Randkomponenten der orthogonalen oberen Halbebene und der Siegeloperator

Paul Kiefer

Winterseminar

Gitter

Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ und q die zugehörige nicht-ausgeartete quadratische Form
$V = L \otimes \mathbb{Q}, V(\mathbb{R}) = L \otimes \mathbb{R}, V(\mathbb{C}) = L \otimes \mathbb{C}$
Das *duale Gitter* ist definiert als

$$L' = \{x \in V \mid (x, y) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } y \in L\}.$$

Projektives Modell

Seien

$$P(V(\mathbb{C})) = (V(\mathbb{C}) \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$$

und

$$\mathcal{K} = \{[Z] \in P(V(\mathbb{C})) \mid (Z, Z) = 0, (Z, \overline{Z}) > 0\}$$

$\mathcal{K}$ hat zwei Zusammenhangskomponenten, wir bezeichnen eine mit $\mathcal{K}^+$

Tubengebiet

Sei $z, z' \in V \setminus \{0\}, q(z) = 0 = q(z')$ mit $(z, z') = 1$.

$$K = L \cap z^\perp \cap z'^\perp, W = K \otimes \mathbb{Q}$$

$$V = W \oplus (\mathbb{Q}z' \oplus \mathbb{Q}z)$$

$$\mathcal{H} = \{Z \in W(\mathbb{C}) \mid q(\mathrm{Im}(Z)) > 0\}$$

Lemma

Die Abbildung

$$\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{K}, \quad Z \mapsto [Z + z' - (q(Z) + q(z'))z]$$

ist biholomorph. Die verallgemeinerte obere Halbebene ist

$$\mathbb{H}_n = \psi^{-1}(\mathcal{K}^+)$$

Randkomponenten I

Betrachte Nullquadrik

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N} = \{[Z] \in P(V(\mathbb{C})) \mid (Z, Z) = 0\} \subseteq P(V(\mathbb{C}))$$

Dann

$$\mathcal{K} = \{[Z] \in \mathcal{N} \mid (Z, \overline{Z}) > 0\}$$

Ist $[Z] = [X + iY] \in \mathcal{N}$ mit $(Z, \overline{Z}) = 0$, so gilt $q(X) = q(Y) = 0$
Also: Randpunkte korrespondieren zu isotropen Vektoren

Randkomponenten II

- Sei $e_2\mathbb{R} \subseteq V(\mathbb{R})$ 1-dimensionaler isotroper Unterraum
- Wähle $e_1 \in V(\mathbb{R})$ isotrop mit $(e_1, e_2) = 1$
- Schreiben (z_1, z_2, Z) für $z_1 e_1 + z_2 e_2 + Z$
- Es ist $[1, -q(tZ), tZ] \in \mathcal{K}^+$
- In $P(V(\mathbb{C}))$ gilt

$$[1, -q(tZ), tZ] \overset{t\to\infty}{\to} [0, 1, 0] = [e_2]$$

- Diese Punkte heißen *spezielle Randpunkte* oder 0-dimensionale Randkomponenten
- alle anderen Randpunkte heißen *generisch*

Randkomponenten III

- Sei $F \subseteq V(\mathbb{R})$ 2-dimensionaler isotroper Unterraum
- Es existieren $e_1, e_2, e_3, e_4 \in V(\mathbb{R})$ isotrop, $F = e_1\mathbb{R} \oplus e_3\mathbb{R}$ mit

$$(e_1, e_2) = 1, (e_3, e_4) = 1, (e_i, e_j) = 0 \text{ sonst}$$

- Schreiben (z_1, z_2, z_3, z_4) für $z_1 e_1 + \ldots + z_4 e_4$
- Menge aller generischen Randpunkte, welche durch ein Element aus $F \otimes \mathbb{C}$ dargestellt werden nennen wir 1-dimensionale Randkomponente zu F
- Falls $(z_1, 0, z_3, 0) \in F \otimes \mathbb{C}$ keinen speziellen Randpunkt darstellt, so ist $z_1 \neq 0 \neq z_3$
- Können den Punkt mit $z_1 = 1$ normalisieren, also $(1, 0, -\tau, 0)$

Randkomponenten IV

- Wir haben Einbettung

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathcal{K}^+, \quad (\tau_1, \tau_2) \mapsto [\tau_1, \tau_2, -\tau_1\tau_2, 1]$$

- $(it, \tau) \mapsto [it, \tau, -it\tau, 1] \overset{t\to\infty}{\to} [1, 0, -\tau, 0]$
- $[1, 0, -\tau, 0]$ ist also Randpunkt genau dann, wenn $\tau \in \mathbb{H}$
- 1-dimensionale Randkomponente zu F sieht aus wie $\mathbb{H}$
- Die Menge aller Randpunkte, welche durch $F \otimes \mathbb{C}$ dargestellt werden, ist gleich $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Lemma:

Wir haben bijektive Korrespondenzen zwischen Randkomponenten und isotropen Unterräumen der jeweiligen Dimensionen.

Rationale Randkomponenten I

- Eine Randkomponente heißt rational, falls der zugehörige isotrope Unterraum über $\mathbb{Q}$ definiert ist
- Wir schreiben $\mathbb{H}_n^*$ für die Vereinigung von $\mathbb{H}_n$ mit den rationalen Randkomponenten
- Setze $X_\Gamma = \mathbb{H}_n^*/\Gamma$ für $\Gamma \subseteq O(V)$

Theorem: (Baily-Borel)

Es gibt eine Topologie auf $\mathbb{H}_n^*$, so dass $\mathbb{H}_n$ offen und dicht in $\mathbb{H}_n^*$ liegt und die Einschränkung der üblichen Topologie auf $\mathbb{H}_n$ entspricht. Mit der Quotiententopologie ist X_Γ dann kompakt.

Rationale Randkomponenten II

Zu isotroper Ebene F betrachte

$$N_\Gamma(F) := \{g \in \Gamma \mid g(F) = F\}$$

und

$$Z_\Gamma(F) := \{g \in N_\Gamma(F) \mid g(x) = x \text{ für alle } x \in F\}$$

Können

$$\Gamma_0 = N_\Gamma(F)/Z_\Gamma(F)$$

als Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ auffassen, welche auf der zu F gehörigen Randkomponente durch Möbiustransformationen operiert
Erhalten Einbettung

$$\mathbb{H}^*/\Gamma_0 \hookrightarrow X_\Gamma = \mathbb{H}_n^*/\Gamma$$

Beispiel: Unimodulare Gitter

- L_0 unimodular, negativ definit, $\mathrm{rang}(L_0) = l$
- $L = L_0 \oplus H \oplus H$
- Dann ist L unimodular mit Signatur $(2, l+2)$
- Es existieren bis auf Isomorphie $h(l)$ negativ definite unimodulare Gitter, aber nur genau 1 indefinites unimodulares Gitter der Signatur $(2, l+2)$
- $\Gamma = O(L)$ operiert transitiv auf der Menge der isotropen Geraden

Proposition:

Der Rand von X_Γ besteht aus $h(l)$ 1-dimensionalen Randkomponenten, welche sich in einem Punkt schneiden. Die 1-dimensionalen Randkomponenten sind dabei riemannsche Zahlenkugeln.

Modulformen zur Orthogonalen Gruppe

$F : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ heißt modular zum Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ und Gruppe $\Gamma \subseteq O(V)$, falls

$$F(\sigma Z) = (\sigma(Z), z)^k F(Z) \quad \text{für alle } \sigma \in \Gamma$$

Ist F holomorph so haben wir Fourierentwicklung in der Spitze z

$$F(Z) = \sum_{\lambda \in K'} c(\lambda) e((\lambda, Z))$$

$k = \frac{n}{2} - 1$ heißt singuläres Gewicht und ist F Modulform zum Gewicht k, so gilt

$$F(Z) = \sum_{\substack{\lambda \in K' \\ q(\lambda)=0}} c(\lambda) e((\lambda, Z))$$

Siegeloperator I

- Sei $F = e_2\mathbb{Q} \subseteq V$ isotrop, $e_1 \in V$ isotrop, $(e_1, e_2) = 1$
- Betrachte zugehörige Zerlegung $V = W \oplus (e_1\mathbb{Q} \oplus e_2\mathbb{Q})$
- Schreiben (z_1, z_2, Z) für $z_1 e_1 + z_2 e_2 + Z$
- Zu F gehöriger Randpunkt ist gegeben durch $[0, 1, 0]$
- Es gilt $[1, -q(tZ), tZ] \overset{t\to\infty}{\to} [0, 1, 0]$

Also

$$\begin{aligned} f(F) &= \lim_{t\to\infty} f(tZ) \\ &= \lim_{t\to\infty} \sum_{\lambda\in K'} c(\lambda) e((\lambda, e_1 - q(tZ)e_2 + tZ)) = c(0) \end{aligned}$$

Siegeloperator II

- Sei $F = e_1\mathbb{Q} \oplus e_3\mathbb{Q} \subseteq V$ isotrop, $e_1, e_3 \in V$ isotrop, $(e_1, e_2) = 1 = (e_3, e_4)$, $(e_i, e_j) = 0$ sonst
- Schreiben wieder (z_1, z_2, z_3, z_4, Z)
- Zu F gehörige Randpunkte sind gegeben durch $[1, 0, -\tau, 0]$
- Für $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ ist $[\tau_1, \tau_2, -\tau_1\tau_2, 1] \in \mathcal{K}^+$
- Es gilt $(it, \tau) \mapsto [it, \tau, -it\tau, 1] \overset{t\to\infty}{\to} [1, 0, -\tau, 0]$

$$
\begin{aligned}
f|\Phi(\tau) &= \lim_{t\to\infty} f(it, \tau) \\
&= \lim_{t\to\infty} \sum_{\lambda \in K'} c(\lambda) e((\lambda, ite_1 + \tau e_2 - it\tau e_3 + e_4)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c(k) e(k\tau/N)
\end{aligned}
$$

Beispiel: Eisensteinreihen I

Sei L unimodular. Zu nicht-holomorpher Eisensteinreihe

$$E(\tau, s) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} y^s|_0 M$$

betrachte regularisierten Thetalift

$$\Phi(Z, s) = \int_{\mathcal{F}}^{\mathrm{reg}} E(\tau, s)\Theta(Z, \tau)\mathrm{d}\mu$$

Erhalten orthogonale Eisensteinreihe singulären Gewichts $m = \frac{n}{2} - 1$.

$$\Phi(Z, s) = \frac{\Gamma(s+m)\zeta(2s+m)}{\pi^{s+m}} \sum_{\sigma \in \Gamma_z \backslash \Gamma(L)} \frac{1}{(\sigma(Z), z)^m} q(\mathrm{Im}(\sigma(Z)))^s$$

Beispiel: Eisensteinreihen II

Können Fourierentwicklung von $\Phi(Z,s)$ ausrechnen und erhalten für das Residuum in $s=1$

$$f(Z) = \mathrm{res}_{s=1}(\Phi(Z,s)) = -\frac{B_m}{2m} + \sum_{\substack{\lambda \in K\setminus\{0\} \\ q(\lambda)=0}} \sigma_{m-1}(\lambda) e((\lambda, Z))$$

wobei

$$\sigma_{m-1}(\lambda) = \sum_{n|\lambda} n^{m-1}$$

und $n \mid \lambda$ bedeutet $\frac{\lambda}{n} \in K$.

Beispiel: Eisensteinreihen III

$$f(Z) = -\frac{B_m}{2m} + \sum_{\substack{\lambda \in K' \setminus \{0\} \\ q(\lambda)=0}} \sigma_{m-1}(\lambda) e((\lambda, Z))$$

Der Wert in der Spitze z ist also $-\frac{B_m}{2m}$
Anwenden des Siegeloperators ergibt

$$f|\Phi(\tau) = -\frac{B_m}{2m} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{m-1}(k) e(k\tau)$$

wobei

$$\sigma_{m-1}(k) = \sum_{n|k} n^{m-1}$$

Dies ist eine Eisensteinreihe vom Gewicht m zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Eisensteinreihen IV

Allgemeiner: Falls $L = L_0 \oplus H(N_1) \oplus H(N_2)$
$F \subseteq H(N_1) \oplus H(N_2)$ isotrop
Vektor-wertige nicht-holomorphe Eisensteinreihe

$$E_\beta(\tau, s) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} y^s \mathfrak{e}_\beta|_0 M$$

Sei $\Phi_\beta(\tau, s)$ zugehöriger Thetalift und $f(Z)$ wieder das Residuum in $s = 1$
$\Phi_\beta(\tau, s)$ ist linearkombination orthogonaler Eisensteinreihen und

$$f|\Phi(\tau) = \sum_{b \mod N_1} \sum_{c \mod N_2} C_{b,c} G_m^{(b,c)}(\tau)$$

Danke für eure Aufmerksamkeit