Kroneckersche Grenzformeln und Borcherds Produkte

Fabian Völz

TU Darmstadt

19. Februar 2018

Übersicht

Modulformen

Holomorphe Modulformen

Nicht-holomorphe Modulformen

Kroneckersche Grenzformeln

Realisierung von $f_D(z, s)$ als Thetalift

Fortsetzung von Selbergs Poincaré Reihe

Fortsetzung des Thetalifts nach $s = 0$

Borcherds Produkte

Holomorphe Modulformen

Wir nennen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine **Modulform** vom Gewicht k falls:

- $f(z) = (f|_k M)(z) := j(M,z)^{-k} f(Mz)$ für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- f ist holomorph auf $\mathbb{H}$
- f ist holomorph in ∞

Beispiel

Für $k \geqslant 4$ gerade ist die Eisenstein Reihe

$$E_k(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} 1\Big|_k M = \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(cz+d)^k}$$

eine Modulform vom Gewicht k.

Holomorphe Modulformen

Beispiel (Zagier 1975; Bengoechea 2013)

Für $k \geqslant 2$ und $D \in \mathbb{Z}$ eine Diskriminante ist

$$f_{k,D}(z) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_D} \frac{1}{Q(z,1)^k}$$

eine (meromorphe) Modulform vom Gewicht $2k$. Hierbei ist $\mathcal{Q}_D$ = ganz. binäre quadratische Formen der Diskriminante D

- $D > 0$: $f_{k,D}(z)$ ist eine Spitzenform (verschwindet in ∞)
- $D = 0$: $f_{k,0}(z) = E_{2k}(z)$ holomorphe Eisenstein Reihe
- $D < 0$: $f_{k,D}(z)$ ist eine „meromorphe Spitzenform“ (hat Pole in CM-Punkten der Disk. D in $\mathbb{H}$; verschwindet in ∞)

Übersicht

Modulformen

- Holomorphe Modulformen
- Nicht-holomorphe Modulformen

Kroneckersche Grenzformeln

- Realisierung von $f_D(z, s)$ als Thetalift
- Fortsetzung von Selbergs Poincaré Reihe
- Fortsetzung des Thetalifts nach $s = 0$
- Borcherds Produkte

Heckes Trick für kleines Gewicht

Problem: Für $k \leqslant 2$ konvergiert die folgende Reihe nicht:

$$E_k(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} 1 \Big|_k M = \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(cz+d)^k}$$

Heckes Trick:

- Komplexen Parameter s einführen:
  Für $\mathrm{Re}(s) > 1 - \frac{k}{2}$ konvergiert die Reihe

$$E_k(z, s) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} y^s \Big|_k M = \sum_{(c,d)=1} \frac{y^s}{(cz+d)^k |cz+d|^{2s}}$$

- $E_k(z, s)$ in s meromorph fortsetzen
- Falls möglich: Forsetzung von $E_k(z, s)$ in $s = 0$ auswerten

Nicht-holomorphe Eisenstein Reihen

$k \geqslant 4$: $E_k(z,0) = E_k(z)$ holomorphe Eisenstein Reihe

$k = 2$: Heckes nicht-holomorphe Eisenstein Reihe:

$$E_2(z,0) = E_2^*(z) := -\frac{3}{\pi y} + 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d \right) e^{2\pi i n z}$$

eine harmonische Maassform vom Gewicht 2

$k = 0$: $E_\infty(z,s) := E_0(z,s)$ (nicht-holomorphe Eisenstein Reihe)

Aber: $E_\infty(z,0) = 1$ konstant

Satz (Klassiche Kroneckersche Grenzformel)

Für $s \to 0$ ist

$$E_\infty(z,s) = 1 + \log\left(|\Delta(z)|^{1/6} \operatorname{Im}(z) \right) \cdot s + O(s^2)$$

mit $\Delta(z) =$ eindeutige normierte Spitzenform vom Gewicht 12

Verallgemeinerte nicht-holomorphe Eisenstein Reihen

- Analog: Für $k \leqslant 1$ konvergiert $f_{k,D}(z) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_D} \frac{1}{Q(z,1)^k}$ nicht
- **Heckes Trick:** Definiere für $\mathrm{Re}(s) > 1 - k$

$$f_{k,D}(z, s) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_D} \frac{y^s}{Q(z,1)^k |Q(z,1)|^s}$$

$k \geqslant 2$: $f_{k,D}(z, 0) = f_{k,D}(z)$ (holomorpher Fall)

$k = 1$: Wurde für $D > 0$ von Zagier (1975), und für $D < 0$ von Löbrich (2017) betrachtet

$k = 0$: Notation: $f_D(z, s) := f_{0,D}(z, s)$

Aber: $f_D(z, 0) = 0$ falls $D \neq 0$

Frage

Was ist die Kroneckersche Grenzformel von $f_D(z, s)$ für $D \neq 0$?

Kroneckersche Grenzformeln

Ansatz:

(1) Realisiere $f_D(z,s)$ als Thetalift einer Poincaré Reihe $P_D(\tau,s)$

$$f_D(z,s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} P_D(\tau,s)\Theta(\tau,z)d\tau \qquad (\mathrm{Re}(s) \gg 0)$$

(2) Setze $P_D(\tau,s)$ in s meromorph fort und bestimme $P_D(\tau,0)$

(3) Bestimme den Thetalift

$$\tilde{f}_D(z) = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} P_D(\tau,0)\Theta(\tau,z)d\tau$$

(4) Hoffe, dass $f_D(z,s) = \tilde{f}_D(z) \cdot s + O(s^2)$ für $s \to 0$

Übersicht

Modulformen

Holomorphe Modulformen

Nicht-holomorphe Modulformen

Kroneckersche Grenzformeln

Realisierung von $f_D(z, s)$ als Thetalift

Fortsetzung von Selbergs Poincaré Reihe

Fortsetzung des Thetalifts nach $s = 0$

Borcherds Produkte

Selbergs Poincaré Reihe

Definiere **Selbergs Poincaré Reihe** vom Gewicht k als

$$P_{k,D}(\tau,s) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} v^s e^{2\pi i D\tau}\Big|_k M \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1 - k/2)$$

Theorem (v. Pippich, Schwagenscheidt, V. 2017)

Sei $D \in \mathbb{Z}$ eine Diskriminante. Dann ist

$$\Phi(z; P_{1/2,D}(\,\cdot\,,s)) = \Gamma(s)\, f_D(z,s)$$

für $\mathrm{Re}(s) > 3/4$.

Hierbei ist

$$\Phi(z; P_{1/2,D}(\,\cdot\,,s)) = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}}^{\mathrm{reg}} P_{1/2,D}(\tau,s)\overline{\Theta(\tau,z)}v^{1/2}\,\frac{du\,dv}{v^2}$$

der **Borcherds Lift** von $P_{1/2,D}(\tau,s)$, modular vom Gewicht 0

Selbergs Poincaré Reihe

Definiere **Selbergs Poincaré Reihe** vom Gewicht k als

$$P_{k,D}(\tau, s) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} v^s e^{2\pi i D \tau} \Big|_k M \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1 - k/2)$$

Theorem (v. Pippich, Schwagenscheidt, V. 2017)

Sei $D \in \mathbb{Z}$ eine Diskriminante. Dann ist

$$\Phi_D(z, s) = \Gamma(s)\, f_D(z, s)$$

für $\mathrm{Re}(s) > 3/4$.

Notation:

- $P_D(\tau, s) := P_{1/2,D}(\tau, s)$ – Gewicht $\frac{1}{2}$ Poincaré Reihe
- $\Phi_D(z, s) := \Phi_0(z; P_D(\,\cdot\,, s))$ – Borcherds Lift von $P_D(\tau, s)$

Übersicht

Modulformen

- Holomorphe Modulformen
- Nicht-holomorphe Modulformen

Kroneckersche Grenzformeln

- Realisierung von $f_D(z, s)$ als Thetalift
- Fortsetzung von Selbergs Poincaré Reihe
- Fortsetzung des Thetalifts nach $s = 0$
- Borcherds Produkte

Meromorphe Fortsetzung von Selbergs Poincaré Reihe

Skizze der meromorphen Fortsetzung von $P_D(\tau, s)$:

$D = 0$: Fortsetzung von $P_0(\tau, s) = E_{1/2}(\tau, s)$ ist bekannt

$D > 0$: $P_D(\tau, s)$ ist für $D > 0$ quadrat-integrierbar

Spektralentwicklung bzgl. Δ_{hyp} liefert Fortsetzung

Schwierigkeit: kontinuierliches Spektrum vorhanden

$D < 0$: Forsetzung über die Fourierentwicklung

Schwierigkeit: Studium von Kloosterman Zetafunktionen

Auswertung von Selbergs Poincaré Reihe bei $s = 0$

Theorem (v. Pippich, Schwagenscheidt, V. 2017)

$D > 0$: $P_D(\tau, 0) = 0$ *(Nullfunktion)*

$D = 0$: $P_D(\tau, 0) = \theta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2}$ *(klassische Thetafunktion)*

$D < 0$: $P_D(\tau, 0)$ *ist die eindeutige schwach holomorphe Modulform vom Gewicht* $\frac{1}{2}$ *mit Fourierentwicklung* $q^D + O(q)$

Allgemeiner ist $P_D(\tau, 0)$ für quadratfreies Level N:

$D > 0$: die holomorphe Poincaré Reihe vom Gewicht $\frac{1}{2}$ zur Diskriminante D mit $\int f(\tau) P_D(\tau, 0) d\tau = c_f(D)$

$D = 0$: endliche Summe von einfachen Thetafunktionen

$D < 0$: harmonische Maassform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ mit Hauptteil q^D, welche orthogonal zu Spitzenformen ist, und von $\xi_{1/2}$ auf eine Spitzenform abgebildet wird

Übersicht

Modulformen

- Holomorphe Modulformen
- Nicht-holomorphe Modulformen

Kroneckersche Grenzformeln

- Realisierung von $f_D(z,s)$ als Thetalift
- Fortsetzung von Selbergs Poincaré Reihe
- Fortsetzung des Thetalifts nach $s = 0$
- Borcherds Produkte

Fortsetzung des Thetalifts nach $s = 0$

Fortsetzung des Thetalifts:

$D \neq 0$: $\Phi_D(z,0) = \Phi(z; P_D(\,\cdot\,,0))$

$D = 0$: $\Phi_D(z,s) = s^{-1} + \Phi(z; P_D(\,\cdot\,,0)) + O(s)$ für $s \to 0$

Erinnerung:

$$f_D(z,s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\,\Phi_D(z,s)$$

Folgerung

Für $s \to 0$ ist

$$f_D(z,s) = \delta_{D,0} + \Phi(z; P_D(\,\cdot\,,0)) \cdot s + O(s^2).$$

Übersicht

Modulformen

- Holomorphe Modulformen
- Nicht-holomorphe Modulformen

Kroneckersche Grenzformeln

- Realisierung von $f_D(z, s)$ als Thetalift
- Fortsetzung von Selbergs Poincaré Reihe
- Fortsetzung des Thetalifts nach $s = 0$
- Borcherds Produkte

Borcherds Produkte

Theorem (Borcherds 1998; Bruinier, Ono 2010)

Sei f eine harmonische Maassform vom Gewicht $1/2$ mit einer „schönen" Fourierentwicklung. Dann ist

$$\Psi(z;f) = e^{2\pi i \rho_f z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i n z}\right)^{c_f(n^2)}$$

eine meromorphe Modulform vom Gewicht $c_f(0)$, welche i.A. mit einem Charakter transformiert, und es gilt

$$\Phi(z;f) = C \cdot c_f(0) - \log\left(|\Psi(z;f)| \operatorname{Im}(z)^{c_f(0)}\right).$$

Für $D \neq 0$ ist $\Phi(z; P_D(\,\cdot\,,0)) = -\log|\Psi(z; P_D(\,\cdot\,,0))|$, also

$$f_D(z,s) = -\log|\Psi(z; P_D(\,\cdot\,,0))| \cdot s + O(s^2)$$

für $s \to 0$

Hyperbolische Kroneckersche Grenzformel

Gesucht: Das Borcherds Produkt $\Psi(z; P_D(\,\cdot\,, 0))$ für $D > 0$

Hyperbolische Kroneckersche Grenzformel

Gesucht: Das Borcherds Produkt $\Psi(z; P_D(\,\cdot\,, 0))$ für $D > 0$

Level $N = 1$: $P_D(\tau, 0) = 0$

Level $N > 1$: $P_D(\tau, 0)$ ist die holomorphe Poincaré Reihe vom Gewicht $\frac{1}{2}$ zur Diskriminante D

Theorem (Jorgenson, Kramer, v. Pippich 2010)

Für $D > 0$ und $N = 1$ gilt

$$f_D(z, s) = O(s^2)$$

für $s \to 0$.

Hyperbolische Kroneckersche Grenzformel

Gesucht: Das Borcherds Produkt $\Psi(z; P_D(\,\cdot\,, 0))$ für $D > 0$

Level $N = 1$: $P_D(\tau, 0) = 0$

Level $N > 1$: $P_D(\tau, 0)$ ist die holomorphe Poincaré Reihe vom Gewicht $\frac{1}{2}$ zur Diskriminante D

Theorem (v. Pippich, Schwagenscheidt, V. 2017)

(a) *Für $D > 0$ kein Quadrat und $N > 1$ gilt*

$$f_D(z, s) = O(s^2) \qquad (s \to 0).$$

(b) *Für $D > 0$ ein Qudrat und $N = pq$ mit $(N, D) = 1$ gilt*

$$f_D(z, s) = \log\left|\frac{\eta(z)\eta(Nz)}{\eta(pz)\eta(qz)}\right| \cdot s + O(s^2) \qquad (s \to 0).$$

Elliptische Kroneckersche Grenzformel

Gesucht: Das Borcherds Produkt $\Psi(z; P_D(\,\cdot\,, 0))$ für $D < 0$

Level $N = 1$: $P_D(\tau, 0) =$ schwach holomorphe Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ mit Fourierentwicklung $q^D + O(q)$

Level $N > 1$: $P_D(\tau, 0) =$ harmonische Maassform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ mit Hauptteil q^D, orthogonal zu Spitzenformen, wird von $\xi_{1/2}$ auf eine Spitzenform abgebildet

Theorem (v. Pippich 2010)

Für $D < 0$ und $N = 1$ gilt

$$f_D(z, s) = -\sum_{Q \in \mathcal{Q}_D / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \log\left|j(z) - j(w_Q)\right| \cdot s + O(s^2)$$

für $s \to 0$.

Elliptische Kroneckersche Grenzformel

Gesucht: Das Borcherds Produkt $\Psi(z; P_D(\,\cdot\,, 0))$ für $D < 0$

Level $N = 1$: $P_D(\tau, 0) =$ schwach holomorphe Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ mit Fourierentwicklung $q^D + O(q)$

Level $N > 1$: $P_D(\tau, 0) =$ harmonische Maassform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ mit Hauptteil q^D, orthogonal zu Spitzenformen, wird von $\xi_{1/2}$ auf eine Spitzenform abgebildet

Theorem (v. Pippich, Schwagenscheidt, V. 2017)

Für $D < 0$, und $N \geqslant 1$ quadratfrei, sodass die Fricke-Gruppe $\Gamma_0^*(N)$ einen eindeutigen Hauptmodul $j_N^*(z) = q^{-1} + O(q)$ hat, gilt

$$f_D(z, s) = -\sum_{Q \in \mathcal{Q}_D/\Gamma_0(N)} \log\left|j_N^*(z) - j_N^*(w_Q)\right| \cdot s + O(s^2)$$

für $s \to 0$.