Kernbasierte Gewinnaufteilungen balancierter kooperativer n-Personen Spiele

Core based imputations in balanced cooperative n-person games
Bachelor-Thesis von Fabian Völz
Mai 2011

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Spieltheorie

Kernbasierte Gewinnaufteilungen balancierter kooperativer n-Personen Spiele
Core based imputations in balanced cooperative n-person games

Vorgelegte Bachelor-Thesis von Fabian Völz

1. Gutachten: Prof. Dr. Krabs
2. Gutachten:

Tag der Einreichung:

Erklärung zur Bachelor-Thesis

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelor-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 14. Mai 2011

____

(F. Völz)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit beschäftige ich mich mit kooperativen n-Personen Spielen. Solche Spiele bestehen, wie der Name schon vermuten lässt, aus n Spielern bzw. Parteien, welche gemeinsam oder alleine ihren persönlichen Gewinn zu maximieren versuchen.

In dem hier vorgestellten Modell dieser Spiele hängt der Gewinn, den ein Spieler oder eine Spielergruppe erhält, nur von den jeweils eingegangenen Kooperationen ab. Die Spieler selbst können also nicht zwischen unterschiedlichen Strategien wählen, sondern nur miteinander verhandeln, daher Kooperationen und Gewinnaufteilungen einer solchen Kooperation diskutieren.

Ich werde mich in meiner Arbeit auf den Fall konzentrieren, in welchem es für alle Spieler am günstigsten ist, mit allen anderen zusammenzuarbeiten. Der maximale Gewinn eines jeden einzelnen wird hierbei also erziehlt, wenn alle Spieler kooperieren, sich daher eine sogenannte große Koalition bildet.

Besonders möchte ich in diesem Zusammenhang auf die folgenden drei Fragestellungen eingehen:

1. Welche notwendingen und hinreichenden Bedingungen existieren für die Bildung einer großen Koalition in einem gegebenen Spiel, daher unter welchen Voraussetzungen wird jeder Spieler mit allen seinen Mitspielern kooperieren?

2. Angenommen eine große Koalition hat sich gebildet - wie lässt sich der gemeinsame Gewinn unter den Spielern so verteilen, dass sich keiner benachteiligt fühlt und die Koalition wieder verlässt?

3. Was sind aus Sicht der Spieler gerechte Gewinnaufteilungen und wie lässt sich der teilweise sehr subjektive Begriff der Fairness mathematisch definieren?

Der Aufbau meiner Arbeit orientiert sich an diesen Fragen:

Im zweiten Kapitel werden verschiedene Klassen von Spielen eingeführt, welche unterschiedlich gute Voraussetzungen für die Bildung einer großen Koalition haben.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich anschließend mit der Aufteilung des Gewinns einer großen Koalition. Dazu betrachte ich Abbildungen, welche einem Spiel, in dem sich eine große Koalition bilden kann, eine oder mehrere Aufteilungen des gemeinsamen Gewinns vorschlagen, die sie als besonders sinnvoll erachten.

Schließlich werde ich im vierten Kapitel auf die dritte Frage eingehen: Wie lässt sich eine faire Gewinnaufteilung definieren. Zur Beantwortung dieser Frage werde ich zwei von W. Krabs und A. Rosenbusch eingeführte Fairness-Begriffe vorstellen und diskutieren.

Außerdem schließt sich an jedes dieser Kapitel ein kleiner Abschnitt an, in welchem ich mit Hilfe von Beispielen das vorher eingeführte anwende und veranschauliche.

2 Grundlegende Definitionen

Ich beginne damit, das mathematische Modell eines kooperativen n-Personen Spieles einzuführen. Die kooperative Spieltheorie geht dabei ebenso wie auch die nichtkooperative Spieltheorie im Wesentlichen auf das 1944 von von Neumann und Morgenstern veröffentlichte Buch "Theory of games and economic behavior" [vNM44] zurück.

Im Anschluss werde ich mich, wie in der Einleitung angekündigt, mit der Frage beschäftigen, unter welchen Voraussetzungen alle Spieler eines Spieles miteinandern kooperieren, und dazu verschiedene Klassen von Spielen vorstellen.

2.1 Ein kooperatives n-Personen-Spiel und sein Kern

Definition 2.1.1. *Ein **kooperatives n-Personen-Spiel** ist ein geordnetes Paar (N,v), wobei n eine natürliche Zahl ist, N eine n-elementige Menge und $v\colon \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion mit $v(\emptyset) = 0$.*

Die Menge N repräsentiert hierbei die n Spieler des Spieles, welche in der Literatur oft auch als Agenten bezeichnet werden. Eine Spielergruppe $K \subseteq N$ nennt man **Koalition**, falls alle Spieler in K miteinander kooperieren, N selbst dementsprechend **große Koalition** und $K \subsetneq N$ kleine Koalition. Weiterhin gibt $v(K)$ für eine Koalition $K \subseteq N$ den gemeinsamen Gewinn von K an. Die Funktion v ist daher die Auszahlungsfunktion des Spieles. Eine solche Auszahlung $v(K)$ an eine Koalition K ist unabhängig von den weiteren Mitspielern $N \setminus K$ und beinhaltet keine Regelung darüber, wie der gemeinsame Gewinn $v(K)$ unter den Koalitionsmitgliedern aufgeteilt wird. Ziel eines jeden Spielers ist es in diesem Modell, seinen eigenen Gewinn zu maximieren.

Definition 2.1.2. *Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge der kooperativen n-Personen-Spiele gegeben durch*

$$\mathcal{G}_n := \{(N,v)\colon N \text{ Menge mit } |N| = n \text{ und } (v\colon \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}) \text{ mit } v(\emptyset) = 0\}.$$

Aus Gründen der Lesbarkeit werde ich in dieser Arbeit oft nur von "Spielen" sprechen, gemeint sind dabei aber immer die soeben definierten kooperativen n-Personen-Spiele. Ebenso werde ich zwei Spiele $(N_1, v_1), (N_2, v_2) \in \mathcal{G}_n$ als äquivalent ansehen, falls das eine durch eine reine Umbenennung der Spieler in das andere überführt werden kann, daher falls eine Permutation $\sigma\colon N_1 \to N_2$ existiert, sodass $v_1(K) = v_2(\sigma(K))$ für alle $K \subseteq N_1$ ist. Charakteristisch für ein Spiel ist also im Prinzip nur die Anzahl n der teilnehmenden Spieler sowie die Auszahlungsfunktion v, welche aufgrunddessen oft als **charakteristische Funktion** eines Spieles bezeichnet wird. Außerdem ist es mit Hilfe dieser Äquivalenz möglich ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Spieler durchzunummerieren, daher $N := \{1, \dots, n\}$ zu setzen, wovon ich im Folgenden ausgehen werde, wenn dies nicht explizit anders angegeben ist.

Zunächst möchte ich nun die möglichen Aufteilungen des Gewinns der großen Koalition unter allen Spielern betrachten. Eine solche Aufteilung lässt sich durch einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ darstellen - eine Komponente x_i repräsentiert den Anteil des gemeinsamen Gewinns $v(N)$, welcher Spieler i zugesprochen wird. Die einzelnen Komponenten müssen sich dementsprechend zu $v(N)$ aufaddieren.

Definition 2.1.3. *Die Aufteilungen $\mathcal{A}(G)$ eines Spieles $G = (N,v)$ sind gegeben durch*

$$\mathcal{A}(G) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i \in N} x_i = v(N) \right\}.$$

Diese Menge möchte ich nun etwas einschränken. Zunächst lassen sich Aufteilungen vernachlässigen, bei denen einem Spieler weniger zugesprochen wird, als er alleine erreichen kann, denn ein solcher Spieler würde im gegebenen Fall nicht kooperieren. Es wird also $x_i \geq v(\{i\})$ für alle $i \in N$ gefordert. Da gleiches aber auch für Koalitionen gilt, ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 2.1.4. *Der **Kern** $\mathcal{C}(G)$ eines Spieles $G = (N, v)$ ist gegeben durch*

$$\mathcal{C}(G) := \left\{ x \in \mathcal{A}(G) \colon \sum_{i \in K} x_i \geq v(K) \text{ für alle } \emptyset \neq K \subsetneq N \right\}.$$

Der Kern besteht also aus den Aufteilungen des Gewinns, welche jedem Spieler und jeder Koalition mindestens den Gewinn garantieren, den sie auch alleine erhalten würden. Das heißt, dass kein Spieler und keine Koalition einen konkreten Anreiz besitzt, die große Koalition zu verlassen.

Zuerst definiert wurde der Kern eines kooperativen Spieles 1959 von Gillies [Gil59], nachdem Edgeworth ihn bereits 1881 im Rahmen einer Tauschökonomie eingeführt hatte [Edg81]. Bis heute spielt der Kern eine zentrale Rolle in der kooperativen Spieltheorie - seine praktische Anwendbarkeit ist aber umstritten.

Für diese Arbeit ist entscheidend, dass ein nicht-leerer Kern eine notwendige Bedingung für eine funktionierende große Koalition in dem hier vorgestellten Modell eines kooperativen n-Personen Spieles darstellt. Denn sei $x \in \mathcal{A}(G)$ eine Aufteilung eines Spieles, daher $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, und sei $x \notin \mathcal{C}(G)$. Dann existiert $K \subseteq N$ mit $\sum_{i \in K} x_i < v(K)$. Die Spielergruppe K wird sich also von der großen Koalition abwenden und eine eigene kleinere Koalition bilden, welche ihren Teilnehmern einen größeren Gewinn sichert, als sie durch die Aufteilung x erhalten hätten. Ist der Kern des Spieles nun leer, so gilt dies für alle möglichen Aufteilungen $x \in \mathbb{R}^n$. Somit wird sich in diesem Fall keine Aufteilung des Gewinns der großen Koalition finden, mit der alle Spieler einverstanden sind.

Dies zeigt, dass Spiele mit nicht-leerem Kern eine besondere Klasse von Spielen darstellen, und motiviert die folgende Definition.

Definition 2.1.5. *Ein Spiel G heißt **balanciert**, wenn $\mathcal{C}(G) \neq \emptyset$ gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge der balancierten, kooperativen n-Personen Spiele gegeben durch*

$$\mathcal{B}_n := \{ G \in \mathcal{G}_n : \mathcal{C}(G) \neq \emptyset \}.$$

Die Menge aller balancierten Spiele ist gegeben durch $\mathcal{B} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$.

Die Klasse der balancierten Spiele ist für meine Arbeit offensichtlich von zentraler Bedeutung, da ich, wie in der Einleitung bereits erklärt, speziell Aufteilungen des Gewinns der großen Koalition untersuchen möchte. Dies setzt natürlich die Bildung einer solchen voraus, was wiederum, wie gerade erklärt, ein balanciertes Spiel voraussetzt.

Zu bemerken ist noch, dass sich nur theoretisch in jedem balancierten Spiel auch eine große Koalition bildet, welche jedem Spieler und jeder Koalition ihren maximalen Gewinn garantiert. Praktisch scheitert das Bilden der großen Koalition teilweise trotz eines nicht-leeren Kerns, nämlich an der Wahl der Gewinnaufteilung - alle beteiligten Spieler müssen sich auf eine bestimmte Aufteilung $x \in \mathcal{C}(G)$ einigen - oder dem Gerechtigkeitsempfinden der Spieler - ein Spieler, der sich benachteiligt fühlt, wird bei einer großen Koalition nicht mitkwirken. Mit diesen beiden Problemen werden sich Kapitel drei und vier beschäftigen: Wie lassen sich einzelne Gewinnaufteilungen auswählen und welche dieser Aufteilungen sind als “fair” zu betrachten.

2.2 Der Utopia-Vektor, die Lückenfunktion und der Konzessions-Vektor

Da der Kern eines Spieles zwar eine sehr starke, aber auch eine sehr undurchsichtige Menge darstellt, werde ich in diesem Abschnitt zunächst die Elemente des Kerns genauer beschreiben, wodurch sich direkt zwei notwendige Bedingungen für das nicht-leer Sein des Kerns ergeben werden. Dabei orientiere ich mich sowohl in diesem als auch im nächsten Abschnitt an der Notation von W. Krabs aus [Kra05].

Definition 2.2.1. *Der* ***Utopia-Vektor*** $u \in \mathbb{R}^n$ *eines Spieles* (N, v) *ist gegeben durch*

$$u_i := v(N) - v(N \setminus \{i\}) \quad \textit{für alle } i \in N.$$

Die i-te Komponente u_i des Utopia-Vektors wird **marginaler Beitrag** des Spielers i im Spiel (N, v) genannt (in Bezug auf die große Koalition). Er beschreibt den Verlust, welchen die große Koalition erleidet, wenn Spieler i selbige verlässt. Daraus folgt, dass die Auszahlung der großen Koalition an Spieler i kleiner oder gleich dessen marginalen Beitrages ist, denn mehr ist dieser Spieler nicht wert. Dies bedeutet, dass u eine obere Schranke für die Elemente des Kerns darstellt. Der Name “Utopia-Vektor” bringt zum Ausdruck, dass diese obere Schranke nur selten erreicht wird. Der folgende Satz formalisiert das bereits erwähnte:

Satz 2.2.2. *Sei* $G = (N, v)$ *ein Spiel,* u *dessen Utopia-Vektor und* $x \in \mathcal{C}(G)$*. Dann gilt* $x_i \leq u_i$ *für alle* $i \in N$*.*

Beweis. Sei $x \in \mathcal{C}(G)$ und $i \in N$ beliebig. Da x im Kern des Spieles liegt, gilt mit $K := N \setminus \{i\}$ insbesondere $\sum_{j \in K} x_j \geq v(K)$, und somit folgt

$$0 \leq \sum_{j \in K} x_j - v(K) = \sum_{j \in N} x_j - x_i - v(K) = v(N) - v(K) - x_i = u_i - x_i.$$

□

Die nächste Definition liefert ein erstes Kriterium für einen leeren Kern und ist für die darauf folgende Definition des Konzessions-Vektors nötig.

Definition 2.2.3. *Die* ***Lückenfunktion*** g *eines Spieles* (N, v) *ist gegeben durch*

$$g : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R},\ K \mapsto \sum_{i \in K} u_i - v(K).$$

Die Funktion g wird Lückenfunktion genannt, da $g(K)$ die Differenz zwischen der Summe der marginalen Beiträge der Spieler einer Koalition K und dem Gewinn ist, welchen die Koalition K alleine erreichen könnte. Die Summe dieser marginalen Beiträge ist aber nach obigem Lemma auch eine obere Schranke für den Gewinn, den die Koalition K von der großen Koalition erwarten kann. Somit beschreibt $g(K)$ die Lücke zwischen diesem maximalen Gewinn der Koalition K in einer großen Koalition und dem Gewinn, welchen die Koalition K bereits für sich ohne die anderen Mitspieler $N \setminus K$ erreichen kann.

In Folge dessen wird die Koalition K eine große Koalition verweigern, falls die obere Schranke des Gewinns, den K durch eine große Koalition erhält, kleiner ist, als der Gewinn, den die Koalition K alleine erlangen kann:

Satz 2.2.4. *Sei* $G = (N, v)$ *ein Spiel und* g *dessen Lückenfunktion. Gibt es ein* $K \subseteq N$ *mit* $g(K) < 0$*, so ist* $\mathcal{C}(G)$ *leer.*

Beweis. Sei $K \subseteq N$ mit $g(K) < 0$ und $\mathcal{C}(G)$ nicht-leer. Dann gibt es ein $x \in \mathcal{C}(G)$ und für dieses folgt

$$0 > g(K) = \sum_{i \in K} u_i - v(K) \geq \sum_{i \in K} x_i - v(K).$$

Somit ist $v(K) > \sum_{i \in K} x_i$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $x \in \mathcal{C}(G)$. Also ist $\mathcal{C}(G)$ leer. □

Aus diesem Satz folgt direkt, dass

$$g(K) \geq 0 \text{ für alle } K \subseteq N$$

eine notwendige Bedingung dafür ist, dass der Kern nicht-leer ist. Hinreichend ist diese Bedingung im Allgemeinen aber nicht. Weiterhin lässt sich noch bemerken, dass es im Allgemeinen nicht nötig ist, $g(N \setminus \{i\})$ für $i \in N$ zu berechnen, da dieser Wert mit $g(N)$ übereinstimmt. Diese Tatsache spart in der Praxis etwas Arbeit.

Bemerkung 2.2.5. *Sei (N,v) ein Spiel und g dessen Lückenfunktion. Dann gilt $g(N\setminus\{i\})=g(N)$ für alle $i\in N$.*

Beweis. Sei $i\in N$ beliebig, $K:=N\setminus\{i\}$ und u der Utopia-Vektor des Spieles. Dann ergibt sich

$$g(N)-g(K)=\left(\sum_{j\in N}u_j-v(N)\right)-\left(\sum_{j\in K}u_j-v(K)\right)=u_i-(v(N)-v(K))=0.$$

□

Mit Hilfe des Utopia-Vektors und der Lückenfunktion lässt sich nun der Konzessions-Vektor definieren. Dazu betrachtet man zunächst einen festen Spieler i und vergleicht die ihm zur Auswahl stehenden Koalitionen K. Angenommen dieser Spieler i verspricht jedem anderen Koalitionsmitglied einer solchen Koalition K dessen marginalen Beitrag, daher den maximalen Wert, welchen dieser von der großen Koalition erwarten kann, dann bleibt für Spieler i selbst noch

$$R_i(K)=v(K)-\sum_{j\in K\setminus\{i\}}u_j=u_i-\left(\sum_{j\in K}u_j-v(K)\right)=u_i-g(K).$$

Spieler i möchte jetzt diesen Betrag maximieren. Dabei gilt

$$\max\left\{R_i(K)\colon K\subseteq N \text{ mit } i\in K\right\}=u_i-\min\left\{g(K)\colon K\subseteq N \text{ mit } i\in K\right\}.$$

Aus Sicht von Spieler i ist die attraktivste Koalition K also diejenige, für die $g(K)$ minimal wird. Dieses Minimum, daher die kleinste Differenz zwischen der maximal durch die große Koalition möglichen Auszahlung an K und dem, was K bereits alleine erreichen kann, wird nun mit der folgenden Definition festgehalten.

Definition 2.2.6. *Der **Konzessions-Vektor** $\lambda\in\mathbb{R}^n$ eines Spieles (N,v) ist gegeben durch*

$$\lambda_i:=\min\left\{g(K)\colon K\subseteq N \textit{ mit } i\in K\right\}\quad \textit{für alle } i\in N.$$

Durch den Konzessions-Vektor lässt sich jetzt auch eine untere Schranke für die Elemente des Kerns bestimmen, denn wenn eine Aufteilung des Gewinns der großen Koalition Spieler i weniger zuspricht, als dieser mit obiger attraktivsten Koalition K_0 erhalten würde, nämlich

$$R_i(K_0)=\max\left\{R_i(K)\colon K\subseteq N \text{ mit } i\in K\right\}=u_i-\lambda_i,$$

wird er sich gegen die große Koalition und für die Koalition K_0 entscheiden. Seine Koalitionsmitglieder $K_0\setminus\{i\}$ werden ihm dabei nicht im Wege stehen, da er ihnen ihre marginalen Beiträge garantiert, sie können also nur gewinnen. Formalisiert bedeutet das:

Satz 2.2.7. *Sei $G=(N,v)$ ein Spiel, u dessen Utopia-Vektor und λ der Konzessionsvektor des Spieles. Sei weiter $x\in C(G)$. Dann gilt $x_i\geq u_i-\lambda_i$ für alle $i\in N$.*

Beweis. Sei $x\in\mathcal{C}(G)$ und $i\in N$ beliebig. Zu diesem i existiert ein $K\subseteq N$ mit $i\in K$, sodass $\lambda_i=g(K)$ gilt. Weiterhin ist $\sum_{j\in K}x_j\geq v(K)$, da x im Kern liegt. Somit ergibt sich

$$\lambda_i=g(K)=\sum_{j\in K}u_j-v(K)\geq u_i+\sum_{j\in K\setminus\{i\}}x_j-\sum_{j\in K}x_j=u_i-x_i.$$

□

In Verbindung mit der durch den Utopia-Vektor u gegebenen oberen Schranke der Elemente des Kerns ergibt sich für $x \in \mathcal{C}(G)$

$$u_i - \lambda_i \leq x_i \leq u_i \quad \text{für alle } i \in N.$$

Dies ist bereits eine gute Charakterisierung der Elemente des Kerns. Summiert man obige Ungleichung für alle $i \in N$ auf, erhält man

$$\begin{array}{rllll} & \sum_{i\in N}(u_i - \lambda_i) & \leq \; v(N) & & \leq \; \sum_{i \in N} u_i \\ \Leftrightarrow & \sum_{i\in N}(-\lambda_i) & \leq \; v(N) - \sum_{i\in N} u_i & & \leq \; 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i\in N}\lambda_i & \geq \; g(N) & & \geq \; 0. \end{array}$$

Damit ist eine weitere notwendige Bedingung dafür gefunden, dass der Kern nicht-leer ist. (Hinreichend ist aber auch diese Bedingung nicht.)

Satz 2.2.8. *Sei $G = (N, v)$ ein Spiel, g dessen Lückenfunktion und λ der Konzessionsvektor des Spieles. Ist $g(N) > \sum_{i\in N} \lambda_i$, so ist $\mathcal{C}(G)$ leer.*

Beweis. Sei $g(N) > \sum_{i\in N} \lambda_i$ und $x \in \mathcal{C}(G)$ ein beliebiges Element im Kern. Dann gilt nach dem vorangegangenen Satz über die untere Schranke der Elemente des Kerns $x_i \geq u_i - \lambda_i$ für alle $i \in N$. Summiert über i ergibt sich im Widerspruch zur Annahme

$$\sum_{i\in N}\lambda_i \geq \sum_{i\in N}(u_i - x_i) = \sum_{i\in N} u_i - v(N) = g(N).$$

Also gibt es kein solches $x \in \mathcal{C}(G)$ und der Kern ist leer. □

2.3 Quasi-balancierte und konvexe Spiele

Die beiden im letzten Abschnitt gefundenen notwendigen Bedingungen für einen nicht-leeren Kern motivieren die folgendende Definition:

Definition 2.3.1. *Sei $G = (N, v)$ ein Spiel, g dessen Lückenfunktion und λ der Konzessionsvektor des Spieles. G heißt* ***quasi-balanciert****, wenn $g(K) \geq 0$ für alle $K \subseteq N$ und $\sum_{i\in N} \lambda_i \geq g(N)$ gilt.*

Solche Spiele haben dementsprechend gute Voraussetzungen um einen nicht-leeren Kern zu besitzen, sind also fast balanciert - daher auch der Name "quasi-balanciert". Auf der anderen Seite muss ein Spiel, dessen Kern nicht-leer ist, natürlich obige Voraussetzungen erfüllen.

Korollar 2.3.2. *Balancierte Spiele sind quasi-balanciert.*

Beweis. Dies folgt direkt aus den Sätzen 2.2.4 und 2.2.8. □

Bevor ich weitere Klassen von Spielen betrachte, möchte ich noch kurz den trivialen Fall betrachten, dass sich die marginalen Beiträge genau zum Gewinn der großen Koalition summieren:

Satz 2.3.3. *Sei (N, v) ein Spiel und g dessen Lückenfunktion. Sei weiter $g(K) \geq 0$ für alle $K \subseteq N$ und $g(N) = 0$. Dann besteht der Kern des Spieles gerade aus dem Utopia-Vektor u des Spieles.*

Beweis. Aus $g(N) = 0$ folgt direkt $\sum_{i\in N} u_i = v(N)$, also $u \in \mathcal{A}(G)$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $g(K) \geq 0$, daher $\sum_{i\in K} u_i \geq v(K)$, für alle $K \subseteq N$ und somit $u \in \mathcal{C}(G)$. Es bleibt zu zeigen, dass u auch das einzige Element im Kern ist. Sei nun $x \in \mathcal{C}(G)$ beliebig. Dann gilt $x_i \leq u_i$ für alle $i \in N$. Angenommen es gibt ein $k \in N$ mit $x_k < u_k$, dann führt $\sum_{i\in N} x_i < \sum_{i\in N} u_i = v(N)$ zu einem Widerspruch. Also ist $x_i = u_i$ für alle $i \in N$, daher $x = u$, und u somit das einzige Element im Kern. □

Da nach Definition in quasi-balancierten Spielen $g(K) \geq 0$ für alle $K \subseteq N$ gilt, folgt direkt:

Korollar 2.3.4. *Sei $G = (N, v)$ ein quasi-balanciertes Spiel, g dessen Lückenfunktion und u der Utopia-Vektor des Spieles. Sei weiter $g(N) = 0$. Dann ist $\mathcal{C}(G) = \{u\}$.*

Damit ist der Fall $g(N) = 0$ aber bereits vollständig behandelt. Sei nun $g(N) > 0$ für ein quasi-balanciertes Spiel, daher $\sum_{i \in N} u_i > v(N)$. Dann ist es der großen Koalition nicht mehr möglich jedem Spieler seinen marginalen Beitrag zu zahlen. In diesem Fall ist es nur sehr schwer möglich, eine Aussage über den Kern des Spieles zu machen - dieser kann genauso gut leer wie nicht-leer sein.

Um in dieser Situation zu stärkeren Aussagen zu gelangen, führe ich eine neue Klasse von Spielen ein, die konvexen Spiele. Deren Kern ist auch im Falle $g(N) > 0$ nicht-leer. Sie bilden eine Unterklasse der balancierten Spiele, und somit auch eine Unterklasse der quasi-balancierten Spiele.

Definition 2.3.5. *Ein Spiel (N, v) heißt **konvex**, wenn für alle $K, L \subseteq N$ gilt*

$$v(K) + v(L) \leq v(K \cap L) + v(K \cup L).$$

Bevor ich im Anschluss zeigen werde, dass tatsächlich jedes konvexe Spiel balanciert ist, möchte ich kurz auf die etwas abstrakte Definition selbiger eingehen. Dazu betrachte man die Klasse der konvexen Spiele zunächst als Unterklasse der superadditiven Spiele, welche folgendermaßen definiert sind:

Definition 2.3.6. *Ein Spiel (N, v) heißt **superadditiv**, wenn für alle $K, L \subseteq N$ mit $K \cap L = \emptyset$ gilt*

$$v(K) + v(L) \leq v(K \cup L).$$

Ein Spiel ist also superadditiv, wenn es für zwei beliebige, sich nicht überschneidende Koalitionen niemals einen Nachteil hat, sich zu einer neuen größeren Koalition zusammen zu schließen. Konvexe Spiele erfüllen diese Bedingung nach Definition, denn in jedem Spiel ist $v(K \cap L) = 0$ für $K, L \subseteq N$ mit $K \cap L = \emptyset$ wegen $v(\emptyset) = 0$. Damit lässt sich festhalten:

Korollar 2.3.7. *Konvexe Spiele sind superadditiv.*

In einem superadditiven Spiel wird das Zusammenarbeiten also gefördert. Man könnte nun vermuten, dass dies bereits ausreicht, um einen nicht-leeren Kern zu garantieren. In einem zwei-Personen Spiel ist dies auch tatsächlich der Fall, denn hier erhält die große Koalition mindestens genauso viel, wie die beiden einzelnen Spieler jeweils schon für sich. Im Allgemeinen ist die Bedingung aber nicht hinreichend, wie das folgende kleine Beispiel demonstriert:

Beispiel 2.3.8. Sei $G = (N, v)$ ein drei-Personen Spiel mit $N = \{1, 2, 3\}$ und $v \colon \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$. Sei weiter $v(K) = 0$ für $|K| \leq 1$, $v(K) = 3$ für $|K| = 2$ und $v(N) = 4$. Dann lässt sich leicht nachrechnen, dass G zwar superadditiv, jedoch nicht balanciert ist.

Wie ist das zu verstehen, wenn Superadditivität doch Kooperationen unterstützt, daher warum kooperiert eine bestehende Zweier-Koalition, sagen wir $K = \{1, 2\}$, nicht mit dem verbleibenden Mitspieler, in diesem Falle Spieler 3? Angenommen $x \in \mathbb{R}^3$ wäre eine Aufteilung des Gewinns der großen Koalition. Dann würde die Koalition K von dieser Aufteilung mindestens ihren eigenen Gewinn beanspruchen, daher $x_1 + x_2 \geq v(K) = 3$, und Spieler 3 bleibt der Rest, also $x_3 \leq 1$, was aber noch nicht problematisch ist, denn alleine würde dieser Spieler gar nichts erhalten. Ich nehme also weiter an, die drei Spieler würden sich wirklich zu einer großen Koalition zusammenschließen. Dann gibt es jetzt aber eine andere Zweier-Koalition $K' = \{x_j, x_3\}$ mit $j \in \{1, 2\}$, welche alleine mehr erhält, als ihr von der großen Koalition zugesprochen wird, daher $x_j + x_3 < v(K') = 3$, und diese wird die große Koalition wieder verlasen. Dass eine solche Koalition existiert, lässt sich durch Widerspruch zeigen, denn angenommen es gäbe keine solche, dann wäre

$$4 = v(N) = \sum_{j \in N} x_j = \frac{1}{2} \cdot \big((x_1 + x_2) + (x_1 + x_3) + (x_2 + x_3)\big) \geq \frac{1}{2} \cdot (3 + 3 + 3) = 4{,}5.$$

Der kritische Punkt besteht also darin, dass Spieler 3 innerhalb der neu gebildeten Koalition eine aus seiner Sicht bessere Teilkoalition findet, mit welcher er die große Koalition wieder verlässt, da sowohl er als auch sein Koalitionspartner von einem solchen Ausstieg profitieren. Und das ist auch gerade der Grund, warum superadditive Spiele im Allgemeinen eben nicht balanciert sind:

Es reicht nicht nur dafür zu sorgen, dass der Zusammenschluss zweier bestehender Kooperationen diesen nur ihren bisherigen Gewinn garantiert, sondern es muss zusätzlich verlangt werden, dass im Anschluss keine Teilkoalition dieser neu entstandenen Koalition selbige wieder verlässt. Erst dann ist ein Spiel mit Sicherheit balanciert. Und genau das verspricht die Konvexität eines Spieles, wenn auch etwas versteckt.

Theorem 2.3.9. *Konvexe Spiele sind balanciert.*

Bevor ich diese starke Aussage beweise, möchte ich zunächst die bis hierhin eingeführten Klassen von Spielen mit Hilfe einer Abbildung zusammenfassen und gleichzeitig in Bezug zueinander setzen.

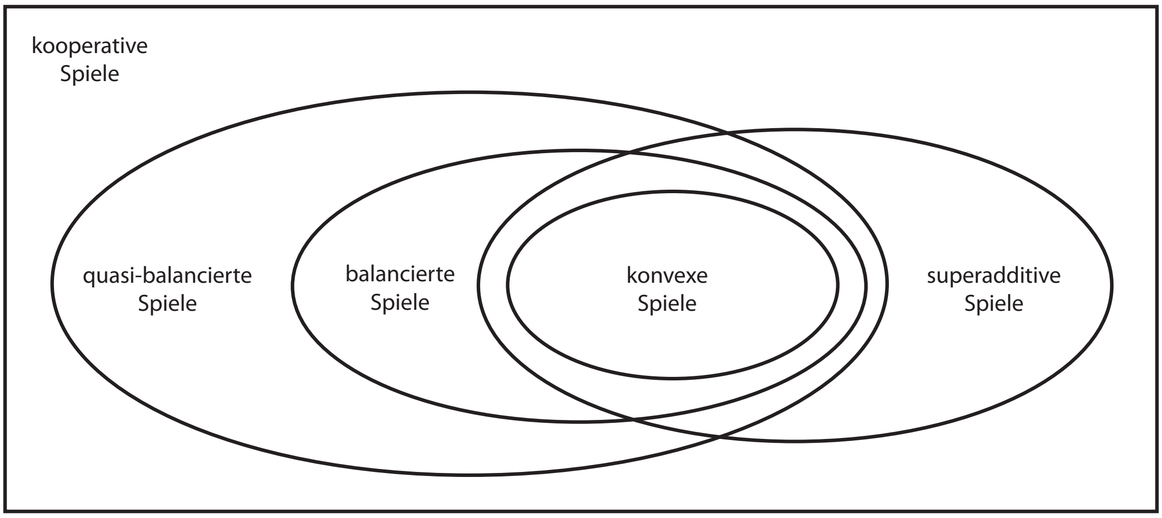

Abbildung 2.1: eine Übersicht der eingeführten Klassen von Spielen

Um nun Theorem 2.3.9 zu beweisen, führe ich die folgende zu 2.3.5 äquivalente Definition eines konvexen Spieles ein.

Lemma 2.3.10. *Ein Spiel (N, v) ist genau dann konvex, wenn für alle $K, L, M \subseteq N$ mit $K \subseteq L \subseteq N \setminus M$ gilt*

$$v(K \cup M) - v(K) \leq v(L \cup M) - v(L).$$

Beweis. Sei zunächst (N, v) ein konvexes Spiel und $K, L, M \subseteq N$ beliebig mit $K \subseteq L \subseteq N \setminus M$. Dann ist $K \cap M = L \cap M = \emptyset$, sowie $K \cup L = L$ und $K \cap L = K$. Mit der Konvexität des Spieles ergibt sicht somit

$$\begin{aligned} v(K \cup M) + v(L) &\leq v\left((K \cup M) \cap L\right) + v\left((K \cup M) \cup L\right) \\ &= v\left((K \cap L) \cup (M \cap L)\right) + v\left((K \cup L) \cup M\right) \\ &= v(K) + v(L \cup M). \end{aligned}$$

Also gilt $v(K \cup M) - v(K) \leq v(L \cup M) - v(L)$ für alle $K, L, M \subseteq N$ mit $K \subseteq L \subseteq N \setminus M$.

Es bleibt die Rückrichtung zu zeigen. Sei dazu (N, v) ein Spiel mit der Eigenschaft, dass $v(K \cup M) - v(K) \leq v(L \cup M) - v(L)$ für alle $K, L, M \subseteq N$ mit $K \subseteq L \subseteq N \setminus M$ gilt. Seien weiterhin $A, B \subseteq$

N beliebig. Dann gilt $A \cap B \subseteq B \subseteq B \cup (N \setminus A) = N \setminus (A \setminus B)$. Mit $K := A \cap B$, $L := B$, $M := A \setminus B$ ergibt sich nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} v(A) - v(A \cap B) &= v\left((A \cap B) \cup (A \setminus B)\right) - v(A \cap B) \\ &\leq v\left(B \cup (A \setminus B)\right) - v(B) \\ &= v(A \cup B) - v(B). \end{aligned}$$

Also gilt $v(A) + v(B) \leq v(A \cap B) + v(A \cup B)$ und das Spiel ist somit konvex. □

Damit lässt sich jetzt Theorem 2.3.9 beweisen.

Beweis. Sei (N, v) ein konvexes Spiel. Setze $K_0 := \emptyset$, $K_i := \{1, \ldots, i\}$ für alle $i \in N$ und $x_i := v(K_i) - v(K_{i-1})$ für alle $i \in N$. Ich werde im Folgenden zeigen, dass der Vektor x im Kern des Spieles liegt. Zunächst ergibt sich, dass x tatsächlich eine Aufteilung des Gewinns der großen Koalition ist, daher dass gilt

$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N} \left(v(K_i) - v(K_{i-1}) \right) = v(N) - v(\emptyset) = v(N).$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\sum_{i \in H} x_i \geq v(H)$ für alle $H \subseteq N$ erfüllt ist. Ich benutze dazu eine Induktion über die Anzahl der Elemente in H, wobei der Induktionsanfang mit $H = \emptyset$ klar ist.

Sei $H \subseteq N$ beliebig, und nehme an, dass die Behauptung für $K \subseteq N$ mit $|K| < |H|$ bereits erfüllt wäre. Setze $h := \max(H)$. Dann ist $H \setminus \{h\} \subseteq K_{h-1} \subseteq N \setminus \{h\}$, und mit der Konvexität des Spieles und Lemma 2.3.10 folgt

$$\begin{aligned} v(K_h) - v(K_{h-1}) &= v(K_{h-1} \cup \{h\}) - v(K_{h-1}) \\ &\geq\ v\left((H \setminus \{h\}) \cup \{h\}\right) - v(H \setminus \{h\}) = v(H) - v(H \setminus \{h\}). \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme gilt außerdem $\sum_{i \in H \setminus \{h\}} x_i \geq\ v(H \setminus \{h\})$, und somit ergibt sich bereits

$$\sum_{i \in H} x_i = \sum_{i \in H \setminus \{h\}} x_i + x_h \ \geq\ v(H \setminus \{h\}) + \left(v(K_h) - v(K_{h-1}) \right) \ \geq\ v(H).$$

Also liegt x im Kern des Spieles, welcher daher nicht-leer, und das Spiel somit balanciert ist. □

Eine schöne Eigenschaft von konvexen Spielen ist die Montonie der Lückenfunktion.

Lemma 2.3.11. *Sei (N, v) ein konvexes Spiel und g dessen Lückenfunktion. Dann gilt $g(K) \leq g(L)$ für alle $K \subseteq L \subseteq N$.*

Beweis. Sei (N, v) ein konvexes Spiel, g dessen Lückenfunktion und u der Utopia-Vektor des Spieles. Sei weiter $K \subsetneq N$ beliebig und $h \in N \setminus K$. Mit der Konvexität des Spieles, Lemma 2.3.10 und $K \subseteq N \setminus \{h\}$ ergibt sich nun zunächst

$$v(K \cup \{h\}) - v(K) \leq v\left((N \setminus \{h\}) \cup \{h\}\right) - v(N \setminus \{h\}) = v(N) - v(N \setminus \{h\}) = u_h,$$

und damit folgt weiter

$$g(K \cup \{h\}) - g(K) = u_h - v(K \cup \{h\}) + v(K) \geq 0,$$

daher $g(K) \leq g(K \cup \{h\})$. Seien nun $K, L \subseteq N$ beliebig mit $K \subseteq L$ und $H = \{h_1, \ldots, h_m\} := L \setminus K$. Setze $K_0 := K$ und $K_i := K_{i-1} \cup \{h_i\}$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dann ist $g(K_{i-1}) \leq g(K_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und somit $g(K) = g(K_0) \leq \ldots \leq g(K_m) = g(L)$. □

In diesem Fall vereinfacht sich auch der Konzessionsvektor λ eines Spieles (N, v), denn nach Lemma 2.3.11 gilt $g(\{i\}) \leq g(K)$ für alle $i \in N$ und für alle $K \subseteq N$ mit $i \in K$.

Satz 2.3.12. *Sei (N, v) ein konvexes Spiel, g dessen Lückenfunktion und λ der Konzessionsvektor des Spieles. Dann gilt $\lambda_i = g(\{i\})$ für alle $i \in N$.*

Mit Satz 2.2.7 und $g(\{i\}) = u_i - v(\{i\})$ folgt somit weiterhin:

Korollar 2.3.13. *Sei $G = (N, v)$ ein konvexes Spiel und $x \in \mathcal{C}(G)$. Dann gilt $x_i \geq v(\{i\})$ für alle $i \in N$.*

Abschließend möchte ich nun noch die in diesem Kapitel eingeführten Definitionen und erhaltenen Aussagen an einigen Beispielen veranschaulichen.

Beispiel 2.4.1. Beginnen werde ich mit einem sehr einfachen Beispiel: Man stelle sich zwei sich nicht kennende Personen a und b vor, denen zusammen 10 Euro angeboten werden, die sie untereinander aufteilen sollen. Wenn sie sich nicht einigen, gehen beide leer aus. Dies ist ein kooperatives 2-Personen-Spiel $G = (N, v)$ mit der Spielermenge $N := \{a, b\}$ und der charakteristischen Funktion $v \colon \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \to \mathbb{R}$ mit

$$v(\emptyset) = 0,\ v(\{a\}) = 0,\ v(\{b\}) = 0 \text{ und } v(N) = 10.$$

Der Kern des Spieles ist folglich die Menge

$$\mathcal{C}(G) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 + x_2 = 10 \text{ und } x_1, x_2 \geq 0\right\}.$$

Dies entspricht allen Aufteilungen der 10 Euro, bei denen jeder der beiden Mitspieler mindestens 0 Euro bekommt, daher nicht zusätzlich etwas bezahlen muss. Unter einer gerechten Verteilung versteht sich hier intuitiv die Gleichverteilung des Geldes unter beiden Spielern.

Man nehme nun an, Spieler a würden für den Fall, dass die Kooperation mit Spieler b fehl schlägt, 6 Euro garantiert werden, daher $v(\{a\}) = 6$. Dann verändert sich natürlich auch der Kern, denn dieser Spieler wird einer Aufteilung der 10 Euro vermutlich nicht mehr zustimmen, wenn ihm nicht mindestens 6 davon zugesprochen werden. Der Kern ist nun somit gegeben durch

$$\mathcal{C}(G) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 + x_2 = 10 \text{ und } x_1 \geq 6, x_2 \geq 0\right\},$$

und es stellt sich die Frage, welche Verteilung der 10 Euro unter diesen veränderten Spielbedingungen als "gerecht" bezeichnet werden kann.

Beispiel 2.4.2. Das nächste Beispiel setzt sich aus w Arbeitern und einem Unternehmer z zusammen, die alle das Bestreben haben Geld zu erwirtschaften. Ich möchte dies als kooperatives n-Personen Spiel modellieren. Sei dazu $N := W \cup \{z\}$ mit $W = \{1, \ldots, w\}$ die Spielermenge und $v \colon \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion, welche es nun zu beschreiben gilt.

Man kann davon ausgehen, dass die Arbeiter immer kleine Jobs in großen Firmen finden werden, was ihnen einen Wert von 1 verleiht, daher $v(\{i\}) = 1$ für $i \in W$. Da die Arbeiter aber nicht in der Lage sind sich sinnvoll zu koordinieren, erzielen auch Gruppen von Arbeitern keinen größeren Gewinn, daher $v(K) = |K|$ für $K \subseteq W$. Der Unternehmer hat eine gute Idee, kann diese alleine aber nicht umsetzen. Er hat für sich gesehen also keinen Wert, daher $v(\{z\}) = 0$, kann aber die Arbeiter effektiv einsetzen. Vereinfacht nehme ich an, dass er ihre Produktivität verdoppelt, daher $v(K) = 2(|K| - 1)$ für $K \subseteq N$ mit $z \in K$.

Es ist direkt ersichtlich, dass sich eine große Koalition für alle Beteiligten lohnt. Somit stellt sich die Frage, wie sich der gemeinsame Gewinn $v(N) = 2w$ unter den Arbeitern und dem Unternehmer aufteilen lässt, daher wie der Kern des Spieles aussieht. Da dieser aber nicht wie im ersten Beispiel offensichtlich ist, möchte ich mich ihm hier mit Hilfe der in diesem Kapitel eingeführten Methoden nähern. Dazu betrachtet man zunächst die marginalen Beiträge eines Arbeiters $i \in W$ und des Unternehmers z:

$$u_i = v(N) - v(N \setminus \{i\}) = 2w - 2(w-1) = 2$$
$$u_z = v(N) - v(N \setminus \{z\}) = 2w - w = w$$

Hier sieht man, dass die Bedeutung des Unternehmers mit der Anzahl an vorhandenen Arbeitern steigt. Umgekehrt ist er aber auf Arbeiter angewiesen - sind nur ein oder zwei Arbeiter vorhanden, sind diese in der Lage, Druck auf ihn auszuüben. Weiter ergibt sich für $K_1 \subseteq W$ und $K_2 \subseteq N$ mit $z \in K_2$

$$\begin{aligned}
g(K_1) &= \sum_{i \in K_1} u_i - v(K_1) = 2|K_1| - |K_1| = |K_1|, \\
g(K_2) &= \sum_{i \in K_2} u_i - v(K_2) = \big(w + 2(|K_2| - 1)\big) - 2(|K_2| - 1) = w.
\end{aligned}$$

Damit folgt für den Konzessionsvektor mit $i \in W$

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \min\big\{g(K) \colon K \subseteq W \text{ mit } i \in K\big\} = \min\{|K| \colon K \subseteq W \text{ mit } i \in K\} = 1, \\
\lambda_z &= \min\big\{g(K) \colon K \subseteq N \text{ mit } z \in K\big\} = w.
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.2.2 und Satz 2.2.7 gilt für Elemente x des Kerns $u_i - \lambda_i \leq x_i \leq u_i$, daher in diesem Fall $1 \leq x_i \leq 2$ für $i \in W$ und $0 \leq x_z \leq w$. Angenommen der Unternehmer bezahlt allen Arbeitern gleich viel, und sei dieser Betrag $\beta \in [1, 2]$, dann bleibt ihm noch $x_z = v(N) - w \cdot \beta = w \cdot (2 - \beta)$. Zusammengefasst sind diese Gewinnaufteilungen durch die Menge $B := \big\{(\beta, \ldots, \beta, w(2 - \beta)) \in \mathbb{R}^n \colon \beta \in [1, 2]\big\}$ gegeben.

Es lässt sich nun zeigen, dass alle diese Verteilungen auch wirklich im Kern des Spieles liegen, daher dass $B \subseteq \mathcal{C}(G)$ gilt. Dazu wäre nachzuweisen, dass alle Elemente in B die Kern-Bedingungen erfüllen. Stattdessen möchte ich hier aber exemplarisch den Kern nochmal direkt bestimmen. Nach Definition ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(G) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i \in K} x_i \geq v(K) \text{ für alle } K \subseteq N \text{ und } \sum_{i \in N} x_i = v(N) \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i \in K} x_i \geq |K| \text{ und } \sum_{i \in K} x_i + x_z \geq 2|K| \text{ für alle } K \subseteq W \text{ und } \sum_{i \in N} x_i = 2w \right\}.
\end{aligned}$$

Mit $\sum_{i \in K} x_i + x_z = \sum_{i \in N} x_i - \sum_{i \in N \setminus K} x_i + x_z = 2w - \sum_{i \in W \setminus K} x_i$ für alle $K \subseteq W$ folgt weiter, dass die zweite Ungleichung äquivalent zu $\sum_{i \in W \setminus K} x_i \leq 2(w - |K|) = 2|W \setminus K|$ ist. Da dies für alle $K \subseteq W$ gelten soll, lässt sich $W \setminus K$ durch K selbst ersetzen, daher $\sum_{i \in K} x_i \leq 2|K|$ für alle $K \subseteq W$, und es bleibt

$$\mathcal{C}(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon |K| \leq \sum_{i \in K} x_i \leq 2|K| \text{ für alle } K \subseteq W \text{ und } \sum_{i \in N} x_i = 2w \right\}.$$

Mit $K = \{i\}$ ergibt sich $x_i \in [1, 2]$ für alle $i \in W$. Auf der anderen Seite folgt aus $x_i \in [1, 2]$ für alle $i \in W$ bereits $|K| \leq \sum_{i \in K} x_i \leq 2|K|$ für alle $K \subseteq W$, und es ergibt sich schlussendlich

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(G) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon x_i \in [1, 2] \text{ für alle } i \in W \text{ und } \sum_{i \in N} x_i = 2w \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon x_i \in [1, 2] \text{ für alle } i \in W \text{ und } x_z = 2w - \sum_{i \in W} x_i \right\}.
\end{aligned}$$

An dieser Darstellung lässt sich nun tatsächlich wie behauptet $B \subseteq \mathcal{C}(G)$ ablesen. Aber auch in B sind noch zu viele mögliche Aufteilungen des gemeinsamen Gewinns enthalten und es verbleibt die Frage, welche die gerechteste für alle Beteiligten ist.

Beispiel 2.4.3. Im sogenannten Handschuhspiel, welches in [Wie05] immer wieder aufgegriffen wird, gibt es zwei unterschiedliche Typen von Spielern: Diejenigen, die nur einen rechten Handschuh besitzen, und diejenigen, die eben nur einen linken Handschuh besitzen. Alle Spieler wollen ihren Handschuh verkaufen, benötigen dazu aber den jeweils komplementären Handschuh. Auch diese Situation möchte ich nun als kooperatives n-Personen Spiel $G = (N, v)$ modellieren. Seien dazu R bzw. L die Mengen der Spieler mit einem rechten bzw. linken Handschuh und dementsprechend $N := R \cup L$. Weiter besitze kein Spieler mehr als einen Handschuh, daher es gelte $R \cap L = \emptyset$. Die charakteristische Funktion des Spieles ist folglich gegeben durch

$$v\colon \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R},\ K \mapsto \min\{|K \cap R|, |K \cap L|\},$$

denn eine Koalition ist eben so viel Wert, wie sie Paare von Handschuhen besitzt. Es gibt nun zwei Fälle zu unterscheiden:

(i) Es sind von einer Sorte mehr Handschuhe im Spiel. Seien dies ohne Beschränkung der Allgemeinheit die rechten, daher $|R| > |L|$. Dann ergibt sich

$$v(N) = \min\{|N \cap R|, |N \cap L|\} = \min\{|R|, |L|\} = |L|.$$

Für die marignalen Beiträge von $l \in L$ bzw. $r \in R$ gilt nach Definition

$$\begin{aligned} u_l &= v(N) - v(N \setminus \{l\}) = |L| - \min\{|R|, |L \setminus \{l\}|\} = |L| - (|L| - 1) = 1, \\ u_r &= v(N) - v(N \setminus \{r\}) = |L| - \min\{|R \setminus \{r\}|, |L|\} = |L| - |L| = 0. \end{aligned}$$

Für eine beliebige Koalition $K \subseteq N$ ist außerdem

$$g(K) = \sum_{i \in K} u_i - v(K) = |L \cap K| - \min\{|K \cap R|, |K \cap L|\} \geq 0.$$

Mit $g(N) = |L| - |L| = 0$ folgt somit nach Satz 2.3.3 direkt $\mathcal{C}(G) = \{u\}$. Es gibt also nur eine Möglichkeit den Gewinn unter allen Beteiligten zu verteilen, nämlich gleichmäßig unter den Besitzern eines linken Handschuhs - die Besitzer eines rechten Handschuhs gehen leer aus. Dies ist dadurch zu begründen, dass die große Koalition auf jeden einzelnen rechte-Handschuh-Besitzer verzichten kann, ohne ihren Gewinn zu mindern, diese also nichts "wert" sind. Hier scheint der Kern bzw. sogar das Konzept der kooperativen Spieltheorie selbst an seine Grenzen zu gelangen, denn zwar kann die große Koalition auf jeden einzelnen rechte-Handschuh-Besitzer verzichten, aber eben nicht auf alle gleichzeitig, und im gegebenen Fall würde wohl keiner dieser kooperieren.

(ii) Nun betrachte ich den Fall, dass von beiden Sorten gleichviele Handschuhe vorhanden sind, daher $|R| = |L| = \frac{n}{2}$ gilt, wobei $n := |N|$. Ähnlich wie im ersten Fall ergibt sich für $l \in L$ bzw. $r \in R$

$$\begin{aligned} u_l &= v(N) - v(N \setminus \{l\}) = \frac{n}{2} - \min\{|R|, |L \setminus \{l\}|\} = \frac{n}{2} - (\frac{n}{2} - 1) = 1, \\ u_r &= v(N) - v(N \setminus \{r\}) = \frac{n}{2} - \min\{|R \setminus \{r\}|, |L|\} = \frac{n}{2} - (\frac{n}{2} - 1) = 1. \end{aligned}$$

Für eine beliebige Koalition $K \subseteq N$, $K \neq \emptyset$ erhält man

$$g(K) = \sum_{i \in K} u_i - v(K) = |K| - \min\{|K \cap R|, |K \cap L|\} \geq |K| - \left\lfloor \frac{|K|}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{|K|}{2} \right\rceil \geq 1,$$

und mit $g(\{i\}) = 1$ für alle $i \in N$ ergibt sich somit für den Konzessionsvektor

$$\lambda_i = \min\left\{g(K) \colon K \subseteq N \text{ mit } i \in K\right\} = 1.$$

Falls es also ein $x \in \mathcal{C}(G)$ gibt, gilt für dieses $0 \leq x_i \leq 1$ für alle $i \in N$, wieder nach Satz 2.2.2 und Satz 2.2.7. Nun lässt sich schnell zeigen, dass sowohl der Vektor y mit $y_i = \frac{1}{2}$ für alle $i \in N$ als auch der Vektor z mit $z_l = 1$, $z_r = 0$ für alle $l \in L$, $r \in R$ im Kern des Spieles liegt. Die Aufteilung z erscheint in Anbetracht der möglichen Aufteilung y aber nichtig, da rechte-Handschuh-Besitzter auf diese sicherlich nicht eingehen werden. Der Kern selbst lässt diese Schlussfolgerung jedoch nicht zu.

Zusammengefasst hat man an diesen drei Beispielen sehen können, dass der Kern in den meisten Fällen zwar eine gute Vorauswahl trifft, ohne wichtige Aufteilungen zu vernachlässigen, aber gleichzeitig noch zu unpräzise und allgemein gehalten ist. Dementsprechend wird sich das folgende Kapitel mit der Auszeichnung bestimmter Elemente oder Teilmengen des Kerns beschäftigen.

Beispiel 2.4.4. Zuletzt möchte ich noch das Bankrott-Spiel aus [Kra05] als Beispiel für ein konvexes Spiel anführen. In diesem wird die vereinfachte Situation betrachtet, dass beim Bankrott eines Unternehmens dessen Restkapital $R \geq 0$ auf n Gläubiger aufzuteilen ist, wobei Gläubiger i einen Anspruch von $a_i > 0$ besitzt. Dabei übersteigt die Summe der Ansprüche das Restkapital, daher $\sum_{i=1}^{n} a_i > R$. Dieses Problem lässt sich nun im folgenden Sinne als kooperatives n-Personen Spiel $G = (N, v)$ darstellen: Die Spielermenge ist gegeben durch die Menge der Gläubiger $N = \{1, \ldots, n\}$ und die charakteristische Funktion des Spieles durch

$$v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R},\ K \mapsto \max\left\{0,\ R - \sum_{i \in N \setminus K} a_i\right\}.$$

Dabei erhält eine Koalition aus Gläubigern also den Wert, welcher übrig bleibt, wenn die Ansprüche der übrigen Gläubiger erfüllt worden sind.

Ich werde nun zeigen, dass ein solches Spiel konvex ist, daher Definition 2.3.5 genügt. Sei dazu zunächst $D := \sum_{i \in N} a_i - R$ die Differenz zwischen dem Gesamtanspruch aller Gläubiger und dem Restkapital des Unternehmens. Dann gilt $R - \sum_{i \in N \setminus K} a_i = \sum_{i \in K} a_i - D$ für $K \subseteq N$. Desweiteren ist v nicht-negativ, also $v \geq 0$, und monton, daher für $K \subseteq L \subseteq N$ ist

$$v(K) = \max\left\{0,\ \sum_{i \in K} a_i - D\right\} \leq \max\left\{0,\ \sum_{i \in L} a_i - D\right\} = v(L).$$

Seien nun $K \subseteq L \subseteq N$ beliebig. Dann lassen sich die folgenden beiden Fälle unterscheiden:

(i) Es gilt $v(K) > 0$, $v(L) > 0$, also $\sum_{i \in K} a_i > D$, $\sum_{i \in L} a_i > D$ und somit nach Definition

$$\begin{aligned} v(K) + v(L) &= \sum_{i \in K} a_i - D + \sum_{i \in L} a_i - D \\ &= \sum_{i \in K \cap L} a_i - D + \sum_{i \in K \cup L} a_i - D \leq v(K \cap L) + v(K \cup L). \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $v(K) = 0$. Dann folgt mit Hilfe der Monotonie $0 \leq v(K \cap L) \leq v(K) = 0$, also $v(K \cap L) = 0$, und es ergibt sich wieder auf Grund der Monotonie

$$v(K) + v(L) = v(L) \leq v(K \cup L) = v(K \cap L) + v(K \cup L).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit folgt damit bereits $v(K) + v(L) \leq v(K \cap L) + v(K \cup L)$, daher die Konvexität des Spieles G, denn alle weiteren Fälle sind auf die obigen beiden zurückzuführen. Nach Theorem 2.3.9 ist der Kern des Spieles also nicht-leer.

Zum Abschluss des Beispiels möchte ich die Elemente des Kerns mit Hilfe von Utopia- und Konzessionsvektor noch genauer beschreiben. Für $i \in N$ ergibt sich schnell

$$u_i = v(N) - v(N \setminus \{i\}) = R - \max\{0, R - a_i\} = \min\{R, a_i\}.$$

Dies ist der Utopia-Vektor u, welcher nach Satz 2.2.2 eine obere Schranke für den Gewinn von Spieler i darstellt. Um nun noch die entsprechende untere Schranke aus Satz 2.2.7 zu erhalten, benötigt man normalerweise zunächst die Lückenfunktion g des Spieles, um mit dieser anschließend den Konzessionsvektor λ zu bestimmen. Hier können wir aber ausnutzen, dass G konvex ist, denn in konvexen Spielen ist die untere Schranke, wie in Korollar 2.3.13 gezeigt, gerade durch $v(\{i\})$ gegeben. Eine Bestimmung von Lückenfunktion und Konzessionsvektor ist somit überflüssig. Mit $v(\{i\}) = \max\{0, a_i - D\}$ ergibt sich schließlich $\max\{0, a_i - D\} \leq x_i \leq \min\{R, a_i\}$ für $x \in \mathcal{C}(G)$ und $i \in N$.

3 Lösungskonzepte

In diesem Kapitel wird zunächst das Modell eines Lösungskonzeptes eingeführt. Ein solches schlägt für ein kooperatives n-Personen Spiel eine Menge von Aufteilungen des Gewinns der großen Koalition vor, die es als besonders “gut” empfiehlt. Ich beschränke mich in dieser Arbeit darauf, Lösungskonzepte für balancierte Spiele zu definieren, da sich in nicht-balancierten Spielen, wie im vorangegangenen Kapitel dargestellt, im Allgemeinen keine Große Koalition bilden wird, deren Gewinn aufzuteilen wäre.

Im Anschluss an diese formale Definition werde ich einige ausgewählte Lösungskonzepte vorstellen und diese in Kapitel vier auf bestimmte Eigenschaften hin untersuchen. Ich konzentriere mich dabei wiederum auf Lösungskonzepte, welche den Kern als Grundlage verwenden.

Die von Shapley eingeführte Shapley-Lösung [Sha53] werde ich zum Beispiel vernachlässigen, obwohl sie eines der bekanntesten Lösungskonzepte darstellt, da sie nicht mit dem Kern arbeitet und dadurch teilweise Aufteilungen als Lösung vorschlägt, welche nicht im Kern liegen, obwohl solche vorhanden wären.

3.1 Definition eines Lösungskonzeptes

Definition 3.1.1. *Eine auf der Menge der balancierten Spiele B definierte Abbildung $\mathcal{S}$ heißt* ***Lösungskonzept****, falls $\emptyset \neq \mathcal{S}(G) \subseteq \mathcal{A}(G)$ für alle $G \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Lösungskonzept mit $|\mathcal{S}(G)| = 1$ für alle $G \in \mathcal{B}$ heißt* ***punktwertiges Lösungskonzept****. In diesem Fall lässt sich $\mathcal{S}(G)$ selbst mit der eindeutigen Aufteilung $x \in \mathcal{S}(G)$ identifizieren.*

Wie gewünscht ordnet ein Lösungskonzept $\mathcal{S}$ also jedem balancierten Spiel eine nicht-leere Menge von möglichen Gewinnaufteilungen zu. Für jede Gewinnaufteilung wird dabei natürlich $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$ für alle $x \in \mathcal{S}(G)$ gefordert. Besonders interessant sind die punktwertigen Lösungskonzepte, welche genau eine einzelne Aufteilung als Lösung des Spieles auszeichnen.

3.2 Der Kern als Lösungskonzept

Der Kern $\mathcal{C}(G)$ wurde bereits im vorhergehenden Kapitel eingeführt. Er ordnet jedem balancierten Spiel G genau die Gewinnaufteilungen zu, welche jeder kleinen Koalition $K \subsetneq N$ den Gewinn $v(K)$ garantieren, sodass aus rationaler Hinsicht keine kleine Koalition einen Grund besitzt, die große Koalition zu verlassen. Der Kern als Abbildung $G \mapsto \mathcal{C}(G)$ für $G \in \mathcal{B}$ stellt damit selbst bereits ein Lösungskonzept dar, denn $\mathcal{C}(G)$ ist für alle balancierten Spiele G nach Definition nicht-leer und natürlich gilt auch $\mathcal{C}(G) \subseteq \mathcal{A}(G)$.

3.3 ε-Kerne und der minimale Kern

Wie bereits an den Beispielen des vorherigen Kapitels gesehen, besitzt der Kern oftmals das Problem, dass er noch zu viele Elemente enthält, daher zu unpräzise ist. Das nun folgende Lösungskonzept stellt eine strengere Version des Kerns dar, welche die Kernbedingung derart verschärft, dass der neue Kern für ein balanciertes Spiel gerade so nicht leer bleibt. Um diesen sogenannten minimalen Kern zu definieren, welcher 1979 in [MPS79] eingeführt wurde, benötigt man zunächst den Begriff des ε-Kerns, welcher von Shapley und Shubik stammt [SS66]. Er besteht aus den Gewinnaufteilungen, welche jeder kleinen Koalition $K \subsetneq N$ nicht nur ihren eigenen Gewinn $v(K)$ garantieren, sondern zusätzlich noch einen Bonus von ε versprechen.

Definition 3.3.1. *Für ein gegebenes $\varepsilon \geq 0$ ist der* ***ε-Kern*** *eines balancierten Spieles $G = (N, v)$ gegeben durch*

$$\mathcal{C}_\varepsilon(G) := \left\{ x \in \mathcal{A}(G) \colon \sum_{i \in K} x_i \geq v(K) + \varepsilon \text{ für alle } \emptyset \neq K \subsetneq N \right\}.$$

Mit größer werdendem ε wird die Bedingung also stärker und der ε-Kern verliert Gewinnaufteilungen, bis er schließlich für ein hinreichend großes ε leer ist. Dementsprechend ist ein ε-Kern im Allgemeinen kein Lösungskonzept. Auf der anderen Seite gilt natürlich:

Bemerkung 3.3.2. *Sei G ein Spiel. Dann gilt $\mathcal{C}_0(G) = \mathcal{C}(G)$.*

Der minimale Kern lässt sich nun als der Durchschnitt von allen nicht-leeren ε-Kernen definieren. Dieser versucht daher den ε-Bonus aller kleinen Koalitionen auf ein ε_0 zu maximieren. Dies führt zu einer sehr stabilen Menge von Gewinnaufteilungen, da jede kleine Koalition, welche die große Koalition verlassen möchte, mit einem Verlust von mindestens ε_0 rechnen muss. Weiterhin lässt sich der minimale Kern als eine Art Kern-Zentrum eines Spieles betrachten, da er nach Definition in allen nicht-leeren ε-Kernen enthalten ist.

Definition 3.3.3. *Der* ***minimale Kern*** *eines Spieles $G \in \mathcal{B}_n$ ist gegeben durch*

$$\mathcal{C}_{\min}(G) := \bigcap_{\substack{\varepsilon \geq 0, \\ \mathcal{C}_\varepsilon(G) \neq \emptyset}} \mathcal{C}_\varepsilon(G).$$

Der folgende Satz besagt, dass der minimale Kern sogar gerade der kleinste nicht-leere ε-Kern und somit selbst nicht-leer ist, wie Bilbao 2000 entdeckte [Bil00]. Die Abbildung $G \mapsto \mathcal{C}_{\min}(G)$ stellt also ein Lösungskonzept dar, welches im Allgemeinen aber nicht punktwertig ist.

Satz 3.3.4. *Sei G ein balanciertes Spiel. Dann ist der minimale Kern von G nicht-leer und es gibt ein $\varepsilon_0 \geq 0$, sodass gilt*

$$\mathcal{C}_{\min}(G) = \mathcal{C}_{\varepsilon_0}(G).$$

Für den Beweis des Satzes benötige ich zunächst die folgenden beiden Lemma:

Lemma 3.3.5. *Sei $G \in \mathcal{G}_n$ ein Spiel. Dann ist $\mathcal{C}(G)$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Sei $G = (N, v) \in \mathcal{G}_n$. Nach Definition ist $\mathcal{C}(G) \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Fall $\mathcal{C}(G) = \emptyset$ ist trivial, sei also $\mathcal{C}(G)$ nicht-leer. Es reicht zu zeigen, dass $\mathcal{C}(G)$ abgeschlossen und beschränkt ist. Die Abgeschlossenheit folgt direkt aus der Definition des Kerns. Sei weiter $x \in \mathcal{C}(G)$ beliebig. Dann gilt für alle $i \in N$, $x_i \geq v(\{i\})$, und mit $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ auch

$$x_i = v(N) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \leq v(N) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v(\{j\}).$$

Also sind alle Komponenten von $x \in \mathcal{C}(G)$ beschränkt, und somit ist $\mathcal{C}(G)$ selbst beschränkt. ☐

Lemma 3.3.6. *Sei G ein balanciertes Spiel und $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$. Dann gilt $\mathcal{C}_{\varepsilon_1}(G) \supseteq \mathcal{C}_{\varepsilon_2}(G)$.*

Beweis. Sei $G = (N, v) \in \mathcal{B}_n$, $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ und $x \in \mathcal{C}_{\varepsilon_2}(G)$. Dann ist $x \in \mathcal{A}(G)$ und für alle $\emptyset \neq K \subsetneq N$ gilt $\sum_{i \in K} x_i \geq v(K) + \varepsilon_2 \geq v(K) + \varepsilon_1$. Also ist auch $x \in \mathcal{C}_{\varepsilon_1}(G)$. ☐

Nun lässt sich Satz 3.3.4 beweisen:

Beweis. Sei $G = (N, v) \in \mathcal{B}_n$ und sei weiter

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left\{\sum_{i\in K} x_i - v(K) :\ K \subsetneq N \text{ mit } K \neq \emptyset\right\}.$$

Da das Minimum nur über endlich viele Mengen gebildet wird, ist f wohldefiniert. Weiterhin ist f als Verknüpfung stetiger Funktionen selbst stetig und nimmt somit auf der nach Lemma 3.3.5 kompakten Menge $\mathcal{C}(G) \subseteq \mathbb{R}^n$ ihr Maximum an. Das heißt, es gibt ein $y \in \mathcal{C}(G)$ mit $f(y) = \max_{x\in\mathcal{C}(G)} f(x)$. Setze nun

$$\varepsilon_0 := f(y) = \max_{x\in\mathcal{C}(G)} \min\left\{\sum_{i\in K} x_i - v(K) :\ K \subsetneq N \text{ mit } K \neq \emptyset\right\}.$$

Da y im Kern des Spieles liegt, gilt $\sum_{i\in K} y_i - v(K) \geq 0$ für alle $K \subseteq N$, also auch $\varepsilon_0 = f(y) \geq 0$. Auf der anderen Seite ist $\varepsilon_0 = f(y) \leq \sum_{i\in K} y_i - v(K)$ für alle nicht-leeren $K \subsetneq N$, daher $\sum_{i\in K} y_i \geq v(K) + \varepsilon_0$, und somit $y \in \mathcal{C}_{\varepsilon_0}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{C}_{\varepsilon_0}(G)$ ein nicht-leerer ε-Kern des Spieles G ist.

Es bleibt nun zu zeigen, dass $\mathcal{C}_{\varepsilon_0}(G)$ tatsächlich der minimale Kern ist. Sei dazu zunächst $\varepsilon > \varepsilon_0$ beliebig und nehme $\mathcal{C}_\varepsilon(G)$ nicht-leer an. Dann gibt es ein $z \in \mathcal{C}_\varepsilon(G)$ mit $\sum_{i\in K} z_i - v(K) \geq \varepsilon$ für alle nicht-leeren $K \subsetneq N$, und somit führt $f(z) \geq \varepsilon > \varepsilon_0 = f(y)$ zu einem Widerspruch, denn f nimmt in y auf $\mathcal{C}(G)$ sein Maximum an, und es gilt $z \in \mathcal{C}_\varepsilon(G) \subseteq \mathcal{C}(G)$. Also folgt $\mathcal{C}_\varepsilon(G) = \emptyset$ für alle $\varepsilon > \varepsilon_0$. Auf der anderen Seite folgt für alle $\varepsilon < \varepsilon_0$ mit Lemma 3.3.6 direkt $\mathcal{C}_{\varepsilon_0}(G) \subseteq \mathcal{C}_\varepsilon(G)$, und somit gilt

$$\mathcal{C}_{\min}(G) = \bigcap_{\substack{\varepsilon\in\mathbb{R}_+,\\ \mathcal{C}_\varepsilon(G)\neq\emptyset}} \mathcal{C}_\varepsilon(G) = \bigcap_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]} \mathcal{C}_\varepsilon(G) = \mathcal{C}_{\varepsilon_0}(G).$$

□

3.4 Egalitäre Ansätze

In diesem Abschnitt werden nun egalitäre Lösungsansätze betrachtet, daher Lösungskonzepte, welche möglichst egalitäre Gewinnaufteilungen bevorzugen. Egalitär meint hier die bedingungslose Gleichbehandlung aller Spieler. Die einzige rein egalitäre Gewinnaufteilung ist dementsprechend durch den eindeutigen Vektor gegeben, welcher jedem Spieler genau ein n-tel des gemeinsamen Gewinns zuspricht:

Definition 3.4.1. *Die **Gleichverteilung** $e \in \mathcal{A}(G)$ eines Spieles $G = (N, v)$ ist gegeben durch*

$$e := \left(\frac{v(N)}{n}, \dots, \frac{v(N)}{n}\right).$$

Die Gleichverteilung nutzt dabei außer dem Gewinn der großen Koalition keine Informationen des Spieles, beachtet also nicht, was einzelne Spieler oder kleine Koalitionen bereits für sich erreichen können. Im Allgemeinen kann dies schnell dazu führen, dass die Gleichverteilung eines Spieles nicht im Kern desselbigen liegt, wie man bereits an Beispiel 2.4.1 des vorhergehenden Kapitels sehen konnte. Dennoch erscheint es bei ähnlichen oder sogar gleichen Voraussetzungen einiger Teilnehmer eines Spieles sinnvoll, den Gewinn möglichst egalitär unter diesen zu verteilen - etwa habe ich in Beispiel 2.4.2 intuitiv angenommen, dass der Unternehmer allen seinen gleichgestellten Arbeitern auch denselben Lohn zahlt. Zusammengefasst lässt sich sagen, dass eine Gleichverteilung zwar ein etwas zu idealistisches Konzept darstellt, der Ansatz aber durchaus seine Berechtigung besitzt.

Dies motiviert nun die Idee, zunächst eine Vorauswahl an Aufteilungen zu treffen, und erst aus diesen die der Gleichverteilung am nächsten kommenden, daher die egalitärsten Aufteilungen zu wählen. Hierbei bleiben zwei Fragen zu klären: Wie treffe ich eine Vorauswahl und welche Aufteilungen sind -

abgesehen von der Gleichverteilung - am egalitärsten. Eine Vorauswahl ist aber gerade ein beliebiges Lösungskonzept $\mathcal{S}$, denn ein solches wählt aus der Menge aller möglichen Aufteilungen eines Spieles eine Teilmenge aus. Es verbleibt Aufteilungen hinsichtlich ihrer Egalitarität zu vergleichen. Da die Gewinnaufteilungen eines Spieles eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ bilden, bietet es sich hier an, den euklidischen Abstand zwischen einer beliebigen Aufteilung $x \in \mathcal{A}(G)$ und der Gleichverteilung $e \in \mathcal{A}(G)$, daher $|x-e|$, als Maß für die Egalität von x zu nutzen.

Definition 3.4.2. *Sei $G=(N,v)$ ein Spiel, $e \in \mathcal{A}(G)$ die Gleichverteilung von G, und $\mathcal{S}$ ein beliebiges Lösungskonzept. Dann ist der* ***egalitäre Anteil*** *von $\mathcal{S}(G)$ gegeben durch*

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}(G)) := \left\{ x \in \mathcal{S}(G) \colon |x-e| = \inf_{y \in \mathcal{S}(G)} |y-e| \right\}.$$

Mit Hilfe des folgenden Lemmas lässt sich diese Definition noch etwas vereinfachen.

Lemma 3.4.3. *Sei $G=(N,v)$ ein Spiel, $e \in \mathcal{A}(G)$ die Gleichverteilung des Spieles und $x, y \in \mathcal{A}(G)$ beliebig. Es gilt genau dann $|x| \leq |y|$, wenn $|x-e| \leq |y-e|$ gilt. Weiterhin gilt genau dann $|x|=|y|$, wenn $|x-e|=|y-e|$ gilt.*

Beweis. Bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Dann folgt mit $x \in \mathcal{A}(G)$, also $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, direkt $\langle x, 1 \rangle = v(N)$, wobei 1 hier den Vektor $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Weiterhin ist $\langle 1, 1 \rangle = n$ und somit

$$\langle x-e, e \rangle = \langle x, e \rangle - \langle e, e \rangle = \frac{v(N)}{n} \cdot \langle x, 1 \rangle - \left(\frac{v(N)}{n} \right)^2 \cdot \langle 1, 1 \rangle = 0.$$

Also sind $x-e$ und e orthogonal zueinander und es gilt die n-dimensionale Version des Satzes von Pythagoras, daher $|x|^2 = |(x-e)+e|^2 = |x-e|^2 + |e|^2$. Analog ergibt sich $|y|^2 = |y-e|^2 + |e|^2$ für $y \in \mathcal{A}(G)$. Da die Quadratfunktion für positive Werte streng monton wachsend ist, folgt

$$|x| \leq |y| \iff |x-e|^2 + |e|^2 = |x|^2 \leq |y|^2 = |y-e|^2 + |e|^2 \iff |x-e| \leq |y-e|,$$

und damit der erste Teil des Lemmas. Dieser impliziert aber direkt den zweiten Teil, denn $a=b$ ist äquivalent zu $a \leq b$ und $b \leq a$. □

Satz 3.4.4. *Sei $G=(N,v)$ ein Spiel, $e \in \mathcal{A}(G)$ die Gleichverteilung von G, und $\mathcal{S}$ ein beliebiges Lösungskonzept. Dann gilt*

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}(G)) = \left\{ x \in \mathcal{S}(G) \colon |x| = \inf_{y \in \mathcal{S}(G)} |y| \right\}.$$

Beweis. Anwendung des vorangegangenen Lemmas 3.4.3 liefert für $x \in \mathcal{S}(G)$ direkt, dass genau dann $|x-e| = \inf_{y \in \mathcal{S}(G)} |y-e|$ gilt, wenn $|x| = \inf_{y \in \mathcal{S}(G)} |y|$ ist. □

Leider stellt dieser Ansatz im Allgemeinen noch kein Lösungskonzept dar, denn für ein beliebiges Lösungskonzept $\mathcal{S}$ könnte es ein balanciertes Spiel G geben, sodass kein $x \in \mathcal{S}(G)$ obiges Infimum annimmt. In diesem Fall wäre $\mathcal{E}(\mathcal{S}(G))$ leer. In Lemma 3.3.5 wurde jedoch gezeigt, dass der Kern eines Spieles immer kompakt ist. Dadurch nimmt die stetige Funktion $|\cdot| \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ für jedes balancierte Spiel G auf der nicht-leeren Menge $\mathcal{C}(G)$ ihr Minimum an, und die folgende Definition ist wohldefiniert.

Definition 3.4.5. *Der* ***egalitäre Kern*** *eines Spieles $G \in \mathcal{B}_n$ ist gegeben durch*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(G) := \mathcal{E}(\mathcal{C}(G)) = \left\{ x \in \mathcal{C}(G) \colon |x| = \min_{y \in \mathcal{C}(G)} |y| \right\}.$$

Nach Definition ist auch jeder ε-Kern abgeschlossen, und daher als Teilmenge des kompakten Kerns selbst wieder kompakt. Da weiterhin nach Satz 3.3.4 für jedes balancierte Spiel G ein $\varepsilon_0 \geq 0$ existiert, sodass $\mathcal{C}_{\varepsilon_0}(G)$ der minimale Kern von G ist, ist auch dieser kompakt, und die nächste Definition ist ebenfalls wohldefiniert.

Definition 3.4.6. *Der* ***egalitäre Minimal-Kern*** *eines Spieles $G \in \mathcal{B}_n$ ist gegeben durch*

$$\mathcal{E}_{\min}(G) := \mathcal{E}\left(\mathcal{C}_{\min}(G)\right) = \left\{x \in \mathcal{C}_{\min}(G) \colon |x| = \min_{y \in \mathcal{C}_{\min}(G)} |y|\right\}.$$

Wie oben erklärt wird das Minimum jeweils angenommen, die beiden Mengen sind also für alle balancierten Spiele nicht-leer. Damit ist aber sowohl durch den egalitären Kern, als auch durch den egalitären Minimal-Kern ein neues Lösungskonzept gegeben, nämlich durch die Abbildungen $G \mapsto \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(G)$ und $G \mapsto \mathcal{E}_{\min}(G)$. Diese wurden bereits in [AI01] und [AKV08] eingeführt, dort aber anders motiviert. Zuletzt möchte ich nun noch zeigen, dass diese Lösungskonzepte sogar punktwertig sind.

Satz 3.4.7. *Für alle balancierten Spiele G sind $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(G)$ und $\mathcal{E}_{\min}(G)$ einelementige Mengen.*

Um diesen Satz zu beweisen werde ich die folgenden beiden Lemmata benutzen.

Lemma 3.4.8. *Sei $\varepsilon \geq 0$ und G ein balanciertes Spiel. Dann ist der ε-Kern des Spieles konvex. Damit sind insbesondere der Kern und der minimale Kern konvex.*

Beweis. Sei $\varepsilon \geq 0$ und $G = (N, v) \in \mathcal{B}$. Seien weiter $x, y \in \mathcal{C}_\varepsilon(G)$ und $t \in (0, 1)$. Dann gilt nach Definition $x, y \in \mathcal{A}(G)$ und $\sum_{i \in K} x_i, \sum_{i \in K} y_i \geq v(K) + \varepsilon$ für alle $K \subsetneq N$, K nicht-leer. Mit

$$\begin{aligned}\sum_{i \in N} \left(x_i + t(y_i - x_i)\right) &= \sum_{i \in N} x_i + t \sum_{i \in N} y_i - t \sum_{i \in N} x_i \\ &= v(N) + t \cdot v(N) - t \cdot v(N) = v(N)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{i \in K} \left(x_i + t(y_i - x_i)\right) &= (1-t) \sum_{i \in K} x_i + t \sum_{i \in N} y_i \\ &\geq (1-t)(v(K) + \varepsilon) + t(v(K) + \varepsilon) = v(K) + \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $K \subsetneq N$, K nicht-leer, folgt $x + t(y - x) \in \mathcal{C}_\varepsilon(G)$ und damit die Konvexität des ε-Kerns. Insbesondere sind also auch $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}_0(G)$ und $\mathcal{C}_{\min}(G) = \mathcal{C}_{\varepsilon_0}(G)$ (vergleiche Satz 3.3.4) konvex. □

Lemma 3.4.9. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und seien $a, b \in K$ mit $|a| = |b| = \min_{x \in K} |x|$. Dann ist $a = b$.*

Beweis. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $a, b \in K$ mit $|a| = |b| = \min_{x \in K} |x|$ und setze $c := (a + b)/2$. Dann liegt c als Konvexkombination von a und b in K und es folgt mit Hilfe der Parallelogrammgleichung

$$|c|^2 = \left|\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right|^2 = 2\left(\left|\frac{a}{2}\right|^2 + \left|\frac{b}{2}\right|^2\right) - \left|\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right|^2 = |a|^2 - \frac{|a - b|^2}{4}.$$

Man nehme nun an, es wäre $a \neq b$, also $|a - b| > 0$ und somit $|c|^2 < |a|^2$ im Widerspruch zur Minimalität von $|a|$. Die Annahme war daher falsch und es gilt $a = b$. □

Damit lässt sich nun auch Satz 3.4.7 beweisen.

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus den beiden vorangegangenen Lemmata, denn mit 3.4.8 sind der Kern und der minimale Kern eines balancierten Spieles konvex und mit 3.4.9 folgt bereits die Eindeutigkeit des Elements $x \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(G)$ bzw. $x \in \mathcal{E}_{\min}(G)$. □

Als letztes Lösungskonzept möchte ich nun noch den τ-Wert eines balancierten Spieles vorstellen. Dieses punktwertige Lösungskonzept wurde 1981 von Tijs eingeführt [Tij81] und basiert auf der Idee den Utopia-Vektor, welcher im Normalfall nicht selbst ausgezahlt werden kann, relativ zum Konzessionsvektor auf eine Gewinnaufteilung zu reduzieren. Formal sieht das folgendermaßen aus:

Sei $G = (N, v)$ ein balanciertes Spiel mit dem Utopia-Vektor u, der Lückenfunktion g und dem Konzessionsvektor λ. Als balanciertes Spiel ist G auch quasi-balanciert und es gilt nach Definition $0 \leq g(N) \leq \sum_{i\in N} \lambda_i$. Liegt bei dem linken Teil der Ungleichung Gleichheit vor, daher ist $g(N) = 0$, so folgt nach Korollar 2.3.4 direkt $\mathcal{C}(G) = \{u\}$. In diesem Fall ist also der Utopia-Vektor selbst bereits eine Gewinnaufteilung, welche dann als Lösung gewählt wird. Sei im Folgenden nun $g(N) > 0$, daher $\sum_{i\in N} u_i > v(N)$. Dann müssen die Komponenten des Utopia-Vektors reduziert werden. Setze dazu $x := u - \alpha \cdot \lambda$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist x der um einen Teil des Konzessionsvektors reduzierte Utopia-Vektor. Damit auch $x \in \mathcal{A}(G)$ gilt, fordert man weiter

$$v(N) = \sum_{i\in N} x_i = \sum_{i\in N} (u_i - \alpha \cdot \lambda_i) = \sum_{i\in N} u_i - \alpha \sum_{i\in N} \lambda_i.$$

Mit $\sum_{i\in N} \lambda_i \geq g(N) > 0$ folgt daraus

$$\alpha = \frac{\sum_{i\in N} u_i - v(N)}{\sum_{i\in N} \lambda_i} = \frac{g(N)}{\sum_{i\in N} \lambda_i} \in (0, 1].$$

Einsetzen in den gewählten Ansatz $x = u - \alpha \cdot \lambda$ liefert den gewünschten Wert.

Definition 3.5.1. *Sei $G = (N, v)$ ein balanciertes Spiel, u dessen Utopia-Vektor, g die Lückenfunktion und λ der Konzessionsvektor des Spieles. Dann ist der τ-**Wert** des Spieles G gegeben durch*

$$\tau(G) := \begin{cases} u, & \text{für } g(N) = 0 \\ u - \frac{g(N)}{\sum_{i\in N} \lambda_i} \cdot \lambda, & \text{für } g(N) > 0 \end{cases}.$$

Damit stellt der τ-Wert als Abbildung $G \mapsto \tau(G)$ ein punktwertiges Lösungskonzept für balancierte Spiele dar. Nach Konstruktion gilt für die Komponenten des τ-Wertes außerdem $u_i - \lambda_i \leq \tau_i(G) \leq u_i$, wodurch dieser gute Voraussetzungen besitzt, um im Kern des Spieles zu liegen - zumindest befindet er sich in dessen Nähe.

Zuletzt möchte ich zeigen, dass sich der τ-Wert im Falle eines konvexen Spieles in dem Sinne noch etwas vereinfachen lässt, dass er nicht mehr vom Konzessionsvektor des Spieles abhängt.

Korollar 3.5.2. *Sei $G = (N, v)$ ein konvexes Spiel, u dessen Utopia-Vektor und g die Lückenfunktion des Spieles mit $g(N) > 0$. Dann gilt*

$$\tau(G) = \left(1 - \frac{g(N)}{\sum_{i\in N} g(\{i\})}\right) u + \frac{g(N)}{\sum_{i\in N} g(\{i\})} \begin{pmatrix} v(\{1\}) \\ \vdots \\ v(\{n\}) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Nach Korollar 2.3.12 ist $\lambda_i = g(\{i\})$, und somit gilt nach Definition

$$\tau_k(G) = u_k - \frac{g(N)}{\sum_{i\in N} \lambda_i} \lambda_k = \left(1 - \frac{g(N)}{\sum_{i\in N} g(\{i\})}\right) u_k + \frac{g(N)}{\sum_{i\in N} g(\{i\})} v(\{k\}).$$

□

Zum Ende dieses Kapitels möchte ich nun die eingeführten Lösungskonzepte auf drei der im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Beispiele anwenden, nämlich auf das Unternehmer-Arbeiter-Spiel, das Handschuhspiel und das Bankrott-Spiel.

Beispiel 3.6.1. Das erste Beispiel ist das Unternehmer-Arbeiter-Spiel von 2.4.2. In diesem sind w Arbeiter und ein Unternehmer z gegeben. Sie bilden zusammen die Spielermenge $N = W \cup \{z\}$ mit $W = \{1, \ldots, w\}$. Die charakteristische Funktion v ist definiert durch $v(K) = |K|$ und $v(K \cup \{z\}) = 2 \cdot |K|$ für $K \subseteq W$ und bildet zusammen mit der Spielermenge das Spiel $G = (N, v)$. Weiterhin habe ich bereits gezeigt, dass der Kern des Spieles durch

$$\mathcal{C}(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon x_i \in [1, 2] \text{ für alle } i \in W \text{ und } x_z = 2w - \sum_{i \in W} x_i \right\}$$

gegeben ist. Ich werde nun zunächst den minimalen Kern des Spieles bestimmen. Für ein $\varepsilon > 0$ ergibt sich analog zur Berechnung des Kerns

$$\mathcal{C}_\varepsilon(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon x_i \in [1 + \varepsilon, 2 - \varepsilon] \text{ für alle } i \in W \text{ und } x_z = 2w - \sum_{i \in W} x_i \right\}.$$

Das maximale ε, sodass $\mathcal{C}_\varepsilon(G)$ gerade so nicht leer bleibt, ist damit durch $\varepsilon_0 = 1/2$ gegeben. Also besteht der minimale Kern in diesem Beispiel nur aus einem einzigen Element, daher $\mathcal{C}_{\min}(G) = \mathcal{C}_{\varepsilon_0}(G) = \{a\}$ mit $a := (\frac{3}{2}, \ldots, \frac{3}{2}, \frac{w}{2}) \in \mathbb{R}^n$. Es folgt sofort, dass a auch der egalitäre Minimal-Kern $\mathcal{E}_{\min}(G)$ ist, denn es ist $\mathcal{E}_{\min}(G) \subseteq \mathcal{C}_{\min}(G)$ und $\mathcal{E}_{\min}(G)$ nicht-leer. Wie verhält sich aber der einfache egalitäre Kern? Man betrachte dazu zunächst die Gleichverteilung e des Spieles. Für diese gilt $e_i = \frac{v(N)}{n} = \frac{2w}{w+1}$ und somit $e_i \in [1, 2)$ für alle $i \in N$. Damit folgt aber direkt $e \in \mathcal{C}(G)$, also $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(G) = \{e\}$.

Zuletzt werde ich nun noch den τ-Wert des Spieles bestimmen. Sei dazu u der Utopia-Vektor, g die Lückenfunktion und λ der Konzessionsvektor des Spieles. In 2.4.2 wurde gezeigt, dass $u = (2, \ldots, 2, w)$, $\lambda = (1, \ldots, 1, w)$ und $g(N) = w$ gilt. Mit $g(N) \neq 0$ und $\sum_{i \in N} \lambda_i = 2w$ ist der τ-Wert somit durch

$$\tau(G) = u - \frac{g(N)}{\sum_{i \in N} \lambda_i} = u - \frac{1}{2}\lambda = a$$

gegeben. In diesem Beispiel stimmt der τ-Wert des Spieles also mit dem egalitären Minimal-Kern überein.

Beispiel 3.6.2. Das zweite Beispiel ist das Handschuhspiel von 2.4.3. Hier besteht die Spielermenge aus Rechte-Handschuh-Besitzern R und Linke-Handschuh-Besitzern L, daher $N = R \cup L$. Die charakteristische Funktion v ist für $K \subseteq N$ durch $v(K) = \min\{|K \cap R|, |K \cap L|\}$ gegeben. Um das Spiel $G = (N, v)$ weiter zu untersuchen, unterscheide ich wieder zwei Fälle:

(i) Im ersten Fall sind von einer Sorte mehr Handschuhe im Spiel. Dann besteht der Kern des Spieles nach 2.4.3(i) gerade aus dem Utopia-Vektor u. Da der minimale Kern aber eine nicht-leere Teilmenge des Kerns ist, folgt damit bereits $\mathcal{C}_{\min}(G) = \{u\}$. Gleiches gilt dementsprechend auch für den egalitären Kern sowie für den egalitären Minimal-Kern, daher $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(G) = \mathcal{E}_{\min}(G) = \{u\}$. Mit $g(N) = 0$ ist nach Definition außerdem auch der τ-Wert des Spieles durch den Utopia Vektor gegeben. Es lässt sich also festhalten, dass für $g(N) = 0$ alle in diesem Kapitel eingeführten Lösungskonzepte auf den Utopia-Vektor zusammenfallen:

Korollar 3.6.3. *Sei $G = (N, v)$ ein balanciertes Spiel, g dessen Lückenfunktion mit $g(N) = 0$ und u der Utopia-Vektor des Spieles. Dann gilt $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}_{\min}(G) = \mathcal{E}_{\mathcal{C}}(G) = \mathcal{E}_{\min}(G) = \{u\}$.*

Beweis. Es ist $\mathcal{E}_{\min}(G) \subseteq \mathcal{C}_{\min}(G) \subseteq \mathcal{C}(G)$ und $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(G) \subseteq \mathcal{C}(G)$ nach Definition. Weiterhin gilt $\mathcal{C}(G) = \{u\}$ nach Korollar 2.3.4, und da $\mathcal{E}_{\min}(G)$, $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(G)$ nicht-leer sind, folgt damit bereits die Aussage. □

(ii) Im zweiten Fall gibt es nun genauso viele rechte wie linke Handschuhe, daher $|R| = |L| =: m$. Nach Definition ist der Kern des Spieles gegeben durch

$$\mathcal{C}(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i\in K} x_i \geq v(K) \text{ für alle } K \subseteq N \text{ und } \sum_{i\in N} x_i = v(N) \right\}.$$

Der gemeinsame Gewinn ist $v(N) = m$. Sei nun $x \in \mathcal{C}(G)$ fest und wähle $l_0 \in L$, $r_0 \in R$, sodass $x_{l_0} = min_{l\in L} x_l$, $x_{r_0} = min_{r\in R} x_r$. Da x im Kern des Spieles liegt, gilt nach 2.4.3(ii) $x_{r_0}, x_{l_0} \in [0,1]$. Außerdem ist $x_{r_0} + x_{l_0} \geq v(\{r_0, l_0\}) = 1$, und es ergibt sich

$$m = v(N) = \sum_{i\in N} x_i = \sum_{r\in R} x_r + \sum_{l\in L} x_l \geq m \cdot \left(x_{r_0} + x_{l_0} \right) \geq m.$$

Das heißt aber, dass in obiger Ungleichung sogar jeweils Gleichheit gelten muss, daher $x_r = x_{r_0}$ und $x_l = x_{l_0}$ für alle $r \in R$, $l \in L$, sowie $x_{r_0} + x_{l_0} = 1$. Da x beliebig gewählt war, gelten diese Aussagen für jedes Element im Kern. Im Folgenden werde ich nun noch zeigen, dass jede Aufteilung, die von dieser Form ist, auch im Kern liegt. Sei dazu $K \subseteq N$ eine beliebige Koalition. Dann ergibt sich

$$\sum_{i\in K} x_i = |K \cap R| \cdot x_{r_0} + |K \cap L| \cdot x_{l_0} \geq \min\{|K \cap R|, |K \cap L|\} \cdot (x_{r_0} + x_{l_0}) = v(K).$$

Mit $\sum_{i\in N} x_i = m \cdot (x_{r_0} + x_{l_0}) = v(N)$ folgt bereits die Behauptung, also

$$\mathcal{C}(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon x_r = \alpha, x_l = 1 - \alpha \text{ für alle } r \in R, l \in L \text{ und ein } \alpha \in [0,1] \right\}.$$

Man betrachte nun für ein festes $\varepsilon \geq 0$ den ε-Kern des Spieles. Sei dazu $x \in \mathcal{C}_\varepsilon(G)$, falls vorhanden. Dann gilt $x_i \geq v(\{i\}) + \varepsilon = \varepsilon$ für alle $i \in N$, und es folgt direkt

$$\mathcal{C}_\varepsilon(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon x_r = \alpha, x_l = 1 - \alpha \text{ für alle } r \in R, l \in L \text{ und ein } \alpha \in [\varepsilon, 1-\varepsilon] \right\}.$$

Damit ist aber auch klar, dass der minimale ε-Kern für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gegeben ist. Dieser enthält als einziges Element die Gleichverteilung e des Spieles. Da diese also im minimalen und somit auch im einfachen Kern des Spieles enthalten ist, folgt $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(G) = \mathcal{E}_{\min}(G) = \{e\}$. Zuletzt möchte ich noch den τ-Wert des Spieles bestimmten. Sei dazu u der Utopia-Vektor und λ der Konzessionsvektor des Spieles. Nach 2.4.3(ii) ist $u = \lambda = (1, \ldots, 1)$. Weiter ist $g(N) = \sum_{i\in N} u_i - v(N) = 2m - m = m$, und es ergibt sich

$$\tau(G) = u - \frac{g(N)}{\sum_{i\in N} \lambda_i} \lambda = \left(1 - \frac{m}{2m} \right) \cdot u = e.$$

Auch in Fall (ii) fallen also minimal Kern, egalitärer Kern, egalitärer Minimal-Kern und τ-Wert zusammen.

Beispiel 3.6.4. Zuletzt möchte ich nun noch kurz das Bankrott-Spiel aus 2.4.4 aufgreifen. Da es hier kompliziert und wenig aussagekräftig ist, Lösungskonzepte auf den allgemeinen Fall anzuwenden, betrachte ich ein konkretes Spiel.

Sei $R = 100$ das Restkapital eines Unternehmens, welches auf $n = 4$ Gläubiger aufzuteilen ist. Dabei sind die Ansprüche der Gläubiger gegeben durch $a_1 = 20$, $a_2 = a_3 = 60$ und $a_4 = 110$. Dies ergibt eine charakteristische Funktion $v \colon \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ mit

$$\{2,4\} \mapsto 20, \quad \{3,4\} \mapsto 20, \quad \{1,2,4\} \mapsto 40, \quad \{1,3,4\} \mapsto 40, \quad \{2,3,4\} \mapsto 80, \quad N \mapsto R$$

und K $\mapsto 0$ für alle weiteren $K \subseteq N$. Mit $N = \{1,2,3,4\}$ ergibt dies das Spiel $G = (N, v)$. In 2.4.4 habe ich bereits gezeigt, dass ein solches Spiel G konvex ist. Weiterhin ist der Utopia-Vektor u des Spieles durch $u = (20, 60, 60, 100)$ gegeben und eine untere Schranke für die Elemente des Kerns durch $(v(\{1\}), \ldots, v(\{4\})) = (0, \ldots, 0)$, da G konvex ist. Somit ist $0 \leq x_i \leq u_i$ eine notwendige Bedingung dafür, dass $x \in \mathcal{A}(G)$ im Kern von G liegt. Es lässt sich schnell zeigen, dass diese Bedingung sogar hinreichend ist. Sei dazu $x \in \mathcal{A}(G)$ mit $0 \leq x_i \leq u_i$ für alle $i \in N$. Es ist zu zeigen, dass $\sum_{i \in K} x_i \geq v(K)$ für alle $K \subseteq N$ gilt. Für $K \subseteq N$ mit $v(K) = 0$ ist die Aussage trivial. Sei exemplarisch $K = \{1, 2, 4\}$. Dann gilt

$$\sum_{i \in K} x_i = v(N) - \sum_{i \in N \setminus K} x_i \geq v(N) - \sum_{i \in N \setminus K} u_i = R - u_3 = 40 = v(K).$$

Für alle weiteren $K \subseteq N$ mit $v(K) \neq 0$ lässt sich die Aussage vollkommen analog zeigen. Das heißt es gilt

$$\mathcal{C}(G) = \left\{ x \in \mathcal{A}(G) \colon 0 \leq x_i \leq u_i \right\}.$$

Die der Gleichverteilung $e = (25, \ldots, 25)$ am nächsten kommenden Aufteilung im Kern ist damit gegeben durch $a = (20, \frac{80}{3}, \frac{80}{3}, \frac{80}{3}) \approx (20, 26.7, 26.7, 26.7)$, also $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(G) = \{a\}$. Nicht mehr so schön zu beschreiben ist der minimale Kern des Spieles. Man sieht zwar noch leicht, dass sich dieser für $\varepsilon_0 = 10$ ergibt, da in diesem Fall

$$x_1 \geq v(\{1\}) + \varepsilon_0 = 10 \quad \text{und} \quad x_2 + x_3 + x_4 \geq v(\{2,3,4\}) + \varepsilon_0 = 90$$

für ein $x \in \mathcal{A}(G)$, daher mit $\sum_{i \in N} x_i = 100$ gerade noch erfüllt werden können, nur erweist sich die Aufteilung zwischen den Spielern 2, 3 und 4 als schlecht zu kontrollieren. Es ergibt sich

$$\mathcal{C}_{\min}(G) = \left\{ x \in \mathcal{A}(G) \colon x_1 = 10,\ x_i + x_4 \geq 40 \text{ und } x_j \geq 10 \text{ für } i \in \{2,3\}, j \in \{2,3,4\} \right\}.$$

Die am gleichmäßigsten verteilte Aufteilung des minimalen Kerns ist damit $b = (10, 30, 30, 30)$, daher $\mathcal{E}_{\min}(G) = \{b\}$. Als letztes bleibt noch der τ-Wert des Spieles zu bestimmen. Für diesen wird normalerweise der Konzessionsvektor des Spieles benötigt. Da G konvex ist, reicht es jedoch nach Korollar 3.5.2 bestimmte Werte der Lückenfunktion g des Spieles zu bestimmen, nämlich $g(\{i\})$ für $i \in N$ und $g(N)$. Es ergibt sich $g(\{i\}) = u_i - v(\{i\}) = u_i$ und $g(N) = 140$. Damit lässt sich der τ-Wert nach Korollar 3.5.2 berechnen:

$$\tau(G) = \left(1 - \frac{g(N)}{\sum_{i \in N} g(\{i\})}\right) u + \frac{g(N)}{\sum_{i \in N} g(\{i\})} \begin{pmatrix} v(\{1\}) \\ \vdots \\ v(\{n\}) \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{140}{240}\right) u = \begin{pmatrix} \frac{25}{3} \\ 25 \\ 25 \\ \frac{125}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 8{,}3 \\ 25 \\ 25 \\ 41{,}7 \end{pmatrix}.$$

Es ist zu bemerken, dass der τ-Wert in diesem Fall nicht im minimalen Kern des Spieles liegt.

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass die eingeführten Lösungskonzepte relativ nah beieinander liegen, und manchmal sogar auf dieselben Lösungen führen, was die Aussagekraft dieser bestärkt. Weiterhin wirken die empfohlenen Gewinnaufteilungen auch durchaus sinnvoll.

4 Fairness

Dieses vorletzte Kapitel meiner Arbeit beschäftigt sich mit der Bewertung von Gewinnaufteilungen. Dabei werde ich mich darauf beschränken, zwei von Krabs und Rosenbusch zwischen 2006 und 2008 [KR], [Ros09] definierte Fairness-Begriffe einzuführen und diese anschließend grob in den Kontext dieser Arbeit einzuordnen sowie auf einige Beispiele anzuwenden.

Beide Begriffe beruhen dabei auf einer Quasiordnung der Spieler. Aus Gründen der Lesbarkeit werde ich im Folgenden aber nur von (Spieler-) Ordnungen sprechen - gemeint sind dabei jedoch immer Quasiordnungen. Dies möchte ich kurz festhalten und gleichzeitig den Begriff einer Quasiordnung wiederholen:

Definition 4.0.1. *Sei X eine Menge und $\sim$ eine binäre Relation auf X. Dann heißt $\sim$ **Quasiordnung** oder kurz **Ordnung** auf X, falls $\sim$ reflexiv und transitiv ist.*

Ist X in obiger Definition eine Spielermenge eines Spieles (X, v), so werde ich eine Ordnung auf X im weiteren Verlauf auch **Spielerordnung** nennen.

4.1 Fairness bzgl. einer Spielerordnung

Die folgende erste Definition einer fairen Gewinnaufteilung ist noch sehr allgemein gehalten. Sie benutzt eine gegebene Ordnung $\lesssim$ auf der Spielermenge N eines Spieles. Wird ein Spieler a einem Spieler b bzgl. dieser Ordnung vorgezogen, das heißt es gilt $b \lesssim a$, so hält die Ordnung Spieler a für mindestens genauso wichtig wie Spieler b. Eine bzgl. $\lesssim$ faire Gewinnaufteilung darf dementsprechend Spieler a nicht weniger zusprechen als Spieler b.

Definition 4.1.1. *Sei $G = (N, v)$ ein Spiel und $\lesssim$ eine Quasiordnung auf N. Dann heißt eine Gewinnaufteilung $x \in \mathcal{A}(G)$ **fair bzgl.** $\lesssim$, falls für alle $i, j \in N$ aus $i \lesssim j$ bereits $x_i \leq x_j$ folgt.*

Die Definition verschiebt das Problem Fairness mathematisch zu definieren also nur, denn wie soll eine solche Ordnung aussehen, beziehungsweise wann ist ein Spieler "besser" oder "wichtiger" als ein anderer? Bevor ich auf diese Frage in den nächsten beiden Abschnitten genauer eingehen werde, möchte ich noch kurz erläutern, warum ich von der Relation $\lesssim$ verlange, dass sie eine Quasiordnung, also reflexiv und transitiv ist. Dies ist im Prinzip nämlich nicht nötig, daher obige Definition bleibt wohldefiniert für jede beliebige binäre Relation. Die Forderung ist also reine Kosmetik, um die Relation anschaulicher und intuitiver erscheinen zu lassen: Ein Spieler ist trivialerweise genauso gut wie er selbst (Reflexivität), und wird ein Spieler b besser als ein Spieler a gewertet und ein Spieler c besser als b, so sollte auch c besser als a sein (Transitivität).

Im Folgenden werde ich nun zeigen, dass diese Forderung keine Einschränkung darstellt, daher dass sich eine beliebige binäre Relation zu einer reflexiven und transitiven Relation erweitern lässt, und dass diese neue Relation hinsichtlich des obigen Fairness-Begriffes äquivalent zur ursprünglichen Relation ist. Zunächst muss ich dafür eine solche Erweiterung definieren.

Definition 4.1.2. *Sei X eine endliche Menge und $\sim$ eine binäre Relation auf X, also $\sim \subseteq X \times X$. Dann ist die reflexive und transitive Hülle $\lesssim$ von $\sim$ gegeben durch*

$$\lesssim := \bigcap \Big\{ A \subseteq X \times X : \big(\sim \subseteq A\big), \big(x \in X \Rightarrow (x,x) \in A\big), \big((a,b),(b,c) \in A \Rightarrow (a,c) \in A\big) \Big\}.$$

Dies ist gerade die kleinste reflexive und transitive binäre Relation, welche $\sim$ noch enthält.

Lemma 4.1.3. *Sei $G = (N, v)$ ein Spiel, $\sim$ eine binäre Relation auf N und $\lesssim$ die reflexive und transitive Hülle von $\sim$. Es ist $x \in \mathcal{A}(G)$ genau dann fair bzgl. $\sim$, wenn x fair bzgl. $\lesssim$ ist.*

Beweis. Die Rückrichtung ist klar, denn ist $x \in \mathcal{A}(G)$ fair bzgl. $\lesssim$, so folgt mit $\sim \subseteq \lesssim$ direkt, dass x auch fair bzgl. $\sim$ ist. Es bleibt also die Hinrichtung zu zeigen. Sei dazu $x \in \mathcal{A}(G)$ fair bzgl. $\sim$ und $i, j \in N$ beliebig mit $i \lesssim j$. Gilt auch $i \sim j$, so ist $x_i \leq x_j$. Man nehme also an es sei $i \nsim j$. Dann sind nach Konstruktion von $\lesssim$ zwei Fälle zu unterscheiden:

(1) $i \lesssim j$ ist durch den reflexiven Abschluss von $\sim$ entstanden, daher es gilt $i = j$. Dann ist natürlich auch $x_i = x_j$ und die Aussage somit trivial.

(2) $i \lesssim j$ ist durch den transitiven Abschluss von $\sim$ entstanden, daher es gibt $a_1, \ldots, a_n \in N$ mit $a_1 = i$, $a_n = j$ und $a_k \sim a_{k+1}$ für $k = 1, \ldots, n-1$. Dann ist aber auch $x_{a_k} \leq x_{a_{k+1}}$ für $k = 1, \ldots, n-1$, da x nach Voraussetzung fair bzgl. $\sim$ ist, und es folgt

$$x_i = x_{a_1} \leq \ldots \leq x_{a_n} = x_j.$$

Somit ist x auch fair bzgl. $\lesssim$. □

Zum Ende dieses Abschnitts möchte ich nun noch auf drei Probleme hinweisen, welche Definition 4.1.1 mit sich bringt:

Bemerkung 4.1.4. *Sei $G = (N, v)$ ein Spiel.*

(1) Die Gleichverteilung $e \in \mathcal{A}(G)$ aus Definition 3.4.1 ist fair bzgl. jeder beliebigen Ordnung der Spieler, denn es gilt $e_i \leq e_j$ für alle $i, j \in N$.

(2) Teil (1) der Bemerkung impliziert in Verbindung mit Beispiel 2.4.1, dass im Sinne von Definition 4.1.1 faire Gewinnaufteilungen außerhalb des Kerns eines Spieles liegen können - unabhängig von der jeweiligen Ordnung.

(3) Ist $\lesssim$ eine Spielerordnung, welche keine zwei Spieler miteinander vergleichen kann, daher für $i, j \in N$ mit $i \neq j$ gilt nie $i \lesssim j$, so ist jede Aufteilung $x \in \mathcal{A}(G)$ fair bzgl. $\lesssim$.

Alle drei Punkte sind zumindest diskussionswürdig. Ich werde (1) und (2) in dem Sinne aus dem Weg gehen, als dass ich - wie auch im übrigen Teil dieser Arbeit - abgesehen von wenigen Ausnahmen überhaupt nur Aufteilungen im Kern eines Spieles betrachte. Trotzdem möchte ich hier der Vollständigkeit halber noch zwei Möglichkeiten angeben Definition 4.1.1 zu modifizieren, sodass die Gleichverteilung im Allgemeinen nicht mehr fair ist:

(i) Man fordert $x_i < x_j$ statt $x_i \leq x_j$, falls nur $i \lesssim j$ aber nicht $j \lesssim i$ gilt.

(ii) Die Definition verlangt direkt nach einer irreflexiven, antisymmetrischen und transitiven binären Relation anstatt nach einer Quasiordnung. Demenstprechend müsste $i \lesssim j$ implizieren, dass $x_i < x_j$ ist, damit eine Aufteilung x fair bzgl. $\lesssim$ ist.

Punkt (3) obiger Bemerkung kann im Allgemeinen, daher für beliebige Spiele, leider nicht ausgeschlossen werden. Hier sollte es die Aufgabe der Spielerordnung sein, aus einem gegebenen Spiel möglichst viele Informationen zu lesen, sodass der beschriebene Fall möglichst selten eintritt.

Um nun zu konkreten Fairness-Begriffen zu gelangen, werde ich in diesem und im nächsten Abschnitt zunächst die beiden von Krabs und Rosenbusch [KR], [Ros09] eingeführten Spielerordnungen vorstellen und mit Hilfe dieser zwei Fairness-Begriffe einführen.

Definition 4.2.1. *Sei (N, v) ein Spiel und seien $i, j \in N$ zwei Spieler. Dann heißt Spieler i **wertvoller** als Spieler j, falls $v(K \cup \{i\}) \geq v(K \cup \{j\})$ für alle Koalitionen $K \subseteq N \setminus \{i, j\}$ gilt. Ich bezeichne dies mit $j \precsim i$.*

Das heißt, Spieler i wird im Vergleich zu Spieler j als wertvoller bezeichnet, falls jede Koalition, welche weder Spieler i noch Spieler j enthält, von einem Beitritt Spieler i's mindestens genauso profitieren würde wie von einem Beitritt Spieler j's. Hierbei ist zu beachten, dass tatsächlich nur Gleichheit verlangt wird, daher ein Spieler i formal wertvoller als er selbst ist. Genauso ist es möglich, dass jede Spieler i und j nicht enthaltende Koalition gleichermaßen von einem Beitritt Spieler i's wie von einem Beitritt Spieler j's profitiert, daher dass j wertvoller als i und i wertvoller als j ist. In diesem Fall bezeichne ich Spieler i und j als **gleich wertvoll**.

Um nun aus der eingeführten Relation $\precsim$ mit Hilfe von Definition 4.1.1 einen Fairness-Begriff zu gewinnen, bleibt zu zeigen, dass $\precsim$ auch eine Quasiordnung ist:

Korollar 4.2.2. *Sei (N, v) ein Spiel. Dann ist $\precsim$ eine Quasiordnung auf der Spielermenge N.*

Beweis. Offensichtlich ist $\precsim$ eine reflexive binäre Relation auf N. Es bleibt zu zeigen, dass $\precsim$ auch transitiv ist. Seien dazu $i, j, k \in N$ mit $i \precsim j$ und $j \precsim k$. Sei weiter $K \subseteq N \setminus \{i, k\}$ beliebig. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(1) Gilt $j \notin K$, so folgt $v(K \cup \{i\}) \leq v(K \cup \{j\})$ aus $i \precsim j$, $v(K \cup \{j\}) \leq v(K \cup \{k\})$ aus $j \precsim k$ und damit $v(K \cup \{i\}) \leq v(K \cup \{k\})$, also auch $i \precsim k$.

(2) Sei nun $j \in K$ und setze $L := K \setminus \{j\}$. Dann folgt $v(L \cup \{k\} \cup \{i\}) \leq v(L \cup \{k\} \cup \{j\})$ aus $i \precsim j$, $v(L \cup \{i\} \cup \{j\}) \leq v(L \cup \{i\} \cup \{k\})$ aus $j \precsim k$ und damit $i \precsim k$ wegen

$$v(K \cup \{i\}) = v(L \cup \{j\} \cup \{i\}) \leq v(L \cup \{i\} \cup \{k\}) \leq v(L \cup \{k\} \cup \{j\}) = v(K \cup \{k\}).$$

Also ist $\precsim$ auch transitiv. □

Die folgende Definition eines ersten Fairness-Begriffes ist somit wohldefiniert.

Definition 4.2.3. *Sei G ein Spiel. $x \in \mathcal{A}(G)$ heißt **schwach fair**, falls x fair bzgl. $\precsim$ ist.*

Die Bezeichnung "schwach" ist hierbei primär als relative Schwäche im Vergleich zu dem noch folgenden zweiten Fairness-Begriff zu sehen und mag daher im Moment etwas willkürlich wirken - spätestens mit Korollar 4.3.4 sollte sich dies aber klären.

Das nun folgende Beispiel zeigt auf der einen Seite, dass schwache Fairness oftmals wenig aussagekräftig ist, und motiviert gleichzeitig die zweite angekündigte Präordnung.

Beispiel 4.2.4. Sei $N = \{1, 2, 3, 4\}$ und $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
&\emptyset \mapsto 0, \quad \{1\} \mapsto 1, \quad \{2\} \mapsto 2, \quad \{3\} \mapsto 3, \quad \{4\} \mapsto 4,\\
&\{1,2\} \mapsto 13, \quad \{1,3\} \mapsto 12, \quad \{1,4\} \mapsto 11, \quad \{2,3\} \mapsto 10, \quad \{2,4\} \mapsto 9, \quad \{3,4\} \mapsto 8,\\
&\{1,2,3\} \mapsto 26, \quad \{1,2,4\} \mapsto 27, \quad \{1,3,4\} \mapsto 28, \quad \{2,3,4\} \mapsto 29, \quad N \mapsto 60.
\end{aligned}$$

Dann ist $G = (N, v)$ ein konvexes Spiel, wie sich leicht nachrechnen lässt, und als solches insbesondere balanciert - zum Beispiel liegt die Gleichverteilung $e = (15, 15, 15, 15)$ im Kern des Spieles. Leider ist kein Spieler mindestens genauso wertvoll wie ein anderer. Zum Beispiel gilt zwar $v(\{1\}) < v(\{2\})$ und $v(\{3,4\} \cup \{1\}) < v(\{3,4\} \cup \{2\})$, aber auch $v(\{3\} \cup \{1\}) > v(\{3\} \cup \{2\})$, und somit weder $1 \precsim 2$ noch $2 \precsim 1$. Analog lässt sich zeigen, dass keine zwei Spieler bzgl. $\precsim$ miteinander vergleichbar sind - es tritt also gerade das Problem aus Bemerkung 4.1.4, (3) auf. Wie dort beschrieben ist somit jede Gewinnaufteilung $x \in \mathcal{A}(G)$ schwach fair und der Begriff der schwachen Fairness in diesem Falle wertlos.

Um jetzt zu einem stärkeren Fairness-Begriff zu gelangen, wird eine schwächere Spielerordnung benötigt. Damit meine ich eine Ordnung, welche auch in obigem Beispiel 4.2.4 in der Lage ist, eine Aussage zu machen, also Spieler zu ordnen. Dazu sollte diese Ordnung Informationen des Spieles vernachlässigen, da sie ansonsten zu dem gleichen Ergebnis wie die in 4.2.1 eingeführte Ordnung $\lesssim$ kommen würde, welche eben nicht vernachlässigt oder gewichtet, und dadurch manchmal zu genau arbeitet, daher sich von wenig relevanten Details verwirren lässt. Aber was sind relevante Details?

Krabs und Rosenbusch bedienen sich hier dem in Abschnitt 2.2 eingeführten Utopia-Vektor, welcher als obere Schranke des Gewinns eines Spielers (vergleiche Satz 2.2.2) eine relativ charakteritische Größe darstellt. Zur Ergänzung benutzen sie noch den Gewinn jedes einzelnen Spielers für sich und erhalten damit eine im Allgemeinen gröbere Spielerordnung. Genauer wird sich in Korollar 4.3.2 zeigen, dass die neue Ordnung genau dann gröber ist, wenn mehr als drei Spieler beteiligt sind, und ansonsten äquivalent zu der bereits eingeführten Spielerordnung $\lesssim$ ist.

Definition 4.3.1. *Sei (N, v) ein Spiel, u dessen Utopia-Vektor und seien $i, j \in N$ zwei Spieler. Dann heißt Spieler i **grob wertvoller** als Spieler j, falls $v(\{i\}) \leq v(\{j\})$ und $u_i \leq u_j$ gilt. Ich bezeichne dies mit $i \precapprox j$.*

Ich möchte diese Definition auf obiges Beispiel 4.2.4 beziehen: In diesem ist der Utopia-Vektor gegeben durch $u = (31, 32, 33, 34)$, daher es ist $u_1 < u_2 < u_3 < u_4$. Damit folgt aber bereits $1 \precapprox 2 \precapprox 3 \precapprox 4$, denn es ist auch $v(\{1\}) < v(\{2\}) < v(\{3\}) < v(\{4\})$. Eine grobe Sortierung der Spieler ist also möglich. Weiterhin lässt sich bemerken, dass die neue Spielerordnung $\precapprox$ gerade die Werte der Zweier-Koalitionen vernachlässigt hat, welche dafür verantwortlich waren, dass die alte Spielerordnung $\lesssim$ keine Aussage treffen konnte.

Nun folgt kurz das angekündigte Korollar, welches zeigt, dass $\precapprox$ tatsächlich eine gröbere Spielerordnung als $\lesssim$ darstellt, und sein Name dadurch gerechtfertigt ist.

Korollar 4.3.2. *Sei (N, v) ein Spiel und seien $i, j \in N$ zwei Spieler. Ist i wertvoller als j, so ist i auch grob wertvoller als j. Im Falle $|N| \leq 3$ gilt auch die Umkehrung.*

Beweis. Sei $G = (N, v)$ und u der Utopia-Vektor von G. Seien weiter $i, j \in N$ mit $i \precsim j$. Dann gilt $v(K \cup \{i\}) \leq v(K \cup \{j\})$ für alle $K \subseteq N \setminus \{i, j\}$ und mit $K_1 := \emptyset$ und $K_2 := N \setminus \{i, j\}$ folgt insbesondere

$$v(\{i\}) = v(K_1 \cup \{i\}) \leq v(K_1 \cup \{j\}) = v(\{j\})$$

sowie

$$u_i = v(N) - v(K_2 \cup \{j\}) \leq v(N) - v(K_2 \cup \{i\}) = u_j.$$

Also gilt auch $i \precapprox j$. Es bleibt die Umkehrung im Falle $|N| \leq 3$ zu zeigen. Der Fall $|N| = 1$ ist trivial. Sei also $|N| \in \{2, 3\}$. Seien weiter $i, j \in N$ mit $i \precapprox j$ und $K \subseteq N \setminus \{i, j\}$ beliebig, also entweder $K = \emptyset$ oder $K = N \setminus \{i, j\}$. Wie oben folgt jeweils $v(K \cup \{i\}) \leq v(K \cup \{j\})$ auf Grund von $v(\{i\}) \leq v(\{j\})$ und $u_i \leq u_j$ und damit $i \precsim j$. $\square$

Des Weiteren ist $\precapprox$ offensichtlich eine Quasiordnung und damit auch die Definition des zweiten Fairness-Begriffes wohldefiniert.

Definition 4.3.3. *Sei G ein Spiel. $x \in \mathcal{A}(G)$ heißt **stark fair**, falls x fair bzgl. $\precapprox$ ist.*

Schnell ergibt sich nun wie gewünscht:

Korollar 4.3.4. *Sei G ein Spiel und $x \in \mathcal{A}(G)$ stark fair. Dann ist x auch schwach fair.*

Beweis. Sei $G = (N, v)$, $x \in \mathcal{A}(G)$ stark fair und seien $i, j \in N$. Sei weiter i wertvoller als j. Dann ist i nach Korollar 4.3.2 auch grob wertvoller als j und es folgt $x_i \geq x_j$, da x stark fair ist. Also ist x auch schwach fair. $\square$

Es ist also tatsächlich ein stärkerer Fairness-Begriff gewonnen worden. Dies lässt sich auch an Beispiel 4.2.4 sehen: Dort wäre zwar jede Gewinnaufteilung $x \in \mathcal{A}(G)$ schwach fair, aber nur die Gewinnaufteilungen mit $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ sind auch stark fair.

4.4 Faire Gewinnaufteilungen

Zuletzt werde ich mich nun noch kurz mit dem in 3.5 eingeführten τ-Wert eines Spieles beschäftigen und im Anschluss ein punktwertiges Lösungskonzept konstruieren, dessen einzige Gewinnaufteilung für alle balancierten Spiele stark fair ist.

Die zunächst folgende Aussage geht ebenfalls auf Krabs und Rosenbusch zurück. Sie besagt, dass sich in einem konvexen Spiel immer eine stark faire Gewinnaufteilung finden lässt, nämlich gerade der τ-Wert des Spieles.

Satz 4.4.1. *Sei G ein konvexes Spiel. Dann ist $\tau(G)$ stark fair.*

Beweis. Sei $G = (N, v)$ ein konvexes Spiel, u dessen Utopia-Vektor und g die Lückenfunktion des Spieles. Sei weiter $x := \tau(G)$ der τ-Wert des Spieles. Es ist zu zeigen, dass x stark fair ist. Seien dazu $j, k \in N$ zwei Spieler mit $j \precsim k$. Dann ist $v(\{j\}) \leq v(\{k\})$ und $u_j \leq u_k$. Weiterhin ist $g(N) \geq 0$, da G konvex und somit quasi-balanciert ist. Man unterscheide nun zwei Fälle:

(i) Es gilt $g(N) = 0$. Dann ist $x = u$, also auch $x_j \leq x_k$.

(ii) Es gilt $g(N) > 0$. Dann ist nach Korollar 3.5.2 für $i \in N$

$$x_i = (1-\mu) \cdot u_i + \mu \cdot v(\{i\}) \quad \text{mit} \quad \mu := \frac{g(N)}{\sum_{l \in N} g(\{l\})}.$$

Nach Korollar 2.3.12 gilt weiterhin $\lambda_i = g(\{i\})$ für alle $i \in N$ und da G konvex und somit auch quasi-balanciert ist, folgt $g(N) \leq \sum_{i \in N} \lambda_i = \sum_{i \in N} g(\{i\})$. Also ist $\mu \in [0, 1]$ und damit

$$x_j = (1-\mu) \cdot u_j + \mu \cdot v(\{j\}) \leq (1-\mu) \cdot u_k + \mu \cdot v(\{k\}) = x_k.$$

Im Allgemeinen gilt also $x_j \leq x_k$. Damit ist x stark fair. □

Leider kann im Allgemeinen nicht garantiert werden, dass der τ-Wert im Kern des Spieles liegt. Man betrachte dazu das folgende Beispiel:

Beispiel 4.4.2. Sei $N = \{1, 2, 3, 4\}$ und $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} &\{1\} \mapsto 1, \quad \{1,2\} \mapsto 3, \quad \{1,3\} \mapsto 4, \quad \{1,4\} \mapsto 5, \\ &\{2,3\} \mapsto 5, \quad \{2,4\} \mapsto 6, \quad \{3,4\} \mapsto 7, \quad N \mapsto 10. \end{aligned}$$

und K $\mapsto 0$ für alle weiteren $K \subseteq N$. Dann sind Utopia-Vektor u und Konzessionsvektor λ des Spieles $G = (N, v)$ gegeben durch $u = (10, 10, 10, 10)$ und $\lambda = (9, 10, 10, 10)$. Sei g die Lückenfunktion von G. Dann gilt $g(N) = 30$. Damit ergibt sich für den τ-Wert

$$\tau(G) = u - \frac{g(N)}{\sum_{i \in N} \lambda_i} \lambda \approx (3, 2.3, 2.3, 2.3).$$

Der Kern des Spieles enthält hier aber nur ein Element, nämlich die Aufteilung $a = (1, 2, 3, 4)$, und somit gilt $\tau(G) \notin \mathcal{C}(G) = \{a\}$. Weiterhin gilt $2 \precsim 1$, denn es ist $v(\{2\}) < v(\{1\})$ und $u_1 = u_2$. Also ist die Aufteilung a nicht stark fair.

Beispiel 4.4.2 zeigt zusätzlich, dass es Spiele gibt, in welchen der Kern zwar nicht-leer ist, aber auch keine stark faire Gewinnaufteilung enthält. Gleiches gilt demensprechend auch für alle Teilmengen des Kerns, daher für den minimalen Kern, den egalitären Kern und den egalitären Minimal-Kern. Hieraus lässt sich schließen, dass obiges Problem des τ-Wertes genauso ein Problem des Begriffes der starken Fairness ist, welcher eben nicht alle Informationen eines Spieles nutzt. Wie man sieht, kann dies ebenso zu schlechteren (Beispiel 4.4.2) wie zu besseren (Beispiel 4.2.4) Resultaten führen.

In diesem Zusammenhang ist außerdem zu bemerken, dass Rosenbusch in [Ros09] gezeigt hat, dass jeder nicht-leere Kern mindestens eine schwach faire Gewinnaufteilung enthält. Des Weiteren hat Straube in [Str10] bewiesen, dass der egalitäre Minimal-Kern schwach fair ist, also insbesondere auch der minimale Kern mindestens eine schwach faire Gewinnaufteilung enthält.

Ich möchte hier nun noch zeigen, wie man in einem beliebigen, nicht notwendigerweise konvexen Spiel eine stark faire Gewinnaufteilung findet. Die Konstruktion dieser entstammt erneut [KR] und ist angelehnt an den τ-Wert eines Spieles. Für diesen haben wir bereits gesehen, dass er in konvexen Spiel stark fair ist. Der Grund dafür liegt in Korollar 2.3.12: In konvexen Spielen gilt $\lambda_i = g(\{i\}) = u_i - v(\{i\})$ für alle $i \in N$ und dies sind die beiden Größen, auf welchen die starke Fairness beruht. Es bietet sich also an, eine Gewinnaufteilung analog zum τ-Wert zu konstruieren, welche direkt $g(\{i\})$ anstelle von u_i verwendet.

Theorem 4.4.3. *Sei $G = (N, v)$ ein balanciertes Spiel, u dessen Utopia-Vektor und g die Lückenfunktion des Spieles. Dann ist durch*

$$\zeta(G) := \begin{cases} u, & \text{für } g(N) = 0 \\ u - \dfrac{g(N)}{\sum_{i \in N} g(\{i\})} \cdot \begin{pmatrix} g(\{1\}) \\ \vdots \\ g(\{n\}) \end{pmatrix}, & \text{für } g(N) > 0 \end{cases}$$

eine stark faire Gewinnaufteilung gegeben.

Beweis. Sei $G = (N, v) \in \mathcal{B}$, u der Utopia-Vektor und g die Lückenfunktion des Spieles. Sei weiter $x := \zeta(G)$. Es ist zu zeigen, dass x wohldefiniert und stark fair ist. Gilt $g(N) = 0$, so ist x offensichtlich wohldefiniert und wie in Satz 4.4.1 gezeigt auch stark fair. Sei also $g(N) \neq 0$. Da G balanciert ist, ist G auch quasi-balanciert und es gilt $g(N) \geq 0$, also $g(N) > 0$. Dies führt zu

$$0 < g(N) = \sum_{i \in N} u_i - v(N).$$

Man nehme nun an, es wäre $\sum_{i \in N} v(\{i\}) > v(N)$. Dann folgt mit $x \in \mathcal{C}(G)$

$$v(N) = \sum_{i \in N} x_i \geq \sum_{i \in N} v(\{i\}) > v(N).$$

Das ist ein Widerspruch. Somit war die Annahme falsch und es gilt $\sum_{i \in N} v(\{i\}) \leq v(N)$. Damit folgt jetzt aber

$$\sum_{i \in N} g(\{i\}) = \sum_{i \in N} u_i - \sum_{i \in N} v(\{i\}) \geq \sum_{i \in N} u_i - v(N) > 0.$$

Außerdem ergibt sich

$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N} \left(u_i - \frac{g(N)}{\sum_{i \in N} g(\{i\})} \cdot g(\{i\}) \right) = \sum_{i \in N} u_i - g(N) = v(N).$$

Damit ist gezeigt, dass x eine wohldefinierte Gewinnaufteilung ist. Es bleibt zu zeigen, dass x auch stark fair ist. Dies ergibt sich aber vollkommen analog zum Beweis der starken Fairness des τ-Wertes in 4.4.1, da in konvexen Spielen $\tau(G)$ und $\zeta(G)$ offensichtlich übereinstimmen (vergleiche Bemerkung 4.4.4) und im Beweis von 4.4.1 nur benutzt wird, dass G quasi-balanciert ist, was auch hier gegeben ist. $\square$

Nach Konstruktion folgt noch:

Bemerkung 4.4.4. *Sei $G = (N, v)$ ein Spiel, g dessen Lückenfunktion und λ der Konzessionsvektor des Spieles. Gilt $\lambda_i = g(\{i\})$ für alle $i \in N$, so ist auch $\tau(G) = \zeta(G)$. Insbesondere gilt die Gleichheit also in konvexen Spielen G.*

Wie auch der τ-Wert hat diese neue Gewinnaufteilung ζ den Nachteil, dass sie im Allgemeinen Fall nicht im Kern eines Spieles liegt. Dafür findet sie zu jedem balancierten Spiel eine stark faire Gewinnaufteilung. Dementsprechend stellt die Abbildung $G \mapsto \zeta(G)$ auch ein punktwertiges Lösungskonzept für balancierte Spiele dar.

4.5 Fairness in der Anwendung

Im Folgenden werde ich nun die in diesem Kapitel eingeführten Begriffe kurz auf zwei der Beispiele aus den vorherigen Kapiteln beziehen. Insbesondere werde ich die Spieler bzgl. der eingeführten Ordnungen miteinander vergleichen, die von Lösungskonzepten ausgezeichneten Gewinnaufteilungen auf schwache und starke Fairness hin untersuchen und die neu konstruierte Gewinnaufteilung ζ bestimmten.

Beispiel 4.5.1. Das erste Beispiel ist das Unternehmer-Arbeiter-Spiel G von 2.4.2 und 3.6.1, welches sich aus w Arbeitern und einem Unternehmer z zusammensetzt. Ich habe bereits gezeigt, dass der egalitäre Kern durch die Gleichverteilung e des Spieles und der egalitäre Minimal Kern durch den Vektor $a := (\frac{3}{2}, \ldots, \frac{3}{2}, \frac{w}{2})$ gegeben ist. Für den τ-Wert ergab sich ebenfalls $\tau(G) = a$.

Offensichtlich sind alle Arbeiter gleich wertvoll, denn der Wert einer Koalition hängt hier nur von der Anzahl der mitwirkenden Arbeiter ab, nicht aber davon, welcher Arbeiter im Detail beteiligt ist. Es bleibt also einen Arbeiter mit dem Unternehmer zu vergleichen. Sei dazu $i \in W$ ein Arbeiter und z der Unternehmer. Einerseits gilt $v(\{i\}) = 1 > 0 = v(\{z\})$ und andererseits $u_i = w < 2(w-1) = u_z$, falls mindestens 3 Arbeiter vorhanden sind. In diesem Fall ist also weder der Arbeiter grob wertvoller als der Unternehmer noch andersherum, und damit sind die beiden auch bzgl. der einfachen "wertvoller"-Ordnung nicht miteinander vergleichbar. Die beiden eingeführten Spielerordnungen unterscheiden sich bei diesem Beispiel also nicht.

Fair sind nun dementsprechend alle Gewinnaufteilungen, welche allen Arbeitern gleichviel zusprechen. Eine Aussage über das faire Verhältnis zwischen den Arbeitern und dem Unternehmer kann nicht gemacht werden. Die beiden ausgezeichneten Aufteilungen a und e sind hier also stark fair.

Zuletzt ist noch zu bemerken, dass $\lambda_i = g(\{i\})$ für alle $i \in N$ ist. Nach Bemerkung 4.4.4 gilt damit $\zeta(G) = \tau(G) = a$.

Beispiel 4.5.2. Nun möchte ich auf das konkrete Beispiel eines Bankrott-Spieles aus 3.6.4 eingehen. In diesem sind vier Gläubiger gegeben, welche Ansprüche $a_1 = 20$, $a_2 = a_3 = 60$ und $a_4 = 110$ auf das Restkapital $R = 100$ eines Unternehmens haben. Der Utopia-Vektor u ist hier gegeben durch $u = (20, 60, 60, 100)$. Außerdem ist $v(\{i\}) = 0$ für alle $i \in N$. Es folgt, dass Spieler 4 grob wertvoller als alle anderen Spieler ist, dass Spieler 2 und 3 grob gleich wertvoll sind, und dass alle Spieler grob wertvoller als Spieler 1 sind. Eine Gewinnaufteilung $x \in \mathcal{A}(G)$ ist also genau dann stark fair, wenn $x_1 \leq x_2 = x_3 \leq x_4$ gilt.

In 3.6.4 habe ich gezeigt, dass der egalitäre Kern durch $a = (20, \frac{80}{3}, \frac{80}{3}, \frac{80}{3})$, der egalitäre Minimal Kern durch $b = (10, 30, 30, 30)$ und der τ-Wert des Spieles durch $\tau(G) = (\frac{25}{3}, 25, 25, \frac{125}{3})$ gegeben ist. Alle drei Gewinnaufteilungen sind somit stark fair und nach Korollar 4.3.4 auch schwach fair.

Wieder ist zu bemerken, dass $\zeta(G) = \tau(G)$ nach Bemerkung 4.4.4 ist, da das Spiel konvex ist.

Zum Abschluss dieses Kapitels und meiner Arbeit werde ich jetzt noch eine Realisierung eines Kostenspieles diskutieren. Dazu stelle ich zunächst die Klasse der Kostenspiele im Allgemeinen vor, bevor ich im Anschluss ein konkretes Beispiel betrachten werde.

Definition 4.5.3. *Ein Spiel (N,c) heißt* ***Kostenspiel****, wenn c positiv, das heißt $c(K) \geq 0$ für alle $K \subseteq N$, und* ***subadditiv*** *ist, das heißt $c(L)+c(M) \geq c(L \cup M)$ für alle $L, M \subseteq N$ mit $L \cap M = \emptyset$.*

Obwohl ein Kostenspiel (N,c) in formaler Hinsicht ein kooperatives n-Personen Spiel ist, darf man es nicht als ein solches verstehen. Der Unterschied besteht darin, dass die charakteristische Funktion c eines solchen Spieles keine Auszahlungs-, sondern eine **Kostenfunktion** darstellt (daher auch die Bezeichnung "Kostenspiel"). Im Gegensatz zu den eigentlichen kooperativen Spielen geht es hier also nicht um die Maximierung des Gewinns der Spieler, sondern um die Minimierung ihrer jeweiligen Kosten. In diesem Zusammenhang erscheint auch die Voraussetzung der Subadditivität sinnvoll: Der Zusammenschluss zweier (disjunkter) Koalitionen verursacht keine neuen Kosten, sondern ermöglicht Einsparungen. Um nun trotzdem die in dieser Arbeit aufgebaute Theorie nutzen zu können, welche davon ausgeht, dass die Spieler eine Maximierung anstreben, ordnet man einem Kostenspiel sein sogenanntes Sparspiel zu:

Definition 4.5.4. *Sei $F = (N,c)$ ein Kostenspiel. Dann ist das F entsprechende* ***Sparspiel*** *gegeben durch (N,v) mit*

$$v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R},\ K \mapsto \sum_{i \in K} c(\{i\}) - c(K).$$

Eine solche Funktion v heißt ***Kostenersparnisfunktion****.*

Die einer Kostenfunktion c entsprechende Kostenersparnisfunktion v beschreibt hier die Einsparungen, welche eine Koalition K in Bezug auf die Kosten jedes einzelnen Koalitionsmitglieds für sich gesehen mit sich bringt. Folglich besteht in einem Sparspiel das Ziel eines Spielers i darin, einen möglichst großen Anteil der eigentlich nötigen Kosten $c(\{i\})$ einzusparen, daher die eigenen Einsparungen zu maximieren. Eine Aufteilung $x \in \mathcal{A}(G)$ eines Sparspieles G beschreibt eine Aufteilung der gesamten Einsparungen. Dieser entspricht wiederum ein Vektor y, welcher durch $y_i := c(\{i\}) - x_i$ gegeben ist, und die Kosten beschreibt, welche Spieler i noch zu zahlen hat. y selbst heißt dementsprechend **Kostenzuteilung** des ursprünglichen Kostenspieles.

Bevor ich nun gleich zum eigentlichen Beispiel komme, möchte ich kurz noch einige Eigenschaften eines Kosten- bzw. Sparspieles festhalten.

Korollar 4.5.5. *Sei $H = (N,c)$ ein Kostenspiel und $G = (N,v)$ dessen entsprechendes Sparspiel.*

(i) Dann ist das Spiel G superadditiv und für alle $K \subseteq N$ ist $v(K) \geq 0$. Insbesondere gilt $v(\{i\}) = 0$ für alle $i \in N$.

(ii) Sei $x \in \mathcal{A}(G)$ eine Aufteilung der gesamten Einsparungen und y die durch $y_i := c(\{i\}) - x_i$ definierte Kostenzuteilung. Dann ist $y \in \mathcal{A}(H)$.

(iii) Eine Einsparungsaufteilung $x \in \mathcal{A}(G)$ liegt genau dann im Kern des Sparspieles G, wenn für die entsprechende Kostenzuteilung $y \in \mathcal{A}(H)$ gilt

$$\sum_{i \in K} y_i \leq c(K) \quad \text{für alle } K \subseteq N.$$

Beweis. (i) Nach Definition ist klar, dass $v(\{i\}) = 0$. Weiter gilt $c(K)+c(L) \geq c(K \cup L)$ für $K, L \subseteq N$ mit $K \cap L = \emptyset$, da c subadditiv ist, und somit folgt direkt

$$v(K)+v(L) = \sum_{i \in K} c(\{i\}) - c(K) + \sum_{i \in L} c(\{i\}) - c(L) \leq \sum_{i \in K \cup L} c(\{i\}) - c(K \cup L) = v(K \cup L).$$

Des Weiteren ergibt sich für $K \subseteq N$ wieder mit Hilfe der Subadditivität von c, dass $\sum_{i \in K} c(\{i\}) \geq c(K)$, also $v(K) \geq 0$.

(ii) Sei $x \in \mathcal{A}(G)$, also $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, und $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y_i := c(\{i\}) - x_i$. Weiterhin ist nach Definition $v(N) = \sum_{i \in N} c(\{i\}) - c(N)$, und es ergibt sich

$$\sum_{i \in N} y_i = \sum_{i \in N} \left(c(\{i\}) - x_i\right) = (v(N) + c(N)) - \sum_{i \in N} x_i = c(N).$$

Damit ist $y \in \mathcal{A}(H)$.

(iii) Sei $K \subseteq N$, $x \in \mathcal{A}(G)$ und $y \in \mathcal{A}(H)$. Dann folgt die Behauptung aus

$$\sum_{i \in K} x_i \geq v(K) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \in K} \left(c(\{i\}) - y_i\right) \geq \sum_{i \in K} c(\{i\}) - c(K) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \in K} y_i \leq c(K).$$

□

Schließlich ist noch zu bemerken, dass es für Kostenspiele zahlreiche Anwendungen gibt. Zum Beispiel zeigt Krabs in [Kra05], dass das sogenannte Flughafenspiel ein Kostenspiel ist. Für weitere Beispiele von Kostenspielen und eine tiefergehende Behandlung dieser möchte ich hier auf [You85] verweisen.

Als letztes folgt nun die angekündigte Realisierung eines Kostenspieles.

Beispiel 4.5.6. Die vier Städte A,B,C und D befinden sich gemeinsam in der Situation, ihre Stromanbindung an das nahegelegene Elektrizitätswerk E neu verhandeln zu müssen. Dabei befindet sich A in unmittelbarer Umgebung des Werkes E, B zumindest noch in der Nähe desselbigen, aber C und D sind verhältnismäßig abseits gelegen. Alle Städte haben einerseits die Möglichkeit, auf eigene Faust eine Anbindung zu erlangen, und können andererseits kooperieren indem sie Leitungen gemeinsam nutzen. Die folgende Abbildung stellt die Situation mit Hilfe eines ungerichteten, gewichteten, zusammenhängenden Graphen dar. Dabei stehen Kanten für mögliche Stromleitungen und ihre Gewichte für die (relativen) Kosten, welche für Bereitstellung und Nutzung derselbigen erhoben werden.

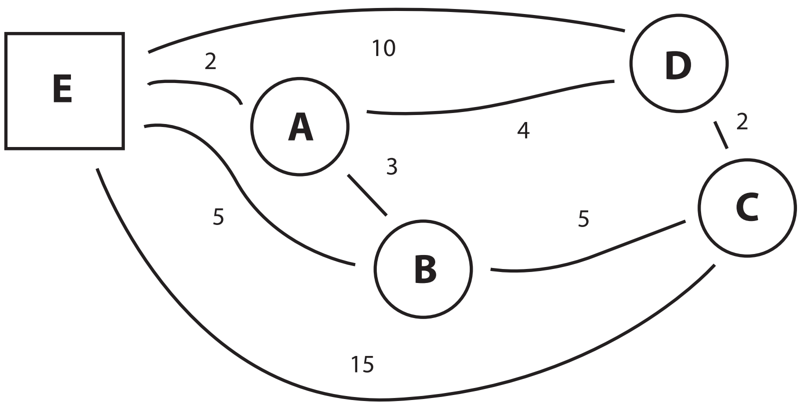

Abbildung 4.1: der das Kostenpiel H repräsentierende Graph

Die Kosten einer Koalition $K \subseteq N := \{A, B, C, D\}$ sind damit gegeben durch das Gewicht des kostenminimalen Spannbaums, welcher von den Knoten $K \cup \{E\}$ induziert wird. Eine Koalition K sucht sich also die insgesamt günstigste Stromanbindung für alle Koalitionsmitglieder, ohne dabei Leitungen nutzen zu können, welche über nicht kooperierende Städte, daher $N \setminus K$ verlaufen. Auf diesem Weg erhalten wir eine Kostenfunktion $c \colon \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$\{A\} \mapsto 2, \quad \{B\} \mapsto 5, \quad \{C\} \mapsto 15, \quad \{D\} \mapsto 10,$$
$$\{A,B\} \mapsto 5, \quad \{A,C\} \mapsto 17, \quad \{A,D\} \mapsto 6, \quad \{B,C\} \mapsto 10, \quad \{B,D\} \mapsto 15, \quad \{C,D\} \mapsto 12,$$
$$\{A,B,C\} \mapsto 10, \quad \{A,B,D\} \mapsto 9, \quad \{A,C,D\} \mapsto 8, \quad \{B,C,D\} \mapsto 12, \quad N \mapsto 11.$$

Nach Konstruktion ist c subadditiv, denn schließen sich zwei disjunkte Koalitionen K, L zu einer neuen zusammen, so hat diese größere Koalition $K \cup L$ in jedem Fall noch die Möglichkeit, dieselben Leitungen zu nutzen, welche K und L jeweils für sich alleine gebraucht hätten. Des Weiteren ist c offensichtlich positiv, da alle Kantengewichte positiv sind. Somit ist durch $H = (N, c)$ ein Kostenspiel gegeben. Zusätzlich ist zu bemerken, dass eine derartige Konstruktion einer Kostenfunktion anhand eines ungerichteten, positiv gewichteten, zusammenhängenden Graphen immer auf ein wohldefiniertes Kostenspiel führt. Ich nenne auf diese Weise konstruierte Spiele **kostenminimale Spannbaum Spiele**.

Das H entsprechende Sparspiel ist in diesem Fall gegeben durch $G = (N, v)$ mit v wie in Definition 4.5.4. Nach Korollar 4.5.5 (i) ist $v(\{i\}) = 0$ für alle $i \in N$. Für alle weiteren Koalitionen ergibt sich

$$\begin{gathered}\{A,B\} \mapsto 2, \quad \{A,C\} \mapsto 0, \quad \{A,D\} \mapsto 6, \quad \{B,C\} \mapsto 10, \quad \{B,D\} \mapsto 0, \quad \{C,D\} \mapsto 13, \\ \{A,B,C\} \mapsto 12, \quad \{A,B,D\} \mapsto 8, \quad \{A,C,D\} \mapsto 19, \quad \{B,C,D\} \mapsto 18, \quad N \mapsto 21.\end{gathered}$$

Der Utopia-Vektor des Spieles ist damit gegeben durch $u = (3, 2, 13, 9)$. Mit $v(\{i\}) = 0$ für alle $i \in N$ folgt, dass $B \precsim_{\approx} A \precsim_{\approx} D \precsim_{\approx} C$. Außerdem lässt sich festhalten, dass die Ordnung $\precsim_{\approx}$ in kostenminimalen Spannbaum Spielen immer vollständig ist, sich also jeder Spieler mit jedem anderen vergleichen lässt, da in solchen Spielen auf Grund von $v(\{i\}) = 0$ für alle $i \in N$ nur der Utopia-Vektor relevant für die Ordnung $\precsim_{\approx}$ ist. Abgesehen von der Vollständigkeit stellt sich die Frage, wie die Spielerordnung eines Sparspieles zu verstehen ist. Im vorliegenden Beispiel erscheint es unintuitiv, dass $A \precsim_{\approx} D$ ist, denn betrachtet man Abbildung 4.1, so wirkt die Stadt A wichtiger als ihre Nachbarstadt D. Der Unterschied besteht darin, dass das Spiel G als Sparspiel nur die möglichen Einsparungen der Städte im Vergleich zu ihren eigenen Kosten $c(\{i\})$ betrachtet. $A \precsim_{\approx} D$ heißt also nicht, dass D bei einer gegebenen Kostenzuteilung $x \in \mathcal{A}(H)$ weniger als A zu bezahlen hat, sondern nur, dass D im Sinne der Ordnung $\precsim_{\approx}$ eine größere Ersparnis als A zusteht.

Um nun $\tau(G)$ und $\zeta(G)$ berechnen zu können, benötigt man die Lückenfunktion g sowie den Konzessionsvektor λ des Spieles G. Erstere berechnet sich zu

$$\begin{gathered}\{A\} \mapsto 3, \quad \{B\} \mapsto 2, \quad \{C\} \mapsto 13, \quad \{D\} \mapsto 9, \quad \{A,B\} \mapsto 3, \quad \{A,C\} \mapsto 16, \\ \{A,D\} \mapsto 6, \quad \{B,C\} \mapsto 5, \quad \{B,D\} \mapsto 11, \quad \{C,D\} \mapsto 9, \quad N \mapsto 6.\end{gathered}$$

Dabei nutze ich aus, dass nach Bemerkung 2.2.5 $g(N \setminus \{i\}) = g(N)$ für alle $i \in N$ gilt. Für den Konzessionsvektor ergibt sich mit obigem g, dass $\lambda = (3, 2, 5, 6)$. Auf Grund von Satz 2.2.2 und Satz 2.2.7 gilt $u_i - \lambda_i \leq x_i \leq u_i$ für ein mögliches $x \in \mathcal{C}(G)$, also

$$0 \leq x_A \leq 3, \quad 0 \leq x_B \leq 2, \quad 8 \leq x_C \leq 13, \quad 3 \leq x_D \leq 9.$$

Den Kern genauer zu beschreiben stellt sich als schwierig heraus. Dagegen ergibt sich mit Hilfe der bestimmten Werte sofort, dass

$$\tau(G) = u - \frac{g(N)}{\sum_{i\in N} \lambda_i} \cdot \lambda \approx \begin{pmatrix} 1{,}9 \\ 1{,}25 \\ 11{,}1 \\ 6{,}75 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \zeta(G) = u - \frac{g(N)}{\sum_{i\in N} g(\{i\})} \begin{pmatrix} g(\{1\}) \\ \vdots \\ g(\{n\}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}3 \\ 1{,}6 \\ 10{,}1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Es ist zu bemerken, dass $\zeta(G)$ in einem Sparspiel nur vom Utopia-Vektor des Spieles abhängt, denn mit $g(\{i\}) = u_i - v(\{i\}) = u_i$, wegen $v(\{i\}) = 0$, folgt

$$\zeta(G) = u - \frac{g(N)}{\sum_{i\in N} g(\{i\})} \begin{pmatrix} g(\{1\}) \\ \vdots \\ g(\{n\}) \end{pmatrix} = u - \frac{\sum_{i\in N} u_i - v(N)}{\sum_{i\in N} u_i} \cdot u = \frac{v(N)}{\sum_{i\in N} u_i} \cdot u.$$

Dies ist dadurch zu erklären, dass in einem Sparspiel auch die Ordnung $\precapprox$ vollständig durch den Utopia-Vektor bestimmt ist, und $\zeta(G)$ gerade als bzgl. $\precapprox$ faire Gewinnaufteilung konstruiert ist.

Bevor ich die erhaltenen Einsparungsaufteilungen diskutieren werde, möchte ich diesen noch die beiden egalitären Ansätze aus Abschnitt 3.4 gegenüberstellen. Die egalitärste Aufteilung, welche obigen vier Kern-Bedingungen genügt, ist gegeben durch $e^{(\mathcal{C})} = (3, 2, 8, 8)$. Es lässt sich nachrechnen, dass $\sum_{i \in K} e_i^{(\mathcal{C})} \geq v(K)$ für alle $K \subseteq N$ gilt. Also liegt $e^{(\mathcal{C})}$ im Kern des Spieles und ist somit auch die egalitärste Aufteilung des Kerns, daher $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(G) = \{e^{(\mathcal{C})}\}$. Deutlich schwieriger gestaltet sich die Bestimmung des egalitären Minimal-Kerns, denn für diesen benötigt man zunächst den minimalen Kern des Spieles. Ich möchte hier auf seine Herleitung verzichten, da diese aufwendig ist und keine neuen Einsichten vermittelt, und ihn stattdessen direkt angeben:

$$\mathcal{C}_{\min}(G) = \mathcal{C}_1(G) = \left\{ (x_A, x_B, x_C, x_D) \in \mathbb{R}^4 \colon x_A = 2, x_B = 1, x_C \in [10, 12], x_D = 18 - x_C \right\}$$

Damit ergibt sich für den egalitären Minimal-Kern des Spieles $\mathcal{E}_{\min}(G) = \{e^{(\min)}\}$ mit $e^{(\min)} = (2, 1, 10, 8)$.

Es lässt sich leicht einsehen, dass alle erhaltenen Einsparungsaufteilungen stark fair (und somit auch schwach fair nach Korollar 4.3.4) sind, denn jeweils ist $x_B \leq x_A \leq x_D \leq x_C$. Des Weiteren lässt sich nachrechnen, dass $\tau(G)$ und $\zeta(G)$ im Kern des Spieles liegen. Somit sind durch $e^{(\mathcal{C})}$, $e^{(\min)}$, $\tau := \tau(G)$ und $\zeta := \zeta(G)$ vier faire, im Kern des Spieles liegende Aufteilungen der gemeinsamen Einsparungen gefunden.

Als letztes möchte ich diese vier Aufteilungen nun mit ihren entsprechenden Kostenzuteilungen identifizieren. Einer Einsparungsaufteilung $x \in \mathcal{A}(G)$ entspricht gerade die Kostenzuteilung $\tilde{x} := \tilde{c} - x$, wobei mit $\tilde{c}$ der Vektor $\tilde{c} := (c(\{A\}), c(\{B\}), c(\{C\}), c(\{D\}))$ bezeichnet wird, also $\tilde{c} = (2, 5, 15, 10)$. Nach Korollar 4.5.5 (ii) gilt dann $\tilde{x} \in \mathcal{A}(H)$. Seien $\tilde{e}^{(\mathcal{C})}$, $\tilde{e}^{(\min)}$, $\tilde{\tau}$ und $\tilde{\zeta}$ die in obiger Hinsicht $e^{(\mathcal{C})}$, $e^{(\min)}$, τ und ζ entsprechenden Kostenzuteilungen. Dann sind diese gegeben durch

$$\tilde{e}^{(\mathcal{C})} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}^{(\min)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tau} \approx \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 3{,}75 \\ 3{,}9 \\ 3{,}25 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\zeta} \approx \begin{pmatrix} -0{,}3 \\ 3{,}4 \\ 4{,}9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Obwohl sich die Zuteilungen teilweise stark voneinander unterscheiden, ist die Tendenz überall dieselbe, nämlich $\tilde{x}_A \leq \tilde{x}_D \leq \tilde{x}_B \leq \tilde{x}_C$. Des Weiteren sind sich alle vier Lösungskonzepte einig, dass Stadt A am wertvollsten für eine große Koalition ist und deswegen (nahezu) nichts zu zahlen hat ($\tilde{e}^{(\min)}$, $\tilde{\tau}$) oder sogar für seine Kooperation bezahlt wird ($\tilde{e}^{(\mathcal{C})}$, $\tilde{\zeta}$). Auch scheint klar, dass Stadt D trotz seiner Abhängigkeit von A nur eine geringe Beteiligung zu zahlen hat. Dies ist darauf zurückzuführen, dass C seinerseits auf eine Kooperation mit D hoffen wird. Unterschiedlicher Meinung sind die Konzepte hinsichtlich der relativen Zuteilung der Kosten auf die Städte B, C und D. Zum Beispiel grenzt die vom egalitären Kern induzierte Zuteilung $\tilde{e}^{(\mathcal{C})}$ die Stadt C deutlich von B und D ab während $\tilde{\tau}$ die Kosten fast gleich auf die drei Städte aufteilt.

Zusammengefasst lässt sich festhalten, dass alle vier Zuteilungen im Sinne des zu Grunde liegenden Sparspieles fair sind und in dessen Kern liegen. Nach Korollar 4.5.5 (iii) gibt es somit keine Teilkoalition der großen Koalition, deren Kosten geringer als die entsprechende Kostenzuteilung sind. Alle vier Zuteilungen sind in diesem Sinne stabil. Abschließend lässt sich sagen, dass alle Aufteilungen der gemeinsamen Kosten ihre Berechtigung haben und auf ihre eigene Art interessant sind. Der Mittelwert der Aufteilungen ist übrigens gegeben durch

$$\mu = \frac{1}{4} \cdot \left(\tilde{e}^{(\mathcal{C})} + \tilde{e}^{(\min)} + \tilde{\tau} + \tilde{\zeta} \right) \approx \begin{pmatrix} -0{,}3 \\ 3{,}5 \\ 5{,}2 \\ 2{,}6 \end{pmatrix}.$$

Dieser ist selbst eine Kostenzuteilung des Spieles, also $\mu \in \mathcal{A}(H)$, und kommt der Zuteilung $\tilde{\zeta}$ am nächsten.

5 Fazit

Ich habe in dieser Arbeit das mathematische Modell der kooperativen n-Personen Spiele vorgestellt und Aufteilungen des Gewinns einer großen Koalition solcher Spiele untersucht. Dabei habe ich mich auf balancierte Spiele konzentriert, da sich in nicht-balancierten Spielen im Allgemeinen keine große Koalition bilden wird, deren Gewinn aufzuteilen wäre.

Meine Untersuchungen gingen in zwei Richtungen: Zum Einen habe ich Abbildungen eingeführt, welche aus der oftmals großen Menge von Aufteilungen im Kern eines Spieles einige wenige Aufteilungen auswählen, und zum Anderen habe ich zwei Fairness-Begriffe vorgestellt, welche prüfen, ob eine Gewinnaufteilung in dem jeweiligen Sinne fair ist.

Gewinnaufteilungen auswählende Abbildungen heißen Lösungskonzepte. Als solches habe ich den minimalen Kern eingeführt, welcher allen Spielern gleichzeitig einen möglichst großen Bonus im Vergleich zu dem garantiert, was sie mit kleineren Koalitionen gewinnen könnten. Der minimale Kern stellt damit eine Art Kern des Kerns dar.

Weiterhin habe ich punktwertige Lösungskonzepte eingeführt. Das sind Abbildungen, welche genau eine Gewinnaufteilung auswählen. Diese sind offensichtlich besonders erstrebenswert. Der egalitäre Kern und der egalitäre Minimal-Kern sind punktwertige Lösungskonzepte. Sie wählen die Gewinnaufteilung des Kerns bzw. des minimalen Kerns aus, welche der Gleichverteilung des Gewinns unter allen Spielern am nächsten kommt.

Ein weiteres punktwertiges Lösungskonzept ist durch den τ-Wert eines Spieles gegeben. Dieser orientiert sich am Utopia-Vektor und am Konzessionsvektor. Der Vorteil des τ-Wertes besteht darin, dass er einfacher zu bestimmen ist als obige egalitäre Ansätze, und in den meisten Fällen diesen entsprechende Ergebnisse liefert. Sein Nachteil ist dadurch gegeben, dass er im Allgemeinen Fall nicht im Kern eines Spieles liegt.

Im vierten Kapitel dieser Arbeit habe ich schließlich zwei Fairness-Begriffe eingeführt - starke und schwache Fairness. Dabei impliziert starke Fairness schwache Fairness, das heißt, stark faire Gewinnaufteilungen sind auch schwach fair. Beide Konzepte basieren auf Ordnungen der Spieler. Vor allem schwache Fairness ist deswegen dahingehend anfällig, dass sich die Spieler in vielen Fällen nicht oder nur schwer ordnen lassen (vergleiche Bemerkung 4.1.4). Starke Fairness ist in dieser Hinsicht robuster.

Als Ergebnis meiner Arbeit lassen sich Satz 4.4.1 und Theorem 4.4.3 betrachten. Ersterer zeigt, dass der τ-Wert eines konvexen Spieles immer stark fair ist, und zweiterer konstruiert eine an den τ-Wert angelehnte Gewinnaufteilung ζ, welche sogar für jedes balancierte Spiel stark fair ist.

Abschließend ließ sich an Beispiel 4.5.6 sehen, dass die eingeführten Lösungskonzepte auch in einer komplizierten Situation gute Ergebnisse liefern. Hervorzuheben ist hier die als fair konstruierte Gewinnaufteilung ζ, welche im vorliegenden Beispiel einen Kompromiss zwischen den eingeführten Lösungskonzepten darstellt.

Ausblickend lässt sich schließlich bemerken, dass die Möglichkeiten an Lösungskonzepten und Fairness-Begriffen noch lange nicht erschöpft sind - hier verbleibt noch viel Spielraum. Außerdem habe ich in dieser Arbeit Fairness nur für Gewinnaufteilungen, nicht aber für ganze (im Allgemeinen nicht punktwertige) Lösungskonzepte definiert - der Begriff lässt sich dahingehend noch erweitern.

Literaturverzeichnis

[AI01] Javier Arin and Elena Inarra. Egalitarian solutions in the core. *Int. J. Game Theory*, 30(2):187–193, 2001.

[AKV08] Javier Arin, Jeroen Kuipers, and Dries Vermeulen. An axiomatic approach to egalitarianism in TU-games. *Int. J. Game Theory*, 37(4):565–580, 2008.

[Bil00] Jesús Mario Bilbao. *Cooperative games on combinatorial structures.* Theory and Decision Library. Series C: Game Theory, Mathematical Programming and Operations Research. 26. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. x, 326 p. , 2000.

[Edg81] F. Y. Edgeworth. *Mathemathical Psychics: An essay on the mathematics to the moral sciences*. Kegan Paul, 1881.

[Gil59] Donald B. Gillies. Solutions to general non-zero-sum games. *Ann. Math. Stud.*, 40:47–85, 1959.

[KR] Werner Krabs and Artus Rosenbusch. On fair imputations in cooperative n-person games. Unpublished paper.

[Kra05] Werner Krabs. *Spieltheorie: Dynamische Behandlung von Spielen*, pages 65–106. Vieweg+Teubner, 2005.

[MPS79] M. Maschler, B. Peleg, and L.S. Shapley. Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts. *Math. Oper. Res.*, 4:303–338, 1979.

[Ros09] Artus Rosenbusch. Satisfiable fairness in cooperative games with transferable utility. *Paper submitted to the International Conference On Game Theory, Stony Brook*, 2009.

[Sha53] L.S. Shapley. A value for n-person games. Contrib. Theory of Games, II, Ann. Math. Stud. No. 28, 307-317 (1953)., 1953.

[SS66] L.S. Shapley and M. Shubik. Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences. *Econometrica*, 34:805–827, 1966.

[Str10] R. Straube. On fairness in cooperative games. Undergraduate thesis, TU Darmstadt, 2010.

[Tij81] S.H. Tijs. Bounds for the core and the tau-value. Game theory and mathematical economics, Proc. Semin., Bonn/Hagen 1980, 123-132 (1981)., 1981.

[vNM44] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of games and economic behavior.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press. XVIII, 625 p. , 1944.

[Wie05] Harald Wiese. *Kooperative Spieltheorie*. Oldenbourg, 2005.

[You85] H.Peyton Young. Cost allocation. Fair allocation, AMS Short Course, Anaheim/Calif. 1985, Proc. Symp. Appl. Math. 33, 69-94 (1985)., 1985.