TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Bachelorarbeit

Unendliche Galoistheorie

Moritz Reinhard

11.04.2024

Betreuer: Timo Richarz
Zweiter Gutachter: Thibaud van den Hove

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Thema der endlichen Galoistheorie ist ein Bestandteil der Algebra, der jedem Studierenden, welcher sich mit der Algebra beschäftigen möchte, während des Bachelor-Studiengangs begegnet. Das Thema der unendlichen Galoistheorie, also das Studium von galoisschen Körpererweiterungen unendlichen Grades und ihrer Galois-Gruppen, ist jedoch weniger häufig ein Bestandteil des Bachelor-Studiengangs.

Ziel dieser Arbeit ist, ausgehend von dem Wissen über endliche Galoistheorie mit Hilfe von topologischen Argumenten den Hauptsatz der Galoistheorie auf unendliche Körpererweiterungen zu verallgemeinern. Dabei verwenden wir topologische Argumente, indem wir Galois-Gruppen in ihrer Eigenschaft als proendliche Gruppen betrachten.

Im ersten Kapitel werden wir nochmal die Begriffe und Aussagen aus der endlichen Galoistheorie wiederholen und Notation und Nomenklatur einführen. Auch soll dieses Kapitel dazu dienen, dass auf bekannte Resultate direkt verwiesen werden kann.

Im zweiten Kapitel behandeln wir topologische Räume und proendliche Gruppen, um Begrifflichkeiten und Aussagen einzuführen, die für die Verallgemeinerung der Aussagen aus dem ersten Kapitel notwendig sind.

Im dritten Kapitel geht es dann um die unendliche Galoistheorie selbst. Wir wenden hier die Konzepte aus dem zweiten Kapitel an, um Aussagen über unendliche Galois-Erweiterungen (insbesondere Erweiterungen des Typs $\overline{K}/K$ eines Körpers K) zu sammeln und den Hauptsatz der Galoistheorie auf allgemeine Galois-Erweiterungen zu erweitern.

Im vierten Kapitel betrachten wir ein paar Beispiele für Erweiterungen des Typs $\overline{K}/K$ eines Körpers K und quantifizieren auch die Aussage, Erweiterungen dieses Typs seien „fast immer“ unendlich.

Danksagung

Ich möchte die Gelegenheit nutzen, um all den Personen zu danken, die mich während der Erstellung dieser Abschlussarbeit unterstützt haben.
Zuallererst gebührt mein aufrichtiger Dank Prof.Dr. Timo Richarz, meinem Betreuer, für die Vergabe des Themas und für das konstruktive Feedback während der Bearbeitung.

Des Weiteren danke ich Prof.Dr. Siegfried Bosch. Sein Buch *Algebra* ist die Hauptquelle dieser Bachelorarbeit. Ich danke auch Prof.Dr. Serge Lang, dessen Buch, welches ebenfalls *Algebra* heißt, für die Beispiele in dem vierten Kapitel wichtig war. Und nicht zuletzt danke ich den Autoren des Stacks Project, ohne die ich mich mit der Theorie der proendlichen Gruppen und des projektiven Limes deutlich schwerer getan hätte.

Ein besonderer Dank geht an meine Kommilitonen Aurelio Nwamusse, Lene Janus und Edward Brikun, die meine Abschlussarbeit sorgfältig korrekturgelesen und wertvolle Rückmeldungen gegeben haben. Ihr Engagement und ihre Hilfe haben dazu beigetragen, die Qualität dieser Arbeit zu verbessern.

Zuletzt möchte ich meinen Freunden und meiner Familie für ihre anhaltende Unterstützung, Ermutigung und Geduld danken. Sie haben mich durch diese herausfordernde Zeit begleitet und mir den Rückhalt gegeben, den ich gebraucht habe.

Diese Arbeit wäre ohne die Unterstützung und Beiträge dieser Personen nicht möglich gewesen. Vielen Dank an alle, die dazu beigetragen haben, diese Abschlussarbeit zu einem erfolgreichen Ende zu führen.

Kapitel 1

Endliche Galoistheorie

In diesem Kapitel behandeln wir die wichtigsten Begriffe und Aussagen aus der endlichen Galoistheorie und der allgemeinen Theorie der Körpererweiterungen. Wir führen außerdem die Notation und Nomenklatur ein, die wir im Fortlauf der Arbeit verwenden werden. Wir orientieren uns hier überwiegend an dem Buch „Algebra“ von Sigmund Bosch ([Bos]). Da dieses Kapitel primär als Wiederholung dient, werden wir die meisten Beweise lediglich grob skizzieren oder nur Ansätze angeben.

1.1 Endliche Algebraische Körpererweiterungen

Definition 1.1. Als eine **Körpererweiterung** bezeichnen wir ein Paar von Körpern $K \subset L$, wobei K ein Teilkörper von L ist. Eine solche Körpererweiterung wird durch L/K notiert. Den Körper L nennt man auch einen **Erweiterungskörper** von K. Gibt es einen weiteren Körper M mit $K \subset M \subset L$, so bezeichnen wir M als einen **Zwischenkörper** von L/K.

Beispiel 1.1. Ein Beispiel für eine Körpererweiterung ist $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$, da es sich bei beiden Zahlenbereichen um Körper handelt und die Beziehung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ gilt. Ein Zwischenkörper für diese Körpererweiterung wäre z.B. $\mathbb{R}$, da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ gilt.

Definition 1.2. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Dann heißt $[L\colon K] := dim_K L$ **Grad** von L über K, wobei $dim_K L$ die Vektorraumdimension von L ist. Eine Körpererweiterung heißt **endlich** bzw. **unendlich**, je nachdem, ob $[L\colon K]$ endlich bzw. unendlich ist.

Beispiel 1.2. Ein Beispiel für eine endliche Körpererweiterung ist $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ mit $[\mathbb{C}\colon \mathbb{R}] = 2$. Dies lässt sich durch die Isomorphie von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ erkennen.
Ein Beispiel für eine unendliche Körpererweiterung ist $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Dies kann aus einem einfachen Mächtigkeitsargument geschlussfolgert werden.

Satz 1.1. *(Gradsatz)*
Seien $K \subset M \subset L$ Körpererweiterungen. Dann gilt:

$$[L\colon K] = [L\colon M] \cdot [M\colon K] \tag{1.1}$$

Ist einer der Grade unendlich, ist die Gleichung symbolisch zu verstehen.

Beweis. Man argumentiert hier mit den verschiedenen Vektorraumbasen von L/M und M/K sowie mit linearer Unabhängigkeit. □

Korollar 1.1. *Aus Satz 1.1 folgt, dass wenn $[L\colon K]$ prim ist, gilt für jeden Zwischenkörper M von L/K, dass $M = K$ oder $M = L$.*

Eine der zentralsten Definitionen der Theorie der Körpererweiterungen ist die Definition einer über einem Körper *algebraischen* bzw. *transzendenten* Zahl.

Definition 1.3. Sei L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Dann heißt α **algebraisch über K**, wenn α die Nullstelle eines Polynoms $P(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + ... + c_1X + c_0 \in K[X]$ ist (*hier können wir OBdA das Polynom als normiert auffassen, also $c_n = 1$*). Wenn es kein derartiges Polynom gibt, so bezeichnen wir α als **transzendent über K**. Sind alle Elemente von L algebraisch über K, so nennen wir L ebenfalls **algebraisch über K** und L/K eine **Algebraische Körpererweiterung**.

Beispiel 1.3. Ein Beispiel für eine algebraische Zahl ist $\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$. Ein dazugehöriges Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ wäre hierbei $P(X) = X^2 - 2$.
Ein Beispiel einer transzendenten Zahl ist π über $\mathbb{Q}$. Der Beweis hierfür ist in hohem Maße nicht-trivial, die Aussage sollte den Lesenden aber bekannt sein.
Ein Beispiel für eine algebraische Körpererweiterung wäre $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, da jede komplexe Zahl die Nullstelle eines Polynoms mit Koeffizienten in den reellen Zahlen ist (ohne Beweis).

Definition 1.4. Sei L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über K. Dann gibt es unter den Polynomen in $\{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ ein normiertes Polynom μ, welches in $\{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ den kleinsten Grad besitzt. Dieses Polynom μ bezeichnen wir als das **Minimalpolynom von α über K**. Im Fall $\alpha \in K$ ist dies einfach das Polynom $X - \alpha$.

Beispiel 1.4. Betrachten wir die Körpererweiterung der komplexen Zahlen über den reellen Zahlen $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ und die imaginäre Einheit $\mathbf{i}$. Dann ist $\mathbf{i}$ über $\mathbb{R}$ algebraisch. Ein Beispiel für ein normiertes Polynom P mit $P(\mathbf{i}) = 0$ ist $\mu(X) = X^2 + 1$. Dieses Polynom μ hat unter den Polynomen in $\{P \in K[X] \mid P(\mathbf{i}) = 0\}$ offensichtlich den kleinsten Grad (*gäbe es ein Polynom mit* $P(\mu) = 0$ *von Grad 1, so wäre* $\mathbf{i}$ *bereits ein Element von* $\mathbb{R}$) und ist somit das Minimalpolynom von $\mathbf{i}$ über $\mathbb{R}$.

Bemerkung 1.1. *Für das Minimalpolynom* μ *gilt:*

- μ *ist eindeutig bestimmt*
- μ *ist prim (für Polynome* f *und* g *mit* $p \mid fg$ *gilt* $p \mid f$ *oder* $p \mid g$*)*

Satz 1.2. *Jede endliche Körpererweiterung* L/K *ist algebraisch.*

Beweis. Der Beweis hierfür ergibt sich durch eine Konstruktion von Polynomen, die Elemente von L als Nullstellen haben. □

Definition 1.5. Sei L/K eine Körpererweiterung und $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von L. Dann ist $K(\mathfrak{M}) \subset L$ der von $\mathfrak{M}$ **über** K **erzeugte Teilkörper**. Analog zu einem Untervektorraum ist $K(\mathfrak{M})$ der Durchschnitt aller Teilkörper von L/K, die K und alle Elemente von $\mathfrak{M}$ enthalten. Zu einer Körpererweiterung L/K gibt es immer eine Menge $\mathfrak{M} \subset L$ mit $L = K(\mathfrak{M})$ (*das Trivialbeispiel wäre hier* $\mathfrak{M} = L$). Wir notieren $K(\{\alpha_1, ..., \alpha_n\})$ in der Regel einfach durch $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Beispiel 1.5. Man betrachte beispielsweise die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$.

Definition 1.6. Eine Körpererweiterung $K \subset L$ heißt **einfach**, wenn es ein Element $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ gibt. Der Grad $[K(\alpha)\colon K]$ heißt auch der **Grad von** α **über** K. Dieser Grad stimmt mit dem Grad des Minimalpolynoms μ_α überein.

Definition 1.7. Eine Körpererweiterung L/K heißt **endlich erzeugt**, wenn es eine Menge $\mathfrak{B}$ mit $L = K(\mathfrak{B})$ gibt, welche endlich ist.

Beispiel 1.6. Wie in Beispiel1.5 betrachten wir hier $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$. Dies ist eine einfache Körpererweiterung. Da das Minimalpolynom durch $\mu_{\sqrt{2}}(X) = X^2 - 2$ gegeben ist, ist der Grad von $\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$ dementsprechend 2.
Ein anderes Beispiel wäre $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$. Da das Minimalpolynom hier durch $\mu_{\sqrt[3]{2}}(X) = X^3 - 2$ gegeben ist, gilt $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\colon \mathbb{Q}] = 3$.

Satz 1.3. *Sei* L/K *mit* $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *eine endlich erzeugte Körpererweiterung und* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *algebraisch über* K. *Dann ist* L/K *eine endliche Körpererweiterung und damit algebraisch.*

Beweis. Dieser Satz wird mit einer vollständigen Induktion über n bewiesen. □

Korollar 1.2. *Sei L/K eine Körperweiterung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *Die Erweiterung L/K ist endlich.*
- *Der Körper L wird über K von endlich vielen algebraischen Elementen erzeugt.*
- *Die Erweiterung L/K ist endlich erzeugt und algebraisch.*

Korollar 1.3. *Sei L/K eine Körpererweiterung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *Die Erweiterung L/K ist algebraisch*
- *Der Körper L wird über K von algebraischen Elementen erzeugt.*

Satz 1.4. *Seien $K \subset M \subset L$ Körpererweiterungen und L/K algebraisch. Ist $\alpha \in L$ algebraisch über M, so ist α auch algebraisch über K.*

Beweis. Man betrachtet hierfür die Körpererweiterung von K, die von den Koeffizienten von μ_α erzeugt wird und nutzt anschließend man den Gradsatz 1.1 sowie Satz 1.2. □

Korollar 1.4. *Seien K, M, L so wie in Satz 1.4. Dann ist L/K genau dann algebraisch, wenn L/M und M/K algebraisch sind.*

1.2 Der Algebraische Abschluss

Bevor wir uns dem Konzept des Algebraischen Abschlusses eines Körpers K nähern können, müssen wir einen Weg finden, für ein nicht konstantes Polynom $p \in K[X]$ eine endliche algebraische Körpererweiterung L/K zu konstruieren, so dass p in L eine Nullstelle besitzt.

Satz 1.5. *(Verfahren von Kronecker)*
Sei K ein Körper und $p \in K[X]$ ein Polynom. Dann existiert eine endliche algebraische Körpererweiterung L/K, so dass gilt:

$$p(\alpha) = 0 \textit{ für ein } \alpha \in L$$

Beweis. Sei zunächst p über K irreduzibel. Sollte p nicht irreduzibel sein, betrachtet man stattdessen einen Primfaktor von p. Da p irreduzibel ist, ist (p) ein maximales Ideal in $K[X]$. Damit konstruiert man einen Homomorphismus

$$K \to L := K[X]/(p),$$

mit welchem sich für p eine Nullstelle konstruieren lässt. Man kann außerdem L/K als Körpererweiterung auffassen, in dem man K mit seinem Bild unter dem obigen Homomorphismus identifiziert. □

Definition 1.8. Ein Körper heißt **algebraisch abgeschlossen**, wenn jedes nichtkonstante Polynom p aus $K[X]$ eine Nullstelle in K besitzt. Dies bedeutet insbesondere, dass jedes Polynom in $K[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Bemerkung 1.2. *Ein Körper K ist also genau dann algebraisch abgeschlossen, wenn er keine echten algebraischen Körpererweiterungen besitzt.*

Beispiel 1.7. Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, da die Nullstellen aller komplexen Polynome $p \in \mathbb{C}[X]$ wieder komplex sind.

Theorem 1.1. *Zu jedem Körper K gibt es einen algebaisch abgeschlossenen Erweiterungskörper L.*

Beweis. Dieses Resultat ist sehr zentral und der Beweis dementsprechend umfangreich. Grob vereinfacht besteht der Beweis aus der Konstruktion eines solchen Erweiterungskörpers unter Verwendung des Verfahrens von Kronecker und einer iterativ konstruierten aufsteigenden Körperkette

$$K = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots$$

mit der man dann L als

$$L := \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$$

definieren kann. Abschließend verifiziert man, dass L algebraisch abgeschlossen ist. □

Definition 1.9. Für einen Körper K nennt man einen über K algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper $\overline{K}$ den **algebraischen Abschluss** von K. Die Existenz eines algebraischen Abschlusses folgt aus Theorem 1.1

Beispiel 1.8. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind ein algebraischer Abschluss der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Hat man einen algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper gegeben, so kann man einen recht einfachen Ausdruck für einen anderen algebraischen Abschluss finden:

$$\overline{K} = \{\alpha \in L \mid \alpha \text{ ist algebraisch über K}\}$$

ist offensichtlich ein algebraischer Erweiterungskörper von K. Des Weiteren ist $\overline{K}$ algebraisch abgeschlossen, denn jedes nicht-konstante $p \in \overline{K}[X]$ hat eine Nullstelle x_0 in L, welche algebraisch über $\overline{K}$ und damit algebraisch über K ist. Daraus folgt dann $x_0 \in \overline{K}$. Ferner kann ein algebraischer Abschluss der rationalen Zahlen (*oft als der Körper der algebraischen Zahlen* $\mathbb{A}$ *bezeichnet*) nun beschrieben werden durch

$$\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}\}.$$

Dieser Ausdruck wird in späteren Kapiteln noch eine Rolle spielen.

Satz 1.6. *Es seien $\overline{K}_1$ und $\overline{K}_2$ zwei algebraische Abschlüsse eines Körpers K. Dann existiert ein im Allgemeinen nicht-kanonischer Isomorphismus $\overline{K}_1 \xrightarrow{\sim} \overline{K}_2$, welcher $id : K \to K$ fortsetzt.*

1.3 Zerfällungskörper

Definition 1.10. Sei $\mathfrak{F} = (f_i)_{i \in I}$, $f_i \in K[X]$, eine Familie nicht-konstanter Polynome mit Koeffizienten aus einem Körper K. Ein Erweiterungskörper L von K heißt **Zerfällungskörper** (über K) der Familie $\mathfrak{F}$, falls gilt:

1. Jedes f_i zerfällt über L vollständig in Linearfaktoren
2. Die Körpererweiterung L/K wird von den Nullstellen der f_i erzeugt.

Beispiel 1.9. Sei $\mathfrak{F} = \{X^2 - 2\}$. Dann ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ der Zerfällungskörper von $\mathfrak{F}$ über $\mathbb{Q}$.

Satz 1.7. *Je zwei Zerfällungskörper einer Familie von nicht-konstanten Polynomen aus $K[X]$ sind über K (i.A. nicht-kanonisch) isomorph.*

Beweis. Dies ist eine Folgerung aus einem in [Bos] gezeigten Resultat (*S. 143, Satz 2*), welches besagt, dass jeder K-Homomorphismus $\overline{\sigma} : L_1 \to \overline{L}_2$ zu einem Isomorphismus $\sigma : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$ beschränkt werden kann. □

Theorem 1.2. *Sei K ein Körper und L ein algebraischer Erweiterungskörper von K. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Jeder K-Homomorphismus $L \longrightarrow \overline{L}$ in einem algebraischen Abschluss $\overline{L}$ von L lässt sich zu einem Automorphismus von L beschränken.*

2. *L ist Zerfällungskörper einer Familie von Polynomen aus $K[X]$.*

3. *Jedes irreduzible Polynom aus $K[X]$, das in L eine Nullstelle besitzt, zerfällt über L vollständig in Linearfaktoren.*

Beweis. Der Beweis erfolgt über den Kreisschluss $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. Hierbei ist die erste Implikation vergleichsweise kompliziert, die anderen beiden sind recht einfach. □

Definition 1.11. Eine algebraische Körpererweiterung L/K heißt **normal**, wenn die äquivalenten Bedingungen von Theorem 1.2 erfüllt sind.

Bemerkung 1.3. *Man sieht hier leicht, dass algebraische Körpererweiterungen vom Grad 2 immer normal sind, da ein Polyonom vom Grad 2 über einem Körper, in welchem es eine Nullstelle besitzt, in Linearfaktoren zerfällt.*

Korollar 1.5. *Sei $K \subset L \subset M$ eine Kette algebraischer Körpererweiterungen und sei M/K normal, dann ist M/L ebenfalls normal.*

Beweis. Dies ist relativ leicht zu sehen: Angenommen jedes irreduzible Polynom aus $K[X]$, das in M eine Nullstelle hat, zerfällt über M vollständig in Linearfaktoren. Die irreduziblen Polynome aus $L[X]$ sind eine Teilmenge der irreduziblen Polynome aus $K[X]$, dementsprechend zerfallen auch sie über M vollständig in Linearfaktoren. □

Beispiel 1.10. Ein Beispiel für Definition 1.11 ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$. Da $[\mathbb{Q}(\sqrt{3})\colon \mathbb{Q}] = 2$, ist diese Körpererweiterung offensichtlich normal.

Bemerkung 1.4. *Eine wichtige Anmerkung zu Korollar 1.5 ist, dass Normalität einer Körpererweiterung NICHT(!) in derselben Weise transitiv ist wie die Algebraizität einer Körpererweiterung (siehe Korollar 1.4). Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ wie auch die in Beispiel 1.10 genannte Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$ sind zwar normal, die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}$ aber nicht! Dies lässt sich leicht anhand des Polynoms $p(X) = X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ erkennen. Das Polynom p ist über $\mathbb{Q}$ irreduzibel. Ferner besitzt p offensichtlich eine Nullstelle in $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$. Jedoch zerfällt p über $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ nicht in Linearfaktoren, da:*

$$X^4 - 3 = (X^2 - \sqrt{3})(X^2 + \sqrt{3}) = (X - \sqrt[4]{3})(X - \sqrt[4]{3})(X^2 + \sqrt{3}).$$

Die ersten beiden Faktoren sind Linearfaktoren in $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})[X]$. *Um den dritten Faktor in Linearfaktoren zerfallen lassen zu können, benötigt man komplexe Zahlen, welche nicht in* $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ *enthalten sind.*

Definition 1.12. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Sei L' derart, dass

- die Erweiterung L'/L algebraisch ist,
- die Erweiterung L'/K normal ist und
- kein echter Teilkörper von L' diese beiden Bedingungen erfüllt.

Dann nennt man L' eine **Normale Hülle** von L/K.

Satz 1.8. *Sei* L/K *eine algebraische Körpererweiterung. Dann gilt:*

- *Zu* L/K *gibt es eine bis auf (i.A. nicht-kanonische Isomorphie) eindeutige normale Hülle* L'/K
- *Ist* L/K *endlich, so ist auch* L'/K *endlich*
- *Ist* M/L *eine algebraische Körpererweiterung und* M/K *normal, so kann man* L' *so wählen, dass* $L \subset L' \subset M$ *gilt. Als Teilkörper von* M *ist* L' *dann eindeutig bestimmt.*

1.4 Separable Körpererweiterungen

Definition 1.13. Sei K ein Körper und f ein nicht-konstantes Polynom in $K[X]$. Dann heißt f **separabel**, wenn alle Nullstellen von f in $\overline{K}$ einfach sind.

Beispiel 1.11. 1. Trivialbeispiele sind Polynome vom Grad 1.

2. Um das Beispiel 1.10 noch einmal aufzugreifen:

$$p(X) = X^4 - 3 = (X - \sqrt[4]{3})(X + \sqrt[4]{3})(X - \sqrt[4]{3}\mathbf{i})(X + \sqrt[4]{3}\mathbf{i})$$

ist separabel, da alle Nullstellen von p in $\overline{\mathbb{Q}}$ einfach sind.

3. Polynome der Form

$$p(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i),\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{N},\ a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j$$

sind separabel über $\overline{\mathbb{Q}}$.

Satz 1.9. *Sei K ein Körper und $p \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom. Dann gilt:*

- *Die mehrfachen Nullstellen von p in einem algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K sind auch Nullstellen der Ableitung p' von p, bzw identisch mit den Nullstellen von $ggT(p, p')$.*
- *Wenn $char(K) = 0$ und p irreduzibel ist, so ist p auch separabel.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus grundlegenden Aussagen über Polynome.
Zum Beweis der zweiten Aussage argumentiert man, dass für jede Nullstelle α von f gilt, dass f das Minimalpolynom von α über K ist. Nimmt man nun an, dass α eine mehrfache Nullstelle von f ist, muss α laut der ersten Aussage auch eine Nullstelle von f' sein. Da $grad(f') < grad(f)$, muss f' dann aber das Nullpolynom sein, weil sonst f' das Minimalpolynom von α wäre, was ein Widerspruch zur angenommen Irreduzibilität von f wäre. Also kann α keine mehrfache Nullstelle sein. Das Polynom f ist dementsprechend separabel. □

Definition 1.14. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Ein Element $\alpha \in L$ heißt **separabel**, wenn das Minimalpolynom von α über K separabel ist. Der Körper L heißt **separabel** über K, wenn jedes Element $\alpha \in L$ separabel über K ist.

Bemerkung 1.5. *In Körpern mit Charakteristik* 0 *ist jede algebraische Körpererweiterung separabel.*

Definition 1.15. Einen Körper K nennt man **vollkommen** bzw. **perfekt**, wenn jede algebraische Körpererweiterung separabel ist.

Bemerkung 1.6. *Alle Körper mit Charakteristik* 0*, sowie alle endlichen Körper und alle algebraisch abgeschlossenen Körper sind vollkommen.*

Definition 1.16. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung. Durch $Hom_K(L, \overline{K})$ bezeichne man die Menge der K-Homomorphismen von L in einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K. Dann heißt

$$[L\colon K]_s := |Hom_K(L, \overline{K})|$$

Separabilitätsgrad von L über K.

Wir werden später Beispiele für Separabilitätsgrade von Körpererweiterungen betrachten.
Mit Satz 1.6 folgt insbesondere, dass der Separabilitätsgrad unabhängig von der

Wahl des Algebraischen Abschlusses ist. Der Separabilitätsgrad ist also eine Invariante einer algebraischen Körpererweiterung. Im Folgenden schauen wir uns ein paar Aussagen zum Sepearabilitätsgrad an, unter anderem ein Analogon zum Gradsatz (Satz 1.1).

Satz 1.10. *Sei L/K mit $L = K(\alpha)$ eine einfache algebraische Körpererweiterung und sei μ_α das Minimalpolynom von α über K. Außerdem sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Dann gilt:*

- *Der Separablitätsgrad $[L\colon K]_s$ ist gleich der Anzahl verschiedener Nullstellen von μ_α in einem algebraischen Abschluss von K*
- *α ist genau dann separabel über K, wenn $[L\colon K] = [L\colon K]_s$*

Beweis. Ist α separabel, so ist der Grad von μ_α gleich der Anzahl seiner verschiedenen Nullstellen. Dementsprechend folgt, dass

$$[L\colon K] = grad(\mu_\alpha) = \text{„Anzahl der Nullstellen von } \mu_\alpha\text{“} = [L\colon K]_s.$$

□

Satz 1.11. *Seien L/K, M/L algebraische Körpererweiterungen. Dann gilt:*

$$[M\colon K]_s = [M\colon L]_s \cdot [L\colon K]_s.$$

Beweis. Man betrachtet einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K sowie die Mengen $Hom_K(L, \overline{K})$ und $Hom_L(M, \overline{K})$ und argumentiert, dass die Verknüpfungen der Elemente dieser Mengen paarweise verschieden sind und den Elementen von $Hom_K(M, \overline{K})$ entsprechen. □

Satz 1.12. *Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Dann ist äquivalent:*

1. *L/K ist separabel*
2. *Es gibt Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, welche über K separabel sind und L/K erzeugen (also $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$)*
3. *$[L\colon K]_s = [L\colon K]$*

Beweis. Man zeigt den Kreisschluss $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.
Die erste Implikation ist trivial.
Für die zweite Implikation kann man die Aussage über Zwischenkörper auf den Fall von einfachen Körpererweiterungen zurückführen und die Sätze 1.11 und 1.10

benutzen.
Die dritte Implikation ist ebenfalls trivial, da nach dem letzten Satz aus Definition 1.14 jede algebraische Körpererweiterung von Körpern mit Charakteristik Null auch separabel ist. □

Korollar 1.6. *Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und $\mathfrak{M}$ eine Familie von Elementen aus L, so dass L/K von $\mathfrak{M}$ erzeugt wird. Dann ist äquivalent:*

- *L/K ist separabel.*
- *Jedes $\alpha \in \mathfrak{M}$ ist separabel über K.*

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt auch $[L\colon K] = [L\colon K]_s$.

Beweis. Jedes Element $\alpha \in L$ liegt in einem Zwischenkörper von L/K der Form $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{M}$. Damit ist dies eine direkte Folgerung aus Satz 1.12. □

Korollar 1.7. *Seien $K \subset L \subset M$ algebraische Körpererweiterungen. Dann ist M/K genau dann separabel, wenn M/L und L/K separabel sind.*

Beweis. Man argumentiert hier mit Zwischenkörpern und dem Gradsatz für Separabilität (Satz 1.11). □

Definition 1.17. Sei L/K eine separable algebraische Körpererweiterung. Ferner sei gegeben, dass jedes nicht-konstante Polynom in $L[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Dann nennt man L den **separablen Abschluss** von K. Der separable Abschluss eines Körpers K wird durch K^{sep} notiert.

1.5 Endliche Galoistheorie

Definition 1.18. Eine algebraische Körpererweiterung L/K heißt **galoissch**, wenn sie normal (siehe Definition 1.11) und separabel (siehe Definition 1.13) ist. Die Automorphismengruppe $Gal(L/K) := Aut_K(L)$ heißt dann **Galois-Gruppe** der Galois-Erweiterung L/K.

Satz 1.13. *Sei L/K eine Galois-Erweiterung und E ein Zwischenkörper von L/K. Dann gilt:*

1. *Die Erweiterung L/E ist galoissch und die Galois-Gruppe $Gal(L/E)$ ist in natürlicher Weise eine Untergruppe von $Gal(L/K)$.*

2. *Ist auch E/K galoissch, so beschränkt sich jeder K-Automorphismus von L zu einem K-Automorphismus von E, und die Abbildung*

$$Gal(L/K) \longrightarrow Gal(E/K), \ \ \sigma \mapsto \sigma|_E$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Jeder E-Automorphismus von L ist auch ein K-Automorphismus, also ist $Gal(L/E)$ offensichtlich eine Untergruppe von $Gal(L/K)$. □

Bemerkung 1.7. *Sei L/K eine endliche normale Körpererweiterung. Dann folgt*

$$ordAut_K(L) = [L\colon K]_s \ \leqq \ [L\colon K].$$

Insbesondere gilt:

$$ordAut_K(L) = [L\colon K] \iff L/K \textit{ ist separabel.}$$

Definition 1.19. Sei L ein Körper und G eine Untergruppe von $Aut(L)$. Der sogenannte **Fixkörper unter G** ist die Menge

$$L^G := \{a \in L \mid \sigma(a) \ = \ a \, \forall \sigma \in G\},$$

also die Menge der Elemente, welche unter den Automorphismen in G invariant (fix) sind.

Satz 1.14. *Seien L und G so wie oben und $K := L^G$. Dann gilt:*

1. *Ist G endlich, dann ist L/K eine endliche Galois-Erweiterung vom Grad $[L\colon K] = ordG$ mit $Gal(L/K) = G$.*

2. *Ist G nicht endlich, L/K aber algebraisch, dann ist L/K eine Unendliche Galois-Erweiterung, wobei $G \subset Gal(L/K)$ eine Untergruppe ist.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass $K = L^G$ in der Tat ein Körper ist.
Für ein Element $\alpha \in L$ betrachtet man eine maximal große Menge

$$\{\sigma_1, \dots, \sigma_r \mid \sigma_i(\alpha) \neq \sigma_j(\alpha) \text{ für } i \neq j\} \subset G.$$

Man beachte, dass es unter den σ_i eines geben muss, für das $\sigma_i(\alpha) = \alpha$ gilt. Anschließend betrachtet man das Polynom

$$p = \prod_{i=1}^{r}(X - \sigma_i(\alpha)).$$

Dieses Polynom ist nach Beispiel 1.11 separabel und hat α als Nullstelle. Also ist auch L/K separabel. Normalität folgt daraus, dass L Zerfällungskörper über K aller Polynome des Typs von p ist. □

Obwohl dieser Satz bereits unendliche Galoiserweiterungen erwähnt, erfordert der Beweis dieses Teils keine zusätzlichen Argumente, sondern nur jene, die bereits für den endlichen Teil benötigt werden.

Korollar 1.8. *Sei L/K eine normale algebraische Körpererweiterung mit $G = Aut_K(L)$. Dann gilt:*

- *L/L^G ist eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe G.*
- *Wenn L/K zusätzlich separabel und damit galoissch ist, so ist $L^G = K$.*

Theorem 1.3. *(Hauptsatz der endlichen Galois-Theorie) Sei L/K eine endliche Galois-Eweiterung mit $G = Gal(L/K)$ als Galois-Gruppe. Dann sind die Zuordnungen*

1. *$\{Untergruppen\ von\ G\} \xrightarrow{\Phi} \{Zwischenkörper\ von\ L/K\}$, $H \mapsto L^H$ und*
2. *$\{Zwischenkörper\ von\ L/K\} \xrightarrow{\Psi} \{Untergruppen\ von\ G\}$, $E \mapsto Gal(L/E)$,*

die einer Untergruppe $H \subset G$ den Fixkörper L^H, bzw. einem Zwischenkörper E von L/K die Galois-Gruppe der Galois-Erweiterung L/E zuordnen, bijektiv und invers zueinander.
L^H ist genau dann normal und damit galoissch über K, wenn H ein Normalteiler in G ist. In diesem Fall gilt für den surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\tau \colon G \longrightarrow Gal(L^H/K), \ \ \sigma \mapsto \sigma\,|_{L^H},$$

dass $ker(\tau) = H$. Dadurch wird natürlich ein Isomorphismus $G/H \xrightarrow{\sim} Gal(L^H/K)$ induziert.

Beweis. Man betrachtet einen Zwischenkörper E von L/K. Mit Satz 1.13 folgt, dass $Gal(L/E)$ eine Untergruppe von $Gal(L/K)$ ist. Mit der zweiten Aussage aus Korollar 1.8 folgt $E = L^{Gal(L/E)}$, woraus wiederum folgt, dass $\Phi \circ \Psi = id$. Für die Umkehrung nutzt man Satz 1.14. □

In Kapitel 3 werden wir uns damit beschäftigen, was passiert, wenn man die Voraussetzung an die Endlichkeit von L/K weglässt, bzw annimmt, dass L/K eine unendliche Galois-Erweiterung ist.

Korollar 1.9. *Jede endliche separable Körpererweiterung L/K besitzt nur endlich viele Zwischenkörper.*

Beweis. Man geht zur normalen Hülle von L/K über. Damit kann man voraussetzen, dass L/K endlich und galoissch ist. Dann korrespondieren die Zwischenkörper von L/K nach Theorem 1.3 bijektiv zu den Untergruppen von $Gal(L/K)$. Da $Gal(L/K)$ endlich ist, gibt es nur endlich viele Untergruppen und damit nur endlich viele Zwischenkörper. $\square$

Kapitel 2

Proendliche Gruppen

In diesem Kapitel betrachten wir verschiedene Aussagen rund um die Konzepte von topologischen Räumen und proendlichen Gruppen, welche für die Aussagen, die wir in Kapitel 3 zeigen wollen, notwendig sind. Wir orientieren uns hier wieder an dem Werk von Bosch, sowie an der Vorlesung des Moduls „Algebra“ von Professor Nils Scheithauer ([Sch21]). Der Teil über projektive Limiten ist an diverse Artikel des Stacks Project ([Sta24]) angelehnt.

2.1 Topologische Räume

Definition 2.1. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathfrak{T})$, wobei X eine Menge ist und $\mathfrak{T}$ eine sogenannte **Topologie**, ein System von Teilmengen von X, welche man als **offen** bezeichnet und die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- Die leere Menge $\emptyset$ und die Grundmenge X sind offen.
- Die Vereinigung beliebig vieler offener Teilmengen von X ist wieder offen.
- Der Schnitt endlich vieler offener Teilmengen von X ist wieder offen.

Eine Menge $U \in \mathfrak{T}$ mit $x \in U$ für ein $x \in X$ nennt man auch **offene Umgebung von x**. Komplemente von offenen Mengen nennt man **abgeschlossen**.

Definition 2.2. Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein Topologischer Raum und $Y \subset X$ ein Teilraum. Man nennt $\mathfrak{T} |_Y = \{M \cap Y \mid M \in \mathfrak{T}\}$ die **Teilraumtopologie** auf Y.

Beispiel 2.1. Hier ein paar Beispiele für topologische Räume:

1. Eine Menge X mit $\mathfrak{T}_X = \{X, \emptyset\}$ ist ein topologischer Raum (mit der sogenannten *trivialen Topologie*).

2. Eine Menge X mit $\mathfrak{T}_X = \mathcal{P}(X)$, wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X ist, ist ein topologischer Raum (mit der sogenannten *diskreten Topologie*).

3. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Topologie $\mathfrak{T}_{\mathbb{Z}} = \{M \subset \mathbb{Z} \mid |M^c| < \infty\}$ ist ein topologischer Raum.

Definition 2.3. Eine Abbildung topologischer Räume $f\colon (X', \mathfrak{T}') \to (X, \mathfrak{T})$ heißt **stetig**, wenn für eine $\mathfrak{T}$-offene Menge $M \subset X$ das Urbild $f^{-1}(M)$ immer $\mathfrak{T}'$-offen in X' ist.

Definition 2.4. Sei X eine Menge und $\mathfrak{B}$ ein beliebiges System von Teilmengen von X. Wir können die **von $\mathfrak{B}$ erzeugte Topologie** folgendermaßen konstruieren: Man erweitert $\mathfrak{B}$ um die Teilmenge $X \subseteq X$ sowie um sämtliche endlichen Durchschnitte von Mengen in $\mathfrak{B}$. Die resultierende Menge bezeichne man als $\mathfrak{B}'$ und nennt genau die Mengen $M \subset X$ als offen, welche Vereinigungen von Mengen aus $\mathfrak{B}'$ sind. Es ist leicht nachzuprüfen, dass es sich bei dem resultierenden System von Teilmengen $\mathfrak{T}$ um eine Topologie von X handelt.

Definition 2.5. Sei X eine Menge und $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ zwei Topologien auf X mit der Eigenschaft, dass $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$. Dann heißt $\mathfrak{T}_1$ **gröber** als $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_2$ **feiner** als $\mathfrak{T}_1$

Beispiel 2.2. Es ist leicht zu sehen, dass die triviale Topologie die gröbste mögliche Topologie ist und die diskrete Topologie die feinste mögliche Topologie.

Definition 2.6. Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und man betrachte das kartesische Produkt $\prod_{i\in I} X_i$. Zu diesem findet man die Topologie, die von Mengen des Typs $\prod_{i\in I} U_i$ erzeugt wird, wobei U_i offen in X_i ist und $U_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ gilt.

Bemerkung 2.1. *Die Topologie in Definition 2.6 ist die gröbste Topologie, in der die Projektionen auf die Faktoren X_i noch stetig sind.*

Definition 2.7. Ein topologischer Raum X heißt **quasi-kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Beispiel 2.3. Ob ein topologischer Raum quasi-kompakt ist oder nicht, hängt i.A. von der benutzten Topologie ab:

1. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ versehen mit der Topologie der Potenzmenge $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ ist nicht quasi-kompakt. Betrachtet man zum Beispiel die Überdeckung, welche aus den einelementigen Mengen gebildet wird, so besitzt diese offensichtlich keine endliche Teilüberdeckung.

2. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ versehen mit der trivialen Topologie $\{\mathbb{N}, \emptyset\}$ ist offensichtlich quasi-kompakt.

Definition 2.8. Ein topologischer Raum X heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Elemente $x, y \in X, x \neq y$ offene Umgebungen U_x, U_y gibt, welche disjunkt sind.

Beispiel 2.4. So gut wie alle aus der Analysis bekannten Räume sind hausdorffsch. Ein Beispiel für einen Raum, welcher nicht hausdorffsch ist, ist das Spektrum $Spec(R) = \{\mathfrak{p} \colon \mathfrak{p} \subset R \text{ mit } \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$ eines Rings R, versehen mit der Topologie $\mathfrak{T}_{Spec(R)}$, welche von den Mengen der Art $M(x) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \colon x \notin \mathfrak{p}\}$ erzeugt wird.

Im Folgenden werden wir uns hauptsächlich mit hausdorffschen Räumen beschäftigen.

Definition 2.9. Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, wenn er quasi-kompakt und hausdorffsch ist.

Definition 2.10. Ein topologischer Raum X mit Topologie $\mathfrak{T}_X$ heißt **total unzusammenhängend**, wenn es für jede Menge $A \subset X$, die mehr als ein Element enthält, zwei Mengen $U, V \in \mathfrak{T}_X$ gibt, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

- $A \subset U \cup V$
- $U \cap A \neq \emptyset \neq V \cap A$
- $U \cap A \cap V = \emptyset$

Alternativ kann man sagen, dass ein topologischer Raum total unzusammenhängend ist, wenn nur die leere Menge und die einelementigen Mengen zusammenhängend sind.

Beispiel 2.5. Die meisten Räume, die man im Verlauf der Analysis kennengelernt hat, sind total unzusammenhängend:

- Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit einer Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$ sind total unzusammenhängend. Hat man eine Menge $M \subset \mathbb{Q}$ mit mindestend zwei Elementen x und y, so liegt zwischen diesen eine irrationale Zahl z. Dann ist
$$M = \{x \in M \mid x < z\} \cup \{x \in M \mid x > z\}$$
und damit nicht zusammenhängend.
- Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sowie die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind total unzusammenhängend.

2.2 Proendliche Gruppen

Definition 2.11. Eine Gruppe G heißt **topologische Gruppe**, wenn die zugrunde liegende Menge mit einer Topologie versehen ist, die mit der Gruppenstruktur verträglich ist.

Definition 2.12. Ein topologischer Raum X heißt **proendlich**, wenn er hausdorffsch, quasi-kompakt und total unzusammenhängend ist.

Satz 2.1. *Für einen proendlichen Raum X gilt $X = lim_{i \in I}(X_i)$, wobei X_i endliche diskrete Räume sind und I eine kofiltrierte Menge ist. [Sta24, Tag 08ZW]*

Für den Beweis von Satz 2.1 müssen wir noch die folgenden Begriffe einführen:

Definition 2.13. Eine topologische Grupppe G heißt **proendliche Gruppe**, wenn der ihr zugrundeliegende topologische Raum proendlich ist.

Definition 2.14. Sei $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und für jedes $i \in I$ sei G_i eine Gruppe. Des Weiteren sei für jedes Paar $i, j \in I$ mit $i \leq j$ ein Gruppenhomomorphismus $f_{ij} \colon G_j \to G_i$ gegeben mit:

- $f_{ii} = id_{G_i} \forall i \in I$ und
- $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ für $i \leq j \leq k$.

Ein solches System $(G_i, f_{ij})_{i,j \in I}$ heißt **projektives System** von Gruppen.

Definition 2.15. Sei $(G_i, f_{ij})_{i,j \in I}$ ein projektives System von Gruppen. Sei nun eine Gruppe G zusammen mit Homomorphismen $f_i \colon G \to G_i$, so dass $f_i = f_{ij} \circ f_j$ für alle $i \leq j$ gilt. Dieses System $(G, f_i)_{i \in I}$ heißt **projektiver Limes** des Systems $(G_i, f_{ij})_{i,j \in I}$, wenn folgende (*universelle*) Eigenschaft erfüllt ist:
Ist $(H, h_i)_{i \in I}$ mit Gruppenhomomorphismen $h_i \colon H \to G_i$ ein System, welches die selben Eigenschaften erfüllt wie $(G, f_i)_{i \in I}$, dann existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $h \colon H \to G$ mit $h_i = f_i \circ h$ für alle $i \in I$.

Falls ein projektiver Limes existiert, ist er bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt. In der oben definierten Eigenschaft ist dann $(H, h_i)_{i \in I}$ insbesondere ebenfalls ein projektiver Limes von $(G_i, f_{ij})_{i,j \in I}$. Desgleichen existiert dann ein Homomorphismus $g \colon G \to H$ mit den selben Verträglichkeiten wie h. Es gilt dann, dass h und g invers zueinander sind, also $g \circ h = id_H$ und $h \circ g = id_G$. Man notiert den projektiven Limes eines Systems $(G_i, f_{ij})_{i,j \in I}$ durch $G = \varprojlim_{i \in I} G_i$. Man gibt hier die Homomorphismen f_i meist nicht explizit an, wenn sie offensichtlich definiert sind.
Nun können können wir mithilfe des projektiven Limes Satz 2.1 beweisen:

Beweis. (von Satz 2.1) Sei $\mathcal{I}$ die Menge der endlichen Partitionen von X. Diese werden durch $\bigsqcup_{i \in I} U_i$ notiert, wobei die U_i nichtleer und offen sind. Man findet für jedes $I \in \mathcal{I}$ eine stetige Abbildung $X \to I$, welche einen Punkt aus U_i auf i abbildet. Wir definieren eine Halbordnung $I \leq I'$ für $I, I' \in \mathcal{I}$ mit

$$I \leq I' \Leftrightarrow I' \text{ ist eine Verfeinerung von } I.$$

Hierbei verstehen wir eine Verfeinerung analog zu dem Feinheitsbegriff bei Topologien. Daraus erhalten wir eine kanonische Abbildung $I' \to I$.
Damit haben wir nun alle Bausteine eines projektiven Systems beisammen, wobei wir hier allerdings Mengen U_i statt Gruppen G_i betrachten. Dies ist aber kein Problem, da tatsächlich weniger Voraussetzungen erfüllt werden müssen als bei einem projektiven System von Gruppen.
Die Abbildungen $X \to I$ sind mit den Abbildungen $I' \to I$ verträglich und es existiert eine bijektive, stetige Abbildung $X \to lim_{I \in \mathcal{I}} I$. Als stetige, bijektive Abbildung zwischen Topologischen Räumen handelt es sich hierbei um einen sogenannten Homöomorphismus. Der Rest des Beweises folgt aus den Eigenschaften eines Homöomorphismus. □

Satz 2.2. *Sei G eine proendliche Gruppe. Dann gilt:*

$$G \xrightarrow{\cong} lim_{N \subset G}(G/N),$$

wobei die Gruppen N hier offene, normale Untergruppen von G sind. Die Gruppen G/N sind dann endlich und diskret. [Sta24, Tag 08ZW]

Beweis. Die Abbildung ist stetig, da jede Abbildung $G \to G/N$ stetig ist. Die Abbildungen $G \to G/N$ sind auch surjektiv, also ist die Abbildun $G \to lim_{N \subset G}(G/N)$ ebenfalls surjektiv, was aus Lemma 5.12.6 aus dem Stacks Project [Sta24, Tag 005D] folgt. Die Abbildung ist auch injektiv, da jede Umgebung des neutralen Elements ⌉ eine normale Untergruppe enthält. Letzteres Argument ist aber etwas umfangreicher als hier angemessen wäre. Es sei aber gesagt, dass der Beweis über eine Konstruktion einer solchen normalen Untergruppe in einer beliebigen Umgebung mithilfe einer stetigen Abbildung in einen endlichen diskreten Raum funtkioniert. □

Kapitel 3

Unendliche Galoistheorie

In diesem Kapitel widmen wir uns dem zentralen Thema dieser Arbeit. Im Gegensatz zur endlichen Galois-Theorie (*siehe Kapitel 1.5*) beschäftigen wir uns hier mit den Galois-Gruppen von unenlichen Galois-Erweiterungen, vor allem Erweiterungen der Form $\overline{K}/K$ für einen Körper K und einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$, welche fast immer unendlich sind (*dies werden wir im vierten Kapitel noch näher betrachten*). Dieses Kapitel orientiert sich ebenfalls zu großem Teil an dem Werk von Siegfried Bosch ([Bos]) und an verschiedenen Artikeln des Stacks Projects ([Sta24]). Zuerst betrachten wir ein Resultat, welches es vereinfacht, die Galois-Gruppen von dem Typ $\overline{K}/K$ zu verstehen:

Satz 3.1. *Sei K ein Körper und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Dann gilt:*

$$Gal(\overline{K}/K) := Aut_K(\overline{K}) = Aut_K(K^{sep})$$

für einen separablen Abschluss K^{sep}.

In anderen Worten, die Galois-Theorie ist nicht in der Lage, einen Unterschied zwischen $\overline{K}$ und K^{sep} festzustellen.

Beweis. Für Körper der Charakteristik 0 bzw. perfekte Körper im Allgemeinen ist diese Aussage trivial, da in diesem Fall $\overline{K} = K^{sep}$ gilt. Man kann in gewisser Weise den separablen Abschluss als "größte" Galoiserweiterung auffassen, da K^{sep} normal und maximal separabel ist. □

Wir führen nun einige zusätzliche Überlegungen durch, welche insbesondere für unendliche Galois-Erweiterungen von Interesse sind.
Sei L/K eine Galois-Erweiterung. Wir betrachten das System der über K endlichen und galoisschen Zwischenkörper $\mathcal{L} = (L_i)_{i \in I}$. Wir bezeichnen die jeweiligen Restriktionshomomorphismen als $f_i : Gal(L/K) \to Gal(L_i/K)$, $\sigma \mapsto \sigma \mid_{L_i}$.

Wir können nun mit jedem σ eine Familie von K-Automorphismen $(\sigma_i)_{i\in I}$ definieren, wobei $\sigma_i := f_i(\sigma)$ gilt. Für Zwischenkörper $L_i \subset L_j$ gilt dann $\sigma_j \mid_{L_i} = \sigma_i$.
Gleichermaßen können wir, wenn wir eine Familie $(\sigma_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Gal(L_i/K)$ haben, für die auch $\sigma_j \mid_{L_i} = \sigma_i$ für Zwischenkörper $L_i \subset L_j$ gilt, in einen eindeutigen dazugehörigen K-Automorphismus $\sigma \in Gal(L/K)$ finden. Dies liegt zum einen daran, dass $L = \bigcup_{L_i \in \mathcal{L}} L_i$, da man für jedes Element $\alpha \in L$ einen galoisschen Zwischenkörper in $\mathcal{L}$ findet, der α enthält (z.B. die normale Hülle von $K(\alpha)$. Zum anderen finden wir für je zwei Galois-Zwischenkörper $L_i, L_j \in \mathcal{L}$ einen Zwischenkörper L_k mit $L_i \cup L_j \subset L_k$ (z.B. $L_i \cdot L_j = K(L_i, L_j)$). Ist also $(\sigma_i)_{i\in I}$ eine Familie von K-Automorphismen mit den oben beschriebenen Eigenschaften, so ergibt sich daraus eine eindeutige und wohldefinierte Abbildung $\sigma : L \to L$, welche ein K-Automorphismus ist.
Wir führen nun eine Halbordnung $i \leq j \Leftrightarrow L_i \subset L_j$ für $i, j \in I$ auf der Indexmenge I ein. Des Weiteren seien $f_{ij} : Gal(L_j/K) \to Gal(L_i/K)$ für $i \leq j$ die jeweiligen Restriktionen.
Damit haben wir nun alle Bausteine eines projektiven Systems von Gruppen beisammen und es ergibt sich das Resultat:

Satz 3.2. *Mit den Restriktionen $f_i : Gal(L/K) \to Gal(L_i/K)$ erhält man die Galois-Gruppe $Gal(L/K)$ als den projektiven Limes des Systems $(Gal(L_i/K), f_{ij})$. Es gilt also:*

$$Gal(L/K) = \varprojlim_{i\in I} Gal(L_i/K).$$

Korollar 3.1. *Für die Galois-Gruppe $Gal(\overline{K}/K)$ gilt dementsprechend:*

$$Gal(\overline{K}/K) = lim_{K\subset L\subset K^{sep}}.$$

Wir betrachten weiterhin eine Galois-Erweiterung L/K mit einem System $\mathcal{L} = (L_i)_{i\in I}$ von allen in L liegenden endlichen Galois-Erweiterungen von K sowie Restriktionen $f_i : Gal(L/K) \to Gal(L_i/K)$. Für alle $i \in I$ konstruieren wir topologische Räume $(Gal(L_i/K), \mathcal{P}(Gal(L_i/K)))$, statten also die Galois-Gruppen der Zwischenkörper mit der diskreten Topologie aus (siehe Beispiel 2.1).
Anschließend versehen wir $Gal(L/K)$ mit der gröbstmöglichen Topologie $\mathfrak{T}_{Gal(L/K)}$, so dass die Restriktionen f_i stetig sind. Für jede Teilmenge M von $Gal(L_i/K)$ gilt also, dass $f_i^{-1}(M) \in \mathfrak{T}_{Gal(L/K)}$, für alle $i \in I$. Die Topologie $\mathfrak{T}_{Gal(L/K)}$ ist demnach jene, die von den allen Urbildern der Form $f_i^{-1}(x)$, $x \in Gal(L_i/K)$ erzeugt wird.
Wir haben somit in relativ natürlicher Weise eine Topologie auf unserer Galois-Gruppe $Gal(L/K)$ definiert und können damit nun Aussagen über Offenheit und Abgeschlossenheit von Teilmengen (und damit insbesondere Untergruppen!) von $Gal(L/K)$ treffen.

Zunächst aber eine Aussage über $Gal(L/K)$ selbst:

Bemerkung 3.1. *Die Galois-Gruppe $Gal(L/K)$ ist mit der oben beschriebenen Topologie kompakt (siehe Definition 2.9) und total unzusammenhängend (siehe Definition 2.10), also ist sie proendlich.*

Beweis. Den Beweis führt man über eine Inklusion

$$Gal(L/K) \hookrightarrow \prod_{i \in I} Gal(L_i/K).$$

Man zeigt die entsprechenden Eigenschaften für $\prod_{i \in I} Gal(L_i/K)$. Dass $Gal(L/K)$ total unzusammenhängend ist, folgt daraufhin direkt. Für die Kompaktheit muss man im Anschluss noch zeigen, dass $Gal(L/K)$ in $\prod_{i \in I} Gal(L_i/K)$ abgeschlossen ist, was man über ein Widerspruchsargument zeigen kann. □

Bemerkung 3.2. *Eine Teilmenge $A \subset Gal(L/K)$ ist* ***offen****, wenn für jedes Element $a \in A$ ein Index $i \in I$ existiert, so dass $f_i^{-1}(f_i(a)) \subset A$.*
Gleichermaßen ist eine Teilmenge $B \subset Gal(L/K)$ ***abgeschlossen****, wenn für jedes Element $b \notin B$ (also $b \in Gal(L/K) \setminus B$) ein $i \in I$ existiert, so dass $f_i^{-1}(f_i(b)) \cap B = \emptyset$.*
Der ***Abschluss*** *$\overline{C}$ einer Teilmenge $C \subset Gal(L/K)$ ist die Menge aller Elemente $\sigma \in Gal(L/K)$ mit der Eigenschaft, dass $f_i^{-1}(f_i(\sigma)) \cap C$ für alle $i \in I$ gilt. Äquivalent kann man den Abschluss als Schnitt definieren: $\overline{C} = \bigcap_{C \subset D} D$, wobei die Mengen D in $Gal(L/K)$ abgeschlossen sind.*

Kommen wir nun zu dem Problem, welches einem begegnet, wenn man versucht, den Hauptsatz der endlichen Galois-Theorie unverändert auf allgemeine Galois-Erweiterungen anzuwenden:

Satz 3.3. *Sei $H \subset Gal(L/K)$ eine Untergruppe und L^H der dazugehörige Fixkörper. Dann entspricht $Gal(L/L^H)$ als Untergruppe von $Gal(L/K)$ dem Abschluss von H.*

Nimmt man demnach eine offene (*und insbesondere nicht abgeschlossene*) Untergruppe $H \subset Gal(L/K)$ sowie ihren Abschluss $\overline{H}$, so gilt, dass $L^H = L^{\overline{H}}$, aber $H \neq \overline{H}$. Also sind die Abbildungen aus dem Hauptsatz der endlichen Galois-Theorie (Theorem 1.3) keine Bijektionen mehr und dementsprechend nicht mehr zueinander invers, da die Menge der Untergruppen von $Gal(L/K)$ gewissermaßen „zu groß“ für die Menge der Zwischenkörper von L/K ist.
Der Satz 3.3 liefert uns aber zugleich die Lösung für dieses Problem: Um soviel von dem Hauptsatz der endlichen Galois-Theorie zu erhalten wie möglich, kann man

sich einfach auf die abgeschlossenen Untergruppen von $Gal(L/K)$ beschränken. Wir erhalten eine analoge Aussage:

Satz 3.4. *Sei L/K eine beliebige Galois-Eweiterung mit $G = Gal(L/K)$ als Galois-Gruppe. Dann sind die Zuordnungen*

1. *$\{$abgeschlossene Untergruppen von $G\}$ $\xrightarrow{\Phi}$ $\{$Zwischenkörper von $L/K\}$, $H \mapsto L^H$ und*
2. *$\{$Zwischenkörper von $L/K\}$ $\xrightarrow{\Psi}$ $\{$abgeschlossene Untergruppen von $G\}$, $E \mapsto Gal(L/E)$,*

welche einer abgeschlossenen Untergruppe $H \subset G$ den Fixkörper L^H, bzw. einem Zwischenkörper E von L/K die Galois-Gruppe der Galois-Erweiterung L/E zuordnen, bijektiv und invers zueinander.

Um Satz 3.4 zu beweisen, muss man nur Satz 3.3 zeigen, der Rest folgt aus dem Hauptsatz der endlichen Galois-Theorie.

Beweis. für Satz 3.3
Wir betrachten wie bereits zuvor das System $\mathcal{L} = (L_i)_{i\in I}$ der endlichen und galoisschen Zwischenkörper mit Restriktionshomorphismen $f_i : Gal(L/K) \to Gal(L_i/K)$. Sei nun $H_i = f_i(H)$. Ein Element $\alpha \in L_i$, welches unter H invariant ist, ist also auch unter H_i invariant und umgekehrt. Daraus folgt unmittelbar, dass $L^H \cap L_i = L_i^H$, also auch $L^H = \bigcup_{i\in I} L_i^H$.
Sei nun $H' \neq H$ eine andere Untergruppe von $Gal(L/K)$ mit Restriktionen $H'_i = f_i(H')$. Es gilt offenkundig, dass $L^H = L^{H'} \Leftrightarrow H_i = H'_i$ für alle $i \in I$. Die Untergruppe $H'' := \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(H_i)$ ist die größte, welche die Eigenschaft $f_i(H'') = H_i$ für alle $i \in I$ erfüllt, für die also $L^{H''} = L^H$ gilt. Also ist $H'' = Gal(L/L^H)$.
Umgekehrt kann man den Abschluss von H berechnen und zeigen, dass es sich hierbei um H'' handelt. Unter Verwendung von der ersten Definition von Bemerkung 3.2 zeigt sich:

$$\begin{aligned}
\overline{H} &= \{\sigma \in Gal(L/K) \mid f_i^{-1}(f_i(\sigma)) \cap H \neq \emptyset \, \forall i \in I\} \\
&= \{\sigma \in Gal(L/K) \mid f_i(\sigma) \in H_i \, \forall i \in I\} \\
&= \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(H_i) \\
&= H'
\end{aligned}$$

Demnach gilt $\overline{H} = H' = Gal(L/L^H)$ und $Gal(L/L^H)$ entspricht als Untergruppe von $Gal(L/K)$ dem Abschluss von H. □

Kapitel 4

Konkrete Beispiele

In diesem Kapitel betrachten wir konkrete Beispiele für Erweiterungen des Typs $\overline{K}/K$ bzw. K^{sep}/K für einen Körper K, da diese fast immer unendlich sind. Die Galois-Gruppe einer solchen Erweiterung heißt **absolute Galois-Gruppe**. Zunächst möchten wir aber den Begriff „fast immer“ ein wenig verfeinern:

4.1 Endliche Erweiterungen der Form $\overline{K}/K$

Beispiel 4.1. Der Trivialfall: Sei $K = K^{sep}$ ein separabel abgeschlossener Körper. Dann gilt offensichtlich $Gal(\overline{K}/K) = \{id\}$ und $[\overline{K} : K] = 1 < \infty$.

Beispiel 4.2. Sei $K = \mathbb{R}$. Dann ist $\overline{K} = K^{sep} = \mathbb{C}$ und $Gal(\overline{K}/K) = Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{id, \overline{\circ}\}$, wobei $\overline{\circ}$ die komplexe Konjugation ist. Der Grad der Erweiterung ist dann $[\mathbb{C} \colon \mathbb{R}] = 2 < \infty$.

Für den Grad 2 gibt es noch weitere Beispiele: Eines davon ist die Erweiterung der reellen algebraischen Zahlen $\mathbb{R}_{alg} = \mathbb{A} \cap \mathbb{R}$ zu den algebraischen Zahlen $\mathbb{A} = \overline{\mathbb{Q}}$. Hierbei gilt $\mathbb{A} = \mathbb{R}_{alg}(\mathbf{i})$, wobei $\mathbf{i}$ die imaginäre Einheit ist, die Galois-Gruppe $Gal(\mathbb{A}/\mathbb{R}_{alg})$ ist also, genauso wie bei der Erweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, die Menge $\{id, \overline{\circ}\}$.

Eine Frage, die nun naheliegnd ist: Gibt es Körpererweiterungen der Form $\overline{K}/K$ mit $[\overline{K} \colon K] = n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $2 < n < \infty$? Die Antwort ist faszinierenderweise: Nein! Tatsächlich folgt aus dem Artin-Schreier-Theorem (siehe [Lan02], Korollar 9.3 in Kapitel VI), dass alle endlichen Körpererweiterungen des Typs $\overline{K}/K$ (*bis auf die triviale Körpererweiterung*) den Grad 2 besitzen und gewissermaßen analog zu der Erweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ sind:

Satz 4.1 (Artin-Schreier-Theorem)**.** *Sei L ein algebraisch abgeschlossener Körper* *und* $K \subset L$ *ein Unterkörper mit* $1 < [L\colon K] < \infty$. *Dann gilt, dass* $L = K(\mathbf{i})$ *mit* $\mathbf{i}^2 = -1$ *und ferner, dass* $char(K) = 0$.

Bemerkung 4.1. *Es gilt insbesondere, dass* $[L\colon K] = 2$.

Beweis. Der Beweis ist ausführlicher in Serge Langs Lehrbuch „Algebra“ [Lan02] zu finden, im Folgenden wird er nur grob umrissen.
Zunächst zeigt man, dass L/K eine Galois-Erweiterung ist. Da L algebraisch abgeschlossen ist, ist L/K normal. Es bleibt noch die Separabilität zu zeigen. Diese ist im Fall von $char(K) = 0$ immer erfüllt. Um zu sehen, dass L/K auch für $char(K) = p < 0$ separabel ist, führt man einen Widerspruchsbeweis.
Um zu zeigen, dass $[L\colon K] = 2$, nimmt man an, dass $[L\colon K] > 2$. Dann gilt $|Gal(L/K)| > 2$ und $|Gal(L/K)|$ ist demnach entweder durch eine ungerade Primzahl oder 4 teilbar. Dies führt man zu einem Widerspruch, der aber mehr Vorbereitung benötigt als an dieser Stelle angemessen wäre. Man kann die Vorbereitungen in [Lan02] nachlesen. □

Die endlichen Erweiterungen des Typs $\overline{K}/K$ von einem Körper K sind also interessanterweise sehr überschaubar. Die unendlichen Erweiterungen des Typs $\overline{K}/K$ eines Körpers K sind hingegen etwas vielfältiger.

4.2 Unendliche Erweiterungen des Typs $\overline{K}/K$

Beispiel 4.3. Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit $q = p^n$ für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl $n > 0$. Wie sieht dann die Galois-Gruppe $Gal(\overline{K}/K)$ aus?

Zunächst sieht man, dass es sich bei $\mathbb{F}_q$ für alle $n \in \mathbb{N}$ um einen Erweiterungskörper von $\mathbb{F}_p$ handelt. Analog kann man sehen, dass alle Erweiterungskörper von $\mathbb{F}_q$ die Form $\mathbb{F}_{q^i}$ besitzen.

Wir betrachten nun wie in der Konstruktion von Satz 3.2 das System der endlichen Galoiserweiterungen von $\mathbb{F}_q$, notiert als $\mathcal{F} := (\mathbb{F}_{q^i})_{i\in\mathbb{N}_{>0}}$ mit der Teilmengenrelation als Halbordnung. Gemäß Satz 3.2 gilt dementsprechend, dass

$$Gal(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F}_q) = \varprojlim_{i\in\mathbb{N}_{>0}} Gal(\mathbb{F}_{q^i}/\mathbb{F}_q).$$

Nun wissen wir aber noch nicht viel über das projektive System von $(\mathbb{F}_{q^i}, f_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}_{>0}}$. Insbesondere haben wir noch keine Kenntnis über die Homomorphismen f_{ij}. Zu diesem Zweck betrachten wir nun den Frobenius-Homomorphismus, bzw. seine n-te Potenz:

$$\sigma : \overline{\mathbb{F}} \to \overline{\mathbb{F}},$$

$$a \mapsto (a^p)^n = a^q.$$

Die Abbildung σ ist der relative Frobenius-Homomorphismus über $\mathbb{F}_q$. Es ist leicht zu sehen, dass $\sigma \in Aut_{\mathbb{F}_q}(\overline{\mathbb{F}})$. Außerdem gilt, dass $\mathbb{F}_q$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^q - X$ über $\mathbb{F}_p$ ist. Also ist $\mathbb{F}_q$ der Fixkörper der von σ erzeugten Untergrupppe von $Gal(\overline{\mathbb{F}})$.

Wir setzen $\sigma_i := \sigma \mid_{\mathbb{F}_{q^i}}$. Dann werden die Galois-Gruppen $Gal(\mathbb{F}_{q^i}/\mathbb{F}_p)$ für alle $i \in \mathbb{N}_{>0}$ von den Restriktionen σ_i erzeugt. Es gilt bezüglich der Halbordnung „$\subset$“, dass $\mathbb{F}_{q^i} \subset \mathbb{F}_{q^j}$ genau dann, wenn $i \mid j$. Ferner, wenn $\mathbb{F}_{q^i} \subset \mathbb{F}_{q^j}$ gilt, dann gilt für die Restriktion

$$Gal(\mathbb{F}_{q^j}/\mathbb{F}_p) \to Gal(\mathbb{F}_{q^i}/\mathbb{F}_p),$$

dass $\sigma_j \mapsto \sigma_i$.

Ohne zu sehr ins Detail zu gehen, kann man erkennen, dass die zyklischen Galois-Gruppen $Gal(\mathbb{F}_{q^j}/\mathbb{F}_p)$ gewissermaßen den zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$ entsprechen, wobei die erzeugenden Elemente σ_j zu den Restklassen $\overline{1} \in \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$ korrespondieren. Damit gilt

$$Gal(\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F}_q) = \varprojlim_{i\in\mathbb{N}_{>0}} Gal(\mathbb{F}_{q^i}/\mathbb{F}_p) \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}_{>0}} \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} =: \hat{\mathbb{Z}}.$$

Da $\hat{\mathbb{Z}}$ (auch genannt die **proendliche Verfollständigung von** $\mathbb{Z}$) nicht von dem gewählten p oder q abhängt, ist $\hat{\mathbb{Z}}$ insbesondere (bis auf Isomorphie) die absolute Galois-Gruppe von *jedem* endlichen Körper.

Literaturverzeichnis

[Bos] Bosch, Siegfried: *Algebra*. 10th ed. 2023

[Lan02] Lang, Serge: *Algebra*. Springer, 2002

[Sch21] Scheithauer, Nils: *Vorlesungsskript Algebra WiSe 21/22*. 2021

[Sta24] Stacks project authors, The: *The Stacks project*. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2024

Index

Erklärung zur Abschlussarbeit gemäß §22 Abs. 7 APB der TU Darmstadt

Hiermit versichere ich, Moritz Reinhard, die vorliegende Bachelor-Thesis ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.
Mir ist bekannt, dass im Falle eines Plagiats (§38 Abs.2 APB) ein Täuschungsversuch vorliegt, der dazu führt, dass die Arbeit mit 5,0 bewertet und damit ein Prüfungsversuch verbraucht wird. Abschlussarbeiten dürfen nur einmal wiederholt werden.
Bei der abgegebenen Thesis stimmen die schriftliche und die zur Archivierung eingereichte elektronische Fassung überein.

Thesis Statement pursuant to §22 paragraph 7 of APB TU Darmstadt

I herewith formally declare that I, Moritz Reinhard, have written the submitted thesis independently. I did not use any outside support except for the quoted literature and other sources mentioned in the paper. I clearly marked and separately listed all of the literature and all of the other sources which I employed when producing this academic work, either literally or in content. This thesis has not been handed in or published before in the same or similar form.
I am aware, that in case of an attempt at deception based on plagiarism (§38 Abs. 2 APB), the thesis would be graded with 5,0 and counted as one failed examination attempt. The thesis may only be repeated once.
In the submitted thesis the written copies and the electronic version for archiving are identical in content.

Darmstadt, 11.04.2024

Moritz Reinhard

Unterschrift des Autors/Signature of author