

# Tate's Thesis



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Seminar – Wintersemester 2022-2023 – Algebra

Prof. Dr. Jan Hendrik Bruinier, Dr. Paul Kiefer, M.Sc. B.Sc. Ingmar Metzler

## Was ist Tate's Thesis?

Die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s}, \quad \text{für } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \Re(s) > 1$$

kodiert Informationen über die Verteilung der Primzahlen und ist Basis des bekanntesten ungelösten Problems der Mathematik – der *Riemannschen Vermutung*. Diese Funktion verfügt über zahlreiche bemerkenswerte Eigenschaften: Eine meromorphe Fortsetzung auf ganz  $\mathbb{C}$ , eine Eulerproduktentwicklung und eine Funktionalgleichung:

$$\zeta(s) = \prod_{p < \infty} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad \Lambda(1 - s) = \Lambda(s),$$

wobei  $\Lambda(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$ . In der Zahlentheorie lassen sich  $L$ -Reihen, Verallgemeinerungen von  $\zeta$ , zahlreichen Klassen arithmetischer oder geometrischer Objekte zuordnen. Erich Hecke zum Beispiel hat für Zahlkörper eine Klasse von Charakteren auf deren gebrochen rationalen Idealen definiert, so genannte *Größencharaktere*, und diesen  $L$ -Reihen zugeordnet, welche ähnliche Eigenschaften wie die Riemannsche Zetafunktion haben.

In seiner 1950 erschienenen Doktorarbeit untersuchte John Tate diese Funktionen mit Hilfe der *Adele* und schuf so einen einheitlichen und eleganten Rahmen, um  $L$ -Reihen zu Größencharakteren zu konstruieren und ihre analytischen Eigenschaften mit Hilfe harmonischer Analysis zu beweisen. Diese Untersuchungen gelten heute als Ausgangspunkt für die moderne Theorie der *automorphen Darstellungen*, welche für das *Langlands Programm*, eines der ambitioniertesten mathematischen Projekte unserer Zeit, eine zentrale Rolle spielen.

## Inhalt des Seminars

Im Seminar werden, basierend auf den Referenzen [1], [2] und [3], Ideen aus Tates Doktorarbeit behandelt und analytische Eigenschaften der  $L$ -Funktionen zu Größencharakteren bewiesen.

## Weitere Informationen

Die Vorbesprechung soll am 29.09.2022 um 15:00 Uhr in Raum S2|15 - 401 stattfinden – sollte die Corona-Lage es erfordern, werden die Zugangsdaten für ein Zoommeeting kurz zuvor über Moodle bekanntgegeben. Teilnehmer sollten den Inhalt einer Einführung in die Integrationstheorie beherrschen; Kenntnisse aus der algebraischen Zahlentheorie sind außerdem hilfreich. Bei Interesse oder Fragen melden Sie sich bitte bei kiefer@mathematik.tu-darmstadt.de oder metzler@mathematik.tu-darmstadt.de.

[1] Anton Deitmar, *Automorphe Formen*, 2010, Springer, ISBN 9783642123894

[2] Serge Lang, *Algebraic number theory*, 2000, Springer, ISBN 3540942254

[3] D. Ramakrishnan, *Fourier analysis on number fields*, 1999, Springer, ISBN 0387984364

Weitere Informationen über das Programm der AG Algebra finden sich hier:

