herleitung dieser Formel wurde angenommen, daß N bereits eine Lösung ist, für die die rechte Seite in gewissen Intervallen keine Nullstelle besitzt, und daß die Stammfunktion F eine Inverse besitzt. Es muß daher zunächst F bestimmt und dann nachgeprüft werden, daß die durch die obenstehende Formel gegebene Funktion wirklich eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

Die Stammfunktion F kann mit Partialbruchzerlegung berechnet werden: Es gilt

$$\frac{1}{\alpha y - \beta y^2} = \frac{1}{y(\alpha - \beta y)} = \frac{1}{\alpha y} + \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta y)} ,$$

also

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\alpha z} + \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta z)}\, dz + C \\ &= \Big[\frac{1}{\alpha}\ln z - \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha - \beta z)\Big]_{z=y_0}^{y} + C = \ln\Big(\frac{y}{\alpha - \beta y}\Big)^{1/\alpha}, \end{aligned}$$

wenn man $C = \frac{1}{\alpha}\ln y_0 - \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha - \beta y_0)$ wählt. Um F^{-1} zu bestimmen sei

$$z = \ln\Big(\frac{y}{\alpha - \beta y}\Big)^{1/\alpha}.$$

Es folgt dann

$$e^{\alpha z} = \frac{y}{\alpha - \beta y},$$

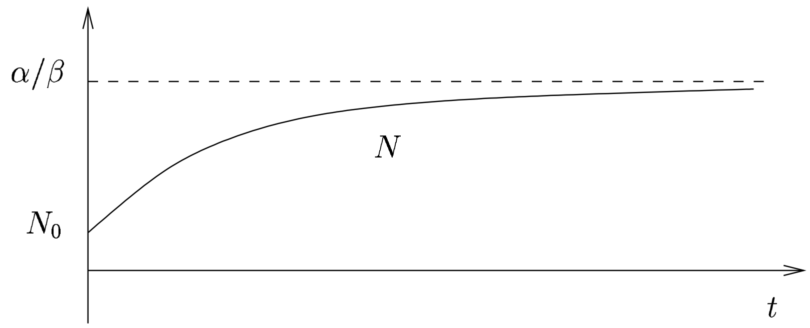
und hieraus

$$y = F^{-1}(z) = \frac{\alpha e^{\alpha z}}{\beta e^{\alpha z} + 1}.$$

Aus der Lösungsformel ergibt sich nun

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{\alpha e^{\alpha(t + F(N_0))}}{\beta e^{\alpha(t+F(N_0))} + 1} = \frac{\alpha e^{\alpha t}\frac{N_0}{\alpha - \beta N_0}}{\beta e^{\alpha t}\frac{N_0}{\alpha - \beta N_0} + 1} \\ &= \frac{\alpha N_0 e^{\alpha t}}{\beta N_0(e^{\alpha t} - 1) + \alpha}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung zeigt, daß durch diese Formel wirklich eine Lösung des Anfangswertproblems gegeben ist.



Diese Formel zeigt, daß der oben beschriebene Fall 2 eintritt: Die Lösung nähert sich dem Wert α/β asymptotisch, erreicht ihn aber nie.

Die hier verwendete Lösungsmethode kann auf jede Differentialgleichung angewandt werden, die in der Form

$$f\Big(y(t)\Big)y'(t) = g(t)$$

geschrieben werden kann mit beliebig gegebenen Funktionen f und g. Denn für eine Stammfunktion F von f ergibt die Substitutionsregel

$$F\Big(y(t)\Big) - F\Big(y(t_0)\Big) = \int_{y(t_0)}^{y(t)} f(z)dz = \int_{t_0}^{t} f\Big(y(\tau)\Big)y'(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau\,.$$

Weil man die Differentialgleichung meistens in der nicht ganz korrekten Form $f(y)y' = g(t)$ schreibt, nennt man dieses Lösungsverfahren auch „Methode der Trennung der Variablen".

1 d.) Freier Fall aus großer Höhe

Ein Körper der Masse m befinde sich weit entfernt von der Erde. Legt er im freien Fall eine große Strecke zurück, kann man nicht mehr wie in 1 a.) die Erdbeschleunigung als konstant annehmen. Vielmehr gilt dann nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz für die Anziehungskraft F der Erde auf den Körper

$$F = -\gamma\,\frac{m \cdot M}{y^2}\,,$$

wobei y der Abstand der Massenmittelpunkte von Erde und frei fallendem Körper ist, γ die Gravitationskonstante und M die Erdmasse bedeutet. Also muß die Funktion y die Differentialgleichung

$$y''(t) = -\gamma M \cdot \frac{1}{y(t)^2}$$

und die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1 \end{aligned}$$

erfüllen.

Anders als im Beispiel 1 a.) kann die Differentialgleichung nicht mehr durch Integration gelöst werden. Lösungen erhält man jedoch in einfacher Weise mit dem Ansatz $y(t) = a(c \pm t)^b$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$ab(b-1)(c \pm t)^{b-2} = -\gamma M\,\frac{1}{a^2(c \pm t)^{2b}}\,,$$

folglich muß für alle $t > 0$

$$(c \pm t)^{3b-2} = \frac{-\gamma M}{a^3 b(b-1)}$$

gelten. Hieraus ergibt sich

$$b = \frac{2}{3}, \quad a = \left(\frac{9}{2}\gamma M\right)^{1/3},$$

somit

$$y(t) = \left(\frac{9}{2}\gamma M\right)^{1/3} (c \pm t)^{2/3}.$$

Dies sind Lösungen der Differentialgleichung für jedes $c \in \mathbb{R}$. Man kann aber c nicht immer so wählen, daß beide Anfangsbedingungen erfüllt sind. Die erste Anfangsbedingung zum Beispiel legt c schon eindeutig fest, und $y'(0)$ kann dann nicht mehr gewählt werden. Also stellt sich die Frage, ob überhaupt eine Lösung dieses Anfangswertproblems zu allgemeinen Anfangsbedingungen existiert. Unten werde ich zeigen, daß solche Lösungen existieren und wie man sie erhält.

Mit der angegebenen Lösung kann jedoch folgender Spezialfall untersucht werden: Für $c = 0$ ergibt sich die Lösung

$$y(t) = \left(\frac{9}{2}\gamma M\right)^{1/3} t^{2/3}.$$

Diese Lösung beschreibt die Bahn eines Massenpunktes der nicht zur Erde zurückfällt. Denn für die Geschwindigkeit $y'(t)$ gilt

$$y'(t) = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}\gamma M\right)^{1/3} t^{-1/3} \to 0$$

für $t \to \infty$, also konvergiert die Geschwindigkeit für große Zeiten asymptotisch gegen Null, und wird nie negativ. Somit beschreibt diese Lösung den Grenzfall der Bahn eines Massenpunktes, der gerade nicht zur Erde zurückfällt. Den Abstand ρ vom Erdmittelpunkt erreicht der Massenpunkt zur Zeit

$$t = \frac{\rho^{3/2}}{(\frac{9}{2}\gamma M)^{1/2}},$$

und in diesem Zeitpunkt hat er die Geschwindigkeit

$$y'(t) = \sqrt{2\gamma M/\rho}.$$

Die Fluchtgeschwindigkeit v erhält man, indem man für ρ den Erdradius einsetzt: Mit

$$\begin{aligned} \rho &= 6,370 \cdot 10^8 \text{ cm}, \\ \gamma &= 6,685 \cdot 10^{-10} \frac{\text{dyn cm}^2}{g^2} \qquad \left(\text{dyn} = \frac{g \cdot \text{cm}}{\text{sec}^2}\right) \end{aligned}$$

$$M = 5,97 \cdot 10^{27} g$$

ergibt sich als Fluchtgeschwindigkeit

$$v = 1,12 \cdot 10^6 \,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}} = 11,2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{sec}}\,.$$

Um weitere Lösungen der Differentialgleichung zu finden, mit denen das Anfangswertproblem zu allgemeinen Anfangsdaten gelöst werden kann, multipliziert man die Differentialgleichung mit y'. Man erhält

$$y'(t)y''(t) = -\gamma M \frac{y'(t)}{y(t)^2}\,,$$

folglich

$$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\,y'(t)^2 = \gamma M \frac{d}{dt}\,\frac{1}{y(t)}\,,$$

und also mit einer beliebigen Konstanten C

$$y'(t) = \pm\sqrt{2\gamma M\big(\frac{1}{y(t)} + C\big)}\,.$$

Damit ist die ursprünglich gegebene Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt, die mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden kann. Es folgt

$$\frac{1}{\sqrt{2\gamma M}} \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+Cy}}\, dy = \int_{t_0}^{t} \frac{y'(\tau)}{\sqrt{2\gamma M(\frac{1}{y(\tau)} + C)}}\, d\tau = \pm \int_{t_0}^{t} d\tau = \pm(t - t_0)\,.$$

Mit einer Stammfunktion F von $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+Cy}}$ erhält man also

$$F\Big(y(t)\Big) - F\Big(y(t_0)\Big) = \pm\sqrt{2\gamma M}\,(t - t_0)\,.$$

Zur Bestimmung von F verwende man die Substitution $\sqrt{Cy} = \sinh(x)$ für $C > 0$ beziehungsweise $\sqrt{-Cy} = \sin(x)$ für $C < 0$. Man erhält

$$F(y) = \begin{cases} \frac{1}{C}\sqrt{1+Cy}\,\sqrt{y} - \frac{1}{C\sqrt{C}}\,\mathrm{arsinh}(\sqrt{Cy})\,, & C > 0 \\ \frac{2}{3}\,y^{3/2} & C = 0 \\ \frac{1}{C}\,\sqrt{1+Cy}\,\sqrt{y} - \frac{1}{C\sqrt{-C}}\,\arcsin(\sqrt{-Cy})\,, & C < 0\,. \end{cases}$$

Die Lösung y ergibt sich schließlich durch Inversion von F. Dies soll hier nicht diskutiert werden. Die oben angegebenen Lösungen ergeben sich im Fall $C = 0$.

Die hier verwendete Methode zur Reduktion einer Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine Differentialgleichung erster Ordnung kann auf jede Gleichung der Form

$$y'' = h(y)$$

angewandt werden. Denn mit einer Stammfunktion H von h folgt

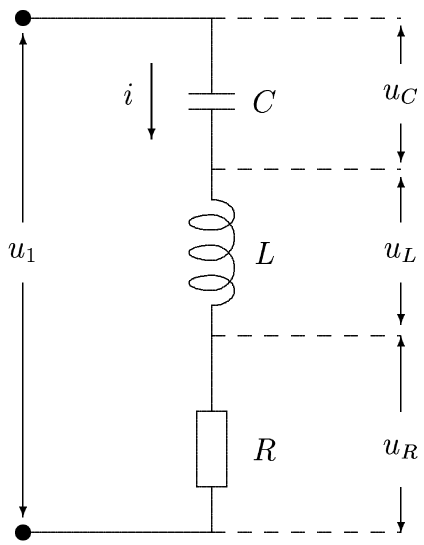
$$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\,y'(t)^2 = y'(t)y''(t) = h\Big(y(t)\Big)y'(t) = \frac{d}{dt}\,H\Big(y(t)\Big)\,,$$

also

$$y'(t) = \pm\sqrt{2H(y(t)) + C}\,.$$

1 e.) Elektrischer Schwingkreis

An einem Schwingkreis liege die bekannte, zeitlich veränderliche Spannung $u_1(t)$. Gesucht ist die Stromstärke $i(t)$ durch den Schwingkreis.



C sei die Kapazität des Kondensators, L die Induktivität der Spule, R der elektrische Widerstand. Dann gilt

$$u_C'(t) = \frac{1}{C}\,i(t)$$
$$u_L(t) = Li'(t)$$
$$u_R(t) = Ri(t)$$

und

$$u_C + u_L + u_R = u_1\,.$$

Hieraus folgt

$$u'_C + u'_L + u'_R = u'_1 \,,$$

also ergibt sich für die Stromstärke die „lineare Differentialgleichung“

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}\, i(t) = u'_1(t) \,,$$

die für alle $t \geq 0$ erfüllt sein muß. Die Anfangsbedingungen seien

$$\begin{aligned} i(0) &= i_0 \\ i'(0) &= i_1 \,. \end{aligned}$$

Dieses Anfangswertproblem soll hier nur für den Fall $u_1 \equiv 0$ untersucht werden. Zur Lösung mache man folgenden Ansatz mit der komplexen Exponentialfunktion (siehe Kapital 10 des Skriptums Analysis I)

$$i(t) = \alpha \mathrm{Re}\, e^{i\theta(t-\varphi)} = \alpha e^{-\theta_2(t-\varphi)} \cos \theta_1 (t - \varphi) \,,$$

wobei $\theta = \theta_1 + i\theta_2 \in \mathbb{C}$ und $\alpha, \varphi \in \mathbb{R}$ Konstanten seien. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} & -L\alpha \mathrm{Re}\, \theta^2 e^{i\theta(t-\varphi)} + R\alpha \mathrm{Re}\, i\theta e^{i\theta(t-\varphi)} + \frac{1}{C}\alpha \mathrm{Re}\, e^{i\theta(t-\varphi)} \\ = \; & \mathrm{Re}\left[(-L\theta^2 + Ri\theta + \frac{1}{C})\alpha e^{i\theta(t-\varphi)} \right] = 0 \,. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist sicher erfüllt, wenn

$$-L\theta^2 + Ri\theta + \frac{1}{C} = 0$$

gilt.

Auflösen dieser quadratischen Gleichung nach θ ergibt

$$\theta = \frac{-iR \pm \sqrt{-R^2 + 4\frac{L}{C}}}{-2L} = i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2} \,.$$

Falls $\frac{1}{CL} \geq (\frac{R}{2L})^2$ ist, folgt hieraus

$$i(t) = \alpha e^{-\frac{R}{2l}(t-\varphi)} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}\, (t - \varphi) \right) .$$

Der Fall $\frac{1}{CL} = (\frac{R}{2L})^2$ heißt aperiodischer Grenzfall. φ und α können aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Hierzu beachte man, daß aus den Anfangsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} i_0 = i(0) &= \alpha \mathrm{Re}\, e^{-i\theta\varphi} = \alpha e^{\theta_2 \varphi} \cos\theta_1 \varphi \\ i_1 = i'(0) &= \alpha \mathrm{Re}\, i\theta e^{-i\theta\varphi} = \alpha \mathrm{Re}\, |\theta| e^{i(\arg\theta + \frac{\pi}{2} - \theta\varphi)} \\ &= \alpha |\theta| e^{\theta_2\varphi} \cos(\arg\theta + \frac{\pi}{2} - \theta_1\varphi) \\ &= -\alpha|\theta| e^{\theta_2\varphi} \sin(\arg\theta - \theta_1\varphi)\,. \end{aligned}$$

Hieraus resultiert im Fall $i_0 \neq 0$ mit dem Additionstheorem für den Sinus, daß

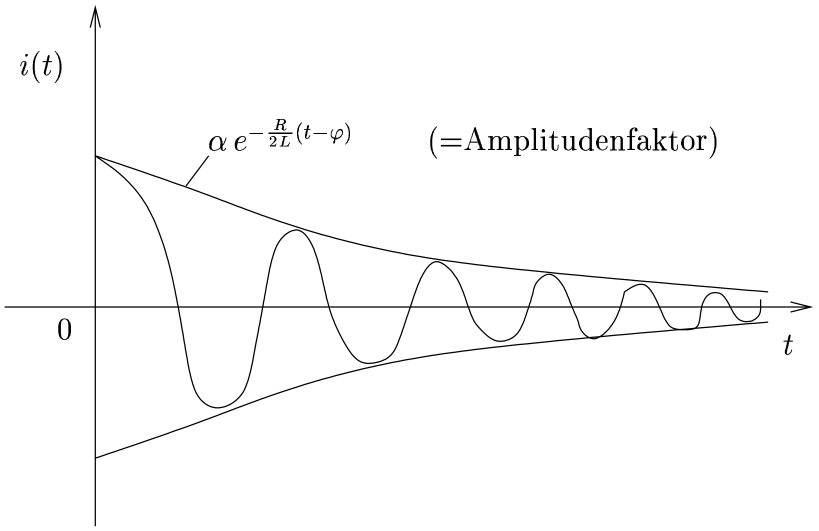
$$\frac{i_1}{i_0} = \frac{-|\theta|\sin(\arg\theta - \theta_1\varphi)}{\cos\theta_1\varphi} = -|\theta| \Big(\sin(\arg\theta) - \cos(\arg\theta)\tan(\theta_1\varphi) \Big)\,,$$

folglich

$$\tan(\theta_1\varphi) = \frac{1}{|\theta|\cos(\arg\theta)} \frac{i_1}{i_0} + \tan(\arg\theta)\,.$$

Weil θ bereits bekannt ist, kann hieraus φ bestimmt werden. α berechnet man dann aus

$$\alpha = \frac{i_0}{\mathrm{Re}\, e^{-i\theta\varphi}}$$



Der allgemeine Fall $u_1 \neq 0$ wird später behandelt.

Die Differentialgleichung zum elektrischen Schwingkreis sowie die in 1 a.) und 1 b.) besprochenen Differentialgleichungen gehören zur wichtigen Klasse der linearen Differentialgleichungen, für die eine vollständige Lösungstheorie existiert.

1 f.) Differentialgleichungen n–ter Ordnung, Systeme erster Ordnung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ein formaler Ausdruck der Form

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

heißt explizite Differentialgleichung n–ter Ordnung. (Explizit, weil die Gleichung nach der n–ten Ableitung aufgelöst ist.)

Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der Differentialgleichung

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

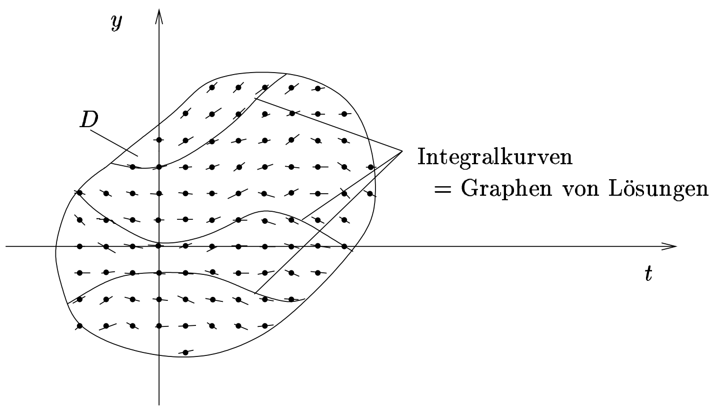
im Intervall I, genau dann wenn die drei folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) y ist n–fach differenzierbar

(ii) $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in D$, für alle $t \in I$

(iii) $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ für alle $t \in I$.

Sei $y' = f(t, y)$ eine Differentialgleichung erster Ordnung. Diese Differentialgleichung kann folgendermaßen geometrisch interpretiert werden:



Die Differentialgleichung schreibt in jedem Punkt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Steigung, also ein Richtungselement vor, also definiert die Differentialgleichung ein Richtungsfeld in D. Eine Lösung der Differentialgleichung ist eine Funktion, deren durch die Menge D verlaufender Graph in jedem Punkt die durch dieses Richtungsfeld vorgeschriebene Richtung hat. Eine solche Kurve heißt Integralkurve des Richtungsfeldes.

Weil durch D unendlich viele Integralkurven laufen, hat eine Differentialgleichung im allgemeinen unendlich viele Lösungen. Andererseites ist es anschaulich klar, daß durch einen gegebenen Punkt $(t_0, y_0) \in D$ genau eine Integralkurve des Richtungsfeldes geht. Man erwartet also, daß man die Lösung eindeutig bestimmen kann, indem man in einem einzigen Punkt t_0 den Wert $y(t_0) = y_0$ der Lösung vorschreibt. Man definiert daher:

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen , $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in D$.

Unter einer Lösung zum Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) &= y_0 \\ x'(t_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

im Intervall I versteht man eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingungen erfüllt, d. h. für die gilt

$$y(t_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}.$$

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $D \subseteq \mathbb{R}^{m \cdot n+1}$ offen, sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig, und seien $f_1, \ldots, f_m$ die Komponentenfunktionen von f. Ein formaler Ausdruck der Form

$$\begin{aligned} y_1^{(n)} &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y_m', \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_m^{(n-1)}) \\ &\vdots \\ y_m^{(n)} &= f_m(t, y_1, y_2, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y_m', \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_m^{(n-1)}) \end{aligned}$$

heißt System von m Differentialgleichungen n–ter Ordnung.

Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und

$$(t_0, y_{0,1}, \ldots, y_{0,m}, y_{1,1}, \ldots, y_{1,m}, \ldots, y_{n-1,1}, \ldots, y_{n-1,m}) \in D.$$

Unter einer Lösung zum Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x_1^{(n)} &= f_1(t, x_1, \ldots, x_m^{(n-1)}) \\ &\vdots \\ x_m^{(n)} &= f_m(t, x_1, \ldots, x_m^{(n-1)}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_1(t_0) &= y_{0,1} \\
&\vdots \\
x_m^{(n-1)}(t_0) &= y_{n-1,m}
\end{aligned}
$$

im Intervall I versteht man eine Funktion $y = (y_1, \dots, y_m) : I \to \mathbb{R}^m$ mit folgenden Eigenschaften

(i) y ist m–fach differenzierbar

(ii) $\Big(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\Big) \in D$, für alle $t \in I$

(iii) $y^{(n)}(t) = f\Big(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\Big)$, für alle $t \in I$.

(iv) $y(t_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$

mit $y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,m}), \dots, y_{n-1} = (y_{n-1,1}, \dots, y_{n-1,m})$.

($y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ ist kanonische Kurzschreibweise für das System n–ter Ordnung.)

Beispiel: Im Schwerefeld der Sonne, die die Masse M habe, bewege sich ein Planet mit der Masse m. Die Bewegung sei eben. Der Ort des Planeten wird dann beschrieben durch die Funktion $y(t) = (y_1(t), y_2(t)) \in \mathbb{R}^2$, wobei man ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit Ursprung im Schwerpunkt der Sonne wähle. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetzt gilt dann

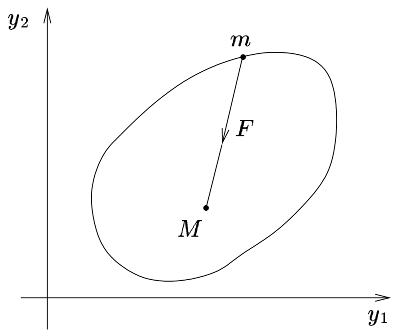
$$
\begin{aligned}
my_1''(t) &= F_1(y_1, y_2) \\
my_2''(t) &= F_2(y_1, y_2),
\end{aligned}
$$

kurz: $my''(t) = F(y)$, mit der Gravitationskraft

$$
F(y) = \begin{pmatrix} F_1(y_1, y_2) \\ F_2(y_1, y_2) \end{pmatrix} = -\frac{y}{|y|}\,\gamma\,\frac{m \cdot M}{|y|^2} = -\gamma m M\,\frac{y}{|y|^3}.
$$

Also erhält man das System aus zwei Gleichungen zweiter Ordnung

$$
\begin{aligned}
y_1''(t) &= -\frac{\gamma M y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}^3} \\
y_2''(t) &= -\frac{\gamma M y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}^3}
\end{aligned}
$$



Ich werde nun zeigen, daß man eine Differentialgleichung m–ter Ordnung immer in ein System aus m Gleichungen erster Ordnung transformieren kann. In ähnlicher Weise kann man Systeme m–ter Ordnung immer in Systeme erster Ordnung umschreiben. Dies vereinfacht die folgende Betrachtungen, weil es genügt, Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zu behandeln, um den allgemeinen Fall zu erledigen.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$z^{(n)} = f\big(t, z, \ldots, z^{(n-1)}\big)\,. \tag{$*$}$$

Definiere eine differenzierbare Funktion

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$$

durch

$$\begin{array}{rcl} y_1(t) & := & z(t) \\ y_2(t) & := & z'(t) \\ \vdots & & \\ y_n(t) & := & z^{(n-1)}(t)\,. \end{array}$$

Dann ist y die Lösung des Systems

$$\begin{array}{lcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots & & \\ y_{n-1}' & = & y_n \\ y_n' & = & f\big(t, y_1, y_2, \ldots, y_n\big) \end{array} \tag{$**$}$$

aus n Gleichungen erster Ordnung. Umgekehrt sei $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Systems $(**)$. Setzt man $z(t) := y_1(t)$, dann folgt aus $(**)$, daß $y_2(t) = z'(t)$ ist. Da y_2 nach

Voraussetzung differenzierbar ist, folgt daß z zweimal differenzierbar ist. Durch Fortsetzung des Verfahrens folgt, daß $y_j(t) = z^{(j-1)}(t)$ gilt, $j = 1, \ldots, n$, also daß z n–fach differenzierbar ist. Die letzte Gleichung von $(**)$ ergibt

$$z^{(n)} = f(t, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) .$$

In diesem Sinn sind also Gleichung $(*)$ und das System $(**)$ äquivalent. In naheliegender Weise kann auch ein System n–ter Ordnung aus m Gleichungen in ein System erster Ordnung aus $m \cdot n$ Gleichungen umgeschrieben werden.

2 Metrische Räume

Als Hilfsmittel zum Beweis der Existenz von Lösungen zu Anfangsrandwertproblemen verwendet man die Theorie metrischer Räume.

2 a.) Topologie metrischer Räume

Definition: Es sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

(M 1) $d(x,y) \geq 0\,,\quad d(x,y) = 0 \iff x = y\,.$

(M 2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M 3) $d(x,y) \leq d(y,z) + d(z,x)\,,$ für alle $x,y,z \in X$ (Dreiecksungleichung)

Dann heißt d eine Metrik auf X, (X,d) heißt ein metrischer Raum, und $d(x,y)$ heißt Abstand zwischen x und y.

Beispiele: 1.) Auf $X = \mathbb{R}^n$ definiere man eine Metrik durch $d(x,y) = \|x-y\|$ mit irgendeiner Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Dies geht allgemein: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d(x,y) := \|x-y\|$ eine Metrik auf X. Also sind alle normierten Räume metrische Räume.

2.) Sei X eine beliebige Menge. Definiere $d : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 1\,, & x \neq y \\ 0\,, & x = y\,. \end{cases}$$

Diese Metrik nennt man ausgeartet.

3.) Eine andere Metrik auf $X = \mathbb{R}$, ist $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Der Beweis wird dem Leser überlassen.

Auf einem metrischen Raum definiert man folgendermaßen eine Topologie:

Definition: Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Die Menge

$$U_\varepsilon(x) := \Big\{ y \in X \;\Big|\; d(x,y) < \varepsilon \Big\}$$

heißt ε–Umgebung von x. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt Umgebung von x, wenn es eine ε–Umgebung $U_\varepsilon(x)$ gibt mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$. Eine Menge $\mathcal{O} \subseteq X$ heißt offen, wenn $\mathcal{O}$ Umgebung von jedem $x \in \mathcal{O}$ ist. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \backslash A$ offen ist.

Es gilt:

(1) X ist offen, $\emptyset$ ist offen.

(2) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen, die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

(3) X ist abgeschlossen, $\emptyset$ ist abgeschlossen.

(4) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen, die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Wie üblich definiert man innere Punkte, Häufungspunkte und Berührungspunkte. Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Berührungspunkte enthält. Sei $A \subseteq X$. Die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A besteht aus allen Berühungspunkten von A. Es gilt:

$$\overline{A} = \bigcap \left\{ B \middle| A \subseteq B \quad \text{und} \quad B \quad \text{abgeschlossen} \right\}.$$

Die Menge aller inneren Punkte von A heißt der offene Kern $\mathring{A}$ von A. $\mathring{A}$ ist offen. Die Menge $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$ heißt Rand von A.

Definition: Eine Menge $N \subseteq X$ heißt dicht in $M \subseteq X$, wenn $M \subseteq \overline{N}$ gilt. N heißt überall dicht, wenn $\overline{N} = X$ gilt; N heißt nirgends dicht, wenn $\overline{N}$ keine inneren Punkte enthält.

Satz: Sei (X, d) metrischer Raum. Dann ist X ein separierter Raum, d.h. zu allen $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren Umgebungen $U(x)$ von x und $U(y)$ von y mit

$$U(x) \cap U(y) = \emptyset.$$

Beweis: Es ist $d(x, y) = \varepsilon > 0$. Setze

$$U(x) = \left\{ z \in X \middle| d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \quad U(y) = \left\{ z \in X \middle| d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Dann gilt $U(x) \cap U(y) = \emptyset$. Denn wäre $z \in U(x) \cap U(y)$, müßte gelten

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

im Widerspruch zu $d(x, y) = \varepsilon$. ■

Ein separierter topologischer Raum heißt auch *Hausdorffraum.*

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in X. Diese Folge heißt konvergent, wenn es $x \in X$ gibt, so daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. x heißt Grenzwert der Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Lemma: In einem metrischen Raum hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.

Der Beweis wird dem Leser überlassen.

Definition: Seien (X, d) und (Y, δ) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig in x, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ existiert mit

$$\delta\Big(f(x), f(y)\Big) < \varepsilon$$

für alle $y \in X$ mit $d(x, y) < \eta$. Die Abbildung f heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.

Satz: $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in x, wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

gilt. f ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge in Y offen ist in X. f ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge in Y abgeschlossen in X ist.

Der Beweis verläuft wie im $\mathbb{R}^n$.

Beispiel: Sei X eine Menge und d die ausgeartete Metrik. Auf dem metrischen Raum (X, d) gelten folgende Aussagen:

Sei $x \in X$. Dann ist jede Teilmenge U von X mit $x \in U$ Umgebung von x. Insbesondere ist $\{x\}$ selbst Umgebung von X. Jede Teilmenge von X ist offen und abgeschlossen.

Sei (Y, δ) ein zweiter metrischer Raum. Dann ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist genau dann konvergent, wenn $x \in X$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$x_n = x$$

für alle $n \geq n_0$.

Definition: Seien (X, d) und (Y, δ) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ existiert mit

$$\delta\Big(f(x), f(y)\Big) < \varepsilon$$

für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \eta$.

Definition: Eine Abbildung A eines metrischen Raumes (X, d) in einen metrischen Raum (Y, δ) heißt eine Isometrie (oder eine isometrische Abbildung), wenn für alle $x, y \in X$ gilt, daß $d(x, y) = \delta(Ax, Ay)$.

Satz: Eine Isometrie $A : X \to Y$ ist injektiv.

Beweis: Aus $Ax = Ay$ folgt $d(x, y) = \delta(Ax, Ay) = 0$, also $x = y$. ■

Definition: Zwei metrische Räume X und Y heißen isometrisch, wenn es eine Isometrie von X auf Y gibt.

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Schränkt man d auf $M \times M$ ein, dannn wird M zusammen mit dieser Einschränkung zu einem metrischen Raum. Die Einschränkung von d auf $M \times M$ heißt die von d auf M *induzierte Metrik.*

Satz: Seien (X_i, d_i), für $i = 1, 2, \ldots, m$ metrische Räume und seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ Elemente aus dem Produktraum $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Dann ist

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$$

eine Metrik auf X.

Beweis: klar.
Man nennt die in diesem Satz erklärte Metrik die *Produktmetrik.*

Satz: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, wenn man $X \times X$ mit der Produktmetrik versieht.

Beweis: Zum Beweis benützt man die Vierecksungleichung:

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y'),$$

für alle $x, y, x', y' \in X$. Diese Ungleichung ergibt sich folgendermaßen: Es ist

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y),$$

also

$$d(x,y) - d(x',y') \le d(x,x') + d(y,y')\,.$$

Durch Vertauschen von x, y und x', y' folgt

$$d(x',y') - d(x,y) \le d(x,x') + d(y,y')\,,$$

woraus die Vierecksungleichung folgt.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $(x,y) \in X \times X$ und $(x',y') \in X \times X$ mit $d_{X\times X}((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y') < \varepsilon$, daß

$$|d(x,y) - d(x',y')| \le d(x,x') + d(y,y') < \varepsilon\,,$$

also ist d stetig (sogar gleichmäßig stetig). ■

2 b.) Vollständigkeit, Kompaktheit

Definition: Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in X$ heißt Cauchyfolge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

für alle $n, m \ge n_0$.

Es ist klar, daß jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist.

Definition: Ein metrischer Raum (X,d) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Nicht vollständig sind zum Beispiel die Räume (X,d) mit $X = \mathbb{Q}$ und der Metrik $d(x,y) = |x-y|$, oder der Raum $C_0(\mathbb{R}^n)$ mit der Metrik

$$d(f,g) := \|f-g\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|dx\,.$$

Denn in Abschnitt 1c des Skriptums zur Mehrfachintegration wird bewiesen, daß $C_0(\mathbb{R}^n)$ dicht ist in $L_1(\mathbb{R}^n)$, und $L_1(\mathbb{R}^n)$ enthält nichtstetige Funktionen. Wählt man $f \in L_1(\mathbb{R}^n)\backslash C_0(\mathbb{R}^n)$ und eine Folge $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} d(g_n, f) = \lim_{n\to\infty} \|g_n - f\|_1 = 0\,,$$

dann ist $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyfolge bezüglich der Metrik d, hat aber keinen Grenzwert in $C_0(\mathbb{R}^n)$, weil Grenzwerte in metrischen Räumen eindeutig bestimmt sind.

Satz: Seien (X,d) ein metrischer Raum, $M \subseteq X$ mit $\overline{M} = X$, (Y,δ) ein vollständiger metrischer Raum und $A : M \to Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung. Dann gibt es genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{A}$ von A auf ganz X. $\tilde{A}$ ist gleichmäßig stetig auf X.

Beweis: Sei $x \in X$. Dann existiert eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in M$ und mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Definiere $\tilde{A} : X \to Y$ durch

$$\tilde{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n \, .$$

Dieser Limes existiert. Denn wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von A ist $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in Y, also konvergent, weil Y vollständig ist. Die Definition von $\tilde{A}$ ist sinnvoll, denn wenn $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ eine zweite Folge ist mit

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n' \, ,$$

dann konvergiert auch $\{x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots,\}$ gegen x. Also konvergiert auch

$$\{Ax_1, Ax_1', Ax_2, Ax_2', \ldots,\} \, ,$$

und der Grenzwert stimmt mit den Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} Ax_n$ und $\lim_{n\to\infty} Ax_n'$ der Teilfolgen überein, also stimmen diese Grenzwerte selbst überein. Natürlich stimmt $\tilde{A}$ auf M mit A überein, also ist $\tilde{A}$ eine Fortsetzung von A.

Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{A}$ gleichmäßig stetig ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\eta > 0$ so, daß

$$\delta(Ay, Az) < \varepsilon$$

gilt für alle $y, z \in M$ mit $d(y,z) < \eta$. Sei nun $x, x' \in X$ mit $d(x,x') < \eta/3$. Wähle $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n, x_n' \in M$ und mit

$$\lim_{n\to\infty} = x \, , \quad \lim_{n\to\infty} x_n' = x' \, .$$

Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \eta/3$ und mit $d(x_m', x') < \eta/3$ für $n, m \geq n_0$, also folgt für diese n und m aus der Dreiecksungleichung $d(x_n, x_m') < \eta$. Wegen der Stetigkeit der Metrik ergibt sich also

$$\delta(\tilde{A}x, \tilde{A}x') = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \delta(Ax_n, Ax_m') \leq \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \varepsilon = \varepsilon \, .$$

Somit ist $\tilde{A}$ gleichmäßig stetig. Daß $\tilde{A}$ eindeutig ist, ist klar, weil für jede stetige Fortsetzung B von A gelten muß

$$\tilde{A}x = \lim_{n\to\infty} \tilde{A}x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Bx_n = Bx\,. \qquad \blacksquare$$

In den beiden obenstehenden Beispielen nichtvollständiger Räume sind diese Räume dichte Teilräume von vollständigen metrischen Räumen. ($L_1(\mathbb{R}^n)$ ist vollständig, siehe Kapitel 1b des Skriptums Mehrfachintegration.) Dies gilt allgemein:

Satz: Zu jedem metrischen Raum (X, d) gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ und eine Isometrie A von X auf einen Teilraum von $\hat{X}$ mit $\overline{A(X)} = \hat{X}$. $\hat{X}$ ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt und heißt vollständige Hülle von X.

(Identifiziert man X mit $A(X)$, dann kann man X als dichten Teilraum von $\hat{X}$ auffassen.)

Beweis: I.) Konstruktion von $\hat{X}$.

I a.) Sei Y die Menge der Cauchyfolgen auf X. Man definiert eine „Halbmetrik" d' auf Y folgendermaßen: Seien $\xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\eta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in Y$. Setze

$$d'(\xi, \eta) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)\,.$$

Dieser Limes existiert. Denn sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n, m \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < \varepsilon$$

gilt. Dann folgt für $n, m \geq n_0$ nach der Vierecksungleichung

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < \varepsilon\,,$$

also ist $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also existiert der Limes.

Für d' gilt

1.) $d'(\xi, \eta) \geq 0$ und $d'(\xi, \xi) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = 0$.

2.) $d'(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = d'(\eta, \xi)$

3.) $d'(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} d(z_n, y_n)$
$= d'(\xi, \zeta) + d'(\zeta, \eta)$, für $\zeta = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in Y$.

Aus $d'(\xi, \eta) = 0$ folgt jedoch nicht $\xi = \eta$. Denn wähle zum Beispiel zwei verschiedene Folgen $\xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\eta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, die beide gegen denselben Grenzwert $x \in X$ konvergieren. Also ist d' nur eine „Halbmetrik".

I b.) Um hieraus eine Metrik zu machen, teile man den Raum Y in Äquivalenzklassen ein: Zwei Elemente $\xi, \eta \in Y$ heißen äquivalent, geschrieben $\xi \sim \eta$, genau dann, wenn

$$d'(\xi, \eta) = 0\,.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation. Denn aus 1. folgt $\xi \sim \xi$, aus 2. folgt $\xi \sim \eta \Longrightarrow \eta \sim \xi$, und aus 3. folgt, daß $(\xi \sim \eta, \quad \eta \sim \zeta) \quad \Longrightarrow \quad \xi \sim \zeta$ gilt, wegen

$$d(\xi, \zeta) \leq d(\xi, \eta) + d(\eta, \zeta) = 0 .$$

Sei $\hat{X}$ die Menge der Äquivalenzklassen. Auf $\hat{X}$ definiere man eine Metrik $\hat{d}$ folgendermaßen. Sei $[\xi]$, $[\eta] \in \hat{X}$. Setze

$$\hat{d}([\xi],\, [\eta]) := d'(\xi, \eta) .$$

Diese Definition ist sinnvoll. Denn seien $[\xi] = [\xi_1], \quad [\eta] = [\eta_1]$. Dann folgt

$$\begin{aligned} d'(\xi_1, \eta_1) &\leq d'(\xi_1, \xi) + d'(\xi, \eta_1) = d'(\xi, \eta_1) \\ &\leq d'(\xi, \eta) + d'(\eta, \eta_1) = d'(\xi, \eta) . \end{aligned}$$

Ebenso folgt $d'(\xi, \eta) \leq d'(\xi_1, \eta_1)$, also ergibt sich $d'(\xi_1, \eta_1) = d'(\xi, \eta)$.

$\tilde{d}$ ist eine Metrik auf $\hat{X}$. Denn es gilt

1.) $\quad \hat{d}([\xi], [\eta]) \geq 0, \quad \hat{d}([\xi], [\xi]) = d'(\xi, \xi) = 0$, sowie

$$\hat{d}([\xi], [\eta]) = 0 \Longrightarrow d'(\xi, \eta) = 0 \Longrightarrow \xi \sim \eta \Longrightarrow [\xi] = [\eta] .$$

2.) $\quad \hat{d}([\xi],\, [\eta]) = d'(\xi, \eta) = d'(\eta, \xi) = \hat{d}([\eta], [\xi])$.

3.) $\quad \hat{d}([\xi], [\eta]) = d'(\xi, \eta) \leq d'(\xi, \zeta) + d'(\zeta, \eta) = \hat{d}([\xi], [\zeta]) + \hat{d}([\zeta], [\eta])$.

Also sind die drei Eigenschaften einer Metrik erfüllt, und der metrische Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ ist konstruiert.

II.) Ich konstruiere nun die Isometrie $A : X \to \hat{X}$. Für $x \in X$ setze $Ax := [\{x, x, x, \ldots\}]$. Die so definierte Abbildung A ist eine Isometrie, denn es gilt

$$\begin{aligned} \hat{d}(Ax, Ay) &= d'\Big(\{x, x, x, \ldots\}, \;\; \{y, y, y, \ldots\}\Big) \\ &= \lim_{n \to \infty} d(x, y) = d(x, y) . \end{aligned}$$

Weiter ist zu zeigen, daß $A(X)$ dicht in $\hat{X}$ ist. Dazu muß gezeigt werden, daß zu jedem $\hat{x} \in \hat{X}$ in jeder Umgebung von $\hat{x}$ ein Element aus $A(X)$ liegt. Sei $\hat{x} = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$. Da $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in X ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

für $n, m \geq k$.

$Ax_k = [\{x_k, x_k, x_k, \dots\}]$ ist dann das gesuchte Element. Denn es gilt

$$\hat{d}(\hat{x}, Ax_k) = d'\Big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\,,\ \ \{x_k, x_k\,, \dots\}\Big) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_k) \le \varepsilon\,.$$

III.) Als nächstes muß gezeigt werden, daß $\hat{X}$ vollständig ist. Sei $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$.

Zunächst konstruiere ich das Grenzelement. Zu jedem $\hat{x}_n$ existiert $y_n \in X$, so daß Ay_n in der $\frac{1}{n}$–Umgebung von $\hat{x}_n$ liegt. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine Cauchyfolge. Denn es gilt

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &= \hat{d}(Ay_n, Ay_m) \le \hat{d}(Ay_n, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) \\ &\quad + \hat{d}(\hat{x}_m, Ay_m) < \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) + \frac{1}{m} < \varepsilon\,, \end{aligned}$$

für $n, m \ge n_0$, wenn n_0 so gewählt ist, daß $\frac{2}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x_m}) < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt für $n, m \ge n_0$. Sei $\hat{y} = [\{y_n\}_{n=1}^{\infty}]$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{y}\,.$$

Denn sei $\varepsilon > 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{y}) &\le \hat{d}(\hat{x}_n, Ay_n) + \hat{d}(Ay_n, \hat{y}) < \frac{1}{n} + d'\Big(\{y_n, y_n, \dots, \}, \{y_k\}_{k=1}^{\infty}\Big) \\ &= \frac{1}{n} + \lim_{k\to\infty} d(y_n, y_k) < \varepsilon \end{aligned}$$

für n genügend groß, weil $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyfolge ist. Also ist $\hat{X}$ vollständig.

IV.) Es bleibt die Eindeutigkeit (bis auf Isometrie) von $\hat{X}$ zu beweisen. Sei $(\tilde{X}, \tilde{d})$ eine zweite vollständige Hülle von X und $\tilde{A} : X \to \tilde{X}$ die zugehörende Isometrie.
Dann ist $\tilde{A} \circ A^{-1} : A(X) \to \tilde{A}(X)$ eine Isometrie. Jede Isometrie ist gleichmäßig stetig, also gibt es eine eindeutige stetige Forsetzung $B : \hat{X} \to \tilde{X}$ von $\tilde{A} \circ A^{-1}$ auf ganz $\hat{X}$.

B ist surjektiv. Denn sei C die eindeutige stetige Fortsetzung von $A \circ \tilde{A}^{-1} : \tilde{A}(X) \to A(X)$. Dann ist $B \circ C : \tilde{X} \to \tilde{X}$ stetig, und

$$B \circ C|_{\tilde{A}(X)} = \tilde{A} \circ A^{-1}\ \ A \circ \tilde{A}^{-1} = I|_{\tilde{A}(X)}\,.$$

Also ist $B \circ C$ eine stetige Fortsetzung der Identität. Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt $B \circ C = I$, also $B(\hat{X}) = \tilde{X}$.

B ist eine Isometrie. Denn seien $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$. Dann gibt es Folgen $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\hat{y}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A(X)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}\,,\ \ \lim_{n\to\infty} \hat{y}_n = \hat{y}\,.$$

Also folgt

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}(B\hat{x}, B\hat{y}) &= \tilde{d}(\lim_{n\to\infty} B\hat{x}_n, \lim_{k\to\infty} B\hat{y}_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \tilde{d}(B\hat{x}_n, B\hat{y}_k) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} d(\hat{x}_n, \hat{y}_k) = d(\hat{x}, \hat{y}) .
\end{aligned}
$$

■

Definition: Sei X ein metrischer Raum. Sei $M \subseteq X$, und sei $\mathcal{U}$ ein System von Teilmengen von X mit

$$
M \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U .
$$

Dann heißt $\mathcal{U}$ Überdeckung von M . Besteht $\mathcal{U}$ nur aus offenen Mengen, dann heißt $\mathcal{U}$ offene Überdeckung. Ist $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ mit

$$
M \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}_1} U ,
$$

dann heißt $\mathcal{U}_1$ Teilüberdeckung aus $\mathcal{U}$ von M .

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $M \subseteq X$ heißt kompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung von M eine Teilüberdeckung aus endlich vielen Mengen gibt.

Beispiel: Sei X eine Menge und

$$
d(x, y) := \begin{cases} 0 , & x = y \\ 1 , & x \neq y \end{cases}
$$

die ausgeartete Metrik.

Dann gilt: $M \subseteq X$ ist kompakt, genau dann wenn M höchstens aus endlich vielen Elementen besteht. Denn für $x \in X$ ist $\{x\}$ offen, also ist $\{\{x\} \mid x \in M\}$ eine offene Überdeckung, die nur dann eine Teilüberdeckung aus endlich vielen Mengen enthält, wenn M selbst endlich ist.

Aus den de Morganschen Regeln folgt unmittelbar:

Satz: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Dann sind äquivalent:

(i) M ist kompakt.

(ii) Sei $\mathcal{A}$ ein System von abgeschlossenen Mengen von X mit $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{A} \cap M = \emptyset$. Dann gibt es endlich viele Mengen $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ mit

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap M = \emptyset \,.$$

Man nennt eine Menge $M \subseteq X$ beschränkt, wenn $x \in X$ existiert mit

$$\sup_{y \in M} d(x, y) < \infty \,.$$

Aus dem vorangehenden Beispiel sieht man, daß anders als im $\mathbb{R}^n$, in metrischen Räumen aus Abgeschlossenheit und Beschränktheit einer Menge **nicht** die Kompaktheit folgt. Denn wenn X mit der ausgearteten Metrik versehen wird, dann ist X selbst abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt, falls X unendlich viele Elemente enthält.

Lemma: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$ kompakt. Dann besitzt jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in M$ einen Häufungspunkt $x \in M$.

Beweis: Sei $S_m = \{x_n \mid n \geq m\}$. Nach Definition des Häufungspunktes einer Folge gilt: x ist Häufungspunkt von $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, genau dann wenn

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{S_m} \,.$$

Weil zu je endlich vielen $S_{m_1}, S_{m_2}, \dots, S_{m_k}$ für den Durchschnitt $S_{m_1} \cap S_{m_2} \cap \ldots \cap S_{m_k} \neq \emptyset$ gilt, und weil M kompakt ist, kann die Menge $\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{S_m} \cap M$ nicht leer sein. Jedes Element aus dieser Menge ist ein Häufungspunkt der Folge. ∎

Lemma: Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ und x Häufungspunkt von $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dann besitzt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine gegen x konvergente Teilfolge.

Beweis: klar.

Definition: (i) Ein metrischer Raum (X, d) heißt separabel, wenn eine abzählbare Teilmenge $M \subseteq X$ existiert mit $\overline{M} = X$.
(ii) Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) heißt folgenkompakt, wenn jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in M$ eine Teilfolge besitzt, die gegen ein Grenzelement $x \in M$ konvergiert.

Lemma: Jeder folgenkompakte metrische Raum ist separabel.

Beweis: X ist separabel, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge M_n gibt, so daß für alle $x \in X$ der Abstand $\operatorname{dist}(x, M_n) < \frac{1}{n}$ ist. Es sei nun angenommen, es gäbe eine Zahl

n, zu der eine solche endliche Menge M_n nicht existiert. Dann gibt es zu jeder endlichen Menge $\{x_1, \ldots, x_j\}$ stets x_{j+1} mit

$$d(x_{j+1}, x_i) \geq \frac{1}{n}$$

für alle $i = 1, \ldots, j$. Dann kann durch vollständige Induktion eine Folge $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ konstruiert werden mit $d(x_k, x_j) \geq \frac{1}{n}$ für alle $k, j \in \mathbb{N}$. Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen, im Widerspruch zur Folgenkompaktheit von X. ■

Satz: Eine Menge M ist kompakt, genau dann wenn sie folgenkompakt ist.

Beweis: 1.) Sei $M \subseteq X$ kompakt, und $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$. Dann besitzt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ einen Häufungspunkt $x \in M$, also eine gegen x konvergente Teilfolge.

2.) Sei M eine folgenkompakte Menge. Angenommen M sei nicht kompakt. Dann existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von M, die keine Teilüberdeckung aus endlich vielen Mengen enthält. Weil (M, d) ein folgenkompakter Raum ist, existieren $x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)} \in M$, so daß für alle $x \in M$ ein $x_i^{(1)}$ existiert mit $d(x, x_i^{(1)}) < 1$, also gilt

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_1} K_1(x_i^{(1)}),$$

mit $K_\varepsilon(z) = \{x \in M \mid d(x,z) \leq \varepsilon\}$. Hieraus folgt, daß für mindestens ein i zwischen 1 und m_1 die Menge $K_1(x_i^{(1)}) \cap M$ nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden kann. Ich setze $y_1 = x_i^{(1)}$ und $K(y_1) = K_1(y_1) \cap M$.
Als abgeschlossene Teilmenge der folgenkompakten Menge M ist $K(y_1)$ selbst folgenkompakt, also existieren $x_1^{(2)}, \ldots, x_{m_2}^{(2)} \in K(y_1)$ mit

$$K(y_1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_2} K_{\frac{1}{2}}(x_i^{(2)}).$$

Wähle wie oben $x_i^{(2)}$ aus, für das $K_{1/2} \cap K(y_1)$ nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden kann, und setze $y_2 = x_i^{(2)}$ sowie $K(y_2) = K_{1/2}(y_2) \cap K(y_1)$. Fahre fort und konstruiere $K(y_n) = K_{\frac{1}{n}}(y_n) \cap K(y_{n-1})$ mit

$$K(y_1) \supseteq K(y_2) \supseteq \ldots \supseteq K(y_n) \supseteq \ldots.$$

Nach Konstruktion gilt $y_m \in K(y_n) \subseteq K_{\frac{1}{n}}(y_n)$ für $m \geq n$. Also ist die Folge $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in M und hat einen Grenzwert $y \in M$, weil M folgenkompakt ist. Wegen $M \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ existiert eine offene Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $y \in U$. U enthält eine Kugel $K_{\frac{1}{m}}(y)$ mit hinreichend groß gewähltem m, also gilt für $n > 3m$

$$K(y_n) \subseteq K_{\frac{3}{n}}(y) \subseteq K_{\frac{1}{m}}(y) \subseteq U,$$

also kann $K(y_n)$ durch eine einzige Menge aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden, im Widerspruch zur Konstruktion von $K(y_n)$. Also muß M doch kompakt sein. ∎

Folgerung: Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig. (Die Umkehrung gilt natürlich nicht.)

Beweis: Sei (X, d) ein kompakter Raum und sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ eine Cauchyfolge. Dann hat $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge, also muß $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ selbst konvergent sein. ∎

Folgerung: Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen. Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt.

Wie üblich gilt:

Satz: Seien $(X, d), (Y, \delta)$ metrische Räume und sei $A : X \to Y$ stetig. Ist $M \subseteq X$ kompakt, dann ist $A(M) \subseteq Y$ kompakt.

Folgerung: Jede reellwertige stetige Abbildung nimmt auf einer kompakten Teilmenge eines metrischen Raumes das Maximum und das Minimum an.

Folgerung: Eine stetige Abbildung eines kompakten metrischen Raumes (X, d) in einen metrischen Raum (Y, δ) bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab.

Folgerung: Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und (Y, δ) ein metrischer Raum. Dann ist jede bijektive stetige Abbildung $A : X \to Y$ ein Homöomorphismus.

2 c.) Banachscher Fixpunktsatz

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $T : X \to X$ heißt kontrahierend, wenn es eine Zahl θ mit $0 \leq \theta < 1$ gibt, so daß für alle $x, y \in X$ gilt

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) .$$

Folgerung: Eine kontrahierende Abbildung ist gleichmäßig stetig.

Banachscher Fixpunktsatz: Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und sei $T : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein $x \in X$ mit

$$Tx = x .$$

Für beliebiges $x_0 \in X$ definiere man eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ durch

$$x_1 = Tx_0$$

$$x_{n+1} \;=\; Tx_n \,.$$

Dann gilt

$$d(x, x_n) \le \frac{\theta^n}{1-\theta}\, d(x_1, x_0)\,,$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\,.$$

Beweis: 1.) Zuerst zeigt man, daß T höchstens einen Fixpunkt hat. Seien $x, y \in X$ Fixpunkte, d.h. es gelte $x = Tx\,,\quad y = Ty\,.$ Dann folgt

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \le \theta d(x, y)\,.$$

Wegen $0 \le \theta < 1$ folgt hieraus $d(x, y) = 0\,,$ also $x = y\,.$

2.) Als nächstes wird bewiesen, daß ein Fixpunkt existiert. Für beliebiges $x_0 \in X$ sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ die im Satz definierte Folge. Es folgt für $j \ge 1$

$$d(x_{j+1}, x_j) = d(Tx_j, Tx_{j-1}) \le \theta d(x_j, x_{j-1})\,.$$

Die Dreiecksungleichung liefert

$$d(x_{k+\ell}, x_k) \le d(x_{k+\ell}, x_{k+\ell-1}) + d(x_{k+\ell-1}, x_{k+\ell-2}) + \ldots + d(x_{k+1}, x_k)\,,$$

also

$$\begin{aligned} d(x_{k+\ell}, x_k) &\le (\theta^{\ell-1} + \theta^{\ell-2} + \ldots + \theta + 1) d(x_{k+1}, x_k) \\ &\le \frac{1-\theta^\ell}{1-\theta}\,\theta^k d(x_1, x_0) \qquad\qquad (*) \\ &\le \frac{\theta^k}{1-\theta}\, d(x_1, x_0)\,. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} \theta^k = 0$ ist also $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist, existiert der Grenzwert x :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\,.$$

Aus der Stetigkeit von T folgt nun

$$T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x\,,$$

also ist x der eindeutig bestimmte Fixpunkt.

Da d stetig ist, folgt aus $(*)$

$$\begin{aligned} d(x, x_k) &= d(\lim_{\ell\to\infty} x_{k+\ell}, x_k) = \lim_{\ell\to\infty} d(x_{k+\ell}, x_k) \\ &\le \lim_{\ell\to\infty} \frac{\theta^k}{1-\theta} d(x_1, x_0) = \frac{\theta^k}{1-\theta} d(x_1, x_0)\,. \end{aligned}$$

■

Beispiel: 1.) Berechne die Lösung $z > 0$ von

$$e^{-z} = z\,.$$

Sei $X = \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, \frac{1}{e} \le x \le 1\}$, $d(x,y) = |x-y|$. Mit dieser Metrik ist X ein vollständiger metrischer Raum. Definiere $T : X \to X$ durch

$$Tx := e^{-x}\,.$$

T ist kontrahierend. Denn aus dem Mittelwertsatz folgt für $x, y \in X$ und x^* zwischen x und y

$$\begin{aligned} &d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| = |e^{-x} - e^{-y}| \\ &= \quad |-e^{-x^*}(x-y)| = e^{-x^*}|x-y| \le \theta |x-y|\,, \end{aligned}$$

mit

$$\theta = \max\nolimits_{\frac{1}{e} \le x^* \le 1} e^{-x^*} = e^{-e^{-1}} < 1\,.$$

Also gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung z der Gleichung $e^{-z} = z$, und für die durch

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_{n+1} &= e^{-x_n} \end{aligned}$$

definierte Folge gilt

$$d(x_n, z) \le \frac{\theta^n}{1-\theta} |e^{-1} - 1| = \frac{e^{-n\frac{1}{e}}}{1 - e^{-\frac{1}{e}}} \Big(1 - \frac{1}{e}\Big)$$

also

$$z = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{e^{-e^{-e^{-\cdots^{e^{-1}}}}}}_{n \text{ mal } e}\,.$$

2.) Sei $X = C([0,1], \mathbb{R})$, mit der Metrik

$$d(f,g) := \sup\nolimits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|\,.$$

Dies ist ein vollständiger metrischer Raum. Sei $h \in X$. Existiert eine Funktion $f \in X$, so daß für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$f(x) - \int_0^1 (x-y)f(y)dy = h(x) \ ? \tag{$*$}$$

Definiere eine Abbildung $T : X \to X$ durch

$$(Tf)(x) := h(x) + \int_0^1 (x-y)f(y)dy\,.$$

T ist kontrahierend, denn

$$\begin{aligned}
d(Tf,Tg) &= \sup\nolimits_{x\in[0,1]} |(Tf)(x) - (Tg)(x)| \\
&= \sup\nolimits_{0\le x\le 1} \Big|\int_0^1 (x-y)f(y)dy - \int_0^1 (x-y)g(y)dy\Big| \\
&\le \sup\nolimits_{0\le x\le 1} \int_0^1 |x-y|\,|f(y)-g(y)|dy \\
&\le \sup\nolimits_{0\le x\le 1} \int_0^1 |x-y|dy\ d(f,g) \\
&= \sup\nolimits_{0\le x\le 1} \Big(\int_0^x (x-y)dy + \int_x^1 (y-x)dy\Big) d(f,g) \\
&= \sup\nolimits_{0\le x\le 1} \Big[-\frac{1}{2}(y-x)^2\Big|_{y=0}^{y=x} + \frac{1}{2}(y-x)^2\Big|_{y=x}^{y=1}\Big] d(f,g) \\
&= \frac{1}{2}\sup\nolimits_{0\le x\le 1}\Big(x^2 + (1-x)^2\Big) d(f,g) = \frac{1}{2}\, d(f,g)\,.
\end{aligned}$$

Also existiert eine eindeutig bestimmte Lösung von $Tf = f$, also der Gleichung $(*)$. Definiert man die Funktion $f_0 \in X$ durch $f_0 = h$, so folgt

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n\,,$$

wobei

$$f_n = T^n h = \sum_{m=0}^{n} T_0^m h\,,$$

sei mit

$$(T_0\, g)(x) = \int_0^1 (x-y)g(y)dy\,,$$

also

$$Tg = h + T_0 g\,.$$

Beispiel: Für $h \equiv 0$ ist $f \equiv 0$ die einzige Lösung. Also gibt es außer der Null keine stetige Funktion mit

$$\int_0^1 (x-y)f(y)dy = f(x)$$

für alle $x \in [0,1]$.

3 Der Existenz– und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf

In diesem Kapitel wird die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems bewiesen. Im ersten Schritt führt man hierzu die Lösung des Anfangswertproblems auf die Lösung einer Integralgleichung zurück:

Definition: Sei I ein Intervall. Der Raum $L_1(I, \mathbb{R}^m)$ besteht aus allen Funktionen $h = (h_1, \ldots, h_m) : I \to \mathbb{R}^m$, für die jede Komponente h_i zum Raum $L_1(I)$ gehört. Für $a, b \in I$ setzt man

$$\int_a^b h(t)dt := \Big(\int_a^b h_1(t)dt, \ldots, \int_a^b h_m(t)dt \Big) \in \mathbb{R}^m .$$

Satz: Es sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}^m$ sei eine stetige Funktion, $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ seien Punkte mit $(t_0, y_0) \in D$. Dann gilt: Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

in I, wenn y stetig ist, der Graph von y in D enthalten ist, und wenn

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f\big(\tau, y(\tau)\big) d\tau \tag{$*$}$$

gilt für alle $t \in I$.

Beweis: y sei Lösung des Anfangswertproblems zu $y' = f(t, y)$. Dann ist y differenzierbar, also stetig, und der Graph von y ist in D enthalten. Durch Integration folgt wegen $y(t_0) = y_0$, daß

$$y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f\big(\tau, y(\tau)\big) d\tau .$$

Also ist y eine Lösung von $(*)$.
Sei umgekehrt y eine stetige Lösung von $(*)$. Da f stetig ist, ist $\tau \mapsto f(\tau, y(\tau))$ stetig. Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung ist also die rechte Seite von $(*)$ eine differenzierbare Funktion von t, also auch die auf der linken Seite stehende Funktion y. Durch Differenzieren von $(*)$ folgt nun, daß y eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

∎

Damit ist gezeigt, daß die Lösung des Anfangswertproblem zur Lösung einer Integralgleichung äquivalent ist. Mit diesem Resultat kann folgender lokaler Existenz– und Eindeutigkeitssatz bewiesen werden:

Satz über lokale Existenz und Eindeutigkeit: Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und sei $(t,x) \mapsto f(t,x) : D \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung, die bezüglich x Lipschitz stetig ist. Das heißt, zu jeder kompakten Menge $K \subseteq D$ existiere eine Konstante $L_K > 0$ mit

$$|f(t,x) - f(t,z)| \leq L_K |x - z|$$

für alle $(t,x),(t,z) \in K$.

(i) Dann gibt es zu jeder kompakten Menge $K \subseteq D$ eine Zahl $\delta > 0$, so daß für alle $(t_0, y_0) \in K$ im Intervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ eine Lösung $y : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^m$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= f\big(t, y(t)\big) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

existiert.
(ii) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\tilde{y} : I \to \mathbb{R}^m$ eine andere Lösung dieses Anfangswertproblems, dann gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ von t_0, so daß y und $\tilde{y}$ auf $U \cap I$ übereinstimmen.

Bemerkung: Die Länge des Intervalls $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ in dem eine Lösung existiert, kann also gleich gewählt werden für alle Anfangsdaten (t_0, y_0), die in einer kompakten Teilmengen von D variieren. Diese Gleichmäßigkeitsbedingung wird im später folgenden Fortsetzungssatz benötigt.

Beweis: Im folgenden Beweis sei $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x - x_0| \leq r\}$ die abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius r.

(i) Es sei K eine kompakte Teilmenge von D. Zum Beweis von (i) genügt es zu zeigen, daß eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $(t_0, y_0) \in K$ die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, y(\tau)\big) d\tau \qquad (*)$$

im Intervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ eine stetige Lösung $y : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^m$ besitzt. Dazu verwendet man den Banachschen Fixpunktsatz.

Zunächst beachte man, daß eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit

$$K_\varepsilon = \Big\{(t,x) \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \operatorname{dist}\big[(t,x), K\big] \leq \varepsilon\Big\} \subseteq D$$

existiert. K_ε ist eine kompakte Teilmenge, die zu jedem $(t_0, y_0) \in K$ die abgeschlossene zylinderförmige Umgebung

$$Z_{\delta,\varepsilon/2}(t_0, y_0) = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B_{\varepsilon/2}(y_0)$$

von (t_0, y_0) enthält, falls $0 \leq \delta \leq \varepsilon/2$ ist, weil für $(t, x) \in Z_{\delta,\varepsilon/2}(t_0, y_0)$ die Ungleichung $\operatorname{dist}[(t, x), K] \leq (|t - t_0|^2 + |x - y_0|^2)^{1/2} \leq \varepsilon$ gilt. Es sei

$$X_\delta(t_0, y_0) = C\Big([t_0 - \delta, t_0 + \delta],\ B_{\varepsilon/2}(y_0)\Big)$$

die Menge aller stetigen Funktionen, deren Graph in $Z_{\delta,\varepsilon/2}(t_0, y_0)$ enthalten ist. Zur Abkürzung schreibe ich $X = X_\delta(t_0, y_0)$. Auf X werde eine Metrik definiert durch

$$d(h, g) = \sup_{|t - t_0| \leq \delta} |h(t) - g(t)| = \|h - g\|_\infty .$$

Eine Cauchyfolge $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ bezüglich dieser Metrik ist gleichmäßig konvergent, und somit ist die Grenzfunktion stetig und gehört zum Raum X; also ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum.

Ich definiere nun einen Operator $T : X \to X$ durch

$$(Th)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f\big(\tau, h(\tau)\big) d\tau, \quad t_0 - \delta \leq t \leq t_0 + \delta .$$

Für diesen Operator gilt $Ty = y$ genau dann, wenn $y \in X$ eine Lösung der Integralgleichung $(*)$ ist, also stimmt die Menge der stetigen Lösungen von $(*)$, deren Graph im Zylinder $Z_{\delta,\varepsilon/2}(t_0, y_0)$ enthalten ist, mit der Menge der Fixpunkte von T überein. Zum Beweis der Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems genügt es daher, mit dem Banachschen Fixpunktsatz zu zeigen, daß T einen Fixpunkt hat.

Zunächst zeige ich, daß, wie oben behauptet, für genügend kleines δ der Operator T den Raum $X = X_\delta(t_0, y_0)$ in sich abbildet. Hierzu sei $h \in X$. Die Funktion h ist stetig und ihr Graph ist in $Z_{\delta,\varepsilon/2}(t_0, y_0) \subseteq K_\varepsilon$ enthalten, gehört also zum Definitionsbereich D von f. Also ist $\tau \mapsto f(\tau, h(\tau))$ auf $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ definiert und stetig, weil h und f stetig sind. Somit ist Th stetig, und es gilt

$$\begin{aligned} |(Th)(t) - y_0| &= \Big| \int_{t_0}^t f(\tau, h(\tau)) d\tau \Big| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(\tau, h(\tau))| d\tau \leq \int_{t_0}^t \sup_{(\sigma,x) \in K_\varepsilon} |f(\sigma, x)| d\tau \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{(\sigma,x)\in K_\varepsilon} |f(\sigma,x)|\,\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

falls $\delta \leq \delta_0 = \frac{\varepsilon}{2}\min\{1,\, (\sup\limits_{K_\varepsilon}|f(\sigma,x)|)^{-1}\}$ ist. Für diese δ folgt also $T : X \to X$.

Zum Beweis, daß T für genügend kleines δ kontrahierend ist, seien $h, g \in X$. Weil der Graph von h und g in K_ε enthalten ist, gilt dann mit der Lipschitzkonstanten L_{K_ε} zur Menge K_ε

$$\begin{aligned}
|(Th)(t) - (Tg)(t)| &= |\int_{t_0}^{t} \big(f(\tau, h(\tau)) - f(\tau, g(\tau))\big) d\tau| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, h(t)) - f(\tau, g(\tau))| d\tau \leq \int_{t_0}^{t} L_{K_\varepsilon} |h(\tau) - g(\tau)| d\tau \\
&\leq L_{K_\varepsilon} \int_{t_0}^{t} d(h,g)\, d\tau \leq d(h,g) L_{K_\varepsilon} \delta \leq \frac{1}{2}\, d(h,g)\,,
\end{aligned}$$

falls $\delta = \min\{\delta_0, \frac{1}{2}(L_{K_\varepsilon})^{-1}\}$ ist. Für dieses δ folgt somit $d(Th, Tg) \leq \frac{1}{2}\, d(h,g)$. Damit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, und somit besitzt T für alle $(t_0, y_0) \in K$ einen eindeutigen Fixpunkt y im Raum $X_\delta(t_0, y_0)$. Gleichzeitig ist damit gezeigt, daß die Integralgleichung $(*)$ genau eine stetige Lösung besitzt, deren Graph in $Z_{\delta,\varepsilon/2}(t_0, y_0)$ verläuft.

(ii) Zunächst beachte man, daß dieser Beweis genauso verläuft, wenn J ein beliebiges Teilintervall von $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ ist mit $t_0 \in J$ und man als metrischen Raum den Raum $C(J, B_{\varepsilon/2}(y_0))$ verwendet mit der Metrik $d(h,g) = \sup_{t\in J}|h(t) - g(t)|$. Also besitzt die Integralgleichung $(*)$ auch im Raum $C(J, B_{\varepsilon/2}(y_0))$ genau eine stetige Lösung, und diese Lösung stimmt mit der Einschränkung $y|_J$ auf J der oben erhaltenen Lösung $y \in X_\delta(t_0, y_0)$ überein, weil $y|_J$ in $C(J, B_{\varepsilon/2}(y_0))$ liegt und eine Lösung der Integralgleichung in J ist.

Sei nun I ein Intervall mit $t_0 \in I$ und $\tilde{y} : I \to \mathbb{R}^m$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Wegen $\tilde{y}(t_0) = y_0$ und weil $\tilde{y}$ stetig ist, gibt es eine Zahl δ' mit $0 < \delta' \leq \delta$, so daß $|\tilde{y}(t) - y_0| \leq \varepsilon/2$ ist für alle t aus dem Intervall $J = I \cap U$ mit $U = [t_0 - \delta', t_0 + \delta']$. Somit ist $\tilde{y}|_J \in C(J, B_{\varepsilon/2}(y_0))$. Weil $\tilde{y}|_J$ als Lösung des Anfangswertproblems außerdem eine Lösung der Integralgleichung $(*)$ auf J ist, muß folglich $\tilde{y}|_J$ mit $y|_J$ übereinstimmen. ∎

Eindeutigkeitssatz: Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion, die die im lokalen Existenzsatz angegebene Lipschitzbedingung erfüllt. Sei $(t_0, y_0) \in D$, seien $I,\ J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, die t_0 enthalten, und seien $y : I \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{y} : J \to \mathbb{R}^m$ Lösungen des Anfangswertproblems zu den Anfangsdaten (t_0, y_0). Dann stimmen y und $\tilde{y}$ auf $I \cap J$ überein.

Beweis: Angenommen, es gebe $t_1 \in I \cap J$ mit $y(t_1) \neq \tilde{y}(t_1)$ und es sei $t_1 > t_0$. Im Fall $t_1 < t_0$ verläuft der Beweis entsprechend.
Für die Menge

$$U = \{t \in I \cap J \mid y(t) = \tilde{y}(t)\}$$

ist dann t_1 eine obere Schranke. Weil U den Punkt t_0 enthält, ist U nicht leer und besitzt somit ein Supremum s. Weil $I \cap J$ ein Intervall ist, gehören alle Zahlen zwischen t_0 und t_1 zu $I \cap J$, also auch s, und weil y und $\tilde{y}$ stetig sind und s ein Häufungspunkt von U ist, gilt $y(s) = \tilde{y}(s)$, also ist s das Maximum von U und es gilt $s < t_1$. Mit $x_0 := y(s)$ sind somit y und $\tilde{y}$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t, x(t)) \\ x(s) &= x_0 \end{aligned}$$

im Intervall $[s, t_1]$, die mit Ausnahme des Punktes s in keinem Punkt des Intervalls übereinstimmen. Dies widerspricht dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz, weil eine Umgebung U von s existieren muß, so daß y und $\tilde{y}$ in $U \cap [s, t_1]$ übereinstimmen. ■

Im folgenden bezeichne ich mit $t \mapsto y(t; t_0, y_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t; t_0, y_0) &= f(t, y(t; t_0, y_0)) \\ y(t_0; t_0, y_0) &= y_0 \end{aligned}$$

zu den Anfangsdaten y_0.

Satz über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten (lokal): Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung, die die im lokalen Existenzsatz angegebene Lipschitzbedingung erfüllt.
Dann existiert zu jeder kompakten Menge $K \subseteq D$ eine Zahl $\delta' > 0$, so daß zu allen Anfangsdaten (t_0, y_0), $(t_0, \tilde{y}_0) \in K$ die Lösungen $t \mapsto y(t; t_0, y_0)$, $t \mapsto y(t; t_0, \tilde{y}_0)$ im Intervall $[t_0 - \delta', t_0 + \delta']$ existieren, und dort die Abschätzung

$$|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, \tilde{y}_0)| \leq 2|y_0 - \tilde{y}_0|$$

erfüllen.

Beweis: Es sei K eine kompakte Teilmenge von D. Nach dem lokalen Existenzsatz gibt es dann eine Zahl $\delta > 0$, so daß für alle $(t_0, y_0) \in K$ die Lösungen $t \mapsto y_0(t; t_0, y_0)$ im Intervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ existieren, wobei diese Lösungen sogar so konstruiert wurden, daß ihre Graphen alle in einer kompakten Menge $K_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \operatorname{dist}((x, t), K) \leq \varepsilon\} \subseteq D$ enthalten sind. Es sei L_{K_ε} die Lipschitzkonstante zu dieser Menge und $\delta' = \min\{\delta, \frac{1}{2}(L_{K_\varepsilon})^{-1}\}$.

Für alle (t_0, y_0), $(t_0, \tilde{y}_0) \in K$ folgt dann für die Lösungen $y(t) = y(t; t_0, y_0)$, $\tilde{y}(t) = y(t; t_0, \tilde{y}_0)$ wegen

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, y(\tau)\big) d\tau \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{y}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \tilde{y}(\tau)\big) d\tau\,, \end{aligned}$$

daß

$$\begin{aligned} d(y,\, \tilde{y})) &\leq |y_0 - \tilde{y}_0| + \sup_{|t-t_0|\leq\delta'} \Big|\int_{t_0}^{t} f\big(\tau, y(\tau)\big) - f\big(\tau, \tilde{y}(\tau)\big) d\tau\Big| \\ &\leq |y_0 - \tilde{y}_0| + \sup_{|t-t_0|\leq\delta'} \int_{t_0}^{t} L_{K_\varepsilon} |y(\tau) - \tilde{y}(\tau)|\, d\tau \\ &\leq |y_0 - \tilde{y}_0| + L_{K_\varepsilon} \sup_{|t-t_0|\leq\delta'} \int_{t_0}^{t} d(y, \tilde{y})\, d\tau \\ &\leq |y_0 - \tilde{y}_0| + d(y, \tilde{y})\, L_{K_\varepsilon}\, \delta' \leq |y_0 - \tilde{y}_0| + \frac{1}{2}\, d(y, \tilde{y})\,, \end{aligned}$$

also

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq d(y, \tilde{y}) \leq 2|y_0 - \tilde{y}_0|\,.$$

■

Definition: Ist I ein Intervall mit $t_0 \in I$ und gibt es eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

in I, dann nenne ich I ein Existenzintervall zu diesem Anfangswertproblem. Die Vereinigungsmenge aller Existenzintervalle

$$I_\infty = \bigcup I$$

nenne ich maximales Existenzintervall.

I_∞ ist selbst wieder ein Existenzintervall. Denn ist y_I die Lösung auf dem Existenzintervall I, dann erhält man eine Lösung $y : I_\infty \to \mathbb{R}^m$ des Anfangswertproblems auf I_∞ durch die Definition

$$y\big|_I = y_I\,.$$

Diese Definition ist sinnvoll, weil gemäß dem Eindeutigkeitssatz zwei Lösungen y_I und y_J zu den Existenzintervallen I und J auf dem Durchschnitt $I \cap J$ übereinstimmen.
Es gilt nun folgender globale Existenzsatz:

Satz von Picard-Lindelöf: Sei $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}^m$ sei eine stetige Funktion, für die zu jeder kompakten Teilmenge K von D eine Lipschitzkonstante L_K existiere mit

$$|f(t,x) - f(t,z)| \leq L_K|x-z|\,,$$

für alle (t,x), $(t,z) \in K$. Sei $(t_0, y_0) \in D$. Dann ist das maximale Existenzintervall I_∞ zum Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

eine offene Menge. Ist das Supremum oder das Infimum von I_∞ endlich und bezeichnet b das Supremum oder das Infimum, dann gilt für die Lösung y

$$\limsup_{t\to b}|y(t)| = \infty \quad \text{oder} \quad \liminf_{t\to b}\Big(\text{dist}\,[(t,y(t)),\,\partial D]\Big) = 0\,.$$

Bemerkung: Die letzten zwei Bedingungen bedeuten, daß die lokale Lösung solange fortgesetzt werden kann, bis die Werte der Lösung unbeschränkt werden, oder bis der Graph der Lösung den Rand des Definitionsbereichs D von f erreicht.

Beweis: Ich nehme an, daß I_∞ ein endliches Supremum besitzt. Für das Infimum verläuft der Beweis genauso. Zunächst zeige ich, daß b nicht zu I_∞ gehört.
Wäre $b \in I_\infty$, dann würde die Lösung $y : I_\infty \to \mathbb{R}^m$ des Anfangswertproblems im Punkt b definiert sein, also wäre $(b, y(b)) \in D$. Folglich könnte $y(b)$ als neuer Anfangswert zur Zeit $t = b$ gewählt werden und die Lösung auf ein größeres Intervall fortgesetzt werden. Denn nach dem lokalen Existenzsatz existierte eine Zahl $\delta > 0$ und eine differenzierbare Funktion $\tilde{y} : [b-\delta, b+\delta] \to \mathbb{R}^m$ mit $\tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t))$ für $b - \delta \leq t \leq b + \delta$ und mit $\tilde{y}(b) = y(b)$. Hieraus folgte auch

$$y'(b) = f(b, y(b)) = f(b, \tilde{y}(b)) = \tilde{y}'(b)\,,$$

also stimmte die linksseitige Ableitung

$$\frac{d}{dt}y(b-) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{y(b+t) - y(b)}{t}$$

mit der Ableitung von $\tilde{y}$ im Punkt b überein, folglich würde durch

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} y(t), & a \le t \le b \\ \tilde{y}(t), & b \le t \le b + \delta \end{cases}$$

eine im Intervall $I_\infty \cup [b,\ b+\delta]$ differenzierbare Funktion definiert, die im ganzen Intervall die Differentialgleichung löste. Folglich wäre $\hat{y}$ eine Lösung des Anfangswertproblems auf diesem größeren Intervall, also könnte I_∞ nicht das maximale Existenzintervall sein. Somit kann b nicht zu I_∞ gehören.

Als nächstes nehme ich an, daß

$$\limsup_{t\to b} |y(t)| = C < \infty \quad \text{und} \quad \liminf_{t\to b} \Big(\operatorname{dist}\left[(t, y(t)),\ \partial D\right]\Big) = c > 0$$

gilt und leite daraus einen Widerspruch her. Nach Definition von lim sup und lim inf würde eine Zahl $\eta > 0$ mit $[b-\eta, b) \subseteq I_\infty$ existieren, so daß der Graph von $y|_{[b-\eta,b)}$ zum Durchschnitt K der abgeschlossenen Mengen

$$\{(\tau, x) \in D \mid \operatorname{dist}[(\tau, x),\ \partial D] \ge c/2\} \cap \{(\tau, x) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid b - \eta \le \tau \le b,\ |x| \le C + 1\}$$

gehörte. Die erste Menge ist eine Teilmenge von D, die zweite ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Als Durchschnitt einer abgeschlossenen und einer kompakten Menge wäre K folglich eine kompakte Teilmenge von D. Nach dem lokalen Existenzsatz würde somit eine Zahl $\delta > 0$ existieren, so daß für alle $t_1 \in [b-\eta, b)$ die Lösung von $\tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t))$ zum Anfangswert $\tilde{y}(t_1) = y(t_1)$ im Intervall $[t_1,\ t_1+\delta]$ existierte und eine Fortsetzung der in $[b-\eta,\ t_1]$ definierten Lösung y auf das Intervall $[b-\eta, t_1+\delta]$ wäre. Wählt man insbesondere $t_1 = b - \min(\eta, \delta/2)$, würde man eine Fortsetzung der Lösung auf das Intervall $[b-\eta, b+\delta/2]$ und damit auch auf das Intervall $I_\infty \cup [b, b+\delta/2]$ erhalten, im Widerspruch zur Annahme, daß I_∞ das maximale Existenzintervall sei. ■

Bemerkung: Aus dem Beweis des lokalen Existenzsatzes und aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt, daß man lokal (tatsächlich auch global) die Lösung y von

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

durch folgendes Iterationsverfahren erhalten kann:

Sei $y_1 : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $y_1(t) := y_0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $y_{n+1} : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, y_n(\tau)\big)\, d\tau\,.$$

Dann gilt mit einer Konstanten $\theta < 1$, die im lokalen Existenzsatz durch hinreichend kleine Wahl von δ den Wert $\theta = \frac{1}{2}$ hatte, daß

$$d(y, y_n) = \sup_{|t-t_0|\le\delta} |y(t) - y_n(t)| \le \frac{\theta^{n-1}}{1-\theta} d(y_2, y_1) \le \frac{1}{2^{n-2}} \sup_{|t-t_0|\le\delta} \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y_0) d\tau \right| .$$

Also konvergiert die Folge $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ im Intervall $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ gleichmäßig gegen die Lösung, und die obenstehende Ungleichung ist eine Abschätzung für den Fehler, den man macht, wenn man den Lösung durch die n–te Iterierte ersetzt.

Beispiel 1: Gesucht ist die Lösung von $y' = y$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$. In diesem Beispiel ist $f(t, y) = y$, und für den Definitionsbereich wähle ich $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Die Funktion f erfüllt die Lipschitzbedingung mit der Lipschitzkonstanten $L = 1$. Folglich existiert in einer Umgebung von $t_0 = 0$ eine eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems. Diese Lösung kann mit dem oben angegebenen Iterationsverfahren bestimmt werden:
Mit $y_1(t) := 1$ folgt

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= 1 + \int_0^t y_1(\tau)d\tau = 1 + \int_0^t d\tau = 1 + t \\
y_3(t) &= 1 + \int_0^t (1+\tau)d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2} \\
&\vdots \\
y_n(t) &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{t^n}{m!} ,
\end{aligned}$$

folglich

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{n-1} \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} = e^t .$$

Dies ist auch die globale Lösung. Das maximale Existenzintervall ist also $I_\infty = (-\infty, +\infty)$.

Beispiel 2: Gesucht ist die Lösung von $y' = y^2$ zur Anfangsbedingung $y(0) = m$. In diesem Fall ist $f(t, y) = y^2$. Für den Definitionsbereich von f wähle ich wieder $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Um nachzuprüfen, ob f die Lipschitzbedingung erfüllt, sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Weil K beschränkt ist, existiert eine Konstante $C > 0$ mit $K \subseteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le C\}$. Also gilt für alle $(t, x), (t, z) \in K$, daß

$$|f(t, x) - f(t, z)| = |x^2 - z^2| = |x - z|\,|x + z| \le 2C|x - z| ,$$

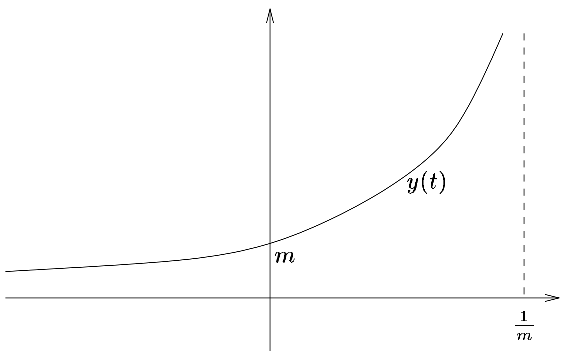
also erfüllt f in K eine Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $L_K = 2C$. Folglich existiert in einer Umgebung von $t_0 = 0$ eine eindeutig bestimmte Lösung von $y' = y^2$

zur Anfangsbedingung $y(0) = m$. Die Lösung kann mit der Methode der Trennung der Variablen bestimmt werden: Falls $m \neq 0$ ist, erhält man, daß

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{m} - t}$$

gilt, während $y \equiv 0$ die eindeutige Lösung für $m = 0$ ist. Das maximale Existenzintervall ist also

$$I_\infty = \begin{cases} (\frac{1}{m}, +\infty), & \text{falls } m < 0 \\ (-\infty, +\infty), & \text{falls } m = 0 \\ (-\infty, \frac{1}{m}), & \text{falls } m > 0\,. \end{cases}$$



Beispiel 3: Man kann beweisen, daß bereits dann eine Lösung des Anfangswertproblems existiert, wenn f stetig ist, ohne eine Lipschitzbedingung zu erfüllen. Jedoch ist dann die Eindeutigkeit der Lösung nicht mehr gewährleistet. Dies zeigt folgendes Beispiel: Gesucht ist eine Lösung von

$$\begin{aligned} y'(t) &= \sqrt{|y|} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

im Intervall $[0, \infty)$. In diesem Beispiel ist $f(t, y) = \sqrt{|y|}$. Diese Funktion ist stetig in $\mathbb{R}^2$, erfüllt aber in keiner kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$, die die Anfangsdaten $(t_0, y_0) = (0, 0)$ enthält, eine Lipschitzbedingung. Denn für jede Konstante $L > 0$ gilt

$$|f(t, y) - f(t, 0)| = \sqrt{|y|} = \frac{|y|}{\sqrt{|y|}} > L|y|\,,$$

falls $|y| < \frac{1}{L^2}$ ist. Tatsächlich ist die Lösung nicht eindeutig. Denn $y(t) \equiv 0$ und $y(t) = \frac{1}{4}\,t^2$ sind zwei verschiedene Lösungen.

Bemerkung: Es sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, die für alle (t, x), (t, y) auch die Verbindungsstrecke dieser Punkte enthält. Die Funktion $(t, y) \mapsto f(t, y) : D \to \mathbb{R}^m$

sei stetig und bezüglich y differenzierbar. Außerdem seien alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial y_i} f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann erfüllt f in jeder kompakten Teilmenge K von D eine Lipschitzbedingung. Denn es sei

$$K_c = \{\lambda(t,x) + (1-\lambda)(t,z) \mid 0 \le \lambda \le 1,\ (t,x),\ (t,z) \in K\}\,.$$

K_c enthält also außer den Punkten von K auch alle Punkte auf den Verbindungsstrecken der Punkte von K. Die Menge K_c ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt, und nach Voraussetzung in D enthalten. Auf Grund der Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist die Norm der linearen Abbildung $\|\frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\|$ auf der kompakten Menge K_c beschränkt. Hierbei bedeute $\frac{\partial}{\partial y} f(t,y)$ die $m \times m$–Matrix aller partiellen Ableitungen nach y. Mit

$$L_K = \max_{(t,y)\in K_c} \|\frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\|$$

gilt also nach dem Schrankensatz (siehe Skriptum Analysis II, Kapitel 5d), daß

$$|f(t,x) - f(t,z)| \le L_K |(t,x) - (t,z)| = L_K |x-z|\,,$$

weil die Verbindungsstrecke von (t,x) und (t,z) zu K_c gehört.

Satz über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten (global): Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ eine offene Menge und sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung, die die Lipschitzbedingung aus dem Satz von Picard–Lindelöf erfülle. Sei $(t_0, y_0) \in D$ und sei $I_\infty(y_0)$ das maximale Existenzintervall zum Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= f\big(t, y(t)\big) \\ y(t_0) &= y_0\,. \end{aligned}$$

Für jedes $t \in I_\infty(y_0)$ existiert dann eine Umgebung $U(t) \subseteq \mathbb{R}^m$ von y_0 und eine Zahl $A(t) > 0$ mit $t \in I_\infty(\tilde{y}_0)$ und mit

$$|y(t; t_0, \tilde{y}_0) - y(t; t_0, y_0)| \le A(t) |\tilde{y}_0 - y_0|$$

für alle $\tilde{y}_0 \in U(t)$.

Beweis: Es sei Λ die Menge aller $t \in I_\infty(y_0)$, für die eine Umgebung $U(t)$ und eine Konstante $A(t)$ wie in der Behauptung existieren. Λ ist nicht leer, weil natürlich $t_0 \in \Lambda$ gilt. Ich zeige, daß Λ offen und abgeschlossen ist in $I_\infty(y_0)$. Weil das Intervall $I_\infty(y_0)$ zusammenhängend ist, folgt dann $\Lambda = I_\infty(y_0)$.

Um zu zeigen, daß Λ offen ist, sei $\tau \in \Lambda$. Sei $z = y(\tau; t_0, y_0)$. Wegen $(\tau, z) \in D$ gibt es eine kompakte Kugel $B_\varepsilon(z) \subseteq \mathbb{R}^m$ um z mit Radius ε, so daß die kompakte Menge $\{\tau\} \times B_\varepsilon(z)$ in D enthalten ist. Nach dem lokalen Satz über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten existiert also $\delta' > 0$, so daß für alle $x \in B_\varepsilon(z)$ die Lösung $y(t; \tau, x)$ im Intervall $t \in [\tau - \delta', \tau + \delta']$ existiert und dort die Abschätzung

$$|y(t; \tau, x_1) - y(t; \tau, x_2)| \leq 2|x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in B_\varepsilon(z)$$

erfüllt.

Wegen $\tau \in \Lambda$ gilt

$$|y(\tau; t_0, \tilde{y}_0) - z| = |y(\tau; t_0, \tilde{y}_0) - y(\tau; t_0, y_0)| \leq A(\tau)|\tilde{y}_0 - y_0|$$

für alle $\tilde{y}_0$ aus der Umgebung $U(\tau)$ von y_0. Für alle $\tilde{y}_0$ aus der Umgebung $B_{\varepsilon/A(\tau)}(y_0) \cap U(\tau)$ von y_0 gehört somit $y(\tau; t_0, \tilde{y}_0)$ zu $B_\varepsilon(z)$, und somit folgt für alle $t \in [\tau - \delta', \tau + \delta']$, daß

$$\begin{aligned} |y(t; t_0, \tilde{y}_0) - y(t; t_0, y_0)| &= \Big| y\Big(t; \tau, y(\tau; t_0, \tilde{y}_0)\Big) - y\Big(t; \tau, y(\tau; t_0, y_0)\Big) \Big| \\ &\leq 2|y(\tau; t_0, \tilde{y}_0) - y(\tau; t_0, y_0)| \leq 2A(\tau)|\tilde{y}_0 - y_0|, \end{aligned}$$

also gehört die Umgebung $[\tau - \delta', \tau + \delta']$ von τ zu Λ, also ist Λ offen. Bei diesen Umformungen wurde benützt, daß $y(t; \tau, y(\tau; t_0, y_0))$ und $y(t; t_0, y_0)$ beides Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(\tau) &= y(\tau; t_0, y_0) \end{aligned}$$

sind, also auf Grund des Eindeutigkeitssatzes übereinstimmen. Dasselbe gilt für die Lösungen zum Anfangswert $\tilde{y}_0$.

Um zu zeigen, daß Λ abgeschlossen in $I_\infty(y_0)$ ist, sei $\tau \in I_\infty(y_0)$ ein Häufungspunkt von Λ. Setze $z = y(\tau; t_0, y_0)$. Wegen $(\tau, z) \in D$ gibt es eine kompakte Kugel $B_\varepsilon(\tau, z) \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ um (τ, z) mit Radius ε, die ganz zu D gehört. Wie oben folgt dann aus dem lokalen Satz über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten, daß $\delta' > 0$ existiert, so daß für alle $(\sigma, x) \in B_\varepsilon(\tau, z)$ die Lösung $y(t; \sigma, x)$ im Intervall $t \in [\sigma - \delta', \sigma + \delta']$ existiert und dort die Abschätzung

$$|y(t; \sigma, x_1) - y(t; \sigma, x_2)| \leq 2|x_1 - x_2|, \quad (\sigma, x_1), (\sigma, x_2) \in B_\varepsilon(\tau, z)$$

erfüllt.

Weil τ Häufungspunkt von Λ ist und weil $t \mapsto y(t; t_0, y_0)$ stetig ist, gibt es $t_1 \in \Lambda$ mit $|t_1 - \tau| \le \delta'$ und mit $y(t_1; t_0, y_0) \in B_{\varepsilon/2}(\tau, z)$. Wegen $t_1 \in \Lambda$ schließt man dann wie oben, daß mit einer hinreichend kleinen Kugel $B_\eta(y_0)$ die Punkte $(t_1, y(t_1; t_0, \tilde{y}_0))$ zu $B_\varepsilon(\tau, z)$ gehören für alle $\tilde{y}_0$ aus der Umgebung $B_\eta(y_0) \cap U(t_1)$ von y_0, und daß für diese $\tilde{y}_0$

$$\begin{aligned} |y(\tau; t_0, \tilde{y}_0) - y(\tau; t_0, y_0)| &= \Big| y\Big(\tau; t_1, y(t_1; t_0, \tilde{y}_0)\Big) - y\Big(\tau; t_1, y(t_1; t_0, y_0)\Big) \Big| \\ &\le 2|y(t_1; t_0, \tilde{y}_0) - y(t_1; t_0, y_0)| \le 2A(t_1)|\tilde{y}_0 - y_0| \end{aligned}$$

gilt. Dies bedeutet, daß τ zu Λ gehört mit $U(\tau) = B_\eta(y_0) \cap U(t_1)$ und mit $A(\tau) = 2A(t_1)$. Also ist Λ abgeschlossen. ■

4 Systeme linearer Differentialgleichungen

Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, a_0, \ldots, a_n : I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Gleichung

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = f(t)$$

heißt lineare Differentialgleichung n–ter Ordnung. Ist $f \equiv 0$, nennt man die Gleichung homogen.

Sei $F : I \to \mathbb{R}^m$ eine gegebene Funktion, und für jedes $t \in I$ sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1m}(t) \\ \vdots & & \\ a_{m1}(t) & \ldots & a_{mm}(t) \end{pmatrix}$$

eine $m \times m$–Matrix mit $a_{ij}(t) \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$y'(t) = A(t)y(t) + F(t)\,, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}$$

lineares System aus m Differentialgleichungen erster Ordnung. Das System heißt homogen, wenn $F \equiv 0$ gilt.

Ausgeschrieben lautet das System

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}(t)y_1(t) + \ldots + a_{1m}(t)y_m(t) + F_1(t) \\ &\vdots \\ y_m'(t) &= a_{m1}(t)y_1(t) + \ldots + a_{mm}(t)y(t) + F_m(t)\,. \end{aligned}$$

Der Kürze halber schreibe ich dieses System häufig in der Form

$$y' = A(t)y + F(t)$$

und lasse das Argument von y weg. Weil der Raum der $m \times m$–Matrizen mit $\mathbb{R}^{m \cdot m}$ identifiziert werden kann, bezeichne ich diesen Raum mit $\mathbb{R}^{m \cdot m}$.

Satz: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $t_0 \in I$. Die Funktionen $A : I \to \mathbb{R}^{m \cdot m}$, und $F : I \to \mathbb{R}^m$ seien stetig. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = A(t)y + F(t)$$

$$y(t_0) \quad = \quad y_0$$

zu beliebigem $y_0 \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutig bestimmte Lösung $t \mapsto y(t, y_0)$ in I . Für jedes $t \in I$ existiert eine Konstante $M(t)$ mit

$$|y(t, y_0) - y(t, \tilde{y}_0)| \leq M(t)|y_0 - \tilde{y}_0| \,.$$

Beweis: Zunächst wird gezeigt, daß für jedes kompakte Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ die stetige Funktion $f : D = J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$,

$$f(t, y) := A(t)y + F(t)$$

eine Lipschitzbedingung erfüllt. Hierzu sei $L = \sup\limits_{t \in J} \|A(t)\|$. Dann gilt für $x, z \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, z)| &= |A(t)x - A(t)z| \\ = \quad &|A(t)(x - z)| \leq \|A(t)\| \, |x - z| \leq L|x - z| \,. \end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard – Lindelöf erfüllt, und das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) = A(t)y(t) + F(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

besitzt eine maximale Lösung $y : I_\infty \to \mathbb{R}^m$. Um zu zeigen, daß das maximale Existenzintervall I_∞ mit I übereinstimmt, genügt es nach dem Satz von Picard – Lindelöf zu zeigen, daß eine stetige Funktion $S : I \to \mathbb{R}_0^+$ existiert mit

$$|y(t)|^2 \leq S(t) \tag{$*$}$$

für alle $t \in I_\infty$. Denn wenn das Supremum oder das Infimum von I_∞ endlich ist und b das endliche Supremum oder Infimum ist, muß $\limsup_{t \to b} |y(t)| = \infty$ gelten, was wegen $(*)$ nur sein kann, wenn b mit dem Supremum oder Infimum von I übereinstimmt.

Um $(*)$ zu beweisen, beachte man, daß wegen der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung für alle $t \in I_\infty$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} |y(t)|^2 = \frac{d}{dt} \big(y(t) \cdot y(t)\big) = 2y(t) \cdot y'(t) \\ &\quad = 2y(t) \cdot \big(A(t)y(t) + F(t)\big) \leq 2|y(t)| \big(|A(t)y(t)| + |F(t)|\big) \\ &\quad \leq 2|y(t)| \, \|A(t)\| \, |y(t)| + 2|y(t)| \, |F(t)| \leq \big(2\|A(t)\| + 1\big) \, |y(t)|^2 + |F(t)|^2 \,, \end{aligned}$$

gilt, wobei im letzten Schritt die Abschätzung

$$2|y(t)|\,|F(t)| \le |y(t)|^2 + |F(t)|^2$$

gebraucht wurde, die aus

$$0 \le (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

folgt. Somit resultiert mit $V(t) = e^{-\int_{t_0}^{t}(2\|A(\tau)\|+1)d\tau}$ wegen

$$V'(t) = -\Big(2\|A(t)\| + 1\Big)V(t)\,,$$

daß

$$\frac{d}{dt}\Big(V(t)|y(t)|^2\Big) = V(t)\frac{d}{dt}|y(t)|^2 - V(t)\Big(2\|A(t)\|+1\Big)|y(t)|^2 \le V(t)F(t)$$

gilt. Integration dieser Ungleichung liefert

$$|y(t)|^2 \le V(t)^{-1}|y_0|^2 + V(t)^{-1}\int_{t_0}^{t} V(\tau)F(\tau)d\tau =: S(t) \qquad (**)$$

mit $V(t)^{-1} = e^{\int_{t_0}^{t}(2\|A(\tau)\|+1)d\tau}$. Dies beweist $(*)$, also existiert die Lösung in ganz I.

Um zu beweisen, daß die Ungleichung für die Differenz der Lösungen gültig ist, beachte man, daß die Funktion $t \mapsto x(t) = y(t,y_0) - y(t,\tilde{y}_0)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) \\ x(t_0) &= y_0 - \tilde{y}_0 \end{aligned}$$

löst. Die Ungleichung $(**)$, angewandt auf x, liefert also

$$|y(t,y_0) - y(t,\tilde{y}_0)| \le M(t)|y_0 - \tilde{y}_0|\,,$$

mit $M(t) = e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(2\|A(\tau)\|+1)d\tau}$ ∎

Sei $z' = B(t)z + F(t)$ ein komplexes System von m Differentialgleichungen mit $z(t) = x(t)+iy(t)$, $B(t) = C(t)+iD(t)$, $F(t) = G(t)+iH(t)$, wobei $x(t), y(t), G(t), H(t) \in \mathbb{R}^m$ und $C(t), D(t) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ seien. Durch Zerlegung in Real– und Imaginärteil erhält man

$$\begin{aligned} x' &= C(t)x - D(t)y + G(t) \\ y' &= C(t)y + D(t)x + H(t)\,. \end{aligned}$$

Dies ist ein System von $2m$ Gleichungen, das sich als reelles System in der Form

$$u' = A(t)u + J(t) \tag{$*$}$$

schreiben läßt mit

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}.$$

Es komplexes System m–ter Ordnung ist also äquivalent mit einem reellen System $2m$–ter Ordnung von der speziellen Gestalt $(*)$, und somit gelten entsprechende Existenz– und Eindeutigkeitssätze.

Es werden nun homogene lineare Systeme

$$y' = A(t)y$$

betrachtet.

Satz: Sei I ein Intervall und sei $A : I \to \mathbb{R}^{m \cdot m}$ $(A : I \to \mathbb{C}^{m \cdot m})$ eine stetige reellwertige (komplexwertige) Funktion. Dann bilden die reellen (komplexen) Lösungen von

$$y' = A(t)y$$

einen m–dimensionalen reellen (komplexen) linearen Vektorraum.

Für festes $t_0 \in I$ sei $t \mapsto y(t, y_0)$ die Lösung mit $y(t_0, y_0) = y_0$. Dann wird durch

$$y_0 \mapsto y(\cdot, y_0)$$

ein (linearer) Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^m$ (bzw. $\mathbb{C}^m$) und dem Vektorraum der Lösungen definiert. Folglich hat dieser Vektorraum auch die Dimension m.

Beweis: Der Raum der Lösungen ist ein linearer Raum. Denn seien y_1, y_2 Lösungen von $y' = A(t)y$, seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (bzw. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$). Dann folgt

$$(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)' = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' = \alpha_1 A(t) y_1 + \alpha_2 A(t) y_2 = A(t)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2),$$

also ist auch $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ eine Lösung.

Die Abbildung $y_0 \mapsto y(\cdot, y_0)$ ist linear. Denn es gilt natürlich

$$y(\cdot, \alpha_1 y_0 + \alpha_2 \tilde{y}_0) = \alpha_1 y(\cdot, y_0) + \alpha_2 y(\cdot, \tilde{y}_0),$$

weil die rechte Seite Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(t)y$$

$$y(t_0) \quad = \quad \alpha_1 y_0 + \alpha_2 \tilde{y}_0$$

ist, und die Lösung eindeutig bestimmt ist. Offensichtlich ist die Abbildung auch injektiv. Hieraus folgt die Behauptung des Satzes. ■

Folgerung: (i) eine Linearkombination

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_k y_k$$

von Lösungen $y_1, \ldots, y_k$ des Systems $y' = A(t)y$ stellt wieder eine Lösung dar.

(ii) Die eindeutige Lösung zum Anfangswert $y_0 = 0$ ist $y \equiv 0$.

Definition: Sei I ein Intervall. Die Funktionen $y_1, \ldots, y_k : I \to \mathbb{R}^m$ heißen linear abhängig, wenn Konstanten $c_1, \ldots, c_k$ existieren, die nicht alle gleich Null sind, mit

$$c_1 y_1(t) + \ldots + c_k y_k(t) = 0$$

für alle $t \in I$. Andernfalls heißen die Lösungen linear unabhängig.

Folgerung: Das System $y' = A(t)y$ aus m Gleichungen besitzt m linear unabhängige Lösungen. Ist $k > m$, dann sind die Lösungen $y_1, \ldots, y_k$ linear abhängig. Sind die $y_1, \ldots, y_m$ linear unabhängig, kann jede Lösung y von $y' = A(t)y$ in der Form

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \ldots + c_m y_m(t)$$

dargestellt werden mit geeigneten Konstanten $c_1, \ldots, c_m$.

Definition: Ein System von m linear unabhängigen Lösungen eines homogenen Gleichungssystems $y' = Ay$ aus m Gleichungen heißt Fundamentalsystem.

Reduktion der Anzahl der Gleichungen eines linearen Systems: Sei $y' = A(t)y$ ein lineares System aus m Gleichungen. Ist eine Lösung dieses Systems bekannt, die nicht identisch verschwindet, kann man hiermit das System auf ein System mit $m-1$ Gleichungen zurückführen. Um dies zu zeigen, nehme ich an, daß $x \not\equiv 0$ eine Lösung sei. Dann gilt $x(t) \neq 0$ für alle t aus dem Definitionsberich I. Denn würde $t_1 \in I$ existieren mit $x(t_1) = 0$, dann würde x Lösung des Anfangswertproblems $x' = A(t)x, \ x(t_1) = 0$ sein, also im Widerspruch zur Annahme doch mit der eindeutigen Lösung $x \equiv 0$ dieses Problems übereinstimmen.
Wähle $t_0 \in I$. Dann ist mindestens eine Komponente von $x(t_0)$ von Null verschieden. O.B.d.A. sei dies $x_1(t_0)$. Wegen der Stetigkeit von x_1 ist $x_1(t) \neq 0$ für alle t aus einer Umgebung U von t_0. In dieser Umgebung versucht man eine weitere Lösung in der Form

$$y(t) = \varphi(t)x(t) + z(t)$$

zu erhalten, mit einer geeigneten Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ und mit einer Funktion $z : U \to \mathbb{R}^m$ der Form

$$z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} .$$

Um φ und z zu bestimmen, setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein. Es gilt

$$y' = \varphi' x + \varphi x' + z' = \varphi A x + \varphi' x + z' ,$$

also ist y Lösung von $y' = Ay$, genau dann wenn

$$\varphi' x + z' = Az ,$$

also

$$z' = A(t)z - \varphi'(t)x(t)$$

ist. Für die erste Komponente bedeutet dies

$$\sum_{j=2}^{m} a_{1j}(t) z_j = \varphi'(t) x_1(t) ,$$

für die anderen Komponenten

$$z_i' = \sum_{j=2}^{m} a_{ij}(t) z_j(t) - \varphi'(t) x_i(t) , \quad 2 \leq i \leq m .$$

Hieraus folgt

$$\varphi'(t) = \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{x_1(t)} a_{1j}(t) z_j \tag{$*$}$$

und

$$z_i' = \sum_{j=2}^{m} \Big[a_{ij}(t) - \frac{x_i(t)}{x_1(t)} a_{1j}(t) \Big] z_j , \quad 2 \leq i \leq m .$$

Mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{22} - \dfrac{x_2}{x_1} a_{12} & \dots & a_{2m} - \dfrac{x_2}{x_1} a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m2} - \dfrac{x_m}{x_1} a_{12} & \dots & a_{mm} - \dfrac{x_m}{x_1} a_{1m} \end{pmatrix} , \quad \tilde{z} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

kann die letzte Gleichung auch in der Form

$$\tilde{z}' = \tilde{A}\tilde{z}$$

geschrieben werden. Dies ist ein homogenes System und besitzt $m-1$ linear unabhängige Lösungen $\tilde{z}^{(1)}, \dots, \tilde{z}^{(m-1)}$.

Aus $(*)$ kann zu jedem $z^{(i)} = (0, \tilde{z}^{(i)})$ ein $\varphi^{(i)}$ und somit ein

$$y^{(i)} = \varphi^{(i)}x + z^{(i)} \tag{$**$}$$

berechnet werden. Dann ist

$$x, y^{(1)}, \dots, y^{(m-1)}$$

ein Fundamentalsystem zu $y' = Ay$.

Denn seien $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ Konstanten mit

$$\alpha x + \alpha_1 y^{(1)} + \dots + \alpha_{m-1} y^{(m-1)} = 0\,. \tag{$+$}$$

Da die erste Komponente von $z^{(i)}$ verschwindet, folgt hieraus und aus $(**)$, daß

$$\alpha + \alpha_1 \varphi^{(1)} + \dots + \alpha_{m-1}\varphi^{(m-1)} = 0\,,$$

somit, nach Multiplikation mit x und Subtraktion von $(+)$,

$$\alpha_1\Big(y^{(1)} - \varphi^{(1)}x\Big) + \dots + \alpha_{m-1}\Big(y^{(m-1)} - \varphi^{(m-1)}x\Big) = 0\,,$$

folglich

$$\alpha_1 z^{(1)} + \dots + \alpha_{m-1} z^{(m-1)} = 0\,.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $z^{(i)}$ folgt hieraus $\alpha_1 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$, also auch $\alpha = 0$. Folgich sind die Lösungen $x, y^{(1)}, \dots, y^{(m-1)}$ linear unabhängig.

Beispiel: Eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{t}\,y_1 - y_2 \\ y_2' &= \frac{1}{t^2}\,y_1 + \frac{2}{t}\,y_2 \end{aligned}$$

ist

$$x(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}.$$

Das beschriebene Verfahren liefert eine zweite Lösung in der Form $y = \varphi x + z$ mit $z = (0, z_2)$. Für z_2 ergibt sich die Gleichung

$$z_2' = \Big(\frac{2}{t} - \frac{(-t)}{t^2}\,(-1)\Big) z_2 = \Big(\frac{2}{t} - \frac{1}{t}\Big) z_2 = \frac{1}{t}\, z_2 \,.$$

Eine Lösung ist

$$z_2(t) = t\,,$$

woraus φ berechnet werden kann. Man erhält aus $(*)$

$$\varphi(t) = \int \frac{1}{\tau^2}\,(-1)\tau d\tau = -\ln t\,,$$

somit ist

$$y(t) = (-\ln t)x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ (1 + \ln t)t \end{pmatrix}$$

eine von $x(t)$ linear unabhängige weitere Lösung des Systems.

Definition: Seien $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ Lösungen im Intervall I zum homogenen System $y' = A(t)y$ aus m Gleichungen. Sei

$$Y(t) = \Big(y^{(1)}(t), \ldots, y^{(m)}(t)\Big) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(t) & \ldots & y_1^{(m)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_m^{(1)}(t) & \ldots & y_m^{(m)}(t) \end{pmatrix}.$$

Dann heißt $\varphi(t) = \det Y(t)$ die Wronski–Determinante des Lösungssystems $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$.

Satz: Die Wronski–Determinante genügt der Differentialgleichung

$$\varphi' = \Big(\operatorname{spur} A(t)\Big)\varphi$$

im Intervall I, wobei

$$\operatorname{spur} A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \ldots + a_{mm}(t)$$

ist. Also folgt

$$\varphi(t) = \varphi(t_0)e^{\int_{t_0}^t \operatorname{spur} A(s)ds}\,.$$

Beweis: Sei $\tau \in I$, sei $e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ der k–te Einheitsvektor und sei $x^{(k)}$ Lösung von

$$x' \;=\; A(t)x$$

$$x(\tau) \;=\; e_k\,.$$

Aus diesen Lösungen konstruiere man die Matrix–wertige Funktion $X(t)$ durch $X(t) = (x^{(1)}(t), \dots, x^{(m)}(t))$. Für jede Lösung y von

$$y' = A(t)y$$

gilt dann $y(t) = X(t)y(\tau)$. Denn $t \mapsto X(t)y(\tau)$ ist eine Linearkombination von Lösungen, also selbst wieder eine Lösung, und es gilt $X(\tau)y(\tau) = Iy(\tau) = y(\tau)$, also $y(t) = X(t)y(\tau)$ für alle $t \in I$, wegen der Eindeutigkeit der Lösung. Somit gilt

$$Y(t) = X(t)Y(\tau)\,,$$

folglich liefert der Determinantenmultiplikationssatz

$$\varphi(t) = \Big[\det Y(t)\Big] = \Big[\det X(t)\Big]\,\Big[\det Y(\tau)\Big] = \Big[\det X(t)\Big]\varphi(\tau)\,,$$

also

$$\varphi'(t) = \Big[\det X(t)\Big]'\varphi(\tau)\,.$$

Es wird nun gezeigt, daß für $t = \tau$

$$\Big[\det X(\tau)\Big]' = \operatorname{spur} A(\tau)\,, \qquad (*)$$

gilt, also

$$\varphi'(\tau) = \Big[\operatorname{spur} A(\tau)\Big]\varphi(\tau)\,.$$

Da τ beliebig gewählt war, folgt hieraus die Behauptung des Satzes.

Zum Beweis von $(*)$ sei

$$B(t) = \Big(b^{(1)}(t), b^{(2)}(t), \dots, b^{(m)}(t)\Big) = \begin{pmatrix} b_1^{(1)}(t) & \dots & b_1^{(m)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_m^{(1)}(t) & \dots & b_m^{(m)}(t) \end{pmatrix}$$

eine beliebige Matrix. Nach einem Resultat aus der Theorie der Determinanten gilt

$$\det B(t) = \sum_p (-1)^{\nu(p)} b_{p_1}^{(1)} \dots b_{p_m}^{(m)}\,,$$

wobei über alle Permutationen $p = (p_1, \dots, p_m)$ der Zahlen $1, \dots, m$ summiert wird, und $\nu(p)$ die Anzahl der Vertauschungen von p ist. Also folgt

$$\Big[\det B(t)\Big]' \;=\; \sum_p (-1)^{\nu(p)} \sum_{i=1}^m b_{p_1}^{(1)} \dots b_{p_{i-1}}^{(i-1)} b_{p_i}^{(i)\prime} b_{p_{i+1}}^{(i+1)} \dots b_{p_m}^{(m)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m} \Big[\sum_{p} (-1)^{\nu(p)} b_{p_1}^{(1)} \dots b_{p_i}^{(i)\prime} \dots b_{p_m}^{(m)} \Big] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \det(b^{(1)}, \dots, b^{(i)\prime}, \dots, b^{(m)}) \,.
\end{aligned}
$$

Somit folgt

$$
\begin{aligned}
\Big[\det X(\tau) \Big]' &= \sum_{i=1}^{m} \det \Big(x^{(1)}(\tau), \dots, x^{(i)\prime}(\tau), \dots, x^{(m)}(\tau) \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \det(e_1, \dots, e_{i-1}, A(\tau)e_i, e_{i+1}, \dots, e_m) \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{ii}(\tau) = \operatorname{spur} A(\tau) \,.
\end{aligned}
$$

■

Folgerung: Die Wronski–Determinante φ verschwindet entweder identisch im Intervall I, oder ist für alle $t \in I$ von Null verschieden. Die m Lösungen $y^{(1)}, \dots, y^{(m)}$ von $y' = A(t)y$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Wronski-Determinante zu diesen Lösungen an einer Stelle $\tau \in I$ und damit in ganz I von Null verschieden ist.

Als nächstes sollen inhomogene Systeme

$$
y' = A(t)y + F(t)
$$

betrachtet werden.

Satz: Man erhält sämtliche Lösungen y des inhomogenen Differentialgleichungssystems in der Form

$$
y = \tilde{y} + x \,,
$$

wobei $\tilde{y}$ eine (fest gewählte) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist und x alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung durchläuft.

Beweis: Es gilt

$$
(\tilde{y} + x)' = \tilde{y}' + x' = A(t)\tilde{y} + F(t) + A(t)x = A(t)(\tilde{y} + x) + F(t) \,,
$$

also ist $\tilde{y} + x$ Lösung der inhomogenen Gleichung für jede Lösung x der homogenen Gleichung. Ist umgekehrt y eine beliebige Lösung der inhomogenen Gleichung, dann gilt für $x := y - \tilde{y}$

$$
x' = y' - \tilde{y}' = A(t)y + F(t) - A(t)\tilde{y} - F(t) = A(t)(y - \tilde{y}) = A(t)x \,,
$$

also ist x Lösung der homogenen Gleichung. ■

Aus den Lösungen des homogenen Gleichungssystems erhält man also alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems, wenn man eine beliebige kennt. Eine solche Lösung kann man mit der **Methode der Variation der Konstanten** bestimmen:

Es seien $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ linear unabhängige Lösungen des homogenen Gleichungssystems $y' = A(t)y$. Sei

$$Y(t) = \left(y^{(1)}(t), \ldots, y^{(m)}(t)\right).$$

Man versucht nun eine Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$z(t) = Y(t)v(t)$$

zu erhalten, mit einer geeignet zu bestimmenden Funktion $v : I \to \mathbb{R}^m$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$z' = Y'v + Yv' = AYv + Yv' = Az + Yv'.$$

Also gilt $z = Az + F$, genau dann wenn $Yv' = F$ gilt, folglich muß v so bestimmt werden, daß

$$Yv' = F$$

ist. $Y(t)$ ist invertierbar, weil die Wronski–Determinante $\det Y(t)$ von Null verschieden ist. Also muß gelten

$$v'(t) = Y^{-1}(t)F(t),$$

folglich

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau,$$

also

$$z(t) = Y(t)v(t_0) + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau.$$

Satz: Sei I ein Intervall mit $t_0 \in I$. Die Funktionen $A : I \to \mathbb{R}^{m\times m}$ und $F : I \to \mathbb{R}^m$ seien stetig. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = A(t)y + F(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(t) = X(t)y_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau\,,$$

mit $X(t) = (x^{(1)}(t), \ldots, x^{(m)}(t))$, wobei $x^{(i)}$ die Lösung von

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x \\ x(t_0) &= e_i \end{aligned}$$

ist.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} y' &= X'y_0 + X'\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau + XX^{-1}F \\ &= AXy_0 + AX\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau + F = Ay + F\,, \end{aligned}$$

und

$$y(t_0) = X(t_0)y_0 = Iy_0 = y_0\,.$$

■

5 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \cdot m}$$

eine Matrix mit konstanten Koeffizienten. Gesucht sind Lösungen des homogenen, linearen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay$$

mit konstanten Koeffizienten. Lösungen erhält man durch den Ansatz

$$y(t) = ce^{\lambda t} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ c_n e \lambda t \end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten Vektor $c \in \mathbb{C}^m$ und einer geeigneten Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$. Denn Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$(ce^{\lambda t})' = \lambda ce^{\lambda t} = Ace^{\lambda t},$$

also ist $ce^{\lambda t}$ Lösung genau dann wenn

$$Ac = \lambda c$$

ist, d. h. wenn λ Eigenwert zu A und c Eigenvektor zu diesem Eigenwert ist.

Satz: Die Funktion $y(t) = ce^{\lambda t}$ ist genau dann Lösung der Gleichung $y' = Ay$, wenn λ Eigenwert und c ein zugehöriger Eigenvektor der Matrix A ist. Die Lösungen

$$y^{(i)}(t) = c^{(i)} e^{\lambda_i t} \qquad (i = 1, \dots, k)$$

sind genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren $c^{(1)}, \dots, c^{(k)}$ linear unabhängig sind. Insbesondere sind sie linear unabhängig, wenn alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschieden sind. Besitzt A also m linear unabhängige Eigenvektoren $c^{(1)}, \dots, c^{(m)}$, so bildet

$$\{c^{(1)} e^{\lambda, t}, \dots, c^{(m)} e^{\lambda_m t}\}$$

ein Fundamentalsystem zu $y' = Ay$.

Bemerkung: A besitzt insbesondere dann m linear unabhängige Eigenvektoren, wenn alle Eigenwerte verschieden sind.

Beweis: Es gilt $y^{(i)}(0) = c^{(i)}$. Aufgrund der Isomorphie zwischen Lösungsraum und Anfangswerten sind Lösungen $y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$ linear unabhängig, genau dann wenn ihre Anfangswerte $c^{(1)}, \dots, c^{(k)}$ linear unabhängig sind. ∎

Ist λ ein komplexer Eigenwert, dann ist $ce^{\lambda t}$ eine komplexwertige Lösung. Weil auch eine reelle Matrix A unter Umständen komplexe Eigenwerte besitzen kann, liefert der angegebene Ansatz auch für reelle Matrizen im allgemeinen komplexwertige Lösungen. Der folgende Satz zeigt jedoch, daß man aus einer komplexwertigen Lösung zwei reellwertige Lösungen erhalten kann.

Hierzu beachte man, daß für eine reelle Matrix gilt: Ist λ Eigenwert einer reellen Matrix und $c = (c_1, \dots, c_m)$ Eigenvektor zu diesem Eigenwert, dann ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert und $\overline{c} = (\overline{c_1}, \dots, \overline{c_m})$ ein Eigenvektor. Ist λ ein reeller Eigenwert, dann existiert zu diesem Eigenwert ein reeller Eigenvektor $c \in \mathbb{R}^m$.

Satz: (i) Sei $\lambda = \mu + i\nu$ ein komplexer Eigenwert mit $\nu, \mu \in \mathbb{R}$ und $\nu \neq 0$, sowie $c = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}^m$ ein zugehöriger Eigenvektor der reellen Matrix A. Aus der komplexen Lösung $y = ce^{\lambda t}$ erhält man zwei reelle Lösungen

$$\begin{aligned} z(t) &= \operatorname{Re} y(t) &= e^{\mu t}(a \cos \nu t - b \sin \nu t) \\ z^*(t) &= \operatorname{Im} y(t) &= e^{\mu t}(a \sin \nu t + b \cos \nu t). \end{aligned}$$

(ii) Es seien $c^{(1)}, \dots, c^{(p)}$ linear unabhängige Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ mit

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \cap \{\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_p}\} = \emptyset$$

und $c^{(2p+1)}, \dots, c^{(2p+q)}$ linear unabhängige, reelle Eigenvektoren zu den reellen Eigenwerten $\lambda_{2p+1}, \dots, \lambda_{2p+q}$. Bildet man die $2p$ reellen Lösungen

$$z_i = \operatorname{Re} c^{(i)} e^{\lambda_i t}, \quad z_i^* = \operatorname{Im} c^{(i)} e^{\lambda_i t} \qquad (i = 1, \dots, p),$$

und die q reellen Lösungen

$$y_i = c^{(i)} e^{\lambda_i t} \quad (i = 2p+1, \dots, 2p+q),$$

so sind diese $2p + q$ Lösungen linear unabhängig. Dies gilt auch, wenn einige der λ_i gleich sind, also mehrfache Eigenwerte auftreten.

Insbesondere erhält man auf diese Weise ein reelles Fundamentalsystem, wenn m linear unabhängige Eigenvektoren zu Matrix A existieren.

Beweis: (i) Ist y Lösung von $y' = Ay$, dann gilt

$$\begin{array}{rclclcl} (\operatorname{Re} y)' &=& \operatorname{Re} y' &=& \operatorname{Re}(Ay) &=& A(\operatorname{Re} y) \\ (\operatorname{Im} y)' &=& \operatorname{Im} y' &=& \operatorname{Im}(Ay) &=& A(\operatorname{Im} y)\,, \end{array}$$

also sind auch $\operatorname{Re} y$ und $\operatorname{Im} y$ Lösungen.

(ii) Es sind $\overline{c^{(1)}}, \ldots, \overline{c^{(p)}}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_p}$. Mit den üblichen Schlüssen sieht man, daß weil die Menge $\{c^{(1)}, \ldots, c^{(p)}\}$ linear unabhängig ist und weil $\{\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_p}\} \cap \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} = \emptyset$ gilt, auch die Menge $\{c^{(1)}, \ldots, c^{(p)}, \overline{c^{(1)}}, \ldots, \overline{c^{(p)}}\}$ linear unabhängig ist, und dann auch die Menge $\{c^{(1)}, \ldots, \overline{c^{(1)}}, \ldots, c^{(2p+1)}, \ldots, c^{(2p+q)}\}$. Also sind

$$y_1, \ldots, y_p, \overline{y_1}, \ldots, \overline{y_p}, y_{2p+1}, \ldots, y_{2p+q}$$

mit $y_j(t) = c^{(j)} e^{\lambda_j t}$ für $j = 1, \ldots, p, 2p+1, \ldots, 2p+q$ linear unabhängige Lösungen von $y' = Ay$. Für die reellen Lösungen z_j und z_j^* gilt dann

$$z_j = \frac{1}{2}(y_j + \overline{y}_j), \quad z_j^* = \frac{1}{2i}(y_j - \overline{y}_j)\,.$$

($i =$ imaginäre Einheit.) Seien nun $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j z_j + \sum_{j=1}^{p} \beta_j z_j^* + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j y_{2p+j} = 0\,.$$

Dann folgt

$$\sum_{j=1}^{p} \Big(\frac{1}{2}\,\alpha_j + \frac{1}{2i}\,\beta_j\Big) y_j + \sum_{j=1}^{p} \Big(\frac{1}{2}\,\alpha_j - \frac{1}{2i}\,\beta_j\Big) \overline{y}_j + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j y_{2p+j} = 0\,,$$

und dies kann nur sein, wenn alle Koeffizienten $\frac{1}{2}\,\alpha_j + \frac{1}{2i}\,\beta_j$, $\frac{1}{2}\,\alpha_j - \frac{1}{2i}\,\beta_j$ und γ_j verschwinden, was nur möglich ist, wenn alle $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ verschwinden. Also sind

$$z_1, \ldots, z_p, z_1^*, \ldots, z_p^*, y_{2p+1}, \ldots, y_{2p+q}$$

linear unabhängige Lösungen. ∎

Beispiel: Gesucht sind Lösungen von $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen von

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda)+8-2(1-\lambda)-4(1+\lambda) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)+4(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda+2)\,.
\end{aligned}$$

Eigenwerte sind also

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda_3 = 1\,.$$

Eigenvektoren sind

$$c^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem aus komplexen Lösungen ist also

$$y_1(t) = c^{(1)} e^{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2})t}, \quad \overline{y_1(t)} = c^{(2)} e^{(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2})t}, \quad y_3(t) = c^{(3)} e^t\,.$$

Aus y_1 erhält man durch Aufspalten in Real– und Imaginärteil die reellen Lösungen

$$\begin{aligned}
z_1(t) &= e^{-1/2t}\Big[\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}t - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\Big] \\
z_2(t) &= e^{-1/2t}\Big[\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\Big]\,.
\end{aligned}$$

Zusammen mit

$$y_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$$

bilden z_1, z_2 ein reelles Fundamentalsystem. ∎

Falls m linear unabhängige Eigenvektoren zur $m \times m$ Matrix A existieren, sind damit alle Lösungen von

$$y' = Ay$$

bestimmt. Für eine beliebige Matrix ist dies jedoch nicht notwendig der Fall. Die Konstruktion eines Fundamentalsystems zu einer beliebigen Matrix soll nun behandelt werden. Hierzu benötigen wir das folgende Resultat aus der linearen Algebra:

Satz (Jordansche Normalform): Es sei A eine beliebige (reelle oder komplexe) $m \times m$ Matrix. Zum Eigenwert λ von A sei $s(\lambda)$ die maximale Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zu diesem Eigenwert. Man nennt $s(\lambda)$ die geometrische Vielfachheit von λ. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit $k \leq m$ die Eigenwerte von A, wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner geometrischen Vielfachheit wiederholt sei. Dann existieren Zahlen $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$ mit $r_1 + \ldots + r_k = m$, so daß für das charakteristische Polynom von A

$$P(\mu) = \det(A - \mu I) = (-1)^m (\mu - \lambda_1)^{r_1} \ldots (\mu - \lambda_k)^{r_k}$$

gilt. Außerdem existiert eine nichtsinguläre Matrix C, so daß $B = C^{-1}AC$ die Jordansche Normalform besitzt:

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & & & O \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J_k \end{pmatrix},$$

wobei

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & O \\ & & \ddots & \ddots & \\ & O & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$r_i \times r_i$–Matrizen sind.

Es genügt nun, ein Fundamentalsystem für das Gleichungssystem $z' = Bz$ zu finden, weil dieses Fundamentalsystem durch C in ein Fundamentalsystem für A transformiert werden kann. Dies folgt aus

Lemma: (i) Sei C eine nichtsinguläre Matrix und $B = C^{-1}AC$. Genau dann gilt $y' = Ay$, wenn $z' = Bz$ gilt für die Funktion $z(t) = C^{-1}y(t)$.

(ii) Die Lösungen $y_1, \dots, y_k$ von $y' = Ay$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Lösungen $C^{-1}y_1, \dots, C^{-1}y_k$ von $z' = Bz$ linear unabhängig sind.

Beweis: (i) folgt sofort aus $z' = C^{-1}y'$ und $Bz = C^{-1}AC \subset C^{-1}y = C^{-1}Ay$.
Zum Beweis von (ii) beachte man, daß $y_i, \dots, y_k$ linear unabhängige Lösungen sind, genau dann wenn die Vektoren $y_1(0), \dots, y_k(0)$ linear unabhängig sind. Weil C nichtsingulär ist, ist dies genau dann der Fall, wenn $C^{-1}y_1(0), \dots, C^{-1}y_k(0)$ linear unabhängige Vektoren sind, und dies ist äquivalent dazu, daß die Lösungen $C^{-1}y_1, \dots, C^{-1}y_k$ linear unabhängig sind. ■

Zur Konstruktion eines Fundamentalsystems suche man zunächst ein Fundamentalsystem für das einem „Jordankasten“ entsprechende System

$$x' = Jx\,,$$

d.h.

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda x_1 + x_2 \\ x_2' &= \lambda x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ x_{r-1}' &= \lambda x_{r-1} + x_r \\ x_r' &= \lambda x_r\,. \end{aligned}$$

r linear unabhängige Lösungen dieses Systems sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2!}t^2 e^{\lambda t} \\ te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \frac{1}{(r-1)!}t^{r-1}e^{\lambda t} \\ \frac{1}{(r-2)!}t^{r-2}e^{\lambda t} \\ \vdots \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix B erhält man nun ein Fundamentalsystem folgendermaßen:
Sei $x^{i,1}, \ldots, x^{i,r_i}$ ein Fundamentalsystem zu

$$x' = J_i x \,.$$

Dann sind

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^{i,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^{i,r_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

r_i linear unabhängige Lösungen von $z' = Bz$, also erhält man $m = r_1 + \ldots + r_k$ linear unabhängige Lösungen $z_1, \ldots, z_m$ durch

$$\begin{pmatrix} x^{1,1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{1,2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ x^{2,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^{k,r_k} \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung z aus diesem Fundamentalsystem hat also die Gestalt

$$z(t) = \Big(0, \ldots, 0\, \frac{t^\ell}{\ell!}\, e^{\lambda t}, \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\, e^{\lambda t}, \ldots, e^{\lambda t}, 0, \ldots, 0\Big)^T \,.$$

Für $i = 1, \ldots, m$ sei nun

$$y_i = C z_i \,.$$

Nach dem vorangehenden Lemma sind dann $y_1, \ldots, y_m$ linear unabhängige Lösungen zum Gleichungssystem $y' = Ay$ und bilden somit ein Fundamentalsystem. Folglich hat eine Lösung $y = Cz$ aus diesem Fundamentalsystem die Gestalt

$$y(t) = p(t) e^{\lambda t}$$

mit

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_m(t) \end{pmatrix},$$

wobei p_i Polynome sind mit $\mathrm{Grad}(p_i) \leq r-1$. Hierbei ist r die Potenz im zum Eigenwert λ gehörenden Faktor $(\mu - \lambda)^r$ des charakteristischen Polynoms von A.

Aus dieser Konstruktion erhält man speziell das im folgenden Satz angegebene Resultat. Um diesen Satz zu formulieren, benötige ich noch eine Definition:

Sei λ ein Eigenwert der Matrix A mit der geometrischen Vielfachheit $s(\lambda)$. Unter den mit Vielfachheit wiederholten Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ von A seien $\lambda_i = \ldots = \lambda_{i+s(\lambda)-1} = \lambda$ alle Eigenwerte, die mit λ übereinstimmen. Dann ist λ eine Nullstelle des charakterischen Polynoms der Ordnung

$$r(\lambda) = r_i + \ldots + r_{i+s(\lambda)-1}\,.$$

Man nennt $r(\lambda)$ die algebraische Vielfachheit von λ.

Satz: Zu einer $r = r(\lambda)$–fachen Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms der $m \times m$ Matrix A gibt es r linear unabhängige Lösungen der Form

$$y_1^{(\lambda)} = p_0^{(\lambda)}(t)e^{\lambda t}, \ldots, y_r^{(\lambda)} = p_{r-1}^{(\lambda)}(t)e^{\lambda t}\,,$$

wobei jedes Element von

$$p_\ell^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} p_1^\ell(t) \\ \vdots \\ p_m^\ell(t) \end{pmatrix}$$

ein Polynom mit Grad $\leq r(\lambda) - 1$ ist. Die Menge

$$\{y_1^{(\lambda)}, \ldots, y_{r(\lambda)}^{(\lambda)} \,\big|\, \lambda \quad \text{ist Eigenwert von} \quad A\}$$

ist ein Fundamentalsystem zu $y' = Ay$.

Ist A reell, so erhält man hieraus ein reelles Fundamentalsystem, indem man bei nicht reellem λ aus jeder der $r(\lambda)$ Lösungen y_i zwei reelle Lösungen $z_i = \mathrm{Re}\, y_i$, $z_i^* = \mathrm{Im}\, y_i$ bildet und die entsprechenden $r(\lambda)$ Lösungen für den konjungiert – komplexen Eigenwert $\overline{\lambda}$ streicht.

Beispiel: Es sollen alle Lösungen zur inhomogenen linearen Differentialgleichung des elektrischen Schwingungskreises

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = f(t)$$

aus Kapitel Ie.) bestimmt werden. Wegen $L \neq 0$ kann man diese Differentialgleichung auch in der Form

$$i'' = -\frac{R}{L}i' - \frac{C}{L}i + f(t)$$

schreiben.

1. Transformation auf ein System erster Ordnung. Äquivalent zu dieser Gleichung zweiter Ordnung ist das lineare System

$$y'(t) = Ay(t) + F(t)$$

mit

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(t) \\ i'(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{CL} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmung eines Fundamentalsystems zur homogenen Gleichung. Hierzu müssen die Eigenwerte von A bestimmt werden: Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\dfrac{1}{CL} & -\dfrac{R}{L} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + \frac{R}{L}) + \frac{1}{CL} = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL},$$

also folgt für die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - 4\frac{1}{CL}}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}}.$$

Für die Eigenvektoren erhält man

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{CL}} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{R}{2L} - \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{CL}} \end{pmatrix}.$$

Falls $\frac{1}{CL} \neq \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ ist, besitzt die Matrix A zwei verschiedene Eigenwerte, und ein Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$y^{(1)}(t) = ce^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{R}{2L} + \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{CL}} \end{pmatrix} e^{(-\frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{CL}})t}$$

$$y^{(2)}(t) = de^{\lambda_2 t} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{R}{2L} - \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{CL}} \end{pmatrix} e^{(-\frac{R}{2L} - \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{CL}})t} .$$

Dies ist ein reelles Fundamentalsystem, falls $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{CL}$. Falls $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{CL}$ ist, erhält man ein reelles Fundamentalsystem durch

$$\begin{aligned}
z^{(1)}(t) &= \operatorname{Re} y^{(1)}(t) \\
&= e^{-\frac{R}{2L}t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{R}{2L} \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t\right) - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{CL} - (\frac{R}{2L})^2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t\right) \right] \\
z^{(2)}(t) &= \operatorname{Im} y^{(1)}(t) \\
&= e^{-\frac{R}{2L}t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{CL} - (\frac{R}{2L})^2} \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{R}{2L} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t\right) \right]
\end{aligned}$$

Falls $\frac{1}{CL} = (\frac{R}{2L})^2$ gilt, besitzt die Matrix A nur den einen Eigenwert $\lambda = -\frac{R}{2L}$, dessen geometrische Vielfachheit $s(\lambda) = 1$ ist. Eine Lösung des homogenen Systems ist daher

$$y^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{R}{2L} \end{pmatrix} e^{-\frac{R}{2L}t} .$$

Da die algebraische Vielfachheit dieses Eigenwertes $r(\lambda) = 2$ ist, mache man zur Bestimmung einer zweiten Lösung den Ansatz $y^{(2)}(t) = (p_1(t), p_2(t))e^{-\frac{R}{2L}t}$ mit Polynomen $p_i(t) = a_i t + b_i$ vom Grad $r(\lambda) - 1 = 1$. Die folgende Rechnung zeigt, daß $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = -\frac{R}{2L}$, $b_2 = 1$ zum Ziel führt, also daß

$$y^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\dfrac{R}{2L}t + 1 \end{pmatrix} \quad e^{-\frac{R}{2L}t}$$

eine zweite Lösung ist. Es gilt

$$y^{(2)'} \quad = \quad \begin{pmatrix} -\dfrac{R}{2L}t + 1 \\ \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 t - \dfrac{R}{L} \end{pmatrix} \quad e^{-\frac{R}{2L}t}$$

und

$$Ay^{(2)} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -\dfrac{R}{2L}t + 1 \end{pmatrix} \quad e^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{R}{2L}t+1 \\ -\Big(\dfrac{R}{2L}\Big)^2 t + 2\Big(\dfrac{R}{2L}\Big)^2 t - \dfrac{R}{L} \end{pmatrix} e^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{R}{2L}t+1 \\ \Big(\dfrac{R}{2L}\Big)^2 t - \dfrac{R}{L} \end{pmatrix} e^{-\frac{R}{2L}t},$$

also ist $y^{(1)}(t), y^{(2)}(t)$ ein reelles Fundamentalsystem.

3. Lösung zum Anfangswertproblem der inhomogenen Gleichung. Es soll nun das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= Ay + F \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

gelöst werden. Nach Kapitel 4 gilt

$$y(t) = Y(t) \int_0^t Y^{-1}(\tau) F(\tau) d\tau \,,$$

mit $Y = (y^{(1)}, y^{(2)})$, wobei $y^{(1)}, y^{(2)}$ ein Fundamentalsystem ist zu $y' = Ay$. Hier soll nur der Fall $\frac{1}{CL} \neq (\frac{R}{2L})^2$ betrachtet werden. Nach obiger Rechnung ist

$$y^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \quad y^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

ein Fundamentalsystem. Es gilt dann

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

und somit

$$Y^{-1}(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & -e^{\lambda_2 t} \\ -\lambda_1 e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix},$$

mit

$$\varphi(t) = \det Y(t) = \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

Mit

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

folgt also

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \int_0^t \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)\tau}} \begin{pmatrix} -e^{\lambda_2\tau} \\ e^{\lambda_1\tau} \end{pmatrix} f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-\lambda_1\tau} f(\tau) \\ e^{-\lambda_2\tau} f(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\
&= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} \int_0^t \left[-e^{\lambda_1(t-\tau)} + e^{\lambda_2(t-\tau)}\right] f(\tau)d\tau \\ -\int_0^t \left[-\lambda_1 e^{\lambda_1(t-\tau)} + \lambda_2 e^{\lambda_2(t-\tau)}\right] f(\tau)d\tau \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

4. Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung. $i(t) = y_1(t)$ ist die Lösung der ursprünglich gegebenen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Für $\frac{1}{CL} > (\frac{R}{2L})^2$ gilt

$$
\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[e^{\lambda_2(t-\tau)} - e^{\lambda_1(t-\tau)}\right] = e^{-\frac{R}{2L}(t-\tau)} \frac{\sin(\sqrt{\frac{1}{CL}-(\frac{R}{2L})^2}(t-\tau))}{\sqrt{\frac{1}{CL}-(\frac{R}{2L})^2}},
$$

also folgt

$$
i(t) = y_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{CL}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \int_0^t \left[e^{-\frac{R}{2L}(t-\tau)} \sin\sqrt{\frac{1}{CL}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}(t-\tau)\right] f(\tau)d\tau\,.
$$

$i(t)$ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$
Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = f(t)\,,
$$

$$
i(0) = 0\,, \quad i'(0) = 0\,.
$$

Ist $f(t) = \cos\omega t = \mathrm{Re}\, e^{i\omega t}$ eine periodische Anregung mit der „Kreisfrequenz“ $\omega > 0$, kann i explizit berechnet werden. Man erhält

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \int_0^t \left[e^{\lambda_1(t-\tau)} - e^{\lambda_2(t-\tau)}\right] \mathrm{Re}\, e^{i\omega\tau} d\tau \\
&= \mathrm{Re}\, \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{1}{i\omega-\lambda_1} e^{\lambda_1+(i\omega-\lambda_1)\tau} - \frac{1}{i\omega-\lambda_2} e^{\lambda_1 t+(i\omega-\lambda_2)\tau}\right]_0^t \\
&= \mathrm{Re}\, \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{1}{i\omega-\lambda_1} - \frac{1}{i\omega-\lambda_2}\right] e^{i\omega t} - \mathrm{Re}\, \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{e^{\lambda_1 t}}{i\omega-\lambda_1} - \frac{e^{\lambda_2 t}}{i\omega-\lambda_2}\right] \\
&= \mathrm{Re}\, \frac{1}{(i\omega-\lambda_1)(i\omega-\lambda_2)} e^{i\omega t} - e^{-\frac{R}{2L}t} \mathrm{Re}\, \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{e^{i\sqrt{\frac{1}{CL}-(\frac{R}{2L})^2}t}}{i\omega-\lambda_1} - \frac{e^{i\sqrt{\frac{1}{CL}-(\frac{R}{2L})}t}}{i\omega-\lambda_2}\right].
\end{aligned}
$$

Der zweite Term ist exponentiell gedämpft und stellt einen „Einschwingvorgang“dar. Für große t dominiert daher der erste Term. Seine Amplitude ist wegen $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ gleich

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{(i\omega-\lambda_1)(i\omega-\lambda_2)}\Big| &= \Big|\frac{1}{-\omega^2 - i(\overline{\lambda}_1+\lambda_1)\omega + |\lambda_1|^2}\Big| \\
&= \frac{1}{\sqrt{(|\lambda_1|^2-\omega^2)^2+\omega^2(\lambda_1-\overline{\lambda}_1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{[(\frac{R}{2L})^2+\frac{1}{CL}-(\frac{R}{2L})^2-\omega^2]^2+(\frac{\omega R}{L})^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{CL}-\omega^2)^2+(\frac{\omega R}{L})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4-[\frac{2}{CL}-(\frac{R}{L})^2]\omega^2+(\frac{1}{CL})^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(\omega^2-[\frac{1}{CL}-2(\frac{R}{2L})^2])^2+[\frac{1}{CL}-(\frac{R}{2L})^2](\frac{R}{L})^2}}\,.
\end{aligned}
$$

Dies liefert die „Resonanzkurve“ des Schwingungskreises. Die Resonanzfrequenz ist $\omega = \sqrt{\frac{1}{CL}-2\big(\frac{R}{2L}\big)^2}$: