Zetafunktionen und quadratische Zahlkörper

Seminar - Sommersemester 2021 - Algebra

Prof. Dr. Jan Hendrik Bruinier, M.Sc. Paul Kiefer, M.Sc. B.Sc. Ingmar Metzler

Motivation

L-Reihen sind wichtige Objekte in der analytischen Zahlentheorie welche man zahlreichen Klassen zahlentheoretischer und geometrischer Objekte zuordnen kann. Sie sind von der Form

$$L(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n^s}$$

für eine zahlentheoretische Folge $(a_n)_n$ und $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem Realteil. Dabei werden wichtige Eigenschaften der Objekte auf analytische Weise in der zugehörigen L-Reihe kodiert.

Zum Beispiel lässt sich einem algebraischen Zahlkörper $K/\mathbb{Q}$ eine L-Reihe ζ_K zuordnen welche *Dedekindsche Zetafunktion* genannt wird. Im Spezialfall $K = \mathbb{Q}$ erhält man die bekannte Riemannsche Zetafunktion $\zeta_{\mathbb{Q}}$. Für quadratische Zahlkörper $K/\mathbb{Q}$ ist der Quotient $\zeta_K(s)/\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ durch eine Dirichlet L-Reihe $L(\chi, s)$ für einen quadratischen Dirichlet-Charakter χ gegeben.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

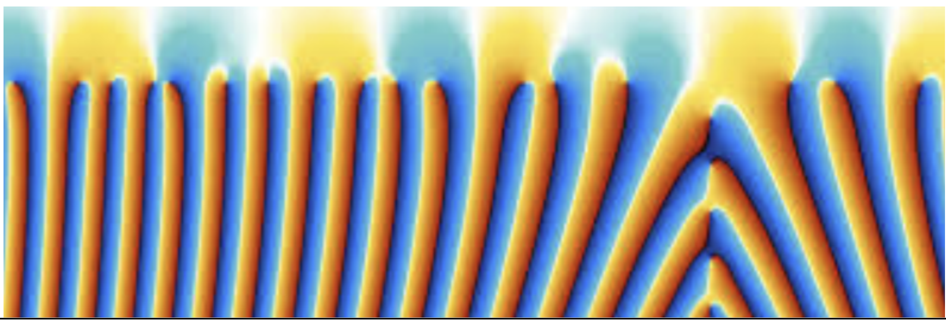
Inhalt

Basierend auf Don Zagiers Buch **[1]** sollen zunächst Dirichlet L-Reihen eingeführt und der Dirichletsche Primzahlsatz bewiesen werden. Dieser besagt, dass für teilerfremde Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ in der arithmetischen Progression $a + m \cdot b$ unendlich viele Primzahlen existieren. Anschließend werden quadratische Zahlkörper und ihre Zetafunktionen studiert um binäre quadratische Formen zu klassifizieren.

Weitere Informationen

Die Vorbesprechung soll am 25.03.2021 um 15:00 Uhr stattfinden – die Zoomdaten werden über Moodle bekanntgegeben. Bei Interesse oder Fragen melden Sie sich bitte bei kiefer@mathematik.tu-darmstadt.de oder metzler@mathematik.tu-darmstadt.de.

[1] Don B. Zagier, *Zetafunktionen und quadratische Körper*, Eine Einführung in die höhere Zahlentheorie, 1981, Springer-Verlag, ISBN 3-540-10603-0 (0-387-10603-0)



Weitere Informationen über das Programm der AG Algebra finden sich hier: