Fourierentwicklungen von Modulformen an Spitzen

Michalis Neururer, TU Darmstadt

Februar 2018

Sei $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$. Für $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ schreiben wir

$$f|g(z) = \frac{\det(g)^{k/2}}{(cz+d)^k} f(gz).$$

Da $f(z) = f|\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(z) = f(z+1)$ haben wir die Fourierentwiklung

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n, \; q = e^{2\pi i z}.$$

Sei $\mathfrak{c} = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$ eine Spitze von $X_0(N)$ und $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Matrix die ∞ auf $\mathfrak{c}$ abbildet.
Die Funktion $f|g$ ist nicht unbedingt invariant unter $z \mapsto z + 1$.
Aber unter $z \mapsto z + w$, wobei $w = \frac{N}{\mathrm{gcd}(c^2,N)}$ die Weite der Spitze $\mathfrak{c}$ ist.
Daraus folgt, dass $f|g$ eine Fourierentwicklung der Form

$$f|g(z) = \sum_{n\geq 0} a(n;\mathfrak{c}) q_w^n, \; q_w = e^{\frac{2\pi i z}{w}}$$

hat. Die Entwicklung hängt von der Wahl von γ ab. Wenn $\tilde{\gamma}\infty = \mathfrak{c}$ und $b(n,\mathfrak{c})$ die Fourierkoeffizienten von $f|\tilde{\gamma}$ sind, gilt für ein $m \in \mathbb{N}$

$$a(n,\mathfrak{c}) = \zeta_w^{mn} b(n,\mathfrak{c}).$$

Wie berechnet man $a(n, \mathfrak{c})$? Erste Methode

Sei $f = \sum a_n q^n$ eine Neuform.

- Dann ist f eine Eigenfunktion von $W_N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit Eigenwert $\lambda(f) = \pm 1$. Somit gilt

$$f| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = f|W_N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = \frac{\lambda(f)}{N^{k/2}} f\left(\frac{z}{N}\right) = \frac{\lambda(f)}{N^{k/2}} \sum a_n q_N^n.$$

- Allgemeiner: Sei $M|N$ mit $\gcd(M, N/M) = 1$. Auf $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$ operieren die Atkin–Lehner Operatoren W_M die ∞ auf $\frac{M}{N}$ abbilden. Neuformen sind wieder Eigenfunktionen und somit bekommt man die Fourierentwicklung bei $\frac{M}{N}$ aus dem Eigenwert $\lambda_M(f) = \pm 1$.

Wenn N quadratfrei ist bekommt man damit alle Fourierentwicklungen.

Anwendungen

Sei $E/\mathbb{Q}$ eine elliptische Kurve vom Führer N und $\phi : X_0(N) \to E$ eine modulare Parametrisierung. Also gilt $\phi^*\omega_E = cf_E dz$, wobei $f_E = \sum a_n q^n$ die zu E gehörige Neuform ist.

Lemma

Sei $\mathfrak{c} = \frac{a}{c}$ eine Spitze von $X_0(N)$. Dann ist der Verzweigungsgrad von ϕ bei $\mathfrak{c}$ gegeben durch

$$e_\phi(\mathfrak{c}) = \min(\{n : a(n; \mathfrak{c}) \neq 0\}).$$

Korollar

Wenn N quadratfrei ist, ist ϕ an den Spitzen unverzweigt.

Satz (Brunault)

Wenn f_E twist-minimal ist, ist ϕ an den Spitzen unverzweigt.

Anwendungen

- Wenn man alle Fourierentwicklungen von f kennt, kennt man die Komponenten vom Lift von f zu einer vektorwertigen Form zur Weil-Darstellung.
- Berechnung der lokalen Wurzelzahlen $\lambda_M(f)$.
- Sei f eine Neuform. Wir können ihr eine irreduzible automorphe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$-Darstellung zuordnen:

$$f \mapsto \pi_f = \pi_\infty \otimes \bigotimes_p \pi_p$$

  π_∞ hängt nur vom Gewicht von f ab.
  π_p kann man durch die Fourierkoeffizienten von f bei Spitzen bestimmen (N.–Dickson).

Wie berechnet man $a(n, \mathfrak{c})$? Zweite Methode

Seien ϕ, ψ Dirichlet Charaktere modulo M_1 bzw. M_2 und $t \geq 1$:

$$E_l^{\phi,\psi,t}(z) = e_l^{\phi,\psi,t} + 2 \sum_{m,n \geq 1} \phi(m)\psi(n) n^{l-1} q^{nt} \in \mathcal{M}_l(\Gamma_0(M_1 M_2 t), \phi\psi),$$

Satz (Dickson–N. 2016)

Wenn $N = N' p^a q^b$ ist mit N' quadratfrei, die Eisensteinreihen und Produkte von zwei Eisensteinreihen $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$ für $k > 2$. Für $k = 2$ erzeugen sie den Unterraum der von $\mathcal{E}_2(\Gamma_0(N))$ und den kuspidalen Eigenformen f, mit $L(f, 1) \neq 0$ erzeugt wird.

Weisinger (1977) hat die Fourierentwicklungen der $E_l^{\phi,\psi,t}$ an allen Spitzen berechnet.

Wie berechnet man $a(n, \mathfrak{c})$? Zweite Methode

Berechnung von Fourierentwicklung von f:

https://github.com/michaelneururer/products-of-eisenstein-series

Beispiel: f_{11}, die Neuform in $\mathcal{S}_2(11)$.

- **Schritt 1:** Berechne Darstellung von f als Linearkombination von Produkten von Eisensteinreihen:

$$f_{11} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\right) E_1^{\mathbf{1},\phi} E_1^{\mathbf{1},\overline{\phi}} - \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\right) E_1^{\mathbf{1},\phi^3} E_1^{\mathbf{1},\overline{\phi}^3},$$

  ϕ ist der Charakter modulo 11 der 2 auf ζ_{10} abbildet.
  Das kann man berechnen, da man auf beiden Seiten nur endlich viele Koeffizienten vergleichen muss.

- **Schritt 2:** Dann ist

$$f_{11}|g = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\right) E_1^{\mathbf{1},\phi}|g \cdot E_1^{\mathbf{1},\overline{\phi}}|g - \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\right) E_1^{\mathbf{1},\phi^3}|g \cdot E_1^{\mathbf{1},\overline{\phi}^3}|g$$

  und man bekommt die Fourierentwicklung aus Weisinger's Formeln.

Beispiel

$N = 3^5 = 243,\ k = 4$: Die Funktion

$$f_{243} = q - 3q^2 + q^4 + 3q^5 - 10q^7 + 21q^8 + O(q^{10})$$

ist eine Neuform der Stufe 243 und eine Linearkombination von 79 Produkten von Eisensteinreihen.
Die Fourierentwicklung bei den Spitzen $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ und $\frac{1}{81}$ ist

$$\begin{aligned}
f_{243}|\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) &= \tfrac{1}{729}\left((-\zeta_{162}^{29} + \zeta_{162}^{2})q_{27} - 3\zeta_{162}^{31}q_{27}^2 + O(q_{27}^4)\right), \\
f_{243}|\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{smallmatrix}\right) &= \tfrac{1}{9}\left((\zeta_{54}^{14} - \zeta_{54}^{5})q_3 + 3(-\zeta_{54}^{10} + \zeta_{54})q_3^2 + \zeta_{54}^{11}q_3^4 + O(q_3^5)\right), \\
f_{243}|\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 27 & 1 \end{smallmatrix}\right) &= \zeta_9 q - 3\zeta_9^2 q^2 + \zeta_9^4 q^4 + 3\zeta_9^5 q^5 + O(q^6), \\
f_{243}|\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 81 & 1 \end{smallmatrix}\right) &= -(\zeta_3 + 1)q - 3\zeta_3 q^2 - (\zeta_3 + 1)q^4 + 3\zeta_3 q^5 + O(q^6).
\end{aligned}$$

Bemerkungen

- Schritt 1 dauert sehr lange, da man ein riesiges Gleichungssystem über einem riesigen Zahlkörper lösen muss.
- Henri Cohen hat die gleiche Idee in pari integriert (momentan nur in der Entwicklerversion), außer dass die Rechnungen über $\mathbb{C}$ gemacht werden und dann am Ende die Koeffizienten mit dem LLL-Algorithmus zu algebraischen Zahlen konvertiert werden.
  Vorteil: VIEL schneller.
  Nachteil: Das Ergebnis ist nur richtig wenn die Präzision stimmt.

Verbesserungen: Schritt 1 (Gewicht 2)

Statt $E_l^{\phi,\psi,t}$ kann man

$$F_l^{a,b} = c + \sum_{m,n\geq 1, m\equiv a \bmod N} (\zeta_N^{bm} + (-1)^l \zeta_N^{-bm}) n^{l-1} q_N^{mn}$$

benutzen. Die erfüllen bei $l = 1$, $F_l^{a,b}|g = F_l^{(a,b)g}$.

Satz (Borisov–Gunnells 2000)

Produkte von $F_l^{0,b}$ erzeugen den Unterraum von $\mathcal{M}_2(\Gamma_1(N))/\mathcal{E}_2(\Gamma_1(N))$, der von Eigenformen f mit $L(f,1) \neq 0$ erzeugt wird.

Seien E_N die Elemente der Ordnung N in $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$. Die Abbildung $\mu : E_N \to \mathcal{M}_2(\Gamma_1(N))/\mathcal{E}_2(\Gamma_1(N))$,

$$\mu(u,v) = F_1^{0,u} F_1^{0,v}$$

erfüllt $\mu(u,v) + \mu(v,-u) = 0$ und
$\mu(u,v) + \mu(v,-u-v) + \mu(-u-v,u) = 0$.

Für $\Gamma_0(N)$ benutzen wir lieber $\mu_0 = \mathrm{tr}_{\Gamma_1(N)/\Gamma_0(N)}\, \mu$. Aus den Relationen folgt, dass μ_0 sich faktorisiert:

$$\begin{tikzcd}
E_N \arrow[rr, "\mu_0"'] \arrow[dr, "\xi"'] & & \mathcal{M}_2(\Gamma_0(N))/\mathcal{E}_2(\Gamma_0(N)) \\
& H_1(X_0(N), \{\text{Spitzen}\}, \mathbb{Z}) \arrow[ur, "\overline{\mu}_0"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $\xi(u, v) = \{g0, g\infty\}$ die Klasse der Geodäte von $g0$ nach $g\infty$ ist mit $g = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Satz (Borisov–Gunnells)

$\overline{\mu}_0$ ist Hecke-äquivariant.

Für die Neuform f findet man in $H_1(X_0(N), \{\text{Spitzen}\}, \mathbb{Z})$ zwei zugehörige Klassen, $\sigma(f)^{\pm}$ mit den gleichen Hecke Eigenwerten wie f. Aus der Hecke-Äquivarianz von $\overline{\mu}_0$ folgt,

$$\mu_0(\sigma(f)^{\pm}) = cf + E,$$

für $c \in \mathbb{C}$ und $E \in \mathcal{E}_2(\Gamma_0(N))$.
Die Konstante c ist $\neq 0$ genau dann wenn $L(f, 1) \neq 0$. Für f mit $L(f, 1) = 0$ wendet man den Algorithmus in Gewicht 4 auf f^2 an.

Verbesserungen: Welcher Zahlkörper?

Die Spitze $\mathfrak{c} = \frac{a}{c} \in X_0(N)$ ist über $\mathbb{Q}(\zeta_{\gcd(c,N/c)})$ definiert.
Das heißt nicht, dass Fourierentwicklungen von rationalen Modulformen Koeffizienten in dem Körper haben.

Satz (Brunault-N.)

Sei $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$ eine Modulform mit Koeffizientenkörper K_f und $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann hat $f|g$ Koeffizienten $K_f(\zeta_M)$ mit $M = \mathrm{lcm}(N/\gcd(cd, N))$.

Korollar

Für $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))$ und eine Spitze $\mathfrak{c} = \frac{a}{c}$ findet man eine Matrix g mit $g\infty = \mathfrak{c}$, sodass $f|g$ Koeffizienten in $\mathbb{Q}(\zeta_M)$ hat mit $M = \frac{N}{c' \gcd(N,c)}$, wobei c' der größte Teiler von N ist der teilerfremd zu c ist, hat.

Offene Fragen

- Wie schreibt man $\sigma(f)^{\pm}$ als Summe von möglichst wenigen Manin-Symbolen $\{g0, g\infty\}$.
- Welche Nenner treten in Fourierentwicklungen auf?

Danke für eure Aufmerksamkeit.