
Bild: Patrick Bal

Ein mathematisch komplexes Gebilde: der Donut

Mit Donuts durchs Dickicht der Zahlen

Wissenschaftler erkunden »uniformisierte Strukturen in Arithmetik und Geometrie«

Darmstädter und Frankfurter Mathematiker bündeln ihre Kräfte, um vertrackter mathematischer Probleme Herr zu werden. Das hessische Forschungsförderungsprogramm LOEWE fördert sie dabei mit 3,5 Millionen Euro für vier Jahre.

Selbst eine Million Dollar Preisgeld und 17 Jahre Zeit haben nur gereicht, um eines der sieben Millenium-Probleme der Mathematik zu lösen, was viel über die Schwierigkeit der vom renommierten Clay-Institut im englischen Oxford ausgelobten Aufgaben sagt. Da wünschen sich Mathematiker Rezepte, wie man komplexe in einfachere Probleme umwandelt. Diesem Ziel widmet sich der neue LOEWE-Schwerpunkt »Uniformisierte Strukturen in Arithmetik und Geometrie«, bei dem Mathematikteams der TU Darmstadt und der Frankfurter Goethe-Universität ihre Kompetenzen koppeln.

»Gemeinsam wollen wir eine kritische Masse erreichen, um in kürzerer Zeit tolle Ergebnisse zu erzielen«, sagt Professor Dr. Jan Hendrik Bruinier vom Fachbereich Mathematik der TU Darmstadt. »Die zusätzliche Manpower wird uns auch helfen, mehr internationale Sichtbarkeit zu erreichen«, ergänzt Professor Dr. Martin Möller vom Institut für Mathematik der Goethe-Universität.

VERZWICKTES UNTERFANGEN

Die Mathematiker wollen knifflige geometrische Objekte durch deutlich einfachere ersetzen – einen Donut oder etwas verwickeltere Formen wie eine Brezel durch jeweils eine Ebene. Dabei sind diese Beispiele noch recht anschaulich. Für Mathematiker kann ein geometrisches Objekt noch viel mehr Dimensionen haben als die für Menschen vorstellbaren drei Raumrichtungen. Solche Gebilde zu vereinfachen ist ein extrem verzwicktes Unterfangen, das die renommierten Mathematiker im LOEWE-Schwerpunkt eine Weile beschäftigen wird.

Doch warum sich die Mühe machen? »Komplexe geometrische Objekte stellen Lösungen von schwierigen Problemen dar«, erklärt Bruinier. Grob kann man sagen: Wer die Geometrie vereinfacht, macht auch die Lösungen, die sie repräsentiert, leichter zugänglich. Ein Beispiel sind sogenannte elliptische Kurven. Sie sind die grafische Repräsentation von schwer lösbaren Gleichungen, die durch sogenannte Polynome gegeben sind. Wenn man von der polynomialen Gleichung $y=x^2$ zum Beispiel zu $y^2=x^3+1$ übergeht, so erhält man statt einer einfachen Parabel eine elliptische Kurve.

Elliptische Kurven werden täglich millionenfach für Verschlüsselungen im Internet genutzt, wo sie dank ihrer Komplexität schwer zu knacken sind. Auch beim ersten Millenium-Problem, der »Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer«, geht es um elliptische Kurven. Die geometrische Repräsentation solcher Kurven sind Runden, die man auf einem Donut durch dessen Loch in der Mitte dreht. Durch die Uniformisierung hoffen die Forscher, mehr über die »Lösungsmengen von polynomialen Gleichungen«, wie Bruinier sagt, herauszubekommen.

Aber auch der umgekehrte Weg, von der vermeintlich simplen Ebene zu komplexeren Geometrien, kann fruchtbar sein. Dann nämlich, wenn sich Mathematiker schon sehr viel mit der anspruchsvolleren Geometrie beschäftigt und Methoden entwickelt haben, mit ihr umzugehen. Ein Billardtisch ist von seiner Geometrie her zwar denkbar einfach: eine flache Platte. Eine Kugel verläuft darauf auf physikalisch berechenbaren Bahnen. Dennoch kann es schnell kompliziert werden. Etwa, wenn man fragt, ob die Bahn einer einmal angestoßenen und ewig rollenden Kugel den Tisch gleichmäßig abdeckt oder nicht. Noch schwieriger wird dies, wenn die Tischfläche eine andere als die quadratische Form annimmt, ein »L« zum Beispiel.

Dieses Problem behält seine Symmetrien, wenn man den Billardtisch in eine Art Brezel umwandelt: in einen Schlauch mit drei Henkeln. »Wir kennen viele Verfahren in solchen ›Brezel-Räumen‹«, erklärt Möller einen Vorteil dieser geometrischen Verkomplizierung. Die »Brezeln« seien zudem flexibler, sagt Möller, man könne sie zum Beispiel einer Scherung aussetzen, ohne dass sich die Lösungen veränderten, während eine solche Verformung beim Billardtisch den Verlauf der Kugelbahnen verändern würde.

VERWICKELTE RÄUME BESSER VERSTEHEN

Der LOEWE-Schwerpunkt werde dazu beitragen, diese verwickelten Räume noch besser kennenzulernen, sagt Möller. Die »Brezeln« können viele verschiedene Formen annehmen und doch Brezeln bleiben, solange sie nur drei Löcher haben. »Aber wir wissen noch wenig darüber, welche weiteren Eigenschaften die Brezeln als Ganzes betrachtet miteinander teilen«, erklärt Möller.

Neuland wie dieses wollen die Mathematiker um Bruinier und Möller nun erobern. Beide sind fasziniert von Zahlen, der Arithmetik, und dem Zusammenfließen dieser mathematischen Teildisziplin mit anderen in ihrem Forschungsgebiet. Sie wagen sogar zu hoffen, der Lösung eines der Millenium-Probleme des Clay-Instituts näherzukommen. CHRISTIAN MEIER

⊕ Interviews mit den Professoren Jan Hendrik Bruinier und Nils Scheithauer auf bit.ly/2ymNGPo

WAS IST UNIFORMISIERUNG?

Ein Donut ist für einen Mathematiker ein kompliziertes Gebilde, allein schon, weil er ein Loch hat. Man kann den Kringel auf zwei Arten umrunden: um das Loch herum und durch das Loch. Jeweils kommt man wieder am Ausgangspunkt an. Eine ebene Fläche wäre da viel einfacher: keine Krümmung, keine Löcher, unbegrenzte Bewegungsfreiheit in alle Richtungen. Nun lässt sich aus einem Donut, im Fachjargon Torus genannt, ein flaches Gebilde machen, indem man zwei Schnitte macht: erstens längs um das Loch herum und zweitens, quer dazu, entlang der Umrundung durch das Loch. Faltet man den Torus nun auseinander, entsteht ein Parallelogramm.

Stellt man sich ein kleines Wesen vor, das auf dem Torus sitzt, wird sich seine direkte Umgebung durch dieses Auffalten nicht viel ändern: Es kann sich in der Ebene nach wie vor entlang zwei Dimensionen bewegen. Doch wenn es sich weiter entfernt, stößt es nun an ein Ende, anstatt, wie zuvor, wieder am Ausgangspunkt anzukommen. Dieses Umrunden lässt sich aber in der Fläche simulieren, indem man das Parallelogramm vervielfältigt und wie bei einem Fliesenboden aneinander setzt, sodass eine endlose Fläche entsteht. Überschreitet das Wesen nun die Grenze zwischen zwei solchen Kacheln, kommt es irgendwann auf der neuen Kachel zu einem Punkt, der seinem Ausgangspunkt auf der ersten Kachel entspricht.

Durch die spiegelbildliche Gleichheit der Parkettierung trägt die Ebene der Komplexität des Torus Rechnung. Im Endeffekt hat man eine einfachere, weil ungewölbte Fläche, deren Symmetrie kodiert, auf welchen Wegen das kleine Wesen wieder zum Ausgangspunkt zurückkommen kann. Die Ebene zusammen mit ihren Symmetrien ist für den Mathematiker ein vollwertiger Ersatz für den Torus, sie ist dessen Uniformisierung.

Ähnlich lassen sich durch Uniformisierung auch noch komplexere geometrische Objekte vereinfachen, die Mathematiker benötigen, um etwa extrem schwierige Gleichungen zu lösen. Ein doppelter Torus mit zwei Löchern zum Beispiel oder eine Art abstrakte Brezel, eine gekrümmte Fläche mit drei Löchern. Beispielsweise sieht für ein kleines Wesen ein doppelter Torus mit zwei Löchern aus wie ein L-förmiger Billardtisch, bei dem sich eine Berechnung, wie sich eine gestoßene Kugel verhält, äußerst komplex gestalten kann.