

Umgeordnete alternierend-harmonische Reihe

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\
 = & \frac{1}{1} - \frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1}{2 \cdot (1 + 1)} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot (3 + 1)} \\
 + & \frac{1}{5} - \frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot (5 + 1)} + \dots
 \end{aligned}$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \ln(2) \approx 0.34657$$

Die Reihe hat den Wert $\frac{1}{2} \ln(2)$, denn

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln(2). \end{aligned}$$

Bei Reihen mit positiven und negativen Folgengliedern kommt es darauf an in welcher Reihenfolge man diese aufsummiert. Man kann sogar unter gewissen Voraussetzungen zeigen, dass es zu jedem Wert eine passende Umordnung der Reihe gibt. Dieses Phänomen tritt nur auf, wenn die Reihe der Beträge den Wert unendlich hat. Diese Aussage heißt Riemannscher Umordnungssatz und ist nach dem deutschen Mathematiker Bernhard Riemann benannt.