Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen Gesamtfakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität

Heidelberg

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker Jan Hendrik Bruinier

aus Wiesbaden

Heidelberg 1998

Gutachter: Prof. Dr. Eberhard Freitag, Universität Heidelberg
Prof. Dr. Winfried Kohnen, Universität Heidelberg

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Dezember 1998

Borcherdsprodukte und Chernsche Klassen von Hirzebruch-Zagier-Zykeln

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden Borcherdsprodukte und gewisse Verallgemeinerungen auf Hilbertschen Modulflächen untersucht. Zum besseren Verständnis geben wir zunächst eine kurze Einführung in die Borcherdssche Theorie.

Sei $(\cdot,\cdot)$ eine symmetrische nicht ausgeartete Bilinearform der Signatur $(2,n)$ auf einem reellen Vektorraum V der Dimension $2+n$ und $M \subset V$ ein gerades Gitter. Die quadratische Form

$$q(x) = \frac{1}{2}(x,x)$$

ist also ganzzahlig. Mit dem zu M dualen Gitter M' kann man die sogenannte Diskriminantengruppe M'/M bilden, welche eine endliche abelsche Gruppe ist.

Wir dehnen die Bilinearform $(\cdot,\cdot)$ $\mathbb{C}$-bilinear auf $V(\mathbb{C}) = V \otimes \mathbb{C}$ aus und betrachten im projektiven Raum $P(V(\mathbb{C}))$ die Nullquadrik $(z,z)=0$. Durch die Bedingung $(z,\bar{z}) > 0$ wird darin eine offene Teilmenge mit zwei Zusammenhangskomponenten definiert. Wir bezeichnen eine der beiden mit $\mathcal{H}_n$ und mit $\mathrm{O}'(V)$ die Untergruppe vom Index 2 in

$$\mathrm{O}(V) = \{g \in \mathrm{Gl}(V); \quad (gx, gy) = (x,y)\},$$

welche $\mathcal{H}_n$ in sich überführt. Dies ist eine konkrete Realisierung des symmetrischen Raumes $\mathrm{O}(V)/K$, wobei K eine maximal kompakte Untergruppe von $\mathrm{O}(V)$ bezeichne. Sei

$$\mathrm{O}(M) = \{g \in \mathrm{O}(V); \quad g(M) = M\}$$

die ganzzahlige orthogonale Gruppe zu M und

$$\Gamma \leq \mathrm{O}'(M) := \mathrm{O}(M) \cap \mathrm{O}'(V)$$

eine Untergruppe von endlichem Index. Dann trägt $\mathcal{H}_n/\Gamma$ nach Baily Borel die Struktur einer quasiprojektiven algebraischen Varietät.

Für das Studium des Raumes $\mathcal{H}_n/\Gamma$ ist die Untersuchung von Divisoren von besonderer Bedeutung. Ist $\alpha \in M'/M$ und m eine negative rationale Zahl, so betrachten wir den Divisor

$$H(m,\alpha) = \sum_{\substack{v \in M' \\ q(v)=m \\ v+M=\alpha}} v^\perp \cap \mathcal{H}_n.$$

Dabei steht $v^\perp$ für das orthogonale Komplement von v in $P(V(\mathbb{C}))$.

Ist speziell Γ die Untergruppe aller Elemente von $\mathrm{O}'(M)$, die auf M'/M trivial operieren, so ist $H(m,\alpha)$ invariant unter Γ. Es läßt sich zeigen, daß $H(m,\alpha)$ das Urbild eines algebraischen Divisors $Y(m,\alpha)$ auf $\mathcal{H}_n/\Gamma$ ist. Dieser setzt sich aus endlich vielen eingebetteten $\mathcal{H}_{n-1}/\tilde{\Gamma}$ zusammen, wobei $\mathcal{H}_{n-1}$ das orthogonale Komplement in $\mathcal{H}_n$ eines Vektors $v \in M'$ bezeichnet, $\tilde{\Gamma}$ den Durchschnitt von Γ mit $\mathrm{O}(\tilde{M})$ und $\tilde{M}$ das orthogonale Komplement von v in M.

Im Spezialfall $n = 1$ sind die $Y(m,\alpha)$ Heegnerpunkte [GZ], für $n = 2$ bekommt man Hirzebruch-Zagier-Zykeln [HZ] und für $n = 3$ Humbertsche Flächen [Ge]. In der vorliegenden Arbeit wählen wir Borcherds folgend [Bo3] die einheitliche Bezeichnung *Heegnerdivisoren.*

Borcherds hat in [Bo1, Bo2] eine Liftung konstruiert, die einer geeigneten elliptischen Modulform f eine automorphe Form $B(f)$ bezüglich Γ zuordnet, deren Null- und Polstellendivisor sich aus Heegnerdivisoren der Form $Y(m,\alpha)$ zusammensetzt.

Es bezeichne A_M den $\mathbb{Z}$-Modul aller M'/M-Tupel $f = (f_\alpha)$ holomorpher Funktionen auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ mit den Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
&i) \quad f_\alpha(\tau+1) = e^{2\pi i q(\alpha)} f_\alpha(\tau)\\
&ii) \quad f_\alpha\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{|M'/M|}} \sqrt{\frac{\tau}{i}}^{\,2-n} \sum_{\beta \in M'/M} e^{-2\pi i(\alpha,\beta)} f_\beta(\tau)\\
&iii) \quad f_\alpha(\tau) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Q}\\ k \gg -\infty}} a_\alpha(k) e^{2\pi i k\tau}\\
&iv) \quad a_\alpha \in \mathbb{Z} \quad \text{für} \quad k<0,\ \alpha \in M'/M.
\end{aligned}
$$

Falls M unimodular ist, so sind die Elemente von A_M gewöhnliche elliptische Modulformen vom Gewicht $1 - n/2$ bezüglich $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$, die möglicherweise einen Pol in ∞ besitzen.

Ist $f \in A_M$, so existiert nach [Bo2] Theorem 13.3 eine meromorphe automorphe Form $B(f)$ bezüglich der angegebenen Untergruppe Γ von $\mathrm{O}'(M)$, deren Divisor die Form

$$
(B(f)) = \sum_{\substack{\alpha \in M'/M\\ m<0}} a_\alpha(m) Y(m,\alpha)
$$

hat (mit den in (iii) auftretenden Koeffizienten $a_\alpha(k)$). Das Gewicht von $B(f)$ ist $a_0(0)/2$, also durch den nullten Fourierkoeffizienten der nullten Komponente von f gegeben. Die Funktion $B(f)$ läßt sich mit Hilfe der von Harvey und Moore in [HM] eingeführten singulären Thetakorrespondenz als unendliches Produkt konstruieren, daher auch die Bezeichnung „Borcherdsprodukt“.

In einer weiteren Arbeit [Bo3] zeigte Borcherds unter Verwendung der Serre-Dualität, daß die einzigen Beschränkungen bei der Konstruktion von Modulformen aus A_M mit vorgegebenem Hauptteil durch einen „Hindernisraum“ H_M von ganzen Modulformen gegeben sind. Ein M'/M-Tupel $g = (g_\alpha)$ holomorpher Funktionen auf $\mathbb{H}$ liegt in H_M, falls es den Bedingungen

$$\begin{aligned}
&i) \quad g_\alpha(\tau+1) = e^{-2\pi i q(\alpha)} g_\alpha(\tau) \\
&ii) \quad g_\alpha\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{1}{\sqrt{|M'/M|}} \sqrt{\frac{\tau}{i}}^{2+n} \sum_{\beta \in M'/M} e^{2\pi i(\alpha,\beta)} g_\beta(\tau) \\
&iii) \quad g_\alpha(\tau) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Q} \\ k\geq 0}} b_\alpha(k) e^{2\pi i k\tau}
\end{aligned}$$

genügt. Die Elemente von H_M sind also vektorwertige Modulformen vom Gewicht $1+n/2$, die auch in ∞ holomorph sind. Satz 3.1 in [Bo3] impliziert nun, daß ein M'/M-Tupel $h = (h_\alpha)$ von Fourierpolynomen

$$h_\alpha(\tau) = \sum_{\substack{k\leq 0 \\ k\equiv q(\alpha) \pmod 1}} c_\alpha(k) e^{2\pi i k\tau}$$

mit $c_\alpha(k) \in \mathbb{Z}$ für $k < 0$ genau dann der Hauptteil in ∞ einer Modulform $f \in A_M$ ist, wenn für alle $g \in H_M$ gilt:

$$\sum_{\substack{\alpha\in M'/M \\ k\leq 0}} c_\alpha(k) b_\alpha(-k) = 0.$$

Damit hat man eine hinreichende Bedingung dafür gefunden, daß sich eine Linearkombination von Heegnerdivisoren

$$\sum_{\substack{\alpha\in M'/M \\ m<0}} c_\alpha(m) Y(m,\alpha)$$

als Divisor einer automorphen Form realisieren läßt.

An dieser Stelle erhebt sich in natürlicher Weise die Frage, ob diese Bedingung auch notwendig ist (siehe dazu [Bo3] Example 4.2). Mit anderen Worten:

Frage (∗). *Sei F eine automorphe Form bezüglich $\Gamma \leq \mathrm{O}'(M)$, deren Divisor eine Linearkombination der $Y(m,\alpha)$ ist. Gibt es dann ein $f \in A_M$, so daß $(B(f)) = (F)$ ist?*

Diese Frage hat die in der vorliegenden Arbeit durchgeführte Untersuchung motiviert. Sie wird im Spezialfall, daß Γ die Hilbertsche Modulgruppe eines reell-quadratischen Zahlkörpers $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ der Diskriminante $D \equiv 1 \pmod 4$ ist, positiv beantwortet.

Bevor wir unsere Vorgehensweise detailliert beschreiben, möchten wir noch einige allgemeine Bemerkungen voranstellen.

Borcherds skizziert in [Bo3] Example 4.2 (unter der Voraussetzung $n \geq 3$) zur Beantwortung der Frage $(*)$ in wenigen Worten ein Projekt, das man wie folgt interpretieren kann.

Man dehne die Borcherdsliftung auf einen geeigneten Raum $\tilde{A}_M$ von nichtanalytischen Modulformen aus, der den Raum A_M umfaßt. Dabei sollte $\tilde{A}_M$ so beschaffen sein, daß jedes M'/M-Tupel von Fourierpolynomen der „Hauptteil" eines Elements $f \in \tilde{A}_M$ ist. So sollte man jeden Heegnerdivisor $Y(m,\alpha)$ als Divisor eines (i.a. nicht meromorphen) verallgemeinerten Borcherdsproduktes darstellen können. (Hier wäre eine alternative Idee, den Borcherdslift auf Eichler-Integrale zu verallgemeinern. Dies sind auf $\mathbb{H}$ holomorphe Funktionen f, in deren Transformationsverhalten $(c\tau+d)^{-\kappa}F(\gamma\tau) = f(\tau) + p_\gamma(\tau)$ gewisse Periodenpolynome $p_\gamma(\tau)$ auftreten. Referenzen hierzu sind [Kn1] und [Kn2].)

Diesen verallgemeinerten Borcherdslift könnte man dann als Abbildung

$$\tilde{A}_M/A_M \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Cl}}(\mathcal{H}_n/\Gamma)$$

in eine modifizierte Divisorklassengruppe $\widetilde{\mathrm{Cl}}(\mathcal{H}_n/\Gamma)$ von $\mathcal{H}_n/\Gamma$ verstehen ($\widetilde{\mathrm{Cl}}(\mathcal{H}_n/\Gamma)$ ist die Gruppe aller Divisoren modulo der Untergruppe der Divisoren von automorphen Formen). Der Hindernisraum H_M wäre dual zu $(\tilde{A}_M/A_M) \otimes \mathbb{C}$, folglich bekäme man eine Abbildung

$$H_M^* \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Cl}}(\mathcal{H}_n/\Gamma) \otimes \mathbb{C}.$$

Um $(*)$ zu beantworten, hätte man dann zu zeigen, daß diese Abbildung injektiv ist.

Die vorliegende Arbeit beruht auf der Idee, den zu konstruierenden verallgemeinerten Borcherdslift mit der Chernklassenabbildung zusammenzusetzen. So sollte man eine Abbildung vom Dual H_M^* des Hindernisraumes in die Kohomologie von $\mathcal{H}_n/\Gamma$ erhalten.

Liftungen von elliptischen Modulformen in die Kohomologie wurden in der Literatur auf andere Weise — nämlich als verallgemeinerte Kurokawa-Lifts — beschrieben (siehe [PS1, PS2, Ku1, Ku2, Ku3]). Man sollte vermuten, daß beide Konstruktionen ein und dasselbe liefern.

In der vorliegenden Arbeit wird das soeben beschriebene Programm im Spezialfall der Hilbertschen Modulgruppe eines reell-quadratischen Zahlkörpers behandelt.

Dabei entwickeln wir allerdings einen neuen Zugang zur Borcherdsschen Theorie, der für unsere Zwecke besonders geeignet ist.

Es bezeichne $\mathcal{O}$ den Ring der ganzen Zahlen in K, $\mathfrak{d}$ die Differente, $x \mapsto x'$ die Konjugation in K und $\mathrm{N}(x) = xx'$ die Norm eines Elements. Man kann die Hilbertsche Modulgruppe $\Gamma_K = \mathrm{Sl}_2(\mathcal{O})$ auch als ganzzahlige orthogonale Gruppe des Gitters $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathcal{O}$ mit der quadratischen Form

$$q((a,b,\lambda)) = \lambda\lambda' - ab \qquad ((a,b,\lambda) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathcal{O})$$

auffassen. In der zu Beginn eingeführten Terminologie betrachten wir also den Fall $\mathrm{O}(2,2)$. Das zugehörige Hermitesche symmetrische Gebiet $\mathcal{H}_2$ läßt sich auch als Produkt $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$

zweier oberer Halbebenen realisieren. In diesen Koordinaten schreibt sich für eine negative ganze Zahl m und $\alpha \in \mathfrak{d}^{-1}/\mathcal{O}$ der Heegnerdivisor $H(m/D, \alpha)$ in der Form

$$\begin{aligned} H(m/D,\alpha) = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{H}\times\mathbb{H};\quad & \exists (a,b,\lambda) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathfrak{d}^{-1} \text{ mit } \mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D, \\ & \lambda \equiv \alpha \pmod{\mathcal{O}} \text{ und } az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b = 0\}. \end{aligned}$$

Aus später ersichtlich werdenden Gründen betrachten wir — wie auch Hirzebruch und Zagier [HZ] — speziell die Linearkombinationen

$$H(m) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{d}^{-1}/\mathcal{O}} H(m/D, \alpha).$$

Der Divisor $H(m)$ ist das Urbild eines algebraischen Divisors $Y(m)$ auf dem Quotienten $X_K = (\mathbb{H}\times\mathbb{H})/\Gamma_K$.

Die Grundidee unseres Zugangs zur Borcherdsschen Theorie ist einfach und kann wie folgt beschrieben werden: Wir wollen dem Heegnerdivisor $H(m)$ die Poincaréreihe

$$\phi_m(z_1,z_2) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z} \\ \lambda\in\mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda)-ab=m/D}} \log\left(\frac{|az_1\bar{z}_2 + \lambda z_1 + \lambda'\bar{z}_2 + b|^2}{|az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^2}\right)$$

zuordnen. Formal ist sie invariant unter Γ_K und hat eine logarithmische Singularität entlang von $H(m)$. Man kann also hoffen, durch die Bildung $\exp(\phi_m(z_1,z_2))$ den Betrag eines verallgemeinerten Borcherdsproduktes zu erhalten.

Die Reihe $\phi_m(z_1,z_2)$ divergiert jedoch; wir regularisieren sie in der folgenden Weise. Zunächst betrachten wir für $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 1$ die lokal gleichmäßig absolut konvergente Reihe

$$\Phi_m(z_1,z_2,s) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z} \\ \lambda\in\mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda)-ab=m/D}} \varphi_s\left(\frac{4|m|y_1y_2/D}{|az_1\bar{z}_2 + \lambda z_1 + \lambda'\bar{z}_2 + b|^2}\right),$$

wobei

$$\varphi_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+s)^2}{\Gamma(k+2s)k!} z^{k+s} = z^s \frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} \cdot F(s,s,2s;z)$$

und $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Wegen $\varphi_1(z) = -\log(1-z)$ und aufgrund der Beziehung

$$|az_1\bar{z}_2 + \lambda z_1 + \lambda'\bar{z}_2 + b|^2 = 4|m|y_1y_2/D + |az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^2$$

für $(a,b,\lambda) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathfrak{d}^{-1}$ mit $\mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D$, gilt formal $\Phi_m(z_1,z_2,1) = \phi_m(z_1,z_2)$. (Im Spezialfall $D = 1$, $m = -1$ stimmt $\Phi_m(z_1,z_2,s)$ mit der automorphen Greenschen Funktion für $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ überein [He].)

Mit Hilfe der Fourierentwicklung, die wir in Kapitel 2.2 explizit berechnen, läßt sich $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ meromorph auf $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma > 3/4\}$ fortsetzen (siehe Satz 2.9 und Satz 2.15). Bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$ ist $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ sogar holomorph in diesem Gebiet. Wir definieren die regularisierte Poincaréreihe $\Phi_m(z_1, z_2)$ als konstanten Term der Laurententwicklung in s von $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ an der Stelle $s = 1$.

Aus der Konstruktion folgt direkt, daß $\Phi_m(z_1, z_2)$ invariant unter Γ_K ist. Weiterhin kann man zeigen, daß $\Phi_m(z_1, z_2)$ auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H} - H(m)$ reell analytisch ist und eine logarithmische Singularität längs $H(m)$ aufweist (Satz 2.17).

Sei $M_2(D, \chi_D)$ der Vektorraum der Modulformen vom Gewicht 2 bezüglich $\Gamma_0(D)$ mit Charakter $\chi_D = \left(\frac{D}{\cdot}\right)$, der Unterraum der Spitzenformen werde mit $S_2(D, \chi_D)$ bezeichnet.

Mit Hilfe eines Resultats von Zagier über gewisse Exponentialsummen ([Za1] §4 Proposition) können wir $\Phi_m(z_1, z_2)$ als Summe zweier reellwertiger Funktionen $\psi_m(z_1, z_2)$ und $\xi_m(z_1, z_2)$ mit den folgenden Eigenschaften schreiben (Lemma 2.19, Satz 2.23):

Die Funktion $\xi_m(z_1, z_2)$ ist reell analytisch auf ganz $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. In ihrer Fourierentwicklung

$$\xi_m(z_1, z_2) = q_0(m)\log(y_1 y_2) + 4 \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0 \\ \nu' < 0}} p_{|D\nu\nu'|}(|m|) \log|1 - e(\nu z_1 + \nu' \bar{z}_2)|$$

treten die $|m|$-ten Koeffizienten $p_n(|m|)$ gewisser Poincaréreihen P_n aus $S_2(D, \chi_D)$ auf. Diese P_n sind im wesentlichen die von Zagier in [Za1] eingeführten Linearkombinationen von Poincaréreihen zu den verschiedenen Spitzen von $\Gamma_0(D)$. Die erzeugende Reihe $E(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} q_0(-n)e^{2\pi i n z}$ der $q_0(m)$ ist eine (analog gebildete) Linearkombination von Eisensteinreihen aus $M_2(D, \chi_D)$.

Weiterhin ist $\psi_m(z_1, z_2)$ durch den Logarithmus vom Betrag einer auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ holomorphen Funktion $\Psi_m(z_1, z_2)$ gegeben. Die einzigen Nullstellen von $\Psi_m(z_1, z_2)$ liegen auf $H(m)$, und in bestimmten offenen Teilen $W \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ besitzt $\Psi_m(z_1, z_2)$ eine Borcherdssche Produktentwicklung

$$\Psi_m(z_1, z_2) = e(\rho_W z_1 + \rho_W' z_2) \prod_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ (\nu, W) > 0}} (1 - e(\nu z_1 + \nu' z_2))^{-q_{D\nu\nu'}(m)}.$$

Dabei sind ρ_W und ρ_W' reelle Konstanten. Die $q_n(m)$ $(n \neq 0)$ bezeichnen die Koeffizienten gewisser Poincaréreihen vom Gewicht 2 bezüglich $\Gamma_0(D)$, welche in den Spitzen von $\Gamma_0(D)$ Pole besitzen.

Es sei a_r $(r \in \mathbb{N})$ das Funktional im Dualraum von $S_2(D, \chi_D)$, das einer Modulform f ihren r-ten Fourierkoeffizienten zuordnet. Der von den a_r erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul werde mit $A(D, \chi_D)$ bezeichnet. Wählt man ganze Zahlen $c_1, \ldots, c_N$ mit $\sum_{j=1}^{N} c_j a_j = 0$, so gilt

$$\xi(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^{N} c_j \xi_{-j}(z_1, z_2) = \log(y_1 y_2) \sum_{j=1}^{N} c_j q_0(-j).$$

Man kann schließen (Satz 2.28), daß

$$\Psi(z_1,z_2)=\prod_{j=1}^{N}\Psi_{-j}(z_1,z_2)^{c_j}$$

eine automorphe Form vom Gewicht $-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}c_j q_0(-j)$ (mit einem gewissen Charakter) bezüglich Γ_K darstellt, deren Null- und Polstellendivisor gleich

$$\sum_{j=1}^{N}c_j Y(-j)$$

ist. Insbesondere finden wir (Satz 3.1), daß durch $a_r \mapsto Y(-r)$ ein Homomorphismus

$$\beta : A(D,\chi_D) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Cl}}(X_K)$$

definiert wird. Damit haben wir in unserem Spezialfall die erwähnten Resultate von Borcherds neu bewiesen. Gleichzeitig sind wir in der Lage, die gewünschten Verallgemeinerungen durchzuführen.

Wir können die Chernsche Klasse des Divisors $Y(m)$ explizit berechnen (Satz 3.2). (Im betrachteten Fall der Hilbertschen Modulgruppe ist dies auf andere Weise auch mit den Resultaten von Hirzebruch-Zagier [HZ] und Oda [Od] möglich; siehe dazu auch [Ge].)

Die oben genannten Eigenschaften von Ψ_m und ξ_m implizieren, daß $e^{\xi_m(z_1,z_2)/4}$ eine Hermitesche Metrik auf der zu $Y(m)$ gehörigen Garbe $\mathcal{L}(Y(m))$ darstellt. Somit ist die Chernsche Klasse $c(Y(m))$ von $Y(m)$ durch

$$\frac{1}{4}\partial\bar{\partial}\xi_m(z_1,z_2)$$

gegeben.

Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, daß $\mathcal{O}$ eine Einheit ε_0 negativer Norm enthält. Dann erhält man

$$\begin{aligned} c(Y(m)) = &-\frac{q_0(m)}{16}\left(\frac{dz_1\wedge d\bar{z}_1}{y_1^2}+\frac{dz_2\wedge d\bar{z}_2}{y_2^2}\right)\\ &-\frac{m}{4D}\left(\omega_{|m|}(\varepsilon_0 z_1,\varepsilon_0'\bar{z}_2)dz_1\wedge d\bar{z}_2+\omega_{|m|}(\varepsilon_0 z_2,\varepsilon_0'\bar{z}_1)dz_2\wedge d\bar{z}_1\right). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\omega_n(z_1,z_2)$ für $n\in\mathbb{N}$ die von Zagier (in [Za1] Appendix 1) eingeführte Poincaréreihe vom Gewicht 2 bezüglich Γ_K.

Im wesentlichen ist die Chernsche Klasse von $Y(m)$ also durch die Hilbertsche Spitzenform $\omega_{|m|}(z_1,z_2)$ gegeben. Wir können die Komposition von β mit der Chernklassenabbildung als Abbildung von $A(D,\chi_D)$ in den Raum $S_2(\Gamma_K)$ der Spitzenformen vom Gewicht 2 bezüglich Γ_K auffassen.

Nach Tensorieren mit $\mathbb{C}$ und Identifikation von $S_2(D, \chi_D)$ mit seinem Dual durch das Petersson-Produkt $f \mapsto \langle \cdot, f \rangle$ erhält man einen Homomorphismus

$$S_2(D, \chi_D) \longrightarrow S_2(\Gamma_K).$$

In Satz 3.5 zeigen wir, daß dieser bis auf einen Normierungsfaktor mit der Doi-Naganuma-Liftung (siehe [DN, Na, Za1, As]) übereinstimmt.

Damit haben wir das zu Beginn allgemein skizzierte Programm im Spezialfall der Hilbertschen Modulgruppe eines reell-quadratischen Zahlkörpers vollständig durchgeführt. Insbesondere können wir die Frage $(*)$ in diesem Fall beantworten (siehe Satz 3.8). Dazu nutzen wir aus, daß wir den Kern der Abbildung β mit dem Kern der Doi-Naganuma-Liftung identifizieren können. Es ergibt sich:

Sei f eine automorphe Form bezüglich Γ_K mit einem beliebigen Charakter. Der Divisor von f habe die Gestalt $(f) = \sum_{j=1}^{N} c_j Y(-j)$. Dann ist f bis auf einen konstanten Faktor gleich

$$\Psi(z_1, z_2) = \prod_{j=1}^{N} \Psi_{-j}(z_1, z_2)^{c_j}.$$

Insbesondere besitzt f eine Entwicklung in ein Borcherdsprodukt, und das Gewicht von f ist

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} c_j q_0(-j),$$

also durch die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe $E(z)$ gegeben.

Die hier beschriebenen Poincaréreihen Φ_m lassen sich sicherlich auf orthogonale Gruppen $\mathrm{O}(2, n)$ mit $n \geq 3$ verallgemeinern. Man sollte analog wieder verallgemeinerte Borcherdsprodukte und damit eine Liftung in die Kohomologie konstruieren können.

Die Verallgemeinerung auf den $\mathrm{O}(2,1)$-Fall sollte ebenfalls interessant sein. Hier tritt jedoch das Problem auf, daß sich die zu $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ analogen Poincaréreihen nicht mehr in der gleichen Weise durch ihre Fourierentwicklung ausreichend weit nach links in s fortsetzen lassen.

Sehr herzlich danke ich Herrn Prof. Dr. E. Freitag für seine Anregungen, Kommentare und Verbesserungsvorschläge zu dieser Arbeit. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. W. Kohnen für zahlreiche interessante und nützliche Gespräche.

Kapitel 1

Eisensteinreihen und Poincaréreihen zu $\Gamma_0(D)$

Für eine Einführung in die Theorie der Modulformen zu Kongruenzuntergruppen von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ sei auf die Bücher von Shimura [Sh1] und Miyake [Mi] verwiesen.

Im folgenden Kapitel untersuchen wir Eisensteinreihen und Poincaréreihen vom Gewicht 2 bezüglich $\Gamma_0(D)$, wobei wir uns an [Za1] bzw. [Sc] orientieren. Sämtliche Resultate dieses Abschnitts sind wohlbekannt, unser Ziel ist es lediglich, sie in einer für uns günstigen Form zu formulieren. Daher halten wir die Darstellung knapp.

1.1 Eisensteinreihen vom Gewicht zwei

Wie üblich bezeichne $\mathbb{H}$ die obere Halbebene und $\Gamma(1) = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Es sei $\Gamma \leq \Gamma(1)$ eine Untergruppe von endlichem Index, die -1 und $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ enthält, und χ ein gerader reeller Charakter von Γ. Weiterhin sei P eine Spitze von Γ und $A_P \in \Gamma(1)$ mit $A_P(P) = \infty$ fest gewählt. Man setze

$$\Gamma_P = A_P \Gamma A_P^{-1} \cap \left\{ \begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ b \in \mathbb{Z} \right\},$$

und bezeichne mit

$$w_P = \left[\left\{ \begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ b \in \mathbb{Z} \right\} : \Gamma_P \right]$$

die Spitzenbreite von P (vgl. [Za1] §3). Wie man leicht nachprüft, ist w_P unabhängig von der Wahl von A_P, und aus $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ folgt $w_\infty = 1$. Für $z = x + iy \in \mathbb{H}$ und $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $\sigma > 0$ definiert man die Eisensteinreihe (mit Parameter s) vom Gewicht zwei in der Spitze P durch

$$E^P(z,s) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{A \in \Gamma_P \backslash A_P \Gamma \\ A = \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}} \chi(A_P^{-1} A) \frac{1}{(cz+d)^2} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}. \tag{1.1}$$

Für festes $\sigma > 0$ konvergiert diese Reihe lokal gleichmäßig absolut auf $\mathbb{H}$. Daher hat $E^P(z,s)$ das Transformationsverhalten $E^P(\gamma z, s) = \chi(\gamma)(cz+d)^2 E^P(z,s)$ für alle $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$.

Im folgenden berechnen wir die Fourierentwicklung von $E^P(z,s)$ in der Spitze ∞ und zeigen, daß damit eine holomorphe Fortsetzung in s auf $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma > -1/4\}$ gegeben ist. Nach Hecke können wir dann die Eisensteinreihe vom Gewicht 2 in der Spitze P durch $E^P(z) = E^P(z,0)$ erklären. Zur Abkürzung setzen wir $e(z) := e^{2\pi i z}$.

Lemma 1.1. *Die Funktion*

$$h(z,s) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+r)^2} \frac{y^s}{|z+r|^{2s}} \qquad (z \in \mathbb{H},\ \sigma > 0)$$

hat eine Fourierentwicklung der Form $h(z,s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(y,s) e(nx)$ *mit*

$$c_0(y,s) = -\frac{\sqrt{\pi}}{y^{1+s}} \frac{\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(s+1)} \frac{s}{s+1},$$

$$c_n(y,0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n < 0, \\ -4\pi^2 n e^{-2\pi n y}, & \text{falls } n > 0. \end{cases}$$

Für $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ haben die $c_n(y,s)$ eine holomorphe Fortsetzung in s auf $\mathbb{C}$ und genügen der Abschätzung $c_n(y,s) = O(e^{-\pi|n|y})$ $(|n| \to \infty)$ lokal gleichmäßig in s. Insbesondere ist $h(z,s) - c_0(y,s)$ eine ganze Funktion in s.

Beweis. Siehe [Sc] Kapitel III §2. □

Man beachte, daß zwei Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $A' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ aus $A_P\Gamma$ genau dann links-äquivalent unter Γ_P sind, falls $(c\,d) = (c'\,d')$. Damit kann man (1.1) auch schreiben als

$$E^P(z,s) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d)=1,\ -d/c\in P \\ A=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in A_P\Gamma}} \chi(A_P^{-1}A) \frac{1}{(cz+d)^2} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}. \tag{1.2}$$

Die Summe erstreckt sich über alle Paare $(c\,d)$, die als untere Zeile einer Matrix $A \in A_P\Gamma$ vorkommen können. Man beachte, daß A modulo Γ_P durch $(c\,d)$ eindeutig bestimmt ist.

Man kann die Summe in (1.2) aufspalten in einen Beitrag mit $c = 0$ und das Zweifache des Beitrages mit $c > 0$. Der „$c = 0$ Term" tritt nur auf, falls $P = \infty$. Da aus $c = 0$ aber $d = \pm 1$ folgt, ist dieser Beitrag gleich $\delta_{P\infty} y^s$ (δ bezeichnet das Kroneckersymbol). Den „$c > 0$ Term" kann man in der Form

$$\frac{1}{2} \sum_{c\geq 1} \sum_{d(c)}^{*} \chi\left(A_P^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \frac{1}{c^{2+2s}} h(z + d/c, s)$$

schreiben, wobei die Summe $\sum^*$ über alle d modulo c läuft mit $(c,d) = 1$ und $-d/c \in P$. (Hier verwendet man $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$.) Mit Lemma 1.1 erhält man:

Satz 1.2. *Die Eisensteinreihe $E^P(z,s)$ hat die Fourierentwicklung*

$$
\begin{aligned}
E^P(z,s) &= \delta_{P\infty} y^s - \frac{\sqrt{\pi}}{y^{1+s}} \frac{\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(s+1)} \frac{s}{s+1} \sum_{c \geq 1} {\sum_{d(c)}}^{*} \chi\left(A_P^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \frac{1}{c^{2+2s}} \\
&\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}-\{0\}} \left[\sum_{c \geq 1} H_c^P(0,n) \frac{1}{c^{1+2s}}\right] c_n(y,s) e(nx). \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

Dabei sind die $c_n(y,s)$ wie in Lemma 1.1 definiert, und $H_c^P(m,n)$ ist die verallgemeinerte Kloostermansumme

$$
H_c^P(m,n) = \frac{1}{c} {\sum_{d(c)}}^{*} \chi\left(A_P^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) e\left(\frac{maw_P^{-1} + nd}{c}\right) \qquad (m,n \in \mathbb{Z}). \qquad (1.4)
$$

(Die Summation $\sum^*$ erstreckt sich über alle d modulo c mit $(c,d) = 1$, $-d/c \in P$; und a, b sind durch $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in A_P\Gamma$ definiert.)

Im folgenden sei $D > 0$ eine Fundamentaldiskriminante. Wir setzen aus technischen Gründen zusätzlich $D \equiv 1 \pmod 4$ voraus, dann ist D insbesondere quadratfrei. Durch das Kronecker-Symbol (siehe [Sh2] S. 442) wird ein primitiver Charakter $\chi_D = \left(\frac{D}{\cdot}\right)$ modulo D definiert. Wie üblich setzen wir

$$
\Gamma_0(D) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1); \quad c \equiv 0 \pmod D\right\}
$$

und schreiben $M_2(D, \chi_D)$ für den Raum der Modulformen vom Gewicht 2 und Nebentypus χ_D bezüglich $\Gamma_0(D)$. Den Unterraum der Spitzenformen bezeichnen wir mit $S_2(D, \chi_D)$. Wir betrachten nun Eisensteinreihen aus $M_2(D, \chi_D)$.

Eine einfache Rechnung zeigt, daß für ganze Zahlen k, l, k', l' mit $(k,l) = (k',l') = 1$ die Elemente k/l und k'/l' aus $P^1(\mathbb{Q})$ genau dann $\Gamma_0(D)$-äquivalent sind, wenn $(l,D) = (l',D)$ ist. Also stehen die Spitzen von $\Gamma_0(D)$ in Bijektion zu den positiven Teilern von D.

Für $D_1 > 0$, $D_1 | D$ und $D_2 = D/D_1$ wählen wir $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $pD_1 + qD_2 = 1$ und setzen

$$
A_{D_1} = \begin{pmatrix} D_2 & -p \\ D_1 & q \end{pmatrix}.
$$

Es ist nun $\{A_{D_1}^{-1}\infty;\ D_1 > 0,\ D_1|D\}$ gerade die Menge der Spitzen von $\Gamma_0(D)$. Wir schreiben einfach D_1 für die Spitze $P = A_{D_1}^{-1}\infty$. Wie man leicht nachprüft, ist $w_{D_1} = D_2$ und ∞ durch D gegeben.

In dieser Situation kann man in der Fourierentwicklung der $E^{D_1}(z,s)$ die Exponentialsummen $H_c^{D_1}(0,n)$ wie in [Za1] S. 21 vereinfachen:

$$\begin{aligned} E^{D_1}(z,s) &= \delta_{D_1 D} y^s - \frac{\sqrt{\pi}}{y^{1+s}} \frac{\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(s+1)} \frac{s}{s+1} \sum_{\substack{c \geq 1 \\ (c,D)=D_1}} \frac{1}{c^{2+2s}} \left(\frac{c}{D_2}\right) \sum_{\substack{d(c) \\ (d,c)=1}} \left(\frac{-d}{D_1}\right) \\ &\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}-\{0\}} \sum_{\substack{c \geq 1 \\ (c,D)=D_1}} \frac{1}{c^{1+2s}} H_c^{D_1}(0,n) c_n(y,s) e(nx), \qquad (1.5) \\ H_c^{D_1}(m,n) &= \frac{1}{c} \left(\frac{c}{D_2}\right) \sum_{d(c)^*} \left(\frac{-d}{D_1}\right) e\left(\frac{nd + m\bar{D}_2 \bar{d}}{c}\right) \qquad (m,n \in \mathbb{Z}). \qquad (1.6) \end{aligned}$$

Die Summe in (1.6) läuft über alle d modulo c mit $(c,d) = 1$; und $\bar{D}_2$, $\bar{d}$ sind durch $\bar{D}_2 D_2 \equiv 1 \pmod{c}$ bzw. $\bar{d}d \equiv 1 \pmod{c}$ bestimmt.

Lemma 1.3. *Die Eisensteinreihe $E^{D_1}(z,s)$ besitzt eine holomorphe Fortsetzung in s auf $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma > -1/4\}$. Die Funktion $E^{D_1}(z) := E^{D_1}(z,0)$ ist eine Modulform vom Gewicht 2 bezüglich $\Gamma_0(D)$ mit Charakter χ_D. Ihre Fourierentwicklung in der Spitze ∞ lautet*

$$E^{D_1}(z) = \delta_{D_1 D} - 4\pi^2 \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{c \geq 1 \\ (c,D)=D_1}} \frac{1}{c} H^{D_1}(0,n) n e(nz).$$

Beweis. Es gilt

$$\sum_{\substack{c \geq 1 \\ (c,D)=D_1}} \frac{1}{c^s} \left(\frac{c}{D_2}\right) \sum_{\substack{d(c) \\ (d,c)=1}} \left(\frac{-d}{D_1}\right) = \delta_{D_1 1} \sum_{c \geq 1} \frac{1}{c^s} \left(\frac{c}{D}\right) \varphi(c),$$

wobei $\varphi(c)$ die Eulersche Phi-Funktion bezeichnet. Wegen $D \equiv 1 \pmod 4$ gilt für alle $c \in \mathbb{N}$ nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz $\left(\frac{c}{D}\right) = \chi_D(c)$. Durch Vergleich von Eulerprodukten zeigt man

$$\sum_{c \geq 1} \frac{1}{c^s} \left(\frac{c}{D}\right) \varphi(c) = \frac{L(s-1,\chi_D)}{L(s,\chi_D)}$$

mit der Dirichletreihe $L(s,\chi_D)$ zum Charakter χ_D. Folglich besitzt der konstante Term der Fourierentwicklung (1.5) eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$.

Bekanntlich existiert eine Konstante $C > 0$ mit $|H_c^{D_1}(0,n)| < C\sqrt{|n|/c}$ für alle $c \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ (siehe z.B. [Br] Lemma 3.2). Mit Lemma 1.1 ergibt sich, daß

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}-\{0\}} \sum_{\substack{c \geq 1 \\ (c,D)=D_1}} \frac{1}{c^{1+2s}} H_c^{D_1}(0,n) c_n(y,s) e(nx)$$

lokal gleichmäßig absolut für $\sigma > -1/4$ konvergiert. Man erhält die gewünschte holomorphe Fortsetzung von $E^{D_1}(z,s)$.

Die Fourierentwicklung von $E^{D_1}(z)$ ergibt sich nun aus

$$E^{D_1}(z,0) = \delta_{D_1 D} + \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \sum_{\substack{c\geq 1 \\ (c,D)=D_1}} \frac{1}{c} H_c^{D_1}(0,n) c_n(y,0) e(nx)$$

mit Lemma 1.1. Dies zeigt auch die Holomorphie in der Spitze ∞. Die Holomorphie in den übrigen Spitzen weist man analog nach. □

Später wird eine gewisse Linearkombination der $E^{D_1}(z)$ eine wichtige Rolle spielen. Diese wollen wir hier einführen.

Definition 1.4. *Sei $D > 0$ eine Fundamentaldiskriminante mit $D \equiv 1 \pmod 4$. Man setze*

$$E(z) = \sum_{\substack{D_1>0 \\ D_1 D_2 = D}} \frac{\overline{\psi}(D_2)}{D_2^2} E^{D_1}(z), \tag{1.7}$$

wobei für $D_1 D_2 = D$:

$$\psi(D_2) = \begin{cases} \left(\frac{D_1}{D_2}\right)\sqrt{D_2}, & \textit{falls } D_1 \equiv 1 \pmod 4, \\ -i\left(\frac{D_1}{D_2}\right)\sqrt{D_2}, & \textit{falls } D_1 \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{1.8}$$

Die Fourierentwicklung von $E(z)$ läßt sich mit Lemma 1.3 leicht berechnen.

Satz 1.5. *Die Eisensteinreihe $E(z)$ liegt in $M_2(D, \chi_D)$ und hat die Fourierentwicklung*

$$E(z) = 1 - \frac{4\pi^2}{D} \sum_{n\geq 1} \left[\sum_{b\geq 1} \frac{1}{b} H_b(0,-n) \right] ne(nz)$$

mit

$$H_b(0,n) = \sum_{\substack{D_1 D_2 = D \\ (b,D_2)=1}} \frac{\psi(D_2)}{D_2} H_{bD_1}^{D_1}(0,n).$$

1.2 Poincaréreihen vom Gewicht zwei

Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im vorherigen Abschnitt. Für die üblichen Besselfunktionen schreiben wir J_ν, I_ν, K_ν wie in [AbSt] (siehe auch Anhang A).

Sei $D > 0$ eine Fundamentaldiskriminante, $D \equiv 1 \pmod 4$, und r eine von Null verschiedene ganze Zahl. Wir betrachten wieder die Gruppe $\Gamma_0(D)$.

Sind D_1, D_2 natürliche Zahlen mit $D_1D_2 = D$, so definiert man die r-te Poincaréreihe vom Gewicht 2 mit Charakter χ_D in der Spitze D_1 durch

$$G_r^{D_1}(z) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{2} \sum_{\substack{A\in\Gamma_{D_1}\backslash A_{D_1}\Gamma_0(D) \\ A=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)}} \chi_D(A_{D_1}^{-1}A)e\left(\frac{r}{D_2}Az\right)\frac{1}{(cz+d)^2}\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}. \tag{1.9}$$

Im Falle $r > 0$ wird in [Za1] Appendix 1 gezeigt, daß $G_r^{D_1}(z)$ in $S_2(D, \chi_D)$ liegt. Ferner wird die Fourierentwicklung berechnet:

$$\begin{aligned} G_r^{D_1}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_{rn}^{D_1} e(nz), \\ g_{rn}^{D_1} &= \delta_{D_1 D}\delta_{rn} - 2\pi\sqrt{nD_2/r} \sum_{\substack{c\geq 1 \\ (c,D)=D_1}} H_c^{D_1}(r,n)J_1\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{nr/D_2}\right). \end{aligned}$$

Dabei ist $H_c^{D_1}(r,n)$ durch (1.6) definiert. Für $r < 0$ findet man auf die gleiche Weise

$$G_r^{D_1}(z) = \delta_{D_1 D}e(rz) - 2\pi \sum_{n\geq 1}\sqrt{nD_2/|r|} \sum_{\substack{c\geq 1 \\ (c,D)=D_1}} H_c^{D_1}(r,n)I_1\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{n|r|/D_2}\right)e(nz).$$

In Analogie zu (1.7) betrachten wir wieder geeignete Linearkombinationen der $G_r^{D_1}(z)$.

Definition 1.6. *Sei $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$ und $D > 0$ eine Fundamentaldiskriminante mit $D \equiv 1 \pmod 4$. Man setze*

$$P_r(z) = \sum_{\substack{0<D_2|r \\ D_1D_2=D}} \frac{\overline{\psi}(D_2)}{D_2^2} G_{r/D_2}^{D_1}(z), \tag{1.10}$$

wobei $\psi(D_2)$ durch (1.8) gegeben ist.

Man beachte, daß hier (im Unterschied zur Definition der $G_r(z)$ in [Za1] Gleichung (62)) $\overline{\psi}(D_2)$ auftritt. Benutzt man $\overline{\psi}(D_2) = \left(\frac{-1}{D_1}\right)\psi(D_2)$ und $H_c^{D_1}(-r,-n) = \left(\frac{-1}{D_1}\right)H_c^{D_1}(r,n)$, so findet man

Satz 1.7. *Für $r > 0$ liegt die Poincaréreihe $P_r(z)$ in $S_2(D,\chi_D)$ und hat eine Fourierentwicklung der Form*

$$\begin{aligned} P_r(z) &= \sum_{n\geq 1} p_r(n)e(nz) \quad \textit{mit} \\ p_r(n) &= \delta_{rn} - 2\pi\sqrt{n/r}\sum_{b\geq 1} H_b(-r,-n)J_1\left(\frac{4\pi}{bD}\sqrt{nr}\right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dabei ist $H_b(m,n)$ durch

$$H_b(m,n) = \sum_{\substack{D_1D_2=D \\ D_2|m \\ (b,D_2)=1}} \frac{\psi(D_2)}{D_2} H_{bD_1}^{D_1}(m/D_2, n) \tag{1.12}$$

definiert.

Im Falle $r < 0$ ist $P_r(z)$ zwar nicht aus $S_2(D,\chi_D)$, hat aber auch das Transformationsverhalten $P_r|_2\gamma = \chi_D(\gamma)P_r$ für alle $\gamma \in \Gamma_0(D)$ (mit dem üblichen Strichoperator $f|_k\gamma(z) = (cz+d)^{-k}f(\gamma z)$ für $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$). Die Fourierentwicklung von P_r hat dann die Gestalt

$$P_r(z) = e(rz) - 2\pi \sum_{n\geq 1} \sqrt{n/|r|} \sum_{b\geq 1} H_b(-r,-n) I_1\left(\frac{4\pi}{bD}\sqrt{n|r|}\right) e(nz). \tag{1.13}$$

Mit dem Petersson-Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{\Gamma_0(D)\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}\, dxdy \qquad (f, g \in S_2(D,\chi_D)) \tag{1.14}$$

wird $S_2(D,\chi_D)$ zu einem endlichdimensionalen Hilbertraum.

Ist $f \in S_2(D,\chi_D)$ und D_1 eine Spitze von $\Gamma_0(D)$, so hat f nach Definition in D_1 eine Fourierentwicklung der Form

$$(f|_2A_{D_1}^{-1})(z) = \sum_{n\geq 1} a_n^{D_1}(f) e(nz/D_2) \qquad (D_1D_2 = D). \tag{1.15}$$

Mit der Entfaltungsmethode zeigt man für $r \in \mathbb{N}$ (siehe etwa [Mi] Thm. 2.6.10)

$$\langle f, G_r^{D_1}\rangle = \frac{D_2^2}{4\pi r}\, a_r^{D_1}(f). \tag{1.16}$$

Damit können wir die folgenden beiden Lemmata beweisen.

Lemma 1.8. *Sei $f \in S_2(D,\chi_D)$ und $r \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen*

$$\langle f, P_r\rangle = \frac{1}{4\pi r} \sum_{\substack{D=D_1D_2 \\ D_2|r}} D_2\psi(D_2) a_{r/D_2}^{D_1}(f).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\langle f, P_r\rangle &= \sum_{\substack{D=D_1D_2 \\ D_2|r}} \left\langle f, \frac{\overline{\psi}(D_2)}{D_2^2} G_{r/D_2}^{D_1} \right\rangle \\
&= \sum_{\substack{D=D_1D_2 \\ D_2|r}} \frac{\psi(D_2)}{D_2^2} \langle f, G_{r/D_2}^{D_1}\rangle \\
&= \frac{1}{4\pi r} \sum_{\substack{D=D_1D_2 \\ D_2|r}} D_2\psi(D_2) a_{r/D_2}^{D_1}(f).
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 1.9. *Die Menge* $\mathcal{P} = \{G_r^D;\ r \in \mathbb{N}$ *mit* $(r, D) = 1\}$ *ist ein Erzeugendensystem für* $S_2(D, \chi_D)$.

Beweis. Wir haben $\mathcal{P}^\perp = \{0\}$ zu zeigen. Sei dazu $f = \sum_{n \geq 1} a_n^D(f) e(nz) \in \mathcal{P}^\perp$. Für $r \in \mathbb{N}$ mit $(r, D) = 1$ gilt dann

$$0 = \langle f, G_r^D \rangle = \frac{1}{4\pi r} a_r^D(f).$$

Also hat f in der Spitze ∞ eine Fourierentwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (n,D) > 1}} a_n^D(f) e(nz).$$

Nach einem bekannten Lemma aus der Neuformentheorie (siehe etwa [Mi] Thm. 4.6.8) folgt hiermit $f = 0$. $\square$

Kapitel 2

Poincaréreihen zu Heegnerdivisoren

Im folgenden sei K ein reell-quadratischer Zahlkörper über $\mathbb{Q}$ mit Diskriminante D. Aus technischen Gründen fordern wir weiter $D \equiv 1 \pmod 4$. Der Ring der ganzen Zahlen in K werde mit $\mathcal{O}$, und die Differente, d.h. das von $\sqrt{D}$ erzeugte Hauptideal, werde mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet. Wir schreiben $x \mapsto x'$ für die Konjugation in K, $\mathrm{N}(x) = xx'$ für die Norm und $\mathrm{tr}(x) = x + x'$ für die Spur eines Elements. Die Klassenzahl von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ bezeichnen wir mit $h(D)$. Ist $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eine Matrix mit Einträgen aus K, so setzen wir $M' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$.

Die Hilbertsche Modulgruppe $\Gamma_K = \mathrm{Sl}_2(\mathcal{O})$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ vermöge

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z_1, z_2) = \left(\frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \frac{a'z_2 + b'}{c'z_2 + d'} \right), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_K.$$

Der Quotient $X_K = (\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma_K$ ist ein komplexer Raum, der nicht kompakt ist, aber auf natürliche Weise durch die Hinzunahme von $h(D)$ Spitzen kompaktifiziert werden kann (siehe [Fr]).

Es sei m eine feste negative ganze Zahl. Dann ist die Menge

$$\begin{aligned} H(m) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}; \quad & \exists (a, b, \lambda) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathfrak{d}^{-1} \text{ mit } \mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D \\ & \text{und } az_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b = 0\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

entweder leer oder eine abgeschlossene analytische Teilmenge von $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ der komplexen Kodimension 1. Wir nennen sie *Heegnerdivisor* der Diskriminante m (auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$). Im Zusammenhang mit Modulformen wurden die $H(m)$ zum ersten Mal von Hirzebruch und Zagier in [HZ] untersucht.

Der Fall $H(m) = \emptyset$ tritt auf, wenn $-4m$ kein Quadrat modulo D ist. Dann hat die Gleichung $\mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D$ keine Lösung in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathfrak{d}^{-1}$.

Unser erstes Ziel in diesem Kapitel ist es, dem Heegnerdivisor $H(m)$ eine reell analytische Γ_K-invariante Funktion

$$\Phi_m(z_1, z_2) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} - H(m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

zuzuordnen, welche eine logarithmische Singularität entlang von $H(m)$ aufweist. Wir wollen $\Phi_m(z_1, z_2)$ als Poincaréreihe in der Form

$$\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z} \\ \lambda\in\mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda)-ab=m/D}} \log\left(\frac{|az_1\bar{z}_2+\lambda z_1+\lambda'\bar{z}_2+b|^2}{|az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b|^2}\right)$$

konstruieren. Diese Reihe divergiert jedoch; wir regularisieren sie in der folgenden Weise.

Definition 2.1. *Sei m eine negative ganze Zahl. Wir ordnen dem Heegnerdivisor $H(m)$ die Poincaréreihe*

$$\Phi_m(z_1, z_2, s) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z} \\ \lambda\in\mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda)-ab=m/D}} \varphi_s\left(\frac{4|m|y_1y_2/D}{|az_1\bar{z}_2+\lambda z_1+\lambda'\bar{z}_2+b|^2}\right) \tag{2.2}$$

zu[1]*. Dabei bezeichnet*

$$\varphi_s(z) = z^s\frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)}\cdot F(s,s,2s;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+s)^2}{\Gamma(k+2s)k!}z^{k+s}, \tag{2.3}$$

$F(a,b,c;z)$ die Gaußsche hypergeometrische Funktion und $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$.

Man beachte, daß für $(a, b, \lambda) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathfrak{d}^{-1}$ mit $\mathrm{N}(\lambda)-ab = m/D$ die Beziehung

$$|az_1\bar{z}_2+\lambda z_1+\lambda'\bar{z}_2+b|^2 = 4|m|y_1y_2/D + |az_1z_2+\lambda z_1+\lambda'z_2+b|^2 \tag{2.4}$$

besteht. Aus der Potenzreihenentwicklung (2.3) folgt offenbar $\varphi_1(z) = -\log(1-z)$. Setzt man in (2.2) formal $s = 1$, so erhält man die oben angegebene divergente Reihe.

In Abschnitt 2.1 werden wir zeigen, daß $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ lokal gleichmäßig absolut konvergiert für $(z_1, z_2) \in \mathbb{H}\times\mathbb{H} - H(m)$ und $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 1$.

Damit folgt dann insbesondere, daß $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ invariant unter Γ_K ist. Denn für $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_K$ und $(a, b, \lambda) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathfrak{d}^{-1}$ gilt

$$a\left(\frac{\alpha z_1+\beta}{\gamma z_1+\delta}\right)\left(\frac{\alpha'\bar{z}_2+\beta'}{\gamma'\bar{z}_2+\delta'}\right)+\lambda\left(\frac{\alpha z_1+\beta}{\gamma z_1+\delta}\right)+\lambda'\left(\frac{\alpha'\bar{z}_2+\beta'}{\gamma'\bar{z}_2+\delta'}\right)+b = \frac{\tilde{a}z_1\bar{z}_2+\tilde{\lambda}z_1+\tilde{\lambda}'\bar{z}_2+\tilde{b}}{(\gamma z_1+\delta)(\gamma'\bar{z}_2+\delta')}$$

mit eindeutig bestimmten $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\lambda}) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathfrak{d}^{-1}$ und $\mathrm{N}(\tilde{\lambda}) - \tilde{a}\tilde{b} = \mathrm{N}(\lambda) - ab$.

In Abschnitt 2.2 werden wir die Fourierentwicklung von $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ explizit berechnen und zeigen: Für jedes $(z_1, z_2) \in \mathbb{H}\times\mathbb{H} - H(m)$ besitzt $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ eine meromorphe Fortsetzung in s auf $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma > 3/4\}$. Bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$ ist $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ sogar holomorph in s. Definiert man die regularisierte Poincaréreihe $\Phi_m(z_1, z_2)$ als konstanten Term der Laurententwicklung von $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ bei $s = 1$, so ist dies eine Γ_K-invariante

[1] Falls es kein $(a, b, \lambda) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathfrak{d}^{-1}$ mit $\mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D$ gibt, setzen wir $\Phi_m(z_1, z_2, s) = 0$.

reell analytische Funktion auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H} - H(m)$. Entlang von $H(m)$ besitzt $\Phi_m(z_1, z_2)$ eine logarithmische Singularität.

Man kann $\Phi_m(z_1, z_2)$ als Summe zweier Funktionen $\psi_m(z_1, z_2) + \xi_m(z_1, z_2)$ schreiben, wobei $-\psi_m/4$ der Logarithmus vom Betrag einer holomorphen auf $H(m)$ verschwindenden Funktion ist, und ξ_m auf ganz $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ reell analytisch. Das singuläre Verhalten von $\Phi_m(z_1, z_2)$ wird somit vollständig durch $\psi_m(z_1, z_2)$ reguliert.

Anhand der Fourierentwicklungen wird eine enge Verbindung zu den Poincaréreihen $P_r(z)$ und der Eisensteinreihe $E(z)$ sichtbar.

Am Ende des Kapitels geben wir einen neuen Beweis für einen Satz von Borcherds (Theorem 13.3 [Bo2]) im Spezialfall der Hilbertschen Modulgruppe Γ_K an.

2.1 Die Konvergenz von $\Phi_m(z_1, z_2, s)$

Für die folgende Konvergenzuntersuchung benötigen wir zwei Lemmata.

Lemma 2.2. *Sei m eine negative ganze Zahl, $K \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ kompakt und $C \geq 0$. Dann ist die Menge*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{K,m,C} = \{(a, b, \lambda) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathfrak{d}^{-1}; \quad & \mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D, \\ & |az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b| \leq C \text{ für ein } (z_1, z_2) \in K\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

endlich.

Beweis. Zur Abkürzung bezeichne $A = |m|/D$. Sei $(a, b, \lambda) \in \mathcal{M}_{K,m,C}$ und $(z_1, z_2) \in K$ mit $|az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b| \leq C$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| z_1 + \frac{\lambda' z_2 + b}{a z_2 + \lambda} \right| &\leq \frac{C}{|az_2 + \lambda|}, \\ y_1 - \frac{A y_2}{|az_2 + \lambda|^2} &\leq \frac{C}{|az_2 + \lambda|}. \end{aligned}$$

Falls $a \neq 0$ ist, können wir weiter abschätzen

$$y_1 \leq \frac{A}{a^2 y_2} + \frac{C}{|a| y_2} \leq \frac{A + C}{|a| y_2}$$

und erhalten

$$|a| \leq \frac{A + C}{y_1 y_2}.$$

Wendet man das gleiche Argument auf die Ungleichung

$$\left| -\frac{b}{z_2} - \lambda' \right| \cdot \left| -\frac{1}{z_1} - \begin{pmatrix} \lambda & -a \\ b & -\lambda' \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{z_2} \right) \right| \leq \frac{C}{|z_1 z_2|}$$

an, so erhält man die Abschätzung

$$|b| \leq \frac{A|z_1 z_2|^2 + C|z_1 z_2|}{y_1 y_2}.$$

Folglich ist die Menge

$$\{(a, b, \mathrm{N}(\lambda)); \quad (a, b, \lambda) \in \mathcal{M}_{K,m,C}\}$$

endlich.

Sei $\varepsilon_0 \in \mathcal{O}$ eine Fundamentaleinheit. Nach dem Dirichletschen Einheitensatz genügt es nun zu zeigen, daß es für jedes feste $(a, b, \lambda) \in \mathcal{M}_{K,m,C}$ nur endlich viele $n \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß auch $(a, b, \varepsilon_0^n \lambda)$ in $\mathcal{M}_{K,m,C}$ liegt. Dies sieht man leicht ein. □

Lemma 2.3. *Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß*

$$|w + z| \geq \delta |w + i|$$

für alle

$$z \in D_\varepsilon := \{z = x + iy \in \mathbb{H}; \quad y \geq \varepsilon, \ |x| \leq 1/\varepsilon\}$$

und $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $v \geq 0$.

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir $\varepsilon < 1$ an. Man setze $a = (1 + v)^{-1/2}$, $w' = a^2 u$ und $z' = a^2(z + iv)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z \in D_\varepsilon &\implies z' \in D_\varepsilon, \\ |w' + z'| \geq \delta |w' + i| &\implies |w + z| \geq \delta |w + i|, \end{aligned}$$

folglich können wir auch ohne Einschränkung $w = u \in \mathbb{R}$ annehmen. Es ist

$$|u + z| \geq \delta |u + i| \iff (1 - \delta^2)u^2 + 2xu + x^2 + y^2 - \delta^2 \geq 0,$$

also genügt es zu zeigen, daß ein $1 > \delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft: *Die Diskriminante $d(Q_\delta(z))$ der quadratischen Form*

$$Q_\delta(z) = [1 - \delta^2, \ 2x, \ x^2 + y^2 - \delta^2]$$

ist für alle $z \in D_\varepsilon$ negativ.

Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$\begin{aligned} d(Q_\delta(z)) &= 4x^2 - 4(1 - \delta^2)(x^2 + y^2 - \delta^2) \\ &\leq 4(\delta^2/\varepsilon^2 + \delta^2 - \delta^4 - (1 - \delta^2)\varepsilon^2) =: f_\varepsilon(\delta). \end{aligned}$$

Da $f_\varepsilon(\delta)$ stetig von δ abhängt und da $f_\varepsilon(0) = -4\varepsilon^2$, folgt hiermit die Behauptung. □

Satz 2.4. *Sei $K \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H} - H(m)$ kompakt und $K' \subset \{s \in \mathbb{C};\ \sigma > 1\}$ kompakt. Dann konvergiert $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ gleichmäßig absolut auf $K \times K'$.*

Beweis. Nach Lemma 2.2 existiert

$$\min\{|az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^2; \quad (z_1, z_2) \in K,\ (a, b, \lambda) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathfrak{d}^{-1},\ \mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D\}$$

(und ist > 0 wegen $K \cap H(m) = \emptyset$). Aufgrund von (2.4) gibt es damit ein $\rho < 1$, so daß

$$\frac{4|m|y_1y_2/D}{|az_1\bar{z}_2 + \lambda z_1 + \lambda'\bar{z}_2 + b|^2} \leq \rho$$

für alle $(z_1, z_2) \in K$, $(a, b, \lambda) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathfrak{d}^{-1}$ mit $\mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D$. Die hypergeometrische Funktion $F(s, s, 2s; z)$, welche in der Definition von $\varphi_s(z)$ auftritt, ist für $|z| \leq \rho$, $s \in K'$ beschränkt. Also wird $\Phi_m(z_1, z_2, s)$ (bis auf eine Konstante) durch die Reihe

$$\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z} \\ \lambda\in\mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda)-ab=m/D}} \frac{1}{|az_1\bar{z}_2 + \lambda z_1 + \lambda'\bar{z}_2 + b|^{2\sigma}} \tag{2.6}$$

majorisiert. Um die Konvergenz von (2.6) zu zeigen, benötigen wir folgende

Bemerkung. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|az_1\bar{z}_2 + \lambda z_1 + \lambda'\bar{z}_2 + b| \geq \delta|a + \lambda i - \lambda' i + b|$$

für alle $z_1, z_2 \in D_\varepsilon$, $(a, b, \lambda) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathfrak{d}^{-1}$ mit $\mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D$.

Beweis der Bemerkung. Nach Lemma 2.3 gibt es ein $\delta > 0$, so daß gilt:

$$\begin{aligned}
|az_1\bar{z}_2 + \lambda z_1 + \lambda'\bar{z}_2 + b| &= |a\bar{z}_2 + \lambda| \cdot \left| z_1 + \frac{\lambda'\bar{z}_2 + b}{a\bar{z}_2 + \lambda} \right| \\
&\geq \delta|a\bar{z}_2 + \lambda| \cdot \left| i + \frac{\lambda'\bar{z}_2 + b}{a\bar{z}_2 + \lambda} \right| \\
&= \delta|a(-i) + \lambda'| \cdot \left| z_2 + \frac{\lambda(-i) + b}{a(-i) + \lambda'} \right| \\
&\geq \delta^2|a + \lambda i - \lambda' i + b|.
\end{aligned}$$

□

Aufgrund der Bemerkung genügt es nun, die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z} \\ \lambda\in\mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda)-ab=m/D}} \frac{1}{|a + \lambda i - \lambda' i + b|^{2\sigma}} \tag{2.7}$$

für $\sigma > 1$ nachzuweisen. Wegen

$$\mathfrak{d}^{-1} \subset \left\{ \frac{l\sqrt{D}+k}{2\sqrt{D}}; \quad (l,k) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

gilt (nach Substitution $a+b=c$, $a-b=d$, $\lambda = \frac{l\sqrt{D}+k}{2\sqrt{D}}$):

$$\begin{aligned}(2.7) \ll & \sum_{\substack{c,d,l,k\in\mathbb{Z}\\ l^2+d^2=\frac{4m+k^2}{D}+c^2}} \frac{1}{|c+ik/\sqrt{D}|^{2\sigma}} \\ &= \sum_{c,k\in\mathbb{Z}} r_2\left(\tfrac{4m+k^2}{D}+c^2\right)\frac{1}{(c^2+k^2/D)^{\sigma}}.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet

$$r_2(n) = \#\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2; \quad a^2+b^2=n\}$$

die Anzahl der Darstellungen von $n \in \mathbb{Q}$ als Summe von zwei Quadraten. Bekanntlich gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$r_2(n) = O(n^{\varepsilon}), \quad n \to \infty.$$

Man erhält

$$(2.7) \ll \sum_{c,k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c^2+k^2/D)^{\sigma-\varepsilon}},$$

und die letzte Summe konvergiert für $\sigma - \varepsilon > 1$. Dies impliziert die Behauptung. □

2.2 Fourierentwicklung und meromorphe Fortsetzung

Es sei $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 1$ und $(z_1, z_2) \in \mathbb{H}\times\mathbb{H} - H(m)$. Wir schreiben $\Phi_m(z_1,z_2,s)$ in der Form

$$\Phi_m(z_1,z_2,s) = \Phi_m^0(z_1,z_2,s) + 2\sum_{a=1}^{\infty}\Phi_m^a(z_1,z_2,s) \tag{2.8}$$

mit

$$\Phi_m^a(z_1,z_2,s) = \sum_{\substack{b\in\mathbb{Z}\\ \lambda\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \mathrm{N}(\lambda)-ab=m/D}} \varphi_s\left(\frac{4|m|y_1y_2/D}{|az_1\bar{z}_2+\lambda z_1+\lambda'\bar{z}_2+b|^2}\right). \tag{2.9}$$

Man beachte, daß die Teilsummen $\Phi_m^a(z_1, z_2, s)$ für $\sigma > 1/2$ lokal gleichmäßig absolut konvergieren.

Bei der Berechnung der Fourierentwicklung unterscheiden wir die Fälle $a = 0$ und $a > 0$. Im letztgenannten Fall ist es sinnvoll, die $\Phi_m^a(z_1, z_2, s)$ analog zu [Za1] §2 umzuformen:

$$\Phi_m^a(z_1, z_2, s) = \sum_{\lambda \in R} \sum_{\theta \in \mathcal{O}} \varphi_s \left(\frac{4Ay_1y_2/a^2}{|(z_1 + \theta + \lambda'/a)(\bar{z}_2 + \theta' + \lambda/a) + A/a^2|^2} \right).$$

Dabei haben wir zur Abkürzung $A = |m|/D$ gesetzt. Ferner bezeichnet R ein Repräsentantensystem für

$$\{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1}/a\mathcal{O}; \quad \mathrm{N}(\lambda\sqrt{D}) \equiv -m \pmod{aD}\}.$$

Man definiere eine Hilfsfunktion durch

$$H_s^A(z_1, z_2) = \sum_{\theta \in \mathcal{O}} \varphi_s \left(\frac{4Ay_1y_2}{|(z_1 + \theta)(\bar{z}_2 + \theta') + A|^2} \right) \tag{2.10}$$

und schreibe ihre Fourierentwicklung in der Form

$$H_s^A(z_1, z_2) = \sum_{\nu \in \mathfrak{d}^{-1}} b_s^A(\nu, y_1, y_2) e(\nu x_1 + \nu' x_2), \quad y_1y_2 > A.$$

Dann ist insbesondere

$$\Phi_m^a(z_1, z_2, s) = \sum_{\nu \in \mathfrak{d}^{-1}} G_a(m, \nu) b_s^{A/a^2}(\nu, y_1, y_2) e(\nu z_1 + \nu' z_2)$$

mit der endlichen Exponentialsumme

$$G_a(m, \nu) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1}/a\mathcal{O} \\ \mathrm{N}(\lambda) \equiv m/D \quad (a\mathbb{Z})}} e\left(\frac{\mathrm{tr}(\nu\lambda)}{a} \right), \tag{2.11}$$

und somit erhalten wir

$$\Phi_m(z_1, z_2, s) = \Phi_m^0(z_1, z_2, s) + 2 \sum_{\nu \in \mathfrak{d}^{-1}} \left[\sum_{a=1}^{\infty} G_a(m, \nu) b_s^{A/a^2}(\nu, y_1, y_2) \right] e(\nu x_1 + \nu' x_2). \tag{2.12}$$

Im folgenden werden wir zunächst die Fourierentwicklungen der Reihen $\Phi_m^0(z_1, z_2, s)$ und $H_s^A(z_1, z_2)$ berechnen und die meromorphe Fortsetzbarkeit von (2.12) nachweisen. Damit können wir dann die regularisierte Poincaréreihe $\Phi_m(z_1, z_2)$ einführen und auch ihre Fourierentwicklung bestimmen.

2.2.1 Die Fourierentwicklung von $\Phi_m^0(z_1, z_2, s)$

Für eine negative ganze Zahl m setzen wir

$$S(m) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}; \quad \exists \lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \text{ mit } \mathrm{N}(\lambda) = m/D \text{ und } \lambda y_1 + \lambda' y_2 = 0\}. \qquad (2.13)$$

Offenbar zerfällt $\mathbb{H}\times\mathbb{H}-S(m)$ in abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. (Vergleiche dies mit den Weylkammern des Gitters $\mathcal{O}$ in der Terminologie von Borcherds [Bo2].)

Für die Definition der üblichen Besselfunktionen J_ν, I_ν, K_ν und der Legendrefunktion Q_ν verweisen wir auf Anhang A und [AbSt, B1]. Sind r_1 und r_2 reelle Zahlen, so verwenden wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \alpha(r_1, r_2) &:= \max(|r_1|, |r_2|), \\ \beta(r_1, r_2) &:= \min(|r_1|, |r_2|). \end{aligned}$$

Lemma 2.5. *Es sei $(z_1, z_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} - H(m)$. Dann konvergiert*

$$\Phi_m^0(z_1, z_2, s) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) = m/D}} \sum_{b \in \mathbb{Z}} \varphi_s \left(\frac{4|m| y_1 y_2 / D}{|\lambda z_1 + \lambda' \bar{z}_2 + b|^2} \right)$$

lokal gleichmäßig absolut für $\sigma > 1/2$. Weiterhin besitzt $\Phi_m^0(z_1, z_2, s)$ auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H} - S(m)$ eine Fourierentwicklung der Form

$$\begin{aligned} \Phi_m^0(z_1, z_2, s) = \frac{4\pi}{(2s-1)} &\sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) = m/D}} \alpha(\lambda y_1, \lambda' y_2)^{1-s} \beta(\lambda y_1, \lambda' y_2)^s \\ &+ 8\pi \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) = m/D}} \sum_{n \geq 1} |\lambda \lambda' y_1 y_2|^{1/2} I_{s-1/2}(2\pi n \beta(\lambda y_1, \lambda' y_2)) \\ &\qquad \times K_{s-1/2}(2\pi n \alpha(\lambda y_1, \lambda' y_2)) e(n\lambda x_1 + n\lambda' x_2). \qquad (2.14) \end{aligned}$$

Beweis. Um die Konvergenzaussage zu erhalten, genügt es zu zeigen, daß

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) = m/D}} \sum_{b \in \mathbb{Z}} |i\lambda - i\lambda' + b|^{-2\sigma}$$

für $\sigma > 1/2$ konvergiert. (Dies überlegt man sich wie in Abschnitt 2.1.)

Es sei $\mathcal{O}_+^*$ die Gruppe der Einheiten $\varepsilon \in \mathcal{O}$ mit $\varepsilon > 0$ und $\mathrm{N}(\varepsilon) = 1$. Nach dem Dirichletschen Einheitensatz existiert ein $\varepsilon_0 > 1$ in $\mathcal{O}_+^*$, so daß $\mathcal{O}_+^* = \{\varepsilon_0^n;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Da es bis auf Assoziierte nur endlich viele $\lambda \in \mathfrak{d}^{-1}$ mit vorgegebener Norm gibt, reicht es wiederum zu zeigen, daß für ein festes $\lambda \in \mathfrak{d}^{-1}$ mit $\mathrm{N}(\lambda) = m/D$ die Summe

$$S = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z}}} |i\lambda \varepsilon_0^n - i\lambda' \varepsilon_0'^n + b|^{-2\sigma}$$

konvergiert. Es gilt

$$
\begin{aligned}
S &\ll \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ b\in\mathbb{Z}}} \left((\lambda\varepsilon_0^n - \lambda'\varepsilon_0'^n)^2 + b^2\right)^{-\sigma} \\
&\ll \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda\varepsilon_0^n - \lambda'\varepsilon_0'^n|^{1-2\sigma} \\
&\ll \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda\varepsilon_0^n|^{1-2s} + \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda'\varepsilon_0^n|^{1-2\sigma}. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir die Summe über b durch Vergleich mit dem uneigentlichen Integral

$$
\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+d^2)^s} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} d^{1-2s} \qquad (d>0)
$$

abgeschätzt. Die Konvergenz des letzten Ausdrucks (2.15) erhält man durch Vergleich mit der geometrischen Reihe.

Man benutze nun die Identität (siehe (A.10))

$$
\varphi_s(z) = z^s \frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} \cdot F(s,s,2s;z) = 2Q_{s-1}\left(\frac{2}{z}-1\right),
$$

um

$$
\Phi_m^0(z_1,z_2,s) = 2 \sum_{\substack{\lambda\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \mathrm{N}(\lambda)=m/D}} \sum_{b\in\mathbb{Z}} Q_{s-1}\left(\frac{(\lambda x_1+\lambda' x_2+b)^2+\lambda^2 y_1^2+\lambda'^2 y_2^2}{2|\lambda\lambda'|y_1y_2}\right)
$$

zu erhalten. Für $\alpha>\beta>0$, $\sigma>1/2$ und $x\in\mathbb{R}$ betrachte man die Hilfsfunktion

$$
h_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{b\in\mathbb{Z}} Q_{s-1}\left(\frac{(x+b)^2+\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\right).
$$

Diese ist 1-periodisch und hat eine Fourierentwicklung der Form

$$
h_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{\alpha,\beta}(n)e(nx), \quad \text{wobei} \quad a_{\alpha,\beta}(n) = \int_0^1 h_{\alpha,\beta}(x)e(-nx)\,dx.
$$

Mit Poisson-Summation sieht man

$$
a_{\alpha,\beta}(n) = \int_{-\infty}^\infty Q_{s-1}\left(\frac{x^2+\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\right) e(-nx)\,dx. \qquad (2.16)
$$

Sei zunächst $n \neq 0$. Nach [B2] S. 49 (47) gilt für $y > 0$:

$$\int_0^\infty K_\nu(\alpha x) I_\nu(\beta x) \cos(xy)\, dx = \frac{1}{2}(\alpha\beta)^{-1/2} Q_{\nu-1/2}\left(\frac{y^2+\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\right).$$

Mit Hilfe der Umkehrformel kann man das Fourierintegral (2.16) auswerten:

$$\int_0^\infty Q_{\nu-1/2}\left(\frac{x^2+\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\right)\cos(xy)\, dx = \pi\sqrt{\alpha\beta} K_\nu(\alpha y) I_\nu(\beta y),$$

$$a_{\alpha,\beta}(n) = \int_{-\infty}^\infty Q_{s-1}\left(\frac{x^2+\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\right) e(-nx)\, dx = 2\pi\sqrt{\alpha\beta} K_{s-1/2}(2\pi|n|\alpha) I_{s-1/2}(2\pi|n|\beta). \tag{2.17}$$

Bei der Berechnung von $a_{\alpha,\beta}(0)$ nutzt man aus, daß das Integral auf der rechten Seite von (2.16) sogar gleichmäßig in $n \in \mathbb{R}$ konvergiert und damit stetig von n abhängt. Also hat man

$$a_{\alpha,\beta}(0) = \lim_{n\to 0}(a_{\alpha,\beta}(n)),$$

mit (A.3) und (A.4) ergibt sich

$$a_{\alpha,\beta}(0) = \frac{2\pi}{2s-1}\alpha^{1-s}\beta^s.$$

Die Fourierentwicklung von $h_{\alpha,\beta}(x)$ lautet

$$h_{\alpha,\beta}(x) = \frac{2\pi}{2s-1}\alpha^{1-s}\beta^s + 2\pi\sqrt{\alpha\beta}\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} I_{s-1/2}(2\pi|n|\beta) K_{s-1/2}(2\pi|n|\alpha) e(nx).$$

Wegen

$$\Phi_m^0(z_1, z_2, s) = 2\sum_{\substack{\lambda\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \mathrm{N}(\lambda)=m/D}} h_{\alpha(\lambda y_1,\lambda' y_2),\beta(\lambda y_1,\lambda' y_2)}(\lambda x_1 + \lambda' x_2)$$

folgt hiermit (2.14), wenn man noch zeigt, daß die Summe auf der rechten Seite von (2.14) absolut konvergiert. Dies zeigen wir nur für den ersten Term, den zweiten behandelt man analog.

Offenbar genügt es wieder für jedes feste $\lambda \in \mathfrak{d}^{-1}$ mit $\lambda > 0$ und $\mathrm{N}(\lambda) = m/D$ nachzuweisen, daß

$$S(y_1, y_2) = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{O}_+^*} \alpha(\lambda\varepsilon y_1, \lambda'\varepsilon' y_2)^{1-s} \beta(\lambda\varepsilon y_1, \lambda'\varepsilon' y_2)^s$$

absolut konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned} S(y_1,y_2) &= \sum_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{O}_+^* \\ \lambda\varepsilon y_1<-\lambda'\varepsilon' y_2}} (\lambda\varepsilon y_1)^s(-\lambda'\varepsilon' y_2)^{1-s} - \sum_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{O}_+^* \\ \lambda\varepsilon y_1>-\lambda'\varepsilon' y_2}} (\lambda\varepsilon y_1)^{1-s}(-\lambda'\varepsilon' y_2)^{s} \\ &= (\lambda y_1)^s(-\lambda' y_2)^{1-s} \sum_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{O}_+^* \\ \varepsilon^2\lambda^2 D y_1<|m|y_2}} \varepsilon^{2s-1} - (\lambda y_1)^{1-s}(-\lambda' y_2)^{s} \sum_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{O}_+^* \\ \varepsilon^2\lambda^2 D y_1>|m|y_2}} \varepsilon^{1-2s}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun wieder aus $\mathcal{O}_+^* = \{\varepsilon_0^n;\ n\in\mathbb{Z}\}$ durch Vergleich mit der geometrischen Reihe. ☐

2.2.2 Die Fourierentwicklung von $H_s^A(z_1,z_2)$

Lemma 2.6. *Sei $A>0$. Die durch (2.10) definierte Hilfsfunktion $H_s^A(z_1,z_2)$ konvergiert für $\sigma>1/2$ lokal gleichmäßig absolut und besitzt für $y_1y_2>A$ eine Fourierentwicklung der Form*

$$H_s^A(z_1,z_2) = \sum_{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}} b_s^A(\nu,y_1,y_2)e(\nu x_1+\nu' x_2)$$

mit

$$\begin{aligned} b_s^A(0,y_1,y_2) &= \frac{\pi\Gamma(s-1/2)^2}{\sqrt{D}\,\Gamma(2s)}(4A)^s(y_1y_2)^{1-s}, \\ b_s^A(\nu,y_1,y_2) &= 8\pi\sqrt{\frac{Ay_1y_2}{D}}\,I_{2s-1}(4\pi\sqrt{A|\nu\nu'|})K_{s-1/2}(2\pi|\nu|y_1)K_{s-1/2}(2\pi|\nu'|y_2), \quad \nu\nu'>0, \\ b_s^A(\nu,y_1,y_2) &= 8\pi\sqrt{\frac{Ay_1y_2}{D}}\,J_{2s-1}(4\pi\sqrt{A|\nu\nu'|})K_{s-1/2}(2\pi|\nu|y_1)K_{s-1/2}(2\pi|\nu'|y_2), \quad \nu\nu'<0. \end{aligned}$$

Beweis. Die Konvergenzaussage prüft man leicht nach. Mit Poisson-Summation ist

$$b_s^A(\nu,y_1,y_2) = \frac{1}{\sqrt{D}} \int\limits_{x_2=-\infty}^{\infty}\int\limits_{x_1=-\infty}^{\infty} \varphi_s\left(\frac{4Ay_1y_2}{|z_1\bar{z}_2+A|^2}\right) e(-\nu x_1-\nu' x_2)\,dx_1dx_2. \tag{2.18}$$

Es gilt

$$|z_1\bar{z}_2+A|^2 = |z_2|^2\left(\left(x_1+\frac{Ax_2}{|z_2|^2}\right)^2+\left(y_1+\frac{Ay_2}{|z_2|^2}\right)^2\right),$$

damit erhält man nach Substitution $x_1\mapsto x_1-Ax_2/|z_2|^2$:

$$\begin{aligned} b_s^A(\nu,y_1,y_2) = \frac{1}{\sqrt{D}} \int\limits_{x_2=-\infty}^{\infty} & e(\nu Ax_2/|z_2|^2)e(-\nu' x_2) \\ & \times \int\limits_{x_1=-\infty}^{\infty} \varphi_s\left(\frac{4Ay_1y_2/|z_2|^2}{x_1^2+(y_1+Ay_2/|z_2|^2)^2}\right) e(-\nu x_1)\,dx_1dx_2. \end{aligned}$$

Mit der Identität

$$\varphi_s(z) = 2Q_{s-1}\left(\frac{2}{z} - 1\right)$$

(A.10) ergibt sich

$$b_s^A(\nu, y_1, y_2) = \frac{2}{\sqrt{D}} \int\limits_{x_2=-\infty}^{\infty} e(\nu A x_2/|z_2|^2) e(-\nu' x_2) \\ \times \int\limits_{x_1=-\infty}^{\infty} Q_{s-1}\left(\frac{x_1^2 + y_1^2 + (Ay_2/|z_2|^2)^2}{2Ay_1y_2/|z_2|^2}\right) e(-\nu x_1)\, dx_1 dx_2.$$

Sei zunächst $\nu \neq 0$. Aus der Voraussetzung $y_1 y_2 > A$ folgt $y_1 > Ay_2/|z_2|^2$. Somit können wir wieder die für $\alpha > \beta > 0$ gültige Formel

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_{s-1}\left(\frac{x^2+\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\right) e(-nx)\, dx = 2\pi\sqrt{\alpha\beta} K_{s-1/2}(2\pi|n|\alpha) I_{s-1/2}(2\pi|n|\beta)$$

(siehe (2.17)) verwenden und das innere Integral auswerten. Damit erhält man

$$b_s^A(\nu, y_1, y_2) = 4\pi\sqrt{\frac{Ay_1y_2}{D}} K_{s-1/2}(2\pi|\nu|y_1) \\ \times \int\limits_{x_2=-\infty}^{\infty} e\left(x_2\left(-\nu' + \frac{\nu A}{x_2^2+y_2^2}\right)\right)\left(\frac{1}{x_2^2+y_2^2}\right)^{1/2} I_{s-1/2}\left(\frac{2\pi|\nu|Ay_2}{x_2^2+y_2^2}\right) dx_2.$$

Das letzte Integral I können wir nach Substitution $u = -2\pi\nu' x_2$, $y' = 2\pi|\nu'|y_2$ in der Form

$$I = (4\pi^2|\nu\nu'|Ay')^{-1/2} \int\limits_{u=-\infty}^{\infty} \exp\left(iu\left(1 - \frac{4\pi^2\nu\nu' A}{u^2+y'^2}\right)\right) \\ \times \left(\frac{4\pi^2|\nu\nu'|y'A}{u^2+y'^2}\right)^{1/2} I_{s-1/2}\left(\frac{4\pi^2|\nu\nu'|Ay'}{u^2+y'^2}\right) du$$

schreiben. Setzt man noch $\alpha = 4\pi^2|\nu\nu'|A$ und $\varepsilon = -\frac{\nu\nu'}{|\nu\nu'|}$, so findet man

$$I = (\alpha y')^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iu\left(1 + \frac{\varepsilon\alpha}{u^2+y'^2}\right)\right)\left(\frac{\alpha y'}{u^2+y'^2}\right)^{1/2} I_{s-1/2}\left(\frac{\alpha y'}{u^2+y'^2}\right) du \\ = (\alpha y')^{-1/2} I'(y', \alpha, \varepsilon),$$

wobei $I'(y', \alpha, \varepsilon)$ das letzte Integral bezeichnet. Niebur hat $I'(y', \alpha, \varepsilon)$ in [Ni] berechnet (in der dortigen Terminologie ist $I'(y', \alpha, \varepsilon) = G_1(y', \alpha)$). Es gilt

$$I'(y', \alpha, \varepsilon) = 2\sqrt{\alpha y'}\, K_{s-1/2}(y') \cdot \begin{cases} I_{2s-1}(2\sqrt{\alpha}), & \text{falls } \varepsilon < 0, \\ J_{2s-1}(2\sqrt{\alpha}), & \text{falls } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

(Man beachte, daß in [Ni] der Faktor 2 fehlt. Weiter ist in der Formulierung von Theorem 1 [Ni] der Ausdruck $K_{s-1/2}(2\pi|n|y)$ durch $K_{s-1/2}(2\pi|m|y)$ und $M_{2s-1}(4\pi(mn)^{1/2}c)$ durch $M_{2s-1}(4\pi(mn)^{1/2}/c)$ zu ersetzen.) Man erhält

$$I = 2K_{s-1/2}(2\pi|\nu'|y_2) \cdot \begin{cases} I_{2s-1}(4\pi\sqrt{A|\nu\nu'|}), & \text{falls } \nu\nu' > 0, \\ J_{2s-1}(4\pi\sqrt{A|\nu\nu'|}), & \text{falls } \nu\nu' < 0. \end{cases}$$

Dies beweist die Behauptung im Falle $\nu \neq 0$.

Um $b_s^A(0, y_1, y_2)$ zu bestimmen, nutzen wir aus, daß das Integral auf der rechten Seite von (2.18) stetig von ν abhängt. Daher gilt

$$b_s^A(0, y_1, y_2) = \lim_{\nu \to 0} \left(b_s^A(\nu, y_1, y_2) \right).$$

Mit (A.3) und (A.4) findet man

$$\begin{aligned} b_s^A(0, y_1, y_2) &= 8\pi \sqrt{\frac{Ay_1y_2}{D}} \lim_{\nu \to 0} \left(\frac{\Gamma(s-1/2)^2}{4} (\pi|\nu|y_1)^{1/2-s} (\pi|\nu'|y_2)^{1/2-s} \frac{(2\pi\sqrt{A|\nu\nu'|})^{2s-1}}{\Gamma(2s)} \right) \\ &= \frac{\pi\Gamma(s-1/2)^2}{\sqrt{D}\,\Gamma(2s)} (4A)^s (y_1y_2)^{1-s}. \end{aligned}$$

Man erhält auch hier die Behauptung. □

2.2.3 Die meromorphe Fortsetzung von $\Phi_m(z_1, z_2, s)$

Eine wichtige Rolle für die weiteren Überlegungen spielt das folgende Lemma von Zagier ([Za1] §4 Proposition), das wir hier ohne Beweis wiedergeben.

Lemma 2.7. *Sei $a \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ und $\nu \in \mathfrak{d}^{-1}$. Dann gilt*

$$\frac{1}{a\sqrt{D}} G_a(m, \nu) = \sum_{\substack{r|\nu \\ r|a}} H_{a/r}\left(\frac{D\nu\nu'}{r^2}, m \right).$$

Dabei sind die endlichen Exponentialsummen $G_a(m, \nu)$ bzw. $H_b(m, n)$ durch (2.11) bzw. (1.12) definiert.

Korollar 2.8. *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß*

$$|G_a(m, \nu)| \leq Cd(a)\sqrt{a|\nu\nu'|}$$

für alle $m \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathfrak{d}^{-1} - \{0\}$ und $a \in \mathbb{N}$. Dabei bezeichnet $d(a)$ die Anzahl der positiven Teiler von a.

Beweis. Bekanntlich existiert eine Konstante $C > 0$ mit der Eigenschaft:

$$|H_c^{D_1}(n,m)| < C\sqrt{|n|/c}$$

für alle $c \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, und $m \in \mathbb{Z}$. (Siehe dazu zum Beispiel [Br] Lemma 3.2, man beachte die unterschiedliche Normierung.) Hierbei kann C unabhängig von c, n, m gewählt werden. Damit hat man eine analoge Abschätzung auch für die $H_b(n,m)$. Also gilt

$$\begin{aligned}
|G_a(m,\nu)| &\leq a\sqrt{D}\sum_{\substack{r|\nu\\ r|a}}\left|H_{a/r}\left(\frac{D\nu\nu'}{r^2},m\right)\right| \\
&\leq Ca\sqrt{D}\sum_{\substack{r|\nu\\ r|a}}\sqrt{\frac{D|\nu\nu'|}{r^2}\frac{r}{a}} \\
&\leq CD\sqrt{a|\nu\nu'|}\sum_{\substack{r|\nu\\ r|a}} r^{-1/2} \\
&\leq CD\sqrt{a|\nu\nu'|}d(a)
\end{aligned}$$

für alle $a \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ und $\nu \in \mathfrak{d}^{-1} - \{0\}$. □

Satz 2.9. *Sei $(z_1,z_2) \in \mathbb{H}\times\mathbb{H} - H(m)$. Dann besitzt $\Phi_m(z_1,z_2,s)$ eine meromorphe Fortsetzung auf $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma > 3/4\}$. Bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$ ist $\Phi_m(z_1,z_2,s)$ in diesem Gebiet sogar holomorph.*

Beweis. Sei $a_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Man setze $A = |m|/D$. Wir zeigen, daß für $y_1y_2 > A/a_0^2$ die Funktion

$$\tilde{\Phi}_m(z_1,z_2,s) = 2\sum_{a\geq a_0}\Phi_m^a(z_1,z_2,s) \tag{2.19}$$

eine meromorphe Fortsetzung auf $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma > 3/4\}$ besitzt, die holomorph in $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma > 3/4, s \neq 1\}$ ist und bei $s = 1$ einen einfachen Pol hat. Die Behauptung folgt dann aus der Darstellung (2.8), wenn man berücksichtigt, daß die $\Phi_m^a(z_1,z_2,s)$ $(a \in \mathbb{N}_0)$ holomorphe Funktionen in s für $\sigma > 1/2$ sind.

Die Fortsetzbarkeit von $\tilde{\Phi}_m(z_1,z_2,s)$ wollen wir mit Hilfe der Fourierentwicklung

$$\tilde{\Phi}_m(z_1,z_2,s) = 2\sum_{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}}\left[\sum_{a\geq a_0}G_a(m,\nu)b_s^{A/a^2}(\nu,y_1,y_2)\right]e(\nu x_1+\nu' x_2)$$

von (2.19) beweisen. Dazu genügt es zu zeigen:

i) Die Summe

$$\sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu\neq 0}}\left[\sum_{a\geq a_0}G_a(m,\nu)b_s^{A/a^2}(\nu,y_1,y_2)\right]e(\nu x_1+\nu' x_2)$$

konvergiert lokal gleichmäßig absolut für $\sigma > 3/4$. Dabei sind die $b_s^{A/a^2}(\nu, y_1, y_2)$ durch Lemma 2.6 gegeben.

ii) Die Funktion

$$\sum_{a \geq a_0} G_a(m,0) b_s^{A/a^2}(0, y_1, y_2)$$

besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma > 3/4\}$. Bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$ ist sie sogar holomorph.

Zu i). Sei $y_1 y_2 > A/a_0^2$ und $K \subset \{s \in \mathbb{C};\ \sigma > 3/4\}$ eine kompakte Teilmenge. Wir zeigen lediglich, daß

$$S_1 = \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu\nu' > 0}} \left[\sum_{a \geq a_0} G_a(m,\nu) b_s^{A/a^2}(\nu, y_1, y_2) \right] e(\nu x_1 + \nu' x_2)$$

gleichmäßig absolut auf K konvergiert, die Summe über $\nu \in \mathfrak{d}^{-1}$ mit $\nu\nu' < 0$ behandelt man analog.

Man wähle ein $\varepsilon > 0$ mit $y_1 y_2 (1 - 2\varepsilon)^2 > A/a_0^2$ und $1/2 > \varepsilon$. Dann gilt für alle $\nu \in \mathfrak{d}^{-1} - \{0\}$ die Ungleichung

$$\frac{2}{a_0}\sqrt{A|\nu\nu'|} - (1-\varepsilon)|\nu y_1| - (1-\varepsilon)|\nu' y_2| < -\varepsilon|\nu y_1| - \varepsilon|\nu' y_2|. \tag{2.20}$$

Aus (A.4) und (A.6) folgert man, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$|K_{s-1/2}(t)| < C t^{1/2-\sigma} e^{-(1-\varepsilon)t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ und $s \in K$. Nach Lemma 2.6 gilt somit

$$\begin{aligned} |S_1| &\ll_K \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu\nu' > 0}} \sum_{a \geq a_0} \frac{1}{a} \left| G_a(m,\nu) I_{2s-1}\left(\frac{4\pi}{a}\sqrt{A|\nu\nu'|}\right) K_{s-1/2}(2\pi|\nu|y_1) K_{s-1/2}(2\pi|\nu'|y_2) \right| \\ &\ll_{K,\varepsilon} \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu,\nu' > 0}} \sum_{a \geq a_0} \frac{1}{a} \left| G_a(m,\nu) I_{2s-1}\left(\frac{4\pi}{a}\sqrt{A\nu\nu'}\right) \right| (\nu\nu')^{1/2-\sigma} e^{-2\pi(1-\varepsilon)(\nu y_1 + \nu' y_2)}. \end{aligned}$$

Mit Korollar 2.8 ergibt sich

$$|S_1| \ll_{K,\varepsilon} \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu,\nu' > 0}} \sum_{a \geq a_0} d(a) a^{-1/2} \left| I_{2s-1}\left(\frac{4\pi}{a}\sqrt{A\nu\nu'}\right) \right| (\nu\nu')^{1-\sigma} e^{-2\pi(1-\varepsilon)(\nu y_1 + \nu' y_2)}.$$

Wir verwenden nun (A.3) sowie (A.5) und erhalten

$$\begin{aligned}
|S_1| &\ll_{K,\varepsilon} \sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu,\nu'>0}} \sum_{a=a_0}^{\sqrt{\nu\nu'}} d(a)(\nu\nu')^{3/4-\sigma} \exp\left(\frac{4\pi}{a}\sqrt{A\nu\nu'}\right) e^{-2\pi(1-\varepsilon)(\nu y_1+\nu' y_2)} \\
&\quad + \sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu,\nu'>0}} \sum_{a\geq\sqrt{\nu\nu'}} d(a)a^{1/2-2\sigma}(\nu\nu')^{1/2} e^{-2\pi(1-\varepsilon)(\nu y_1+\nu' y_2)} \\
&\ll_{K,\varepsilon} \sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu,\nu'>0}} (\nu\nu')^{7/4-\sigma} \exp\left(\frac{4\pi}{a_0}\sqrt{A\nu\nu'} - 2\pi(1-\varepsilon)(\nu y_1+\nu' y_2)\right) \\
&\quad + \sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu,\nu'>0}} \zeta(2\sigma-\varepsilon'-1/2)(\nu\nu')^{1/2} e^{-2\pi(1-\varepsilon)(\nu y_1+\nu' y_2)}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Asymptotik $d(a) = O(a^{\varepsilon'})$ $(\varepsilon' > 0)$ benutzt. Die letzte Summe konvergiert gleichmäßig auf K (wenn ε' hinreichend klein gewählt wird). Mit (2.20) finden wir

$$|S_1| \ll_{K,\varepsilon} \sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu,\nu'>0}} (\nu\nu')^{7/4-\sigma} \exp\left(-2\pi\varepsilon\nu y_1 - 2\pi\varepsilon\nu' y_2\right).$$

Auch diese Summe konvergiert gleichmäßig auf K.

Zu ii). Hier genügt es offenbar,

$$f(s) := \sum_{a\geq 1} G_a(m,0) b_s^{A/a^2}(0,y_1,y_2)$$

zu betrachten. Nach Lemma 2.6 und Lemma 2.7 ist

$$\begin{aligned}
f(s) &= \frac{\pi\Gamma(s-1/2)^2}{\sqrt{D}\,\Gamma(2s)}(4A)^s(y_1y_2)^{1-s}\sum_{a\geq 1} G_a(m,0)a^{-2s} \\
&= \frac{\pi\Gamma(s-1/2)^2}{\Gamma(2s)}(4A)^s(y_1y_2)^{1-s}\sum_{a\geq 1}\sum_{r|a} a^{1-2s}H_{a/r}(0,m) \\
&= \frac{\pi\Gamma(s-1/2)^2}{\Gamma(2s)}(4A)^s(y_1y_2)^{1-s}\sum_{r\geq 1}\sum_{a\geq 1}(ar)^{1-2s}H_a(0,m) \\
&= \frac{\pi\Gamma(s-1/2)^2}{\Gamma(2s)}(4A)^s(y_1y_2)^{1-s}\zeta(2s-1)\sum_{a\geq 1} a^{1-2s}H_a(0,m).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus $H_a(0,m) = O(a^{-1/2})$ für $a\to\infty$ und den bekannten Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$. $\square$

Definition 2.10. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und f eine meromorphe Funktion auf D. Ist $a \in D$, so bezeichnen wir den konstanten Term der Laurententwicklung von f an der Stelle a mit $\mathcal{C}_{s=a}[f(s)]$.*

Definition 2.11. *Sei m eine negative ganze Zahl und $(z_1, z_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} - H(m)$. Mit den obigen Bezeichnungen definieren wir*

$$\Phi_m(z_1, z_2) = \mathcal{C}_{s=1}\left[\Phi_m(z_1, z_2, s)\right].$$

Nach Satz 2.9 ist $\Phi_m(z_1, z_2)$ wohldefiniert. Weiterhin folgt aus der Konstruktion, daß $\Phi_m(z_1, z_2)$ invariant unter der Operation von Γ_K ist.

2.2.4 Die Fourierentwicklung von $\Phi_m(z_1, z_2)$

Definition 2.12. *Für eine negative ganze Zahl m setzen wir*

$$\begin{aligned} q_n(m) &= -\delta_{nm}, \quad n < 0, && (2.21) \\ q_0(m) &= -\frac{4\pi^2|m|}{D} \sum_{b \geq 1} H_b(0, m) b^{-1}, \quad n = 0, && (2.22) \\ q_n(m) &= -2\pi\sqrt{|m/n|} \sum_{b \geq 1} H_b(n, m) I_1\left(\frac{4\pi}{bD}\sqrt{|nm|}\right), \quad n > 0. && (2.23) \end{aligned}$$

Nach Satz 1.5 ist $q_0(m)$ genau der $|m|$-te Fourierkoeffizient der Eisensteinreihe $E(z) \in M_2(D, \chi_D)$. Für $n > 0$ ist $q_n(m)$ gerade der $|m|$-te Fourierkoeffizient der Poincaréreihe vom Gewicht zwei P_{-n} (siehe (1.13)). Man kann die $q_n(m)$ ($n \neq 0$) auch als Fourierkoeffizienten geeigneter nichtholomorpher Poincaréreihen vom Gewicht Null auffassen. Doch darauf soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Man beachte, daß wegen $H_b(n, m) = \overline{H_b(n, m)}$ sämtliche $q_n(m)$ reell sind.

Lemma 2.13. *Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit*

$$\mathcal{C}_{s=1}\left[\frac{2\pi\Gamma(s-1/2)^2}{\sqrt{D}\,\Gamma(2s)}(4|m|/D)^s (y_1 y_2)^{1-s} \sum_{a \geq 1} G_a(m, 0) a^{-2s}\right] = \alpha + q_0(m)\log(y_1 y_2). \quad (2.24)$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz 2.9 können wir

$$\frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{a \geq 1} G_a(m, 0) a^{-2s} = \zeta(2s-1) \sum_{a \geq 1} a^{1-2s} H_a(0, m)$$

schreiben. Damit ist die linke Seite von (2.24) gleich

$$\mathcal{C}_{s=1}\left[\frac{2\pi\Gamma(s-1/2)^2}{\Gamma(2s)}(4|m|/D)^s (y_1 y_2)^{1-s} \zeta(2s-1) \sum_{a \geq 1} a^{1-2s} H_a(0, m)\right].$$

Es gilt

$$\mathcal{C}_{s=1}\left[\frac{2\pi\Gamma(s-1/2)^2}{\Gamma(2s)}(4|m|/D)^s\sum_{a\geq 1}a^{1-2s}H_a(0,m)\right]=-2q_0(m).$$

Weiterhin hat man die folgenden Laurententwicklungen bei $s=1$:

$$\begin{aligned}(y_1y_2)^{1-s} &= 1-\log(y_1y_2)(s-1)+\dots,\\ \zeta(2s-1) &= \frac{1}{2}(s-1)^{-1}-\Gamma'(1)+\dots.\end{aligned}$$

Hieraus folgert man die Behauptung. □

Lemma 2.14. *Für $(z_1,z_2)\in\mathbb{H}\times\mathbb{H}-S(m)$ mit $y_1y_2>|m|/D$ hat man die Darstellung*

$$\begin{aligned}\Phi_m(z_1,z_2) &= \alpha+q_0(m)\log(y_1y_2)+2\pi\sum_{\substack{\lambda\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \mathrm{N}(\lambda)=m/D}}\left(|\lambda y_1-\lambda' y_2|-|\lambda y_1+\lambda' y_2|\right)\\ &+2\sum_{\substack{\lambda\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \mathrm{N}(\lambda)=m/D}}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(e^{-2\pi n|\lambda y_1+\lambda' y_2|}-e^{-2\pi n|\lambda y_1-\lambda' y_2|}\right)e(n\lambda x_1+n\lambda' x_2)\\ &+\frac{4\pi}{D}\sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu>0\\ \nu'>0}}\sqrt{\frac{|m|}{|\nu\nu'|}}\sum_{a\geq 1}\frac{1}{a}G_a(m,\nu)I_1\left(\frac{4\pi}{aD}\sqrt{|mD\nu\nu'|}\right)\left(e(\nu z_1+\nu' z_2)+e(-\nu\bar z_1-\nu'\bar z_2)\right)\\ &+\frac{4\pi}{D}\sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu>0\\ \nu'<0}}\sqrt{\frac{|m|}{|\nu\nu'|}}\sum_{a\geq 1}\frac{1}{a}G_a(m,\nu)J_1\left(\frac{4\pi}{aD}\sqrt{|mD\nu\nu'|}\right)\left(e(\nu z_1+\nu'\bar z_2)+e(-\nu\bar z_1-\nu' z_2)\right).\end{aligned}$$

Dabei hat α die gleiche Bedeutung wie in Lemma 2.13.

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir $A=|m|/D$. Nach Definition und (2.8) gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_m(z_1,z_2) &= \mathcal{C}_{s=1}\left[\Phi_m^0(z_1,z_2,s)\right]+\mathcal{C}_{s=1}\left[2\sum_{a=1}^{\infty}\Phi_m^a(z_1,z_2,s)\right]\\ &= \Phi_m^0(z_1,z_2,1)+2\sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu\neq 0}}\left[\sum_{a\geq 1}G_a(m,\nu)b_1^{A/a^2}(\nu,y_1,y_2)\right]e(\nu x_1+\nu' x_2)\\ &\quad+\mathcal{C}_{s=1}\left[2\sum_{a\geq 1}G_a(m,0)b_s^{A/a^2}(0,y_1,y_2)\right].\end{aligned}\tag{2.25}$$

Den ersten Summanden $\Phi_m^0(z_1, z_2, 1)$ haben wir in Lemma 2.5 berechnet. Setzt man $s = 1$ in der Fourierentwicklung (2.14), so erhält man mit (A.7) und (A.8)

$$\Phi_m^0(z_1, z_2, 1) = 4\pi \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) = m/D}} \beta(\lambda y_1, \lambda' y_2) + 2 \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) = m/D}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$
$$\times \left(e^{-2\pi n (\alpha(\lambda y_1, \lambda' y_2) - \beta(\lambda y_1, \lambda' y_2))} - e^{-2\pi n (\alpha(\lambda y_1, \lambda' y_2) + \beta(\lambda y_1, \lambda' y_2))} \right) e(n\lambda x_1 + n\lambda' x_2).$$

Benutzt man die für $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 r_2 < 0$ gültigen Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha(r_1, r_2) + \beta(r_1, r_2) &= |r_1 - r_2|, \\ \alpha(r_1, r_2) - \beta(r_1, r_2) &= |r_1 + r_2|, \\ |r_1 - r_2| - |r_1 + r_2| &= 2\beta(r_1, r_2), \end{aligned}$$

so findet man

$$\Phi_m^0(z_1, z_2, 1) = 2\pi \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) = m/D}} \left(|\lambda y_1 - \lambda' y_2| - |\lambda y_1 + \lambda' y_2| \right)$$
$$+ 2 \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) = m/D}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(e^{-2\pi n |\lambda y_1 + \lambda' y_2|} - e^{-2\pi n |\lambda y_1 - \lambda' y_2|} \right) e(n\lambda x_1 + n\lambda' x_2).$$

Den zweiten Summanden in (2.25) können wir mit Lemma 2.6 und (A.8) in ähnlicher Weise auswerten. Weiterhin ergibt sich mit Lemma 2.6 und Lemma 2.13

$$\mathcal{C}_{s=1} \left[2 \sum_{a \geq 1} G_a(m, 0) b_s^{A/a^2}(0, y_1, y_2) \right]$$
$$= \mathcal{C}_{s=1} \left[\frac{2\pi \Gamma(s - 1/2)^2}{\sqrt{D}\, \Gamma(2s)} (4|m|/D)^s (y_1 y_2)^{1-s} \sum_{a \geq 1} G_a(m, 0) a^{-2s} \right] = \alpha + q_0(m) \log(y_1 y_2),$$

und damit folgt die Behauptung. □

Satz 2.15. *Auf* $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} - S(m);\ y_1 y_2 > |m|/D\}$ *hat* $\Phi_m(z_1, z_2)$ *die Fourierentwicklung*

$$\begin{aligned} \Phi_m(z_1, z_2) \;\; = \;\; & \alpha + 2\pi \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) = m/D}} \left(|\lambda y_1 - \lambda' y_2| - |\lambda y_1 + \lambda' y_2| \right) \\ & + 4 \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0}} q_{D\nu\nu'}(m) \log |1 - e(\nu x_1 + \nu' x_2 + i|\nu y_1 + \nu' y_2|)| \\ & + q_0(m) \log(y_1 y_2) + 4 \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0 \\ \nu' < 0}} p_{|D\nu\nu'|}(|m|) \log |1 - e(\nu z_1 + \nu' \bar{z}_2)| . \end{aligned}$$

Dabei hat α die gleiche Bedeutung wie in Lemma 2.13, und die $p_r(n)$ bezeichnen die Fourierkoeffizienten von $P_r \in S_2(D, \chi_D)$ gemäß Satz 1.7.

Beweis. Wir benutzen Lemma 2.7, um die Darstellung aus Lemma 2.14 umzuschreiben. So ist zum Beispiel

$$
\begin{aligned}
T_1 &:= \frac{4\pi}{D} \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0 \\ \nu' < 0}} \sqrt{\frac{|m|}{|\nu\nu'|}} \sum_{a \geq 1} \frac{1}{a} G_a(m, \nu) J_1\left(\frac{4\pi}{aD}\sqrt{|mD\nu\nu'|}\right) \left(e(\nu z_1 + \nu' \bar{z}_2) + e(-\nu \bar{z}_1 - \nu' z_2)\right) \\
&= 2 \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0 \\ \nu' < 0}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left[2\pi \sqrt{\frac{|m|}{|D\nu\nu'|}} \sum_{a \geq 1} H_a(D\nu\nu', m) J_1\left(\frac{4\pi}{aD}\sqrt{|mD\nu\nu'|}\right)\right] \\
&\quad \times \left(e(n\nu z_1 + n\nu' \bar{z}_2) + e(-n\nu \bar{z}_1 - n\nu' z_2)\right) \\
&= -4 \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0 \\ \nu' < 0}} \left[2\pi \sqrt{\frac{|m|}{|D\nu\nu'|}} \sum_{a \geq 1} H_a(D\nu\nu', m) J_1\left(\frac{4\pi}{aD}\sqrt{|mD\nu\nu'|}\right)\right] \log\left|1 - e(\nu z_1 + \nu' \bar{z}_2)\right|
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
T_2 : &= -2 \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\nu) = m/D}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} e^{-2\pi n |\nu y_1 - \nu' y_2|} e(n\nu x_1 + n\nu' x_2) \\
&= -2 \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0 \\ \mathrm{N}(\nu) = m/D}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(e(n\nu z_1 + n\nu' \bar{z}_2) + e(-n\nu \bar{z}_1 - n\nu' z_2)\right) \\
&= 4 \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0 \\ \mathrm{N}(\nu) = m/D}} \log\left|1 - e(\nu z_1 + \nu' \bar{z}_2)\right|.
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
T_1 + T_2 = 4 \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0 \\ \nu' < 0}} p_{|D\nu\nu'|}(|m|) \log\left|1 - e(\nu z_1 + \nu' \bar{z}_2)\right|.
$$

Mit einer analogen Überlegung für die übrigen Terme erhält man die Behauptung. □

2.3 Die Singularitäten von $\Phi_m(z_1, z_2)$

Lemma 2.16. *Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ und $m < 0$. Dann ist die Menge*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{K,m} = \{(a, b, \lambda) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathfrak{d}^{-1}; \quad & \mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D, \\
& a z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b = 0 \text{ für ein } (z_1, z_2) \in K\}
\end{aligned}
$$

und damit auch die Menge

$$\mathcal{M}_{K,m}^{+} = \{(a,b,\lambda) \in \mathcal{M}_{K,m}; \quad a > 0 \text{ oder } (a = 0 \text{ und } \lambda > 0)\}$$

endlich.

Beweis. Dies ist Lemma 2.2 mit $C = 0$. □

Satz 2.17. *Sei $K \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ kompakt und $\mathcal{M}_{K,m}$ wie in Lemma 2.16 definiert. Dann ist*

$$\Phi_m(z_1, z_2) + \sum_{(a,b,\lambda) \in \mathcal{M}_{K,m}} \log |az_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^2$$

eine reell analytische Funktion auf $(\mathbb{H} \times \mathbb{H} - H(m)) \cap K$, die auf ganz K reell analytisch fortgesetzt werden kann. Mit anderen Worten: $\Phi_m(z_1, z_2)$ ist eine reell analytische Funktion auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H} - H(m)$ mit logarithmischer Singularität entlang von $H(m)$.

Beweis. Zur Abkürzung sei $A = |m|/D$. Man wähle ein festes $a_0 \in \mathbb{N}$, so daß K in $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H};\ y_1 y_2 > A/a_0^2\}$ enthalten ist. Nach Definition und (2.8) gilt

$$\Phi_m(z_1, z_2) = \Phi_m^0(z_1, z_2, 1) + 2 \sum_{a=1}^{a_0 - 1} \Phi_m^a(z_1, z_2, 1) + \mathcal{C}_{s=1} \left[\sum_{a \geq a_0} \Phi_m^a(z_1, z_2, s) \right]. \tag{2.26}$$

Mit Hilfe der Fourierentwicklung zeigt man leicht (vgl. Lemma 2.14), daß

$$\mathcal{C}_{s=1} \left[\sum_{a \geq a_0} \Phi_m^a(z_1, z_2, s) \right]$$

eine reell analytische Funktion auf $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H};\ y_1 y_2 > A/a_0^2\}$ darstellt. Es genügt daher, die ersten beiden Summanden in (2.26) zu betrachten. Diese können wir wegen $\varphi_1(z) = -\log(1-z)$ und (2.4) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
\Phi_m^0(z_1, z_2, 1) + 2 \sum_{a=1}^{a_0 - 1} \Phi_m^a(z_1, z_2, 1) &= - \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{Z}, |a| < a_0 \\ \lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D}} \log \left(\frac{|az_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^2}{|az_1 \bar{z}_2 + \lambda z_1 + \lambda' \bar{z}_2 + b|^2} \right) \\
&= - \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{Z}, |a| < a_0 \\ \lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D \\ (a,b,\lambda) \notin \mathcal{M}_{K,m}}} \log \left(\frac{|az_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^2}{|az_1 \bar{z}_2 + \lambda z_1 + \lambda' \bar{z}_2 + b|^2} \right) \\
&\quad + \sum_{(a,b,\lambda) \in \mathcal{M}_{K,m}} \log(4Ay_1 y_2 + |az_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^2) \\
&\quad - \sum_{(a,b,\lambda) \in \mathcal{M}_{K,m}} \log |az_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^2.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Die Summe

$$\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z},|a|<a_0\\ \lambda\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \mathrm{N}(\lambda)-ab=m/D\\ (a,b,\lambda)\notin\mathcal{M}_{K,m}}} \log\left(\frac{|az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b|^2}{|az_1\bar{z}_2+\lambda z_1+\lambda'\bar{z}_2+b|^2}\right) \tag{2.28}$$

konvergiert gleichmäßig absolut auf K. Da

$$\log\left(\frac{|az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b|^2}{|az_1\bar{z}_2+\lambda z_1+\lambda'\bar{z}_2+b|^2}\right)$$

harmonisch in z_1 und z_2 ist, muß (2.28) stetig und harmonisch in z_1 und z_2 sein. Damit ist sie insbesondere reell analytisch. Dies impliziert die Behauptung. □

2.4 Eine auf $H(m)$ verschwindende holomorphe Funktion

Wir schreiben $\Phi_m(z_1, z_2)$ als Summe zweier Funktionen ξ_m und ψ_m. Wir werden zeigen, daß ξ_m reell analytisch auf $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ ist, und daß $-\psi_m/4$ der Logarithmus vom Betrag einer auf $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ holomorphen Funktion ist, deren einzige Nullstellen auf $H(m)$ liegen.

Definition 2.18. *Sei m eine negative ganze Zahl. Dann setzen wir*

$$\xi_m(z_1,z_2) = q_0(m)\log(y_1y_2) + 4\sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu>0\\ \nu'<0}} p_{|D\nu\nu'|}(|m|)\log|1-e(\nu z_1+\nu'\bar{z}_2)|$$

und

$$\psi_m(z_1,z_2) = \Phi_m(z_1,z_2) - \xi_m(z_1,z_2).$$

Lemma 2.19. *Die Funktion $\xi_m(z_1, z_2)$ ist reell analytisch auf $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$.*

Beweis. Offenbar genügt es zu zeigen, daß

$$S(z_1,z_2) = \sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu>0\\ \nu'<0}} \left|p_{|D\nu\nu'|}(|m|)\,\mathrm{Log}\,(1-e(\nu z_1+\nu'\bar{z}_2))\right|$$

lokal gleichmäßig auf $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ konvergiert. Aus der bekannten Abschätzung für die J_1-Besselfunktion

$$J_1(t) \ll \min\{t, t^{-1/2}\} \qquad (t\in\mathbb{R}_{\geq 0})$$

folgert man leicht, daß $p_r(|m|) = O(r)$ für $r \to \infty$. Damit können wir $S(z_1, z_2)$ abschätzen:

$$\begin{aligned} S(z_1, z_2) &\ll \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0 \\ \nu' < 0}} |D\nu\nu'| \, |\mathrm{Log}\,(1 - e(\nu z_1 + \nu' \bar{z}_2))| \\ &\ll \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0 \\ \nu' < 0}} |D\nu\nu'| \, |e(\nu z_1 + \nu' \bar{z}_2)| \\ &\ll \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0 \\ \nu' < 0}} |D\nu\nu'| e^{-2\pi(|\nu| y_1 + |\nu'| y_2)}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz. □

Definition 2.20. *Sei $D \subset \mathbb{C}^2$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Die Funktion f heißt* pluriharmonisch, *falls*

$$H_f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} & \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_1} & \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \end{pmatrix} f(z_1, z_2)$$

auf D identisch verschwindet.

Lemma 2.21. *Sei $D \subset \mathbb{C}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann sind äquivalent:*

i) f ist pluriharmonisch.

ii) Es gibt eine holomorphe Funktion $h : D \to \mathbb{C}$ mit $f = \Re(h)$.

Beweis. Man argumentiert wie in [GR] Kapitel IX Abschnitt C. □

Sei W eine fest gewählte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{H} \times \mathbb{H} - S(m)$. Ist $\lambda \in \mathfrak{d}^{-1}$, so schreiben wir $(\lambda, W) > 0$, falls $\lambda y_1 + \lambda' y_2 > 0$ für alle $(z_1, z_2) \in W$. (Dies ist offenbar äquivalent zu $\lambda y_1 + \lambda' y_2 > 0$ für ein $(z_1, z_2) \in W$.)

Auf W wollen wir die Fourierentwicklung von ψ_m in einer geringfügig anderen Form schreiben. Dazu seien ρ_W, ρ'_W die eindeutig bestimmten reellen Zahlen, so daß

$$4(\rho_W y_1 + \rho'_W y_2) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) = m/D}} (|\lambda y_1 - \lambda' y_2| - |\lambda y_1 + \lambda' y_2|)$$

für alle $(z_1, z_2) \in W$. Dann gilt für $(z_1, z_2) \in W$ mit $y_1 y_2 > |m|/D$:

$$\psi_m(z_1, z_2) = \alpha + 8\pi(\rho_W y_1 + \rho'_W y_2) + 4 \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ (\nu, W) > 0}} q_{D\nu\nu'}(m) \log|1 - e(\nu z_1 + \nu' z_2)|. \quad (2.29)$$

Definition 2.22. *Für* $(z_1, z_2) \in \{(z_1, z_2) \in W;\ y_1 y_2 > |m|/D\}$ *sei*

$$\Psi_m(z_1, z_2) = e(\rho_W z_1 + \rho_W' z_2) \prod_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ (\nu, W) > 0}} (1 - e(\nu z_1 + \nu' z_2))^{-q_{D\nu\nu'}(m)}. \tag{2.30}$$

Man beachte, daß die lokal gleichmäßig absolute Konvergenz des unendlichen Produktes (2.30) auf dem angegebenen Gebiet aus der lokal gleichmäßig absoluten Konvergenz von (2.29) folgt. Wir können $\Psi_m(z_1, z_2)$ auch in der Form

$$\Psi_m(z_1, z_2) = e(\rho_W z_1 + \rho_W' z_2) \prod_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ (\nu, W) > 0 \\ \mathrm{N}(\nu) = m/D}} (1 - e(\nu z_1 + \nu' z_2)) \prod_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu > 0 \\ \nu' > 0}} (1 - e(\nu z_1 + \nu' z_2))^{-q_{D\nu\nu'}(m)}$$

schreiben. Offenbar ist $\Psi_m(z_1, z_2)$ eine holomorphe Funktion auf $\{(z_1, z_2) \in W;\ y_1 y_2 > |m|/D\}$, und es gilt auf diesem Gebiet

$$\log|\Psi_m(z_1, z_2)| = -\frac{1}{4}(\psi_m(z_1, z_2) - \alpha). \tag{2.31}$$

Satz 2.23. *Die Funktion* Ψ_m *besitzt eine holomorphe Fortsetzung auf* $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ *und (2.31) gilt auf* $\mathbb{H} \times \mathbb{H} - H(m)$*. Ist* $K \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ *kompakt, so ist*

$$\Psi_m(z_1, z_2) \prod_{(a,b,\lambda) \in \mathcal{M}^+_{K,m}} (a z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b)^{-1} \tag{2.32}$$

(per holomorpher Fortsetzung) eine holomorphe Funktion auf K *ohne Nullstellen.*

Beweis. Sei U eine beschränkte offene Teilmenge von $\{(z_1, z_2) \in W;\ y_1 y_2 > |m|/D\}$. Es genügt zu zeigen, daß Ψ_m sich auf jeden Quader V der Form

$$V = (a_1, b_1) \times i(a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \times i(a_4, b_4) \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}, \qquad U \subset V,$$

mit kompaktem Abschluß $\bar{V} \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ holomorph fortsetzen läßt, daß (2.31) auf V gilt und (2.32) auf $\bar{V}$.

Nach Satz 2.17 und Lemma 2.19 können wir

$$\psi_m + 4 \sum_{(a,b,\lambda) \in \mathcal{M}^+_{V,m}} \log|a z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b| \tag{2.33}$$

als reell analytische Funktion auf V auffassen. Die Darstellung (2.29) von ψ_m auf $\{(z_1, z_2) \in W;\ y_1 y_2 > |m|/D\}$ impliziert, daß (2.33) sogar eine pluriharmonische Funktion definiert (zunächst auf U und dann per analytischer Fortsetzung auf ganz V). Also gibt es nach Lemma 2.21 eine holomorphe Funktion $f : V \to \mathbb{C}$ mit

$$\psi_m + 4 \sum_{(a,b,\lambda) \in \mathcal{M}^+_{V,m}} \log|a z_1 z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b| = \Re(f(z_1, z_2)).$$

Auf U gilt daher

$$-4\log|\Psi_m(z_1,z_2)| + \alpha + 4 \sum_{(a,b,\lambda)\in\mathcal{M}_{V,m}^+} |az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b| = \Re(f(z_1,z_2)),$$

$$\Re\left(\operatorname{Log}\Psi_m(z_1,z_2) - \alpha/4 - \sum_{(a,b,\lambda)\in\mathcal{M}_{V,m}^+} \operatorname{Log}(az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b)\right) = -\frac{1}{4}\Re(f(z_1,z_2)).$$

Nach dem Satz von der Gebietstreue existiert eine Konstante $C\in\mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Log}(\Psi_m(z_1,z_2)) - \alpha/4 - \sum_{(a,b,\lambda)\in\mathcal{M}_{V,m}^+} \operatorname{Log}(az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b) = -\frac{1}{4}f(z_1,z_2)+iC.$$

Indem wir f von vornherein geeignet wählen, können wir ohne Einschränkung $C=0$ annehmen. Es folgt

$$\Psi_m(z_1,z_2) \prod_{(a,b,\lambda)\in\mathcal{M}_{V,m}^+} (az_1z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b)^{-1} = e^{\alpha/4}e^{-f(z_1,z_2)/4}.$$

Da $e^{-f(z_1,z_2)/4}$ eine nullstellenfreie holomorphe Funktion auf V ist, erhält man hieraus die Behauptung. □

Aus (2.31) folgt, daß $\Psi_m(z_1,z_2)$ bis auf Multiplikation mit einer komplexen Konstanten vom Betrag 1 unabhängig von der Wahl von W ist.

Lemma 2.24. *Die Funktion $e^{-\xi_m(z_1,z_2)/4}$ ist reell analytisch und positiv. Weiterhin ist*

$$|\Psi_m(z_1,z_2)|e^{-\xi_m(z_1,z_2)/4}$$

invariant unter Γ_K.

Beweis. Da $\xi_m(z_1,z_2)$ reellwertig ist, folgt die erste Aussage aus Lemma 2.19.
Nach Satz 2.23 gilt $|\Psi_m(z_1,z_2)| = e^{\alpha/4}e^{-\psi_m(z_1,z_2)/4}$. Folglich ist

$$|\Psi_m(z_1,z_2)|e^{-\xi_m(z_1,z_2)/4} = e^{\alpha/4}e^{-\Phi_m(z_1,z_2)/4},$$

und $e^{-\Phi_m(z_1,z_2)/4}$ ist nach Konstruktion invariant unter Γ_K. □

2.5 Beziehungen zur Theorie von Borcherds

Unsere bisherigen Ergebnisse beinhalten insbesondere einen neuen Beweis von [Bo2] Theorem 13.3 für den Spezialfall der Hilbertschen Modulgruppe (allerdings erhalten wir es in einer etwas anderen Form). Darauf wollen wir in diesem Abschnitt eingehen.

Definition 2.25. *Sei $\Gamma \leq \Gamma_K$ eine Untergruppe von endlichem Index, χ ein Charakter von Γ und $k \in \mathbb{R}$. Eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ heißt* automorphe Form *vom Gewicht k und Charakter χ bezüglich Γ, falls f das Transformationsverhalten*

$$f(\gamma z_1, \gamma' z_2) = \chi(\gamma)(cz_1 + d)^k (c' z_2 + d')^k f(z_1, z_2) \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

besitzt.

Lemma 2.26. *(vgl. [Bo2] Lemma 13.1.) Sei Ψ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ und $k \in \mathbb{R}$. Die Funktion $|\Psi(z_1, z_2)|(y_1 y_2)^k$ sei invariant unter Γ_K. Dann existiert ein Charakter χ von Γ_K, so daß Ψ eine automorphe Form vom Gewicht $2k$ und Charakter χ ist.*

Beweis. Sei $\gamma \in \Gamma_K$. Nach Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} |\Psi(\gamma z_1, \gamma' z_2)|(\Im(\gamma z_1)\Im(\gamma' z_2))^k &= |\Psi(z_1, z_2)|(y_1 y_2)^k, \\ \left| \frac{\Psi(\gamma z_1, \gamma' z_2)}{\Psi(z_1, z_2)} \right| |(cz_1 + d)^{-2k}(c' z_2 + d')^{-2k}| &= 1. \end{aligned}$$

Nach dem Maximumprinzip gibt es eine Konstante $\chi(\gamma)$ vom Betrag 1 mit

$$\frac{\Psi(\gamma z_1, \gamma' z_2)}{\Psi(z_1, z_2)} (cz_1 + d)^{-2k} (c' z_2 + d')^{-2k} = \chi(\gamma).$$

Man prüft leicht nach, daß χ multiplikativ ist und damit ein Charakter von Γ_K. $\square$

Lemma 2.27. *Der Raum $S_2(D, \chi_D)$ besitzt eine Basis $f_1, \ldots, f_d$ von Modulformen $f_j(z) = \sum_{n \geq 1} a_n(f_j) e(nz)$ mit ganzen rationalen Fourierkoeffizienten $a_n(f_j)$.*

Beweis. Dies führt man auf [DI] Corollary 12.3.8 und Proposition 12.3.11 zurück. $\square$

Satz 2.28. *Sei $f_1, \ldots, f_d$ eine Basis von $S_2(D, \chi_D)$ mit ganzen rationalen Fourierkoeffizienten und $f_j(z) = \sum_{n \geq 1} a_n(f_j) e(nz)$ für $j = 1, \ldots, d$. Weiterhin seien $N \in \mathbb{N}$ und $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{Z}$, so daß für alle $j = 1, \ldots, d$ die Beziehung*

$$c_1 a_1(f_j) + \ldots + c_N a_N(f_j) = 0$$

besteht. Dann ist

$$\Psi(z_1, z_2) = \prod_{j=1}^{N} \Psi_{-j}(z_1, z_2)^{c_j}$$

eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Ψ ist eine automorphe Form vom Gewicht $-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} c_j q_0(-j)$ mit einem gewissen Charakter χ (bezüglich Γ_K). Dabei ist $q_0(-j)$ der j-te Fourierkoeffizient der Eisensteinreihe $E(z) \in M_2(D, \chi_D)$ (siehe Satz 1.5).

ii) Für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ ist

$$\Psi(z_1, z_2) \prod_{\substack{j=1,\dots,N \\ (a,b,\lambda)\in\mathcal{M}^+_{K,-j}}} (az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b)^{-c_j}$$

eine nullstellenfreie holomorphe Funktion auf K.

iii) Sei W eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{H} \times \mathbb{H} - \bigcup_{j=1}^N S(-j)$. Dann existieren reelle Zahlen ρ_W, ρ'_W und eine Konstante C vom Betrag 1, so daß Ψ auf $\{(z_1, z_2) \in W;\ y_1y_2 > N/D\}$ eine Produktentwicklung der Form

$$\Psi(z_1, z_2) = Ce(\rho_W z_1 + \rho'_W z_2) \prod_{j=1}^{N} \prod_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1} \\ (\nu,W)>0}} (1 - e(\nu z_1 + \nu' z_2))^{-q_{D\nu\nu'}(-j)}$$

besitzt. Dabei ist $q_n(-j)$ für $n > 0$ der j-te Fourierkoeffizient der Poincaréreihe P_{-n} vom Gewicht zwei (siehe (1.13)), und für $n < 0$ gilt $q_n(-j) = -\delta_{-jn}$.

Beweis. Zu (i). Aus der Voraussetzung folgt insbesondere

$$c_1p_r(1) + \ldots + c_Np_r(N) = 0$$

für alle natürlichen Zahlen r. Daher gilt

$$\xi(z_1, z_2) := \sum_{j=1}^{N} c_j\xi_{-j}(z_1, z_2) = \log(y_1y_2) \sum_{j=1}^{N} c_jq_0(-j).$$

Nach Lemma 2.24 ist

$$|\Psi(z_1, z_2)|e^{-\xi(z_1,z_2)/4} = |\Psi(z_1, z_2)|(y_1y_2)^{-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^N c_jq_0(-j)}$$

invariant unter Γ_K. Daher folgt aus Lemma 2.26, daß $\Psi(z_1, z_2)$ eine automorphe Form vom Gewicht

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} c_jq_0(-j)$$

ist. Aussage (ii) folgt unmittelbar aus Satz 2.23, und (iii) ergibt sich aus der Definition der Ψ_m. □

Bemerkung. Besonders einfach ist die Situation in Satz 2.28, wenn $S_2(D, \chi_D) = \{0\}$ ist. Dann sind bereits die Ψ_m automorphe Formen vom Gewicht $-q_0(m)/2$.

Die $q_0(m)$ kann man (etwa mit Lemma 3 in [Za1] §4) explizit auswerten. Ist zum Beispiel $D = p$ eine Primzahl mit $p \equiv 1 \pmod 4$ und auch $|m|$ eine Primzahl, so erhält man $q_0(m) = 0$, falls $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$, und

$$q_0(m) = 4\frac{|m| + 1}{L(-1, \chi_p)},$$

falls $\left(\frac{m}{p}\right) = +1$.

Die Dimension von $S_2(D, \chi_D)$ kann mit der Formel aus [CO] berechnet werden. Ist p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \pmod 4$, so gilt die einfache Beziehung (vgl. [He])

$$\dim(S_2(p, \chi_p)) = 2\left[\frac{p-5}{24}\right],$$

dabei bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$.

Kapitel 3

Chernklassen von Heegnerdivisoren

Sei X ein normaler irreduzibler komplexer Raum. Unter einem *Divisor* D auf X versteht man eine formale Linearkombination

$$D = \sum n_Y Y, \qquad n_Y \in \mathbb{Z},$$

irreduzibler abgeschlossener analytischer Teilmengen Y der Kodimension 1, so daß der Träger

$$\mathrm{supp}(D) = \bigcup_{n_Y \neq 0} Y$$

ein abgeschlossener analytischer Teilraum der Kodimension 1 ist. Zu jedem Kompaktum $K \subset X$ gibt es dann nur endlich viele Y mit $Y \cap K \neq \emptyset$ und $n_Y \neq 0$. Die Menge $D(X)$ aller Divisoren auf X ist in natürlicher Weise eine abelsche Gruppe.

Jeder von Null verschiedenen meromorphen Funktion f auf X ist in bekannter Weise ein Hauptdivisor (f) zugeordnet, welcher sich aus den Polen und Nullstellen von X zusammensetzt. Die Menge der Hauptdivisoren $H(X)$ ist offenbar eine Untergruppe von $D(X)$. Die *Divisorklassengruppe* $\mathrm{Cl}(X)$ ist als die Faktorgruppe

$$\mathrm{Cl}(X) = D(X)/H(X)$$

definiert.

Ist Γ eine Gruppe biholomorpher Transformationen von X, welche eigentlich diskontinuierlich operiert, so kann man das Urbild $\pi^*(D)$ eines Divisors D auf X/Γ bezüglich der kanonischen Projektion $\pi : X \to X/\Gamma$ betrachten. Für eine irreduzible Komponente Y des Urbildes von $\mathrm{supp}(D)$ ist dabei die Multiplizität von Y bezüglich $\pi^*(D)$ genau die Multiplizität von $\pi(Y)$ bezüglich D. Dann ist $\pi^*(D)$ ein Γ-invarianter Divisor auf X. Nicht jeder Γ-invariante Divisor auf X muß von einem Divisor auf X/Γ kommen.

Sei nun speziell $X = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ und Γ die Hilbertsche Modulgruppe eines reell-quadratischen Zahlkörpers oder eine Untergruppe von endlichem Index. Dann kann man für jede negative ganze Zahl m den Heegnerdivisor $Y(m)$ der Diskriminante m auf X/Γ definieren. Dieser ist dadurch charakterisiert, daß der Träger von $\pi^*(Y(m))$ gleich $H(m)$ ist (dabei bezeichnet

$H(m)$ die in (2.1) definierte Punktmenge), und alle Multiplizitäten von $Y(m)$ gleich 1 sind[1]. Der Divisor $Y(m)$ ist bekanntlich algebraisch, sein Träger besitzt insbesondere nur endlich viele irreduzible Komponenten.

Für unsere Zwecke ist es nützlich, folgende *modifizierte Divisorklassengruppe* $\widetilde{\mathrm{Cl}}(X/\Gamma)$ einzuführen: Jeder automorphen Form f bezüglich Γ mit Charakter χ (im Sinne von Definition 2.25) ist ein Γ-invarianter Divisor in $D(X)$ zugeordnet. Dieser ist bekanntlich das Urbild eines (algebraischen) Divisors (f) aus $D(X/\Gamma)$. Die Untergruppe aller solcher Divisoren bezeichnen wir mit $\tilde{H}(X/\Gamma)$, offenbar gilt

$$H(X/\Gamma) \leq \tilde{H}(X/\Gamma) \leq D(X/\Gamma).$$

Wir definieren nun

$$\widetilde{\mathrm{Cl}}(X/\Gamma) = D(X/\Gamma)/\tilde{H}(X/\Gamma).$$

Die Bilder der Heegnerdivisoren $Y(m)$ unter der kanonischen Projektion $\mathrm{Cl}(X/\Gamma) \to \widetilde{\mathrm{Cl}}(X/\Gamma)$ bezeichnen wir mit $\tilde{Y}(m)$.

3.1 Ein Lift in die Divisorklassengruppe

Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im vorherigen Kapitel. Insbesondere sei wieder $D > 0$ eine Fundamentaldiskriminante mit $D \equiv 1 \pmod 4$, Γ_K die Hilbertsche Modulgruppe des quadratischen Zahlkörpers $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ und $X_K = (\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma_K$.

Es sei $\mathcal{S}(D, \chi_D)$ der $\mathbb{Z}$-Modul aller Spitzenformen aus $S_2(D, \chi_D)$, in deren q-Entwicklung alle Koeffizienten ganz sind. Bezeichnet d die Dimension von $S_2(D, \chi_D)$, so folgt aus Lemma 2.27

$$\mathcal{S}(D, \chi_D) \cong \mathbb{Z}^d \quad \text{und} \quad \mathcal{S}(D, \chi_D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = S_2(D, \chi_D).$$

Weiterhin sei $\mathcal{S}^*(D, \chi_D)$ der zu $\mathcal{S}(D, \chi_D)$ duale $\mathbb{Z}$-Modul, also der Modul aller $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen $\mathcal{S}(D, \chi_D) \to \mathbb{Z}$. Dann ist $\mathcal{S}^*(D, \chi_D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ gleich dem $\mathbb{C}$-Dualraum $S_2^*(D, \chi_D)$ von $S_2(D, \chi_D)$.

Spezielle Elemente von $\mathcal{S}^*(D, \chi_D)$ sind die Funktionale

$$a_r : \mathcal{S}(D, \chi_D) \to \mathbb{Z}, \quad f = \sum_{n \geq 1} a_n e(nz) \mapsto a_r(f) = a_r \tag{3.1}$$

für alle $r \in \mathbb{N}$. Nach (1.16) kann man die a_r mit dem Petersson-Skalarprodukt auch durch $f \mapsto a_r(f) = 4\pi r \langle f, G_r^D \rangle$ beschreiben.

Den von den a_r erzeugten Untermodul in $\mathcal{S}^*(D, \chi_D)$ bezeichnen wir mit $A(D, \chi_D)$. Da die Poincaréreihen G_r^D den Raum $S_2(D, \chi_D)$ erzeugen, gilt

$$A(D, \chi_D) \cong \mathbb{Z}^d \quad \text{und} \quad A(D, \chi_D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = S_2^*(D, \chi_D).$$

Man kann nun Satz 2.28 verwenden, um eine Liftung von $A(D, \chi_D)$ nach $\widetilde{\mathrm{Cl}}(X_K)$ zu konstruieren.

[1] Falls $H(m) = \emptyset$, so ist $Y(m) = 0$ in $D(X/\Gamma)$.

Satz 3.1. *Durch die Zuordnung $a_r \mapsto \tilde{Y}(-r)$ $(r \in \mathbb{N})$ wird ein Homomorphismus*

$$\beta : A(D, \chi_D) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Cl}}(X_K) \tag{3.2}$$

definiert.

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß β wohldefiniert ist. Dazu seien $N \in \mathbb{N}$ und $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{Z}$ mit

$$c_1 a_1 + \ldots + c_N a_N = 0 \quad \text{in } A(D, \chi_D).$$

Dann sind mit diesen c_j die Voraussetzungen von Satz 2.28 erfüllt. Folglich ist

$$\Psi(z_1, z_2) = \prod_{j=1}^{N} \Psi_{-j}(z_1, z_2)^{c_j}$$

eine automorphe Form auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ mit

$$(\Psi(z_1, z_2)) = \sum_{j=1}^{N} c_j \pi^*(Y(-j)),$$

und somit ist $\beta(c_1 a_1 + \ldots + c_N a_N) = 0$ in $\widetilde{\mathrm{Cl}}(X_K)$. □

3.2 Die Chernklasse von $Y(m)$

Sei wieder $X = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ und Γ die Hilbertsche Modulgruppe eines reell-quadratischen Zahlkörpers oder eine Untergruppe von endlichem Index.

Jedem Divisor D auf X/Γ ist eine Garbe $\mathcal{L}(D)$ zugeordnet. Die Schnitte von $\mathcal{L}(D)$ über einem offenen Teil $U \subset X/\Gamma$ sind meromorphe Funktionen f mit $(f) \geq -D$ auf U.

Wir nehmen nun vorübergehend an, daß Γ fixpunktfrei auf X operiert. Dann ist X/Γ eine analytische Mannigfaltigkeit und jeder Divisor D auf X/Γ ein Cartierdivisor, d.h. die Garbe $\mathcal{L}(D)$ ist ein Geradenbündel. Damit ist $\mathcal{L}(D)$ eine *Chernsche Klasse*

$$c(D) = c(\mathcal{L}(D)) \in H^2(X/\Gamma, \mathbb{C})$$

zugeordnet, an deren Konstruktion wir erinnern. Man benötigt eine Hermitesche Metrik des Bündels $\mathcal{L}(D)$. Eine solche findet man im vorliegenden Fall wie folgt. Man wählt zunächst eine Trivialisierung des Urbilds $\mathcal{L}(\pi^*(D))$ der Garbe $\mathcal{L}(D)$. Dies ist eine meromorphe Funktion f auf X, welche genau auf $\pi^*(D)$ paßt, d.h. $(f) = \pi^*(D)$. Dann ist

$$J(\gamma, z) = \frac{f(\gamma(z))}{f(z)}, \qquad \gamma \in \Gamma,$$

ein sogenannter Automorphiefaktor, also ein 1-Kozykel von Γ im Ring der holomorphen invertierbaren Funktionen auf X. Eine Bündelmetrik erhält man durch die Wahl einer positiven C^∞-Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ mit

$$h(\gamma z) = |J(\gamma, z)| h(z) \qquad \text{für alle } \gamma \in \Gamma.$$

Die Differentialform

$$\omega = \partial\bar{\partial} \log(h)$$

ist Γ-invariant und geschlossen. Sie liefert (via de Rham Kohomologie) eine Kohomologieklasse in $H^2(X/\Gamma, \mathbb{C})$.

Soweit die Konstruktion, wenn Γ fixpunktfrei operiert. Allgemein wählt man einen Normalteiler $\Gamma_0 \leq \Gamma$ von endlichem Index und erhält mit der angegebenen Konstruktion ein Element aus $H^2(X/\Gamma_0, \mathbb{C})$. Dieses ist invariant unter Γ/Γ_0 und definiert somit ein Element von $H^2(X/\Gamma, \mathbb{C})$ über den Isomorphismus

$$H^2(X/\Gamma, \mathbb{C}) \cong H^2(X/\Gamma_0, \mathbb{C})^{\Gamma/\Gamma_0}.$$

(Diese Isomorphie folgt aus der Tatsache, daß die Kohomologie der endlichen Gruppe Γ/Γ_0 auf Vektorräumen der Charakteristik 0 stets verschwindet.)

Die Konstruktion der Chernschen Klasse ergibt einen Homomorphismus

$$c : \mathrm{Cl}(X_K) \longrightarrow H^2(X_K, \mathbb{C}).$$

Es ist unser Ziel, die Bilder der Heegnerdivisoren $Y(m) \in \mathrm{Cl}(X_K)$ unter c zu berechnen.

Wir erinnern kurz an die Theorie Harders [Ha] über den Aufbau der Kohomologiegruppe $H^2(X_K, \mathbb{C})$. Eine detaillierte Darstellung findet sich auch in [Fr]. Man hat eine Zerlegung

$$H^2(X_K, \mathbb{C}) = H^2_{\mathrm{Eis}}(X_K, \mathbb{C}) \oplus H^{2,0}_{\mathrm{squ}}(X_K, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}_{\mathrm{squ}}(X_K, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}_{\mathrm{squ}}(X_K, \mathbb{C}).$$

Die Klassen der Eisensteinkohomologie $H^2_{\mathrm{Eis}}(X_K, \mathbb{C})$ sind durch Eisensteinreihen gegeben, und $H^{p,q}_{\mathrm{squ}}(X_K, \mathbb{C})$ besteht aus allen Kohomologieklassen, die durch eine quadratintegrierbare Differentialform vom Typ (p, q) repräsentiert werden können.

Der Raum $H^{1,1}_{\mathrm{squ}}(X_K, \mathbb{C})$ spaltet auf in

$$H^{1,1}_{\mathrm{squ}}(X_K, \mathbb{C}) = H^{1,1}_{\mathrm{univ}}(X_K, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}_{\mathrm{cusp}}(X_K, \mathbb{C}).$$

Dabei ist

$$H^{1,1}_{\mathrm{univ}}(X_K, \mathbb{C}) = \mathbb{C}\frac{dz_1 \wedge d\bar{z}_1}{y_1^2} \oplus \mathbb{C}\frac{dz_2 \wedge d\bar{z}_2}{y_2^2}$$

durch die universellen Klassen gegeben, und die cuspidale Kohomologie $H^{1,1}_{\mathrm{cusp}}(X_K, \mathbb{C})$ kann in der folgenden Weise durch Spitzenformen beschrieben werden:

Für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$ setze man

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und bezeichne mit $S_2(\Gamma_K^1)$ den Raum der holomorphen Spitzenformen vom Gewicht 2 bezüglich der Untergruppe

$$\Gamma_K^1 = \{(M', M^*); \quad M \in \Gamma_K\} \leq \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}).$$

Man hat eine injektive Abbildung

$$\begin{gathered} \rho : S_2(\Gamma_K^1) \times S_2(\Gamma_K^1) \longrightarrow H^{1,1}_{\mathrm{squ}}(X_K, \mathbb{C}), \\ (g_1(z_1,z_2), g_2(z_1,z_2)) \mapsto g_1(z_1, -\bar z_2) dz_1 \wedge d\bar z_2 + g_2(z_2, -\bar z_1) dz_2 \wedge d\bar z_1, \end{gathered}$$

und $H^{1,1}_{\mathrm{cusp}}(X_K, \mathbb{C})$ ist gerade das Bild von ρ.

In $H^{1,1}_{\mathrm{cusp}}(X_K, \mathbb{C})$ betrachten wir den Teilraum

$$H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K, \mathbb{C}) = \{f_1(z_1,z_2) dz_1 \wedge d\bar z_2 + f_2(z_1,z_2) dz_2 \wedge d\bar z_1; \quad f_1(-\bar z_2, -\bar z_1) = f_2(z_1, z_2)\}.$$

Offenbar ist $H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K, \mathbb{C})$ genau das Bild der injektiven Abbildung

$$\begin{gathered} \alpha : S_2(\Gamma_K^1) \longrightarrow H^{1,1}_{\mathrm{cusp}}(X_K, \mathbb{C}), \\ g(z_1,z_2) \mapsto g(z_1, -\bar z_2) dz_1 \wedge d\bar z_2 + g(z_2, -\bar z_1) dz_2 \wedge d\bar z_1. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Es wird sich herausstellen, daß die Chernklassen der Heegnerdivisoren $Y(m)$ in

$$H^{1,1}_{\mathrm{univ}}(X_K, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K, \mathbb{C})$$

liegen.

Sei m eine *negative* ganze Zahl. Zagier folgend (siehe [Za1] Appendix 1, [Za2] §6) definieren wir für $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 0$ eine Funktion $\omega_{m,s} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ durch

$$\omega_{m,s}(z_1,z_2) = \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{Z} \\ \lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) - ab = m/D}} \frac{1}{(-az_1z_2 + \lambda z_1 - \lambda' z_2 + b)^2} \frac{(y_1 y_2)^s}{|-az_1z_2 + \lambda z_1 - \lambda' z_2 + b|^{2s}}. \tag{3.4}$$

Diese Reihe konvergiert lokal gleichmäßig absolut für $\sigma > 0$. Daher hat $\omega_{m,s}$ das Transformationsverhalten einer Modulform vom Gewicht 2 bezüglich Γ_K^1. Wie in [Za1] läßt sich zeigen, daß $\omega_{m,s}$ eine holomorphe Fortsetzung in s auf $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma > -1/4\}$ besitzt, und daß

$$\omega_m(z_1,z_2) := \omega_{m,0}(z_1,z_2) \tag{3.5}$$

in $S_2(\Gamma_K^1)$ liegt. Die Fourierentwicklung von $\omega_m(z_1, z_2)$ hat die Form

$$\omega_m(z_1,z_2) = 8\pi^2 \sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu>0\\ \nu'<0}} \Bigg\{ - \sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ r\mid\nu\sqrt{D}\\ \mathrm{N}(\nu/r)=m/D}} r + 2\pi\sqrt{\frac{\nu\nu'}{m}} \sum_{a\geq 1} \frac{1}{a} G_a(m,\nu) J_1\left(\frac{4\pi}{a}\sqrt{\frac{m\nu\nu'}{D}}\right) \Bigg\} e(\nu z_1 - \nu' z_2). \tag{3.6}$$

Satz 3.2. *Es sei m eine negative ganze Zahl. Die Chernsche Klasse des Heegnerdivisors $Y(m)$ ist gegeben durch*

$$c(Y(m)) = -\frac{q_0(m)}{16}\left(\frac{dz_1\wedge d\bar{z}_1}{y_1^2} + \frac{dz_2\wedge d\bar{z}_2}{y_2^2}\right) - \frac{m}{4D}\alpha(\omega_m(z_1,z_2)).$$

Dabei bezeichnet $q_0(m)$ den $|m|$-ten Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe $E(z)$ und α die in (3.3) definierte Abbildung.

Beweis. Nach Satz 2.23 ist $\Psi_m(z_1, z_2)$ eine Trivialisierung der Garbe $\mathcal{L}(\pi^*Y(m))$. Somit folgt aus Lemma 2.24, daß $e^{\xi_m(z_1,z_2)/4}$ eine Hermitesche Metrik auf $\mathcal{L}(Y(m))$ darstellt. Also gilt

$$c(Y(m)) = \frac{1}{4}\,\partial\bar{\partial}\xi_m(z_1,z_2).$$

Wir schreiben die Fourierentwicklung von ξ_m in der Form (vgl. Lemma 2.14 und Satz 2.15)

$$\xi_m(z_1,z_2) = q_0(m)\log(y_1y_2) - 2\sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu>0\\ \mathrm{N}(\nu)=m/D}} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(e(n\nu z_1 + n\nu'\bar{z}_2) + e(-n\nu\bar{z}_1 - n\nu' z_2)\right)$$
$$+ \frac{4\pi}{D}\sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu>0\\ \nu'<0}} \sqrt{\frac{|m|}{|\nu\nu'|}} \sum_{a\geq 1}\frac{1}{a}G_a(m,\nu)J_1\left(\frac{4\pi}{aD}\sqrt{|mD\nu\nu'|}\right)\left(e(\nu z_1 + \nu'\bar{z}_2) + e(-\nu\bar{z}_1 - \nu' z_2)\right)$$

und bestimmen $c(Y(m))$ explizit. Eine einfache Rechnung zeigt

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}\xi_m(z_1,z_2) = \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}q_0(m)\log(y_1y_2) = -\frac{q_0(m)}{4y_1^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_2}\xi_m(z_1,z_2) = \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_2}q_0(m)\log(y_1y_2) = -\frac{q_0(m)}{4y_2^2}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial \bar z_2}\xi_m(z_1,z_2) &= -4\pi^2 \sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu>0\\ \nu'<0}} \Bigg\{ -2 \sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ r\mid\nu\sqrt{D}\\ \mathrm{N}(\nu/r)=m/D}} \frac{\nu\nu'}{r} \\ &\quad - \frac{4\pi}{D}\sqrt{|m\nu\nu'|}\sum_{a\geq 1}\frac{1}{a}G_a(m,\nu)J_1\left(\frac{4\pi}{a}\sqrt{|m\nu\nu'|/D}\right)\Bigg\} e(\nu z_1+\nu'\bar z_2)\\ &= -\frac{8\pi^2 m}{D}\sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu>0\\ \nu'<0}} \Bigg\{ - \sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ r\mid\nu\sqrt{D}\\ \mathrm{N}(\nu/r)=m/D}} r \\ &\quad + 2\pi\sqrt{\frac{\nu\nu'}{m}}\sum_{a\geq 1}\frac{1}{a}G_a(m,\nu)J_1\left(\frac{4\pi}{a}\sqrt{m\nu\nu'/D}\right)\Bigg\} e(\nu z_1+\nu'\bar z_2).\end{aligned}$$

Analog findet man

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial \bar z_1}\xi_m(z_1,z_2) &= -\frac{8\pi^2 m}{D}\sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu>0\\ \nu'<0}} \Bigg\{ - \sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ r\mid\nu\sqrt{D}\\ \mathrm{N}(\nu/r)=m/D}} r \\ &\quad + 2\pi\sqrt{\frac{\nu\nu'}{m}}\sum_{a\geq 1}\frac{1}{a}G_a(m,\nu)J_1\left(\frac{4\pi}{a}\sqrt{m\nu\nu'/D}\right)\Bigg\} e(-\nu \bar z_1-\nu' z_2).\end{aligned}$$

Durch Vergleich mit (3.6) ergibt sich die Behauptung. □

Bemerkung. Die Aussage von Satz 3.2 wurde von Hirzebruch und Zagier vermutet ([HZ] Conjecture 2, 2') und von Oda bewiesen [Od]. Oda's Beweis beruht in großem Maße auf [HZ] und ist von unserem völlig verschieden.

Wir bezeichnen die von den Heegnerdivisoren $Y(m)$ in $\mathrm{Cl}(X_K)$ erzeugte Untergruppe mit $\mathrm{Cl}_{\mathrm{h}}(X_K)$ und analog die von den $\tilde{Y}(m)$ in $\widetilde{\mathrm{Cl}}(X_K)$ erzeugte Untergruppe mit $\widetilde{\mathrm{Cl}}_{\mathrm{h}}(X_K)$.

Die Komposition der Chernklassenabbildung (siehe Satz 3.2)

$$c : \mathrm{Cl}_{\mathrm{h}}(X_K) \longrightarrow H^{1,1}_{\mathrm{univ}}(X_K,\mathbb{C}) \oplus H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K,\mathbb{C})$$

mit der kanonischen Projektion

$$H^{1,1}_{\mathrm{univ}}(X_K,\mathbb{C}) \oplus H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K,\mathbb{C})$$

induziert einen Homomorphismus

$$\tilde c : \widetilde{\mathrm{Cl}}_{\mathrm{h}}(X_K) \longrightarrow H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K,\mathbb{C}), \tag{3.7}$$

so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cl}_{\mathrm{h}}(X_K) & \xrightarrow{c} & H^{1,1}_{\mathrm{univ}}(X_K,\mathbb{C}) \oplus H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K,\mathbb{C}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\widetilde{\mathrm{Cl}}_{\mathrm{h}}(X_K) & \xrightarrow{\tilde{c}} & H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K,\mathbb{C})
\end{array}$$

kommutiert. Durch Komposition von β, $\tilde{c}$ und α^{-1} (siehe (3.2), (3.7), (3.3)) erhalten wir einen Homomorphismus

$$\jmath : A(D,\chi_D) \longrightarrow S_2(\Gamma_K^1), \tag{3.8}$$

also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
A(D,\chi_D) & \xrightarrow{\beta} & \widetilde{\mathrm{Cl}}_{\mathrm{h}}(X_K) \\
\jmath\downarrow & & \downarrow\tilde{c} \\
S_2(\Gamma_K^1) & \xrightarrow{\alpha} & H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K,\mathbb{C}).
\end{array}$$

Nach Satz 3.1 und Satz 3.2 ist $\jmath$ charakterisiert durch

$$\jmath(a_r) = \frac{r}{4D}\omega_{-r}(z_1,z_2) \qquad (r \in \mathbb{N}). \tag{3.9}$$

Nach Tensorieren mit $\mathbb{C}$ und Identifikation $S_2(D,\chi_D) \to S_2^*(D,\chi_D)$, $f \mapsto \langle\cdot, f\rangle$ erhält man schließlich einen Homomorphismus

$$S_2(D,\chi_D) \longrightarrow S_2(\Gamma_K^1) \quad \text{mit} \quad G_r^D \mapsto \frac{1}{16\pi D}\omega_{-r}(z_1,z_2), \tag{3.10}$$

so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
S_2(D,\chi_D) & \xrightarrow{f\mapsto\langle\cdot,f\rangle} & S_2^*(D,\chi_D) & \xrightarrow{\beta} & \widetilde{\mathrm{Cl}}_{\mathrm{h}}(X_K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} \\
\downarrow & & \jmath\downarrow & & \downarrow\tilde{c} \\
S_2(\Gamma_K^1) & = & S_2(\Gamma_K^1) & \xrightarrow{\alpha} & H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K,\mathbb{C})
\end{array}$$

kommutiert.

3.3 Beziehungen zur Doi-Naganuma-Liftung

Die soeben durchgeführte Konstruktion liefert insbesondere eine Liftung (3.10) elliptischer Spitzenformen von Nebentypus

$$S_2(D,\chi_D) \longrightarrow S_2(\Gamma_K^1).$$

Die Doi-Naganuma-Liftung [DN, Na, Za1, As] ist eine wohlbekannte Abbildung vom gleichen Typ. In der von Zagier betrachteten Form bildet sie den Raum $S_2(D, \chi_D)$ nach $S_2(\Gamma_K)$ ab.

Falls der Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}$ von K eine Einheit negativer Norm enthält, sind $S_2(\Gamma_K^1)$ und $S_2(\Gamma_K)$ identisch. Im folgenden wollen wir zeigen, daß dann die in (3.10) konstruierte Abbildung mit der Doi-Naganuma-Liftung [Za1] übereinstimmt.

Die Frage, wann $\mathcal{O}$ eine Einheit negativer Norm besitzt, wird von Rédei vollständig in [Re] beantwortet. Zum Beispiel ist dies immer dann der Fall, wenn $D \equiv 1 \pmod 4$ eine Primzahl ist. Es ist eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung, daß alle Primteiler von D kongruent 1 modulo 4 sind.

Sicherlich läßt sich Zagiers Konstruktion so verändern, daß man eine „modifizierte Doi-Naganuma-Abbildung" $S_2(D, \chi_D) \to S_2(\Gamma_K^1)$ erhält. Diese sollte dann allgemein mit unserer Abbildung (3.10) übereinstimmen.

Wir geben zunächst die für uns relevanten Ergebnisse aus [Za1] an. Sei n eine *positive* ganze Zahl. Man definiert für $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 0$ eine Funktion $\omega_{n,s} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ durch

$$\omega_{n,s}(z_1, z_2) = \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{Z} \\ \lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \mathrm{N}(\lambda) - ab = n/D}} \frac{1}{(az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b)^2} \frac{(y_1y_2)^s}{|az_1z_2 + \lambda z_1 + \lambda' z_2 + b|^{2s}}. \tag{3.11}$$

Diese Reihe konvergiert lokal gleichmäßig absolut für $\sigma > 0$. Daher hat $\omega_{n,s}$ das Transformationsverhalten einer Modulform vom Gewicht 2 bezüglich Γ_K. Durch Fourierentwicklung läßt sich zeigen, daß $\omega_{n,s}$ eine holomorphe Fortsetzung in s auf $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma > -1/4\}$ besitzt, und daß

$$\omega_n(z_1, z_2) := \omega_{n,0}(z_1, z_2)$$

in $S_2(\Gamma_K)$ liegt. Die Funktion

$$\Omega(z_1, z_2, \tau) = \sum_{n \geq 1} n\omega_n(z_1, z_2) e(n\tau) \tag{3.12}$$

ist damit für festes τ eine Hilbertsche Spitzenform aus $S_2(\Gamma_K)$. Nach [Za1] Theorem 3 ist sie auch für festes (z_1, z_2) eine elliptische Spitzenform in $S_2(D, \chi_D)$.

Satz 3.3 (Zagier). *i) Sei $f \in S_2(D, \chi_D)$. Ist $D_1 \in \mathbb{N}$, $D_1D_2 = D$, so schreibe man die Fourierentwicklung von f in der Spitze D_1 von $\Gamma_0(D)$ in der Form (vgl. (1.15))*

$$(f \mid A_{D_1}^{-1})(z) = \sum_{n \geq 1} a_n^{D_1}(f) e(nz/D_2).$$

Für jedes ganze Ideal $\mathfrak{a}$ von K setze man

$$c(\mathfrak{a}) = \sum_{r \mid \mathfrak{a}} r \sum_{D_2 \mid (D, \mathrm{N}(\mathfrak{a})/r^2)} \psi(D_2) D_2 a^{D_1}_{\mathrm{N}(\mathfrak{a})/r^2 D_2}(f),$$

wobei $\psi(D_2)$ durch (1.8) definiert ist. Dann ist

$$F(z_1,z_2)=\sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{d}^{-1}\\ \nu\gg 0}} c((\nu)\mathfrak{d})e(\nu z_1+\nu' z_2)$$

eine Hilbertsche Spitzenform vom Gewicht 2 bezüglich Γ_K. Durch $f\mapsto F$ wird also eine lineare Abbildung

$$\iota: S_2(D,\chi_D)\longrightarrow S_2(\Gamma_K) \tag{3.13}$$

definiert.
ii) Die Funktion $\Omega(z_1,z_2,\tau)$ ist eine holomorphe Kernfunktion für ι: Es gilt

$$\iota(f)(z_1,z_2)=-\frac{1}{2\pi}\langle f(\tau),\Omega(-\bar z_1,-\bar z_2,\tau)\rangle_\tau.$$

iii) Die Abbildung ι stimmt mit der von Naganuma [Na] und Asai [As] konstruierten Abbildung überein. Insbesondere bildet ι Heckeeigenformen auf Heckeeigenformen ab.

Bemerkung. Um die erwähnte „modifizierte Doi-Naganuma-Abbildung“ $S_2(D,\chi_D)\longrightarrow S_2(\Gamma_K^1)$ zu erhalten, hat man als Kernfunktion vermutlich

$$\Omega_-(z_1,z_2,\tau)=\sum_{n\geq 1} n\omega_{-n}(z_1,z_2)e(n\tau)$$

(mit den in (3.5) definierten ω_{-n}) zu verwenden.

Lemma 3.4. *Der Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}$ von K enthalte eine Einheit $\varepsilon_0>0>\varepsilon_0'$ negativer Norm. Dann ist die Abbildung*

$$S_2(\Gamma_K)\longrightarrow S_2(\Gamma_K^1),\quad f(z_1,z_2)\mapsto f(\varepsilon_0 z_1,-\varepsilon_0' z_2)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Man schreibe

$$f(\varepsilon_0 z_1,-\varepsilon_0' z_2)=f\mid\left(\begin{pmatrix}\varepsilon_0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\varepsilon_0' & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)(z_1,z_2)$$

mit der üblichen slash-Operation und benutze für $\left(\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}a' & -b'\\ -c' & d'\end{smallmatrix}\right)\right)\in\Gamma_K^1$ die Identität

$$\left(\begin{pmatrix}\varepsilon_0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\varepsilon_0' & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a' & -b'\\ -c' & d'\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}-\varepsilon_0' & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varepsilon_0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$
$$=\left(\begin{pmatrix}a & \varepsilon_0 b\\ -\varepsilon_0' c & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a' & \varepsilon_0' b'\\ -\varepsilon_0 c' & d'\end{pmatrix}\right)\in\Gamma_K.$$

□

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Abschnitts.

Satz 3.5. *Der Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}$ von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ enthalte eine Einheit $\varepsilon_0 > 0 > \varepsilon_0'$ negativer Norm. Man identifiziere $S_2(\Gamma_K)$ mit $S_2(\Gamma_K^1)$ durch*

$$f(z_1, z_2) \mapsto -\frac{\pi}{2D} f(\varepsilon_0 z_1, -\varepsilon_0' z_2)$$

und $S_2(D, \chi_D)$ mit $S_2^*(D, \chi_D)$ durch $f \mapsto \langle \cdot, f \rangle$. Es bezeichne β die in (3.2) konstruierte Liftung, $\tilde{c}$ die Chernklassenabbildung (3.7) und ι die Doi-Naganuma-Liftung (3.13). Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} S_2(D, \chi_D) & \xrightarrow{\sim} & S_2^*(D, \chi_D) & \xrightarrow{\beta} & \widetilde{\mathrm{Cl}}_{\mathrm{h}}(X_K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & & {\scriptstyle\jmath}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{c}} \\ S_2(\Gamma_K) & \xrightarrow{\sim} & S_2(\Gamma_K^1) & \xrightarrow{\alpha} & H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K, \mathbb{C}). \end{array} \tag{3.14}$$

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß der linke Teil des Diagramms kommutiert. Da die Poincaréreihen G_r^D den Raum $S_2(D, \chi_D)$ erzeugen, genügt es zu zeigen, daß für alle $r \in \mathbb{N}$

$$\jmath(\langle \cdot, G_r^D \rangle)(z_1, z_2) = -\frac{\pi}{2D} \iota(G_r^D)(\varepsilon_0 z_1, -\varepsilon_0' z_2)$$

gilt. Aus $\langle \cdot, G_r^D \rangle = \frac{1}{4\pi r} a_r$ folgt mit (3.9) die Identität

$$\jmath(\langle \cdot, G_r^D \rangle)(z_1, z_2) = \frac{1}{16\pi D} \omega_{-r}(z_1, z_2).$$

Mit Satz 3.3 ergibt sich

$$\begin{aligned} \iota(G_r^D)(z_1, z_2) &= -\frac{1}{2\pi} \langle G_r^D(\tau), \Omega(-\bar{z}_1, -\bar{z}_2, \tau) \rangle_\tau \\ &= -\frac{1}{2\pi} \overline{\langle \Omega(-\bar{z}_1, -\bar{z}_2, \tau), G_r^D(\tau) \rangle_\tau} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \overline{\omega_r(-\bar{z}_1, -\bar{z}_2)} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \omega_r(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei aus der Fourierentwicklung ([Za1] Theorem 2)

$$\begin{aligned} \omega_n(z_1, z_2) = 8\pi^2 \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \nu \gg 0}} \Bigg\{ &- \sum_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ r \mid \nu\sqrt{D} \\ \mathrm{N}(\nu/r) = n/D}} r \\ &+ 2\pi \sqrt{\frac{\nu\nu'}{n}} \sum_{a \geq 1} \frac{1}{a} G_a(n, \nu) J_1\left(\frac{4\pi}{a} \sqrt{\frac{n\nu\nu'}{D}} \right) \Bigg\} e(\nu z_1 + \nu' z_2) \end{aligned} \tag{3.15}$$

der Reihen ω_n $(n > 0)$; man beachte $\overline{G_a(n,\nu)} = G_a(n,\nu)$.

Somit ist die Behauptung bewiesen, wenn wir noch

$$\omega_r(\varepsilon_0 z_1, -\varepsilon_0' z_2) = \omega_{-r}(z_1, z_2)$$

zeigen können. Dies rechnet man unmittelbar anhand der Fourierentwicklungen (3.15) und (3.6) nach. Dabei hat man $G_a(n, -\varepsilon_0'\nu) = G_a(-n,\nu)$ zu verwenden. □

3.4 Automorphe Formen mit Null- und Polstellen auf Heegnerdivisoren

Wir nehmen im folgenden der Einfachheit halber wieder an, daß der Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}$ von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ eine Einheit negativer Norm enthält.

Satz 3.5 ermöglicht es, Eigenschaften der Doi-Naganuma-Liftung zu verwenden, um die Abbildung β zu studieren.

Auf diese Weise wollen wir folgende von Borcherds gestellte Frage (siehe [Bo3] Example 4.2 und [Bo2] Problem 16.3) im hier betrachteten Spezialfall der Hilbertschen Modulgruppe beantworten: Sei f eine automorphe Form bezüglich Γ_K, deren einzige Null- und Polstellen auf Heegnerdivisoren $Y(m)$ liegen. Besitzt f dann eine Entwicklung in ein Borcherdsprodukt?

Dazu haben wir den Kern der Abbildung β zu bestimmen. Man kann den Raum $S_2(D,\chi_D)$ als direkte Summe der Unterräume

$$S_+ = \left\{ f(z) = \sum_{n\geq 1} a(n)e(nz) \in S_2(D,\chi_D); \quad \chi_D(n) = -1 \Rightarrow a(n) = 0 \right\},$$

$$S_- = \left\{ f(z) = \sum_{n\geq 1} a(n)e(nz) \in S_2(D,\chi_D); \quad \chi_D(n) = +1 \Rightarrow a(n) = 0 \right\}$$

schreiben. Bekanntlich ist die Doi-Naganuma-Liftung ι injektiv auf S_+ und verschwindet identisch auf S_-. Dies folgt aus der Beschreibung von ι auf Heckeeigenformen anhand der zugehörigen L-Funktionen [Na, As] (siehe auch [Ge] Kapitel 6).

Der Zerlegung $S_2(D,\chi_D) = S_+ \oplus S_-$ entspricht eine Zerlegung von $A(D,\chi_D)$, die wir nun angeben wollen. Man setzt

$$A_+ = \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}} \{a_r \in A(D,\chi_D); \quad \chi_D(r) = +1\} \quad \text{und}$$
$$A_- = \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}} \{a_r \in A(D,\chi_D); \quad \chi_D(r) = -1\},$$

dabei bezeichnet $\operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}$ das lineare Erzeugnis über $\mathbb{Z}$, und a_r sind die in (3.1) definierten Funktionale.

Lemma 3.6. *Es gilt $A(D,\chi_D) = A_+ \oplus A_-$, und $f \mapsto \langle\cdot, f\rangle$ bildet S_- bzw. S_+ isomorph auf $A_- \otimes \mathbb{C}$ bzw. $A_+ \otimes \mathbb{C}$ ab.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $f \mapsto \langle \cdot, f \rangle$ den Raum S_- isomorph auf $A_- \otimes \mathbb{C}$ abbildet. Da wir die a_r mit dem Petersson-Produkt auch durch $4\pi r \langle \cdot, G_r^D \rangle$ beschreiben können, genügt es zu zeigen, daß der Raum

$$R = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ G_r^D; \quad \chi_D(r) = -1 \right\}$$

mit S_- übereinstimmt.

Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $\chi_D(r) = -1$. Dann ist $-4r$ kein Quadrat modulo D und damit $\omega_r(z_1, z_2) = 0$. Aus

$$\iota(G_r^D)(z_1, z_2) = -\frac{1}{8\pi^2} \omega_r(z_1, z_2)$$

folgt, daß G_r^D in $S_- = \operatorname{Kern}(\iota)$ liegt, also $R \subset S_-$.

Mit Lemma 1.9 überlegt man sich leicht, daß $S_2(D, \chi_D)$ die orthogonale Summe von R und S_+ ist. Andererseits gilt $S_2(D, \chi_D) = S_+ \oplus S_-$. Es folgt $\dim(R) = \dim(S_-)$ und somit in der Tat $R = S_-$.

Dies zeigt insbesondere, daß S_+ das orthogonale Komplement von S_- ist. Folglich liegen alle Poincaréreihen G_r^D mit $\chi_D(r) = +1$ in S_+. Durch ein Dimensionsargument schließt man wie eben

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ G_r^D; \quad \chi_D(r) = +1 \right\} = S_+.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung. Wir haben hier Eigenschaften der Doi-Naganuma-Liftung wie etwa $\operatorname{Kern}(\iota) = S_-$ benutzt, um zu schließen, daß S_+ orthogonal zu S_- ist. Ein direkter Beweis wäre wünschenswert.

Aus den obigen Überlegungen ergibt sich mit Satz 3.5 unmittelbar

Satz 3.7. *Die Einschränkung der in Satz 3.1 konstruierten Abbildung $\beta : A(D, \chi_D) \longrightarrow \widetilde{\operatorname{Cl}}(X_K)$ auf den Teilraum A_+ ist injektiv. Auf A_- verschwindet β identisch.*

Damit können wir die gestellte Frage beantworten.

Satz 3.8. *Sei f eine automorphe Funktion vom Gewicht k bezüglich Γ_K mit einem beliebigen Charakter. Der Divisor von f in $D(X_K)$ habe die Gestalt*

$$(f) = \sum_{j=1}^{N} c_j Y(-j)$$

mit gewissen $c_j \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$. Dann ist f bis auf einen konstanten Faktor gleich

$$\Psi(z_1, z_2) = \prod_{j=1}^{N} \Psi_{-j}(z_1, z_2)^{c_j},$$

wobei die Funktionen $\Psi_{-j}(z_1, z_2)$ durch (2.30) definiert sind. Insbesondere besitzt f eine Entwicklung in ein Borcherdsprodukt, und k ist durch die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe $E(z)$ gegeben:

$$k = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} c_j q_0(-j).$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$\beta\left(\sum_{j=1}^{N} c_j a_j\right) = 0 \in \widetilde{\mathrm{Cl}}_{\mathrm{h}}(X_K).$$

Aus Satz 3.7 folgt, daß $\sum_{j=1}^{N} c_j a_j$ in A_- liegt. Also gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$ und ganze Zahlen b_j $(j = 1, \dots, N')$ mit $b_j = 0$ für $\chi_D(j) \neq -1$, so daß

$$\sum_{j=1}^{N} c_j a_j + \sum_{j=1}^{N'} b_j a_j = 0 \in A(D, \chi_D).$$

Man schließt man nun mit Satz 2.28, daß

$$\Psi(z_1, z_2) = \prod_{j=1}^{N} \Psi_{-j}(z_1, z_2)^{c_j}$$

eine automorphe Funktion vom Gewicht

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} c_j q_0(-j)$$

ist, deren Divisor in $D(X_K)$ mit (f) übereinstimmt. Dabei berücksichtige man, daß für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $\chi_D(j) = -1$ die Funktion $\Psi_{-j}(z_1, z_2)$ auf triviale Weise konstant ist (in diesem Fall gilt $G_a(-j, \nu) = 0$ für alle $a \in \mathbb{N}$ und $\nu \in \mathfrak{d}^{-1}$).

Somit ist der Quotient $\Psi(z_1, z_2)/f$ eine automorphe Funktion bezüglich Γ_K, die auf ganz $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ keine Null- und Polstellen besitzt. Dann muß $\Psi(z_1, z_2)/f$ aber konstant sein. $\square$

Anhang A

Spezielle Funktionen

In diesem Anhang stellen wir einige Eigenschaften spezieller Funktionen zusammen. Umfangreiche Darstellungen finden sich in [AbSt] und [B1].

1. Für $\nu, z \in \mathbb{C}$ kann man die Besselfunktion erster Art J_ν durch die Reihe

$$J_\nu(z) = (z/2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

definieren. Sie genügt der Differentialgleichung

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0.$$

Für festes ν und $z \to 0$ gilt

$$J_\nu(z) \sim \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \qquad (\nu \neq -1, -2, -3, \dots). \tag{A.1}$$

Für festes ν und $z \in \mathbb{R}$, $z \to \infty$ gilt

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cos(z - \tfrac{\pi}{2}\nu - \tfrac{\pi}{4}) + O(z^{-1}) \right). \tag{A.2}$$

2. Die modifizierten Besselfunktionen I_ν und K_ν definiert man durch

$$I_\nu(z) = (z/2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)},$$
$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\pi\nu)}.$$

Sie sind linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2)w = 0.$$

Für festes ν und $z \to 0$ gilt

$$I_\nu(z) \sim \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \qquad (\nu \neq -1, -2, -3, \dots), \tag{A.3}$$

$$K_\nu(z) \sim \frac{\Gamma(\nu)}{2}(z/2)^{-\nu}, \qquad (\Re(\nu) > 0). \tag{A.4}$$

Für festes ν und $|z| \to \infty$ gilt

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \tag{A.5}$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}. \tag{A.6}$$

Im Falle $\nu = 1/2$ hat man die Beziehungen

$$\sqrt{\frac{\pi z}{2}} I_{1/2}(z) = \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{A.7}$$

$$\sqrt{\frac{2z}{\pi}} K_{1/2}(z) = e^{-z}. \tag{A.8}$$

3. Die Gaußsche hypergeometrische Funktion $F(a, b, c; z) = {}_2F_1(a, b, c; z)$ ist durch

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{n!\Gamma(c+n)} z^n$$

gegeben. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist gleich 1. Offenbar gilt

$$F(1, 1, 2; z) = -z^{-1} \log(1-z).$$

Die Legendrefunktion $Q_\nu(z)$ definiert man dann durch

$$Q_\nu(z) = 2^{-\nu-1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)} z^{-\nu-1} F\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+2}{2}, \nu + \frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right), \qquad (|z| > 1).$$

Sie ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$(1-z^2)\frac{d^2 w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \nu(\nu+1)w = 0.$$

Man hat die Identität ([AbSt] S. 218 (15.4.8))

$$z^\nu \Gamma(\nu) F(\nu, \nu, 2\nu; z) = 2^{2\nu}\pi^{-1/2}\Gamma(\nu + 1/2) Q_{\nu-1}\left(\frac{2}{z} - 1\right). \tag{A.9}$$

Mit der Legendreschen Verdopplungsformel $\Gamma(\nu)\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) = 2^{1-2\nu}\pi^{1/2}\Gamma(2\nu)$ kann man dies auch in der Form

$$z^\nu \frac{\Gamma(\nu)^2}{\Gamma(2\nu)} F(\nu, \nu, 2\nu; z) = 2Q_{\nu-1}\left(\frac{2}{z} - 1\right) \tag{A.10}$$

schreiben.

Anhang B

Häufig verwendete Bezeichnungen

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	Menge der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen
$\mathbb{H}$	Die obere komplexe Halbebene
$\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$	Gruppe der ganzzahligen bzw. reellen 2×2-Matrizen mit Determinante 1.
$\Gamma(1)$	$= \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$
$\left(\frac{a}{b}\right)$	Kroneckersymbol
$d(a)$	Anzahl der positiven Teiler von $a \in \mathbb{N}$
$[x]$	$= \max\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$, Gaußklammer
(a, b)	$= \mathrm{ggT}(a, b)$, größter gemeinsamer Teiler von a und b
$f(\cdot) \ll g(\cdot)$	$\lvert f(\cdot)\rvert \leq C\lvert g(\cdot)\rvert$
$f(\cdot) \ll_\varepsilon g(\cdot)$	$\lvert f(\cdot)\rvert \leq C(\varepsilon)\lvert g(\cdot)\rvert$
$z = x + iy$	Eine komplexe Zahl, üblicherweise $z \in \mathbb{H}$
$s = \sigma + it$	Eine komplexe Zahl
σ	Der Realteil von s
$e(z)$	$= e^{2\pi iz}$ für $z \in \mathbb{C}$
γz	$= \frac{az+b}{cz+d}$ für $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$
$(f\lvert_k \gamma)(z)$	$= (cz+d)^{-k} f(\gamma z)$ für $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$
χ	Ein Charakter
$E^P(z, s)$	Eisensteinreihe vom Gewicht 2 zur Spitze P (S. 13)
$H_c^P(m, n)$	Eine verallgemeinerte Kloostermansumme (S. 15)
D	Eine positive Fundamentaldiskriminante, häufig $D \equiv 1 \pmod 4$
χ_D	$= \left(\frac{D}{\cdot}\right)$
$L(s, \chi_D)$	Dirichletreihe zum Charakter χ_D
$\zeta(s)$	Die Riemannsche Zetafunktion
$\Gamma_0(D)$	$= \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1);\quad c \equiv 0 \pmod D\}$
$M_2(D, \chi_D)$	Vektorraum der Modulformen vom Gewicht 2 und Nebentypus χ_D bezüglich $\Gamma_0(D)$
$S_2(D, \chi_D)$	Untervektorraum der Spitzenformen in $M_2(D, \chi_D)$

D_1	Ein positiver Teiler von D, eine Spitze von $\Gamma_0(D)$
$H_c^{D_1}(m,n)$	Eine verallgemeinerte Kloostermansumme (S. 16)
$E^{D_1}(z)$	Eisensteinreihe in $M_2(D,\chi_D)$ zur Spitze D_1 (S. 16)
$E^D(z)$	Eine gewisse Linearkombination der $E^{D_1}(z)$ (S. 17)
$G_r^{D_1}(z)$	r-te Poincaréreihe vom Gewicht 2 mit Charakter χ_D in der Spitze D_1 (S. 18)
$P_r(z)$	Eine gewisse Linearkombination der $G_r^{D_1}(z)$ (S. 18)
$p_r(n)$	Der n-te Fourierkoeffizient von $P_r(z)$
$H_b(m,n)$	Eine gewisse Linearkombination der $H_c^{D_1}(m,n)$ (S. 19)
$\langle f,g\rangle$	Petersson-Skalarprodukt (S. 19)
K	Der reell-quadratische Zahlkörper $Q(\sqrt{D})$
$\mathcal{O}$	Der Ring der ganzen Zahlen in K
$\mathfrak{d}$	Die Differente in K
$x \mapsto x'$	Konjugation in K
$\mathrm{N}(x) = xx'$	Die Norm von $x \in K$
$\mathrm{tr}(x) = x + x'$	Die Spur von $x \in K$
$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)'$	$= \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ für eine Matrix mit Einträgen aus K
$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^t$	$= \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$, die Transponierte einer Matrix
$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^*$	$= \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right)$
$\Gamma_K = \mathrm{Sl}_2(\mathcal{O})$	Die Hilbertsche Modulgruppe zu K
X_K	$= (\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma_K$
m	Eine negative ganze Zahl
A	Häufig $= \lvert m\rvert/D$
$H(m)$	Heegnerdivisor der Diskriminante m auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ (S. 21)
$\Phi_m(z_1,z_2,s)$	Poincaréreihe zu $H(m)$ (S. 22)
$\varphi_s(z)$	Siehe Seite 22
$\mathcal{M}_{K,m,C}$	Siehe Seite 23
$\Phi_m^a(z_1,z_2,s)$	Teilsumme von $\Phi_m(z_1,z_2,s)$ (S. 26)
R	Repräsentantensystem, siehe Seite 27
$H_s^A(z_1,z_2)$	Hilfsfunktion (S. 27)
$b_s^A(\nu,y_1,y_2)$	Der ν-te Fourierkoeffizient von $H_s^A(z_1,z_2)$
$G_a(m,\nu)$	Exponentialsumme, siehe Seite 27
$S(m)$	Eine gewisse Teilmenge von $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ (S. 28)
$\alpha(r_1,r_2)$	$= \max(\lvert r_1\rvert, \lvert r_2\rvert)$ für $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$
$\beta(r_1,r_2)$	$= \min(\lvert r_1\rvert, \lvert r_2\rvert)$ für $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$
$\mathcal{O}_+^*$	Gruppe der Einheiten $\varepsilon \in \mathcal{O}$ mit $\varepsilon > 0$, $\mathrm{N}(\varepsilon) = 1$
$\mathcal{C}_{s=a}[f(s)]$	Konstanter Term der Laurententwicklung von $f(s)$ an der Stelle a (S. 37)
$\Phi_m(z_1,z_2)$	$= \mathcal{C}_{s=1}\left[\Phi_m(z_1,z_2,s)\right]$
$q_n(m)$	gewisse Fourierkoeffizienten, siehe Seite 37
$\mathcal{M}_{K,m}$, $\mathcal{M}_{K,m}^+$	Siehe Seite 40
$\xi_m(z_1,z_2)$	Siehe Seite 42
$\psi_m(z_1,z_2)$	$= \Phi_m(z_1,z_2) - \xi_m(z_1,z_2)$

W	Eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{H} \times \mathbb{H} - S(m)$
$(\lambda, W) > 0$	$\lambda y_1 + \lambda' y_2 > 0$ für alle $(z_1, z_2) \in W$
$\Psi_m(z_1, z_2)$	Siehe Seite 44
$\Psi(z_1, z_2)$	Ein Borcherdsprodukt
X	Ein normaler irreduzibler komplexer Raum
$\operatorname{supp}(D)$	Der Träger des Disisors D
$D(X)$	Gruppe aller Divisoren auf X
$H(X)$	Untergruppe der Hauptdivisoren in $D(X)$
$\mathrm{Cl}(X)$	Divisorklassengruppe von X
$Y(m)$	Heegnerdivisor der Diskriminante m auf X/Γ (S. 49)
$\widetilde{\mathrm{Cl}}(X/\Gamma)$	Modifizierte Divisorklassengruppe (S. 50)
$\tilde{Y}(m)$	Bild von $Y(m)$ in $\widetilde{\mathrm{Cl}}(X/\Gamma)$
$\mathcal{S}(D, \chi_D)$	$\mathbb{Z}$-Modul aller $f \in S_2(D, \chi_D)$ mit Fourierkoeffizienten aus $\mathbb{Z}$
a_r	Das Funktional $f = \sum_{n \geq 1} a_n e(nz) \mapsto a_r(f) = a_r$ (S. 50)
$A(D, \chi_D)$	Der von den a_r erzeugte Untermodul im Dual von $\mathcal{S}(D, \chi_D)$
β	Der Homomorphismus $A(D, \chi_D) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Cl}}(X_K)$ (S. 51)
$c(D)$	Die Chernsche Klasse des Divisors D
$H^2(X_K, \mathbb{C})$	Zweite Kohomologiegruppe (S. 52)
$H^2_{\mathrm{Eis}}(X_K, \mathbb{C})$	Eisensteinkohomologie
$H^{p,q}_{\mathrm{squ}}(X_K, \mathbb{C})$	Quadratintegrierbare Kohomologie
$H^{1,1}_{\mathrm{univ}}(X_K, \mathbb{C})$	Universelle Kohomologie
$H^{1,1}_{\mathrm{cusp}}(X_K, \mathbb{C})$	Cuspidale Kohomologie
$H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K, \mathbb{C})$	„Symmetrischer Teil“ von $H^{1,1}_{\mathrm{cusp}}(X_K, \mathbb{C})$ (S. 53)
Γ^1_K	$= \{(M', M^*);\quad M \in \Gamma_K\} \leq \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$
$\omega_m(z_1, z_2)$	Poincaréreihe (S. 53)
$\tilde{c}$	Chernklassenabbildung $\widetilde{\mathrm{Cl}}_{\mathrm{h}}(X_K) \longrightarrow H^{1,1}_{\mathrm{sym}}(X_K, \mathbb{C})$ (S. 55)
$\omega_n(z_1, z_2)$	Poincaréreihe (S. 57)
$\Omega(z_1, z_2, \tau)$	Kernfunktion der Doi-Naganuma-Liftung (S. 57)
ι	Doi-Naganuma-Liftung $S_2(D, \chi_D) \longrightarrow S_2(\Gamma_K)$ (S. 58)
S_+, S_-	Teilräume von $S_2(D, \chi_D)$ (S. 60)
A_+, A_-	Teilräume von $A(D, \chi_D)$ (S. 60)
J_ν	Besselfunktion erster Art (S. 63)
I_ν	Modifizierte Besselfunktion (S. 63)
K_ν	Modifizierte Besselfunktion (S. 63)
$F(a, b, c; z)$	Gaußsche hypergeometrische Funktion (S. 64)
$Q_\nu(z)$	Legendrefunktion (S. 64)

Literaturverzeichnis

[AbSt] *M. Abramowitz and I. Stegun*, Pocketbook of Mathematical Functions, Verlag Harri Deutsch (1984).

[As] *T. Asai*, On the Fourier coefficients of automorphic forms at various cusps and some applications to Rankin's convolution, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 48-61.

[B1] *A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi*, Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill (1953).

[B2] *A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi*, Tables of Integral Transforms, McGraw-Hill (1954).

[Bo1] *R. E. Borcherds*, Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products, Invent. Math. **120** (1995), 161-213.

[Bo2] *R. E. Borcherds*, Automorphic forms with singularities on Grassmannians, Invent. Math. **132** (1998), 491-562.

[Bo3] *R. E. Borcherds*, The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions, preprint.

[Br] *S. Breulmann*, Estimates for Fourier coefficients of Siegel cusp forms of degree three, Math. Ann. **310** (1998), 129-160.

[CO] *H. Cohen et J. Oesterle*, Dimensions des espaces de formes modulaires. In: Modular Functions of One Variable VI, Lecture Notes in Math. **627**, Springer-Verlag (1977), 69-78.

[DI] *F. Diamond and J. Im*, Modular forms and modular curves, Canadian Mathematical Society Conference Proceedings **17** (1995), 39-133.

[DN] *K. Doi and H. Naganuma*, On the functional equation of certain Dirichlet series, Invent. Math. **9** (1969), 1-14.

[Fr] *E. Freitag*, Hilbert Modular Forms, Springer-Verlag (1990).

[Ge] *G. van der Geer*, Hilbert Modular Surfaces, Springer Verlag (1988).

[GR] *R. C. Gunning and H. Rossi*, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall (1965).

[GZ] *B. Gross and D. Zagier*, Heegner points and derivatives of L-series, Invent. Math. **84** (1986), 225-320.

[Ha] *G. Harder*, Cohomology of $\mathrm{Sl}_2(\mathcal{O})$, Lie groups and their representations. In: Proc. of the Summer School on Group Representations, I. M. Gelfand ed., A. Hilger (1975), 139-150.

[He] *E. Hecke*, Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, Kgl. Danske Vid. Selskab. Math.-fys. Med. XIII **12** (1940). Werke 789-918.

[Hej] *D. A. Hejhal*, The Selberg Trace Formula for $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, Lecture Notes in Mathematics **1001**, Springer-Verlag (1983).

[HM] *J. Harvey and G. Moore*, Algebras, BPS states, and strings, Nuclear Phys. B **463** (1996), no. 2-3, 315-368.

[HZ] *F. Hirzebruch und D. Zagier*, Intersection Numbers of Curves on Hilbert Modular Surfaces and Modular Forms of Nebentypus, Invent. Math. **36** (1976), 57-113.

[Kn1] *M. I. Knopp*, Rademacher on $J(\tau)$, Poincaré Series of Nonpositive Weights and the Eichler Cohomology, Notices of the AMS **37** (1990), 385-393.

[Kn2] *M. I. Knopp*, Some new results on the Eichler cohomology of automorphic forms, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 607-632.

[Ku1] *S. Kudla*, The theta correspondence and harmonic forms I, Math. Ann. **274**, (1986), 353-378.

[Ku2] *S. Kudla*, The theta correspondence and harmonic forms II, Math. Ann. **277**, (1987), 267-314.

[Ku3] *S. Kudla*, Algebraic cycles on Shimura varieties of orthogonal type, Duke Math. J. **86** (1997), 39-78.

[Mi] *T. Miyake*, Modular Forms, Springer-Verlag (1989).

[Na] *H. Naganuma*, On the coincidence of two Dirichlet series associated with cusp forms of Hecke's "Neben"-type and Hilbert modular forms over a real quadratic field, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 547-555.

[Ni] *D. Niebur*, A class of nonanalytic automorphic functions, Nagoya Math. J. **52** (1973), 133-145.

[Od] *T. Oda*, On Modular Forms Associated with Indefinite Quadratic Forms of Signature $(2, n-2)$, Math. Ann. **231** (1977) 97-144.

[PS1] *I. Piateskii-Shapiro*, On the Saito-Kurokawa lifting, Invent. Math. **71** (1983), 309-338.

[PS2] *I. Piateskii-Shapiro*, L-functions for GSp_4, preprint.

[Re] *L. Rédei*, Die 2-Ringklassengruppe des quadratischen Zahlkörpers und die Theorie der Pellschen Gleichung, Acta Math. Acad. Scient. Hungar. **4** (1953), 31-87.

[Sc] *B. Schoeneberg*, Elliptic Modular Functions, Springer-Verlag (1974).

[Sh1] *G. Shimura*, Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princeton University Press (1971).

[Sh2] *G. Shimura*, On modular forms of half integral weight, Annals of Math. **97** (1973), 440-481.

[Za1] *D. Zagier*, Modular Forms Associated to Real Quadratic Fields, Invent. Math. **30** (1975), 1-46.

[Za2] *D. Zagier*, Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. In: Modular Functions of One Variable VI, Lecture Notes in Math. **627**, Springer-Verlag (1977), 105-169.

Jan Hendrik Bruinier
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 288
69120 Heidelberg
Germany

`bruinier@mathi.uni-heidelberg.de`