Lokale Modelle

(G, X) Shimura-Datum

Ziel: mod-p-Reduktion der Shimura-Var.
$Sh_K(G, X)$ verstehen,
oder zumindest die lokale Struktur
(z.B. Singularitäten)

Genauer: Betrachte parahorische Levels $K_p \subseteq G(\mathbb{Q}_p)$

d.h.: $G(\mathbb{Q}_p) \circlearrowright \mathcal{BT}(G, \mathbb{Q}_p)$ Bruhat-Tits-Gebäude

Für $G = GL(V)$ sind die Punkte von $\mathcal{BT}^{red}(G, \mathbb{Q}_p)$
gegeben durch Gitterketten in $V_{\mathbb{Q}_p}$
$$\parallel$$
Homothetie-stabile tot. geordn. Menge
von $\mathbb{Z}_p$-Gittern vollen Rangs

Eine parahorische UGr von $G(\mathbb{Q}_p)$ ist dann
eine UGr der Form $K_p = \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{Q}_p)}(x)$, $x \in \mathcal{BT}(G, \mathbb{Q}_p)$
(mod. ein techn. Detail)

Im Fall von GL_2 zwei Fälle bis auf Konj.:

- hyperspez.: Gitterkette $\{p^n(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p)\}_{n \in \mathbb{Z}}$

$\rightsquigarrow K_p = GL_2(\mathbb{Z}_p)$

- Iwahori: Gitterkette

$$\cdots \supseteq p^{-1}\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \supseteq \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \supseteq \mathbb{Z}_p \oplus p\mathbb{Z}_p \supseteq \cdots$$

$$\rightsquigarrow K_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \cap GL_2(\mathbb{Z}_p)$$

Wunschsituation: $\exists$ Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}_K = \tilde{\mathcal{S}}_K(G,X) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"] & \\ \mathcal{S} = \mathcal{S}_K = \mathcal{S}_K(G,X) & & M^{loc} = M^{loc}_K(G,X) \end{tikzcd}$$

$\mathcal{G}_{\mathcal{O}_{E_v}}$-Torsor π

$\tilde{\varphi}$ $\mathcal{G}_{\mathcal{O}_{E_v}}$-äquivar. glatt von rel. Dim $\dim(G)$

von $\mathcal{O}_{E_v}$-Schemata, wobei:

- E Reflexkörper
- $v | p$ Primstelle von E
- $\mathcal{S}$ int. Modell von $Sh_K(G,X)$ über $\mathcal{O}_{E_v}$
- $\mathcal{G} / \mathbb{Z}_p$ parahorische Gruppenschema zu K_p (glatt, affin (nicht notw. reduktiv) mit gen. Faser $G_{\mathbb{Q}_p}$ und $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p) = K_p$)

Bemerkung: $x \in \mathcal{S}(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{\text{Lang}} H^1_{et}(\mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_q, \dots) = 0$

$\longrightarrow \ldots \to H_{et}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q, \mathcal{J}_{\mathbb{F}_q}) \to 0$

$\Rightarrow$ $\tilde{S}_K \times_{S_K} \mathrm{Spec}\,\bar{\mathbb{F}}_q \to \mathrm{Spec}\,\bar{\mathbb{F}}_q$ hat Schnitt $\tilde{x} \in \tilde{S}(\bar{\mathbb{F}}_q)$

$y = \tilde{\varphi}(\tilde{x})$

$\hat{\varphi}, \pi$ glatt von selber rel. Dim.

$\Rightarrow \exists$ Ausdehnung $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}^h_{\tilde{S},x} \to \tilde{S}$ von $\tilde{x}$,

s.d. $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}^h_{\tilde{S},x} \to \tilde{S} \longrightarrow M^{loc}$

einen Isom.

$$\boxed{\mathcal{O}^h_{\tilde{S},x} \cong \mathcal{O}^h_{M^{loc},y}}$$ liefert

Insbesondere: M^{loc} regulär flach ...

$\Rightarrow$ selbes für $\mathcal{S}_{\mathcal{O}_{E_v}} x(v)$

Standardbsp. (GL_2, Iwahori)

R $\mathbb{Z}_p$-Algebra

$$M^{loc}(R) = \left\{ (M_0, M_1) \in \mathbb{P}^1(R) \times \mathbb{P}^1(R) \;\middle|\; \begin{matrix} \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix} M_0 \subseteq M_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & \\ & p \end{pmatrix} M_1 \subseteq M_0 \end{matrix} \right\}$$

(ein Blow-up von $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$ bei Pkt in spez. Faser)

$M^{loc} \cap (D_+(T_0) \times D_+(T_1)) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_p[x, y]/\ldots$

[illegible] $(xy-p)$

$$S(R)=\{\underline{E}_0 \xrightarrow{p:1} \underline{E}_1 \quad (+K^p\text{-Levelstruktur})\}$$

ell. Kurven $/R$ bis auf $\mathbb{Z}_{(p)}$-Isogenie

$$\begin{tikzcd}
H_1^{dR}(E_0/R) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & H_1^{dR}(E_1/R) \arrow[d, phantom, "\|\wr"] \\
\hat{H}_{dR}(E_0/R) & \hat{H}_{dR}(E_1/R) \arrow[l]
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Zariski-lokal isomorph zu

$$\begin{tikzcd}
R^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & R^2 \arrow[d, equal] \\
R^2 & R^2 \arrow[l, "\begin{pmatrix} 1 & \\ & p \end{pmatrix}"']
\end{tikzcd} \qquad (**)$$

Lokales-Mod.-Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& \tilde{S}(R)=\{(E_0 \xrightarrow{p:1} E_1)\in S(R) \;/\; +\text{Isom. } \gamma:(*) \xrightarrow{\sim} (**)\} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde{\Phi}"] & \\
S(R) & & M^{loc}(R)
\end{tikzcd}$$

$$(E_0 \xrightarrow{p:1} E_1, \gamma) \longmapsto \gamma(H/F)$$

$\mathcal{H}F : (\mathrm{Lie}\, E_0^\vee)^\vee \to \mathrm{Lie}(E_1^\vee)^\vee$

ist lok.-Mod.-Diagramm wegen Grothendieck-Messing

Geht ähnlich auch allgemeiner, so lange SV durch ein (hinr. schönes) Modulprob. gegeben ist. Probleme:

- nicht allgemein genug!
- "Analogon von „(*) ≅ (**) Zariski-lok."" oft unangenehm zu zeigen
- Das „naive lok. Modell", das man so erhält, muss oft noch „korrigiert" werden.

<u>Abhilfe</u>: „Gruppentheor." lok. Modelle von Pappas-Zhu.

Vorher: Bsp. $(GL_n, \mu = (1^r, 0^{n-r}), \text{Iwahori})$

⇝ Lok. Mod. hat als R-Punkte, R $\mathbb{Z}_p$-Alg.:

$(L_0, \dots, L_{n-1})$ lok. dir. Summanden von Korang r in R^n

mit $\alpha'(L_0) \subseteq L_1, \dots, \alpha'(L_{n-1}) \subseteq L_0$

mit $\alpha' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ p & & & & 0 \end{pmatrix}$

(t) Alternativ, unnötig kompliziert:

$L_0, \dots, L_{n-1} \subseteq R[t]^n / tR[t]^n$ $R[t]$-U-Mod., s.d. $L_0, \dots, L_{n-1}$ lok. dir. Summanden von Korang r in $R[t]^n / tR[t]^n$ als R-Mod.

mit $\alpha(L_0) \subseteq L_1, \dots, \alpha(L_{n-1}) \subseteq L_0$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ t+p & & & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Zu Pappas-Zhu:</u>

M^{loc} sollte gen. Faser G/P_μ haben

Haben Einbettung $G/P_\mu \hookrightarrow Gr_G$, $g \mapsto g \cdot [\mu]$

wobei $Gr_G = LG/L^+G$,

$LG(R) = G(R((t)))$

$L^+G(R) = G(R[[t]])$

$[\mu] =$ Bild von μ in $LG(\overline{\mathbb{Q}}_p)$

$M^{loc} \otimes_{O_{E_v}} \kappa(v)$ sollte in $Fl_{\mathcal{G}}$ liegen,

$$Fl_{\mathcal{G}} = L\mathcal{G}/L^+\mathcal{G} \quad (\text{über } \overline{\mathbb{F}}_p)$$

Wollen also $Gr_{\mathcal{G},\mathbb{Z}_p}$ über $\mathbb{Z}_p$ mit

$$Gr_{\mathcal{G},\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = Gr_G,$$

$$Gr_{\mathcal{G},\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p = Fl_{\mathcal{G}}$$

Dann $M^{loc} :=$ Abschluss der
$L^+G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$–Bahn von $[\mu]$
in $(Gr_{\mathcal{G},\mathbb{Z}_p})_{O_{E_v}}$

PZ konstruieren gewisses affines glattes Gruppenschema $\underline{\mathcal{G}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}_p}$ mit

$$\underline{\mathcal{G}} \otimes_{\mathbb{Z}_p[t],\, t\mapsto p} \mathbb{Z}_p = \mathcal{G}$$

⇝ globalisierte affine Grassmannsche

$Gr_{\underline{\mathcal{G}},\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}_p}}(X) = \{ (\mathcal{E}, \beta) \mid \mathcal{E}$ $\underline{\mathcal{G}}$-Torsor auf $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}_p} \times X$, β Triv. von $\mathcal{E}|_{\mathbb{A}^1 \ldots}$ $\}$

$$\Gamma = \mathrm{Graph}(X \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}_p})$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\mathbb{Z}_p} := \mathrm{Gr}_{\mathcal{G},\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}_p}} \otimes_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}_p},\, t \mapsto p} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$$

GL_n: $\quad \mathcal{G} = GL(\Lambda_\bullet)$, $\Lambda_\bullet$ Gitterkette

$\underline{\mathcal{G}} = GL(W_\bullet)$, $W_\bullet$ die Urbilder von $\Lambda_\bullet$ im Setting $(+)$

$GL(W_\bullet)$-Torsor $\rightsquigarrow$ $GL(W_i)$-Torsore $\forall i$

Auf diese Weise: PZ-lok. Mod. $\longrightarrow$ klass. lok. Mod.

<u>Kisin-Pappas</u>: Einsatz der PZ-lok Modelle, wenn (G, X) vom abelschen Typ $(+ \ldots)$