

# Die Ekedahl-Oort-Stratifizierung der Flaggenvarietät

Timo Henkel

TU Darmstadt

February 28, 2018

- 1 Setting und Wiederholung
- 2 Vektorbündel auf der Fargues-Fontaine-Kurve
- 3 Abbildung von der Flaggenvarietät

# Notationen und erste Bemerkungen

## Notationen

In diesem Vortrag sei

- $C$  eine algebraisch abgeschlossene und vollständige nicht-archimedische Erweiterung von  $\mathbb{Q}_p$  (z.B.  $C = \mathbb{C}_p = \widehat{\mathbb{Q}_p}$ ),
- $\mathcal{O}_C = \{a \in C \mid |a| \leq 1\}$  der Bewertungsring von  $C$ ,
- $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_C} = \{a \in C \mid |a| < 1\}$  sein maximales Ideal und
- $k := \mathcal{O}_C / \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_C}$  der entsprechende *Restklassenkörper* (ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$ ).

## Wiederholung:

Wir haben das folgende Diagramm von Kategorien:

$$\begin{array}{ccc} \{\mathfrak{p}\text{-divisible Gruppen über } \mathcal{O}_C\} & \xrightarrow{\sim} & \{(T, W)\} \\ \downarrow & & \downarrow ?? \\ \{\mathfrak{p}\text{-divisible Gruppen über } k\} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{Dieudonné-Moduln}\} \end{array}$$

Hierbei ist

- $T$  ein endlich erzeugter freier  $\mathbb{Z}_p$ -Modul und  $W \subseteq T \otimes_{\mathbb{Z}_p} C$  ein  $C$ -Untervektorraum.
- die obere Äquivalenz ist gegeben durch  $G \mapsto (T_p(G), \text{Lie}(G) \otimes_{\mathcal{O}_C} C)$ .

# Flaggenvarietät

- Für natürliche Zahlen  $1 \leq d \leq n$  sei  $\{(T, W)\}^{(n,d)}$  die volle Unterkategorie von  $\{(T, W)\}$  bestehend aus solchen Paaren  $(T, W)$  mit  $\text{rank}_{\mathbb{Z}_p}(T) = n$  und  $\dim_C(W) = d$ .
- Die Wahl von Trivialisierungen  $\varphi : T \cong \mathbb{Z}_p^n$  liefert eine (nicht-kanonische) Abbildung

$$\begin{aligned} \{(T, W)\}^{(n,d)} &\rightarrow \mathcal{F}l_{(n,d)}(C) := \mathcal{F}l_{GL_n, \mu_d}(C) \\ &= \{d\text{-dimensionale Untervektorräume des } C^n\}. \end{aligned}$$

## Vorgehen

Wir definieren eine Abbildung  $\mathcal{F}l_{(n,d)}(C) \rightarrow \{\text{Dieudonné-Moduln}\}$ , indem wir ein geometrisches Objekt konstruieren, welches Informationen über  $C$  und über  $W(k)$  enthält.

## Der Körper $C^b$

### Definition

$C^b := \lim_{x \mapsto x^p} C = \{(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0} \mid x^{(n)} \in C, (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\}$  (der Tilt von  $C$ )

### Bemerkung

- $C^b$  ist ein algebraisch abgeschlossener, vollständiger, nicht-archimedischer Körper mit Charakteristik  $p$ .
- Die Bewertung auf  $C^b$  ist gegeben durch  $|(x^{(n)})_n|_{C^b} := |x^\sharp| := |x^{(0)}|$ .
- $p^b := (p, p^{1/p}, p^{1/p^2}, \dots) \in C^b$  ist ein topologisch nilpotentes Element.
- $\mathcal{O}_C^b = \mathcal{O}_{C^b}$  und  $\mathcal{O}_C^b / \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_C^b} = \mathcal{O}_C / \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_C} = k$ .

# Der Ring $A_{\text{inf}}$

## Definition und Bemerkung

- Der topologische Ring

$$A_{\text{inf}} := W(\mathcal{O}_C^b) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} [a_i] p^i \mid a_i \in \mathcal{O}_C^b \right\}$$

versehen mit der  $(p, [p^b])$ -adischen Topologie ist ein *Huber-Ring*.

- Der Frobeniusisomorphismus  $\varphi : \mathcal{O}_C^b \rightarrow \mathcal{O}_C^b$  induziert einen Isomorphismus  $\varphi : A_{\text{inf}} \rightarrow A_{\text{inf}}, \sum_{i=0}^{\infty} [a_i] p^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} [a_i]^p p^i$ .
- $\theta : A_{\text{inf}} \rightarrow \mathcal{O}_C, \sum_{i=0}^{\infty} [a_i] p^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{\sharp} p^i$  ist ein surjektiver Ringhomomorphismus dessen Kern von  $\xi := p - [p^b]$  erzeugt wird.

# Das adische Spektrum eines Huber-Rings

## Definition

- Eine **stetige Bewertung** auf einem Huber-Ring  $A$  ist eine Abbildung  $x : A \rightarrow \Gamma_x \sqcup \{0\}$ , wobei  $\Gamma_x$  eine total geordnete abelsche Gruppe ist (z.B.  $\Gamma_x = \mathbb{R}^{>0}$ ), s.d. für alle  $f, g \in A$  und  $\gamma \in \Gamma_x$  gilt:
  - $x(0) = 0$ ,
  - $x(1) = 1$ ,
  - $x(fg) = x(f)x(g)$ ,
  - $x(f + g) \leq \max(x(f), x(g))$ ,
  - $\{f \in A \mid x(f) < \gamma\} \subseteq A$  offen für alle  $\gamma \in \Gamma_x$ .
- Wir schreiben auch  $|f(x)|$  anstatt  $x(f)$ .
- Das **adische Spektrum von  $A$**  ist die Menge aller stetigen Bewertungen auf  $A$  modulo Äquivalenz und wird mit  $\text{Spa}(A)$  bezeichnet.



# Der adische Raum $\mathrm{Spa}(A_{\mathrm{inf}})$

## Bemerkung

- $\mathrm{Spa}(A_{\mathrm{inf}})$  ist ein adischer Raum.
- $\varphi : A_{\mathrm{inf}} \rightarrow A_{\mathrm{inf}}$  induziert einen Isomorphismus  
 $\varphi : \mathrm{Spa}(A_{\mathrm{inf}}) \rightarrow \mathrm{Spa}(A_{\mathrm{inf}})$  via  $\varphi(x)(f) := x(\varphi(f))$ .

$\mathrm{Spa}(A_{\mathrm{inf}})$  enthält die folgenden vier Punkte, benannt nach ihren Restklassenkörpern:

- $x_k$  induziert durch  $A_{\mathrm{inf}} = W(\mathcal{O}_C^b) \rightarrow W(k) \rightarrow k$ .
- $x_L$  induziert durch  $A_{\mathrm{inf}} \rightarrow W(k) \rightarrow W(k)[\frac{1}{p}] =: L$ .
- $x_C$  induziert durch  $A_{\mathrm{inf}} \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}_C \rightarrow C$ .
- $x_{C^b}$  induziert durch  $A_{\mathrm{inf}} \rightarrow \mathcal{O}_C^b \rightarrow C^b$ .

# Veranschaulichung von $\text{Spa}(A_{\text{inf}})$

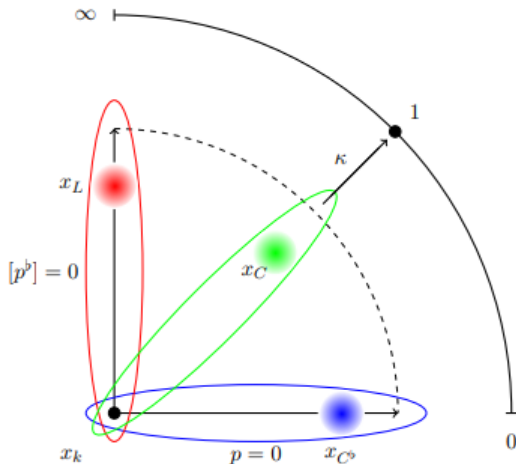


Figure: Aus lecture notes on  $p$ -adic geometry (Scholze, Weinstein)

# Eigenschaften von $\mathrm{Spa}(A_{\mathrm{inf}})$

## Beobachtungen

- $x_k$  ist der einzige *nicht-analytische* Punkt von  $\mathrm{Spa}(A_{\mathrm{inf}})$ .
- Für jeden anderen Punkt  $x$  findet man eine eindeutige *Generisierungen*  $\tilde{x}$  vom Rang 1.
- Dies erlaubt die Definition einer stetigen surjektiven Abbildung

$$\kappa : \mathrm{Spa}(A_{\mathrm{inf}}) \setminus \{x_k\} =: \mathcal{Y} \rightarrow [0, \infty], x \mapsto \frac{\log(\tilde{x}([p^b]))}{\log(\tilde{x}(p))}.$$

- Für ein beliebiges offenes Intervall  $I \subseteq [0, \infty]$  setzen wir  $\mathcal{Y}_I := \kappa^{-1}(I)$ .
- $\varphi$  *rotiert* Punkte gegen die  $([p^b] = 0)$ -Achse, da  $\kappa(\varphi(x)) = p\kappa(x)$ .

# Veranschaulichung von $\text{Spa}(A_{\text{inf}})$

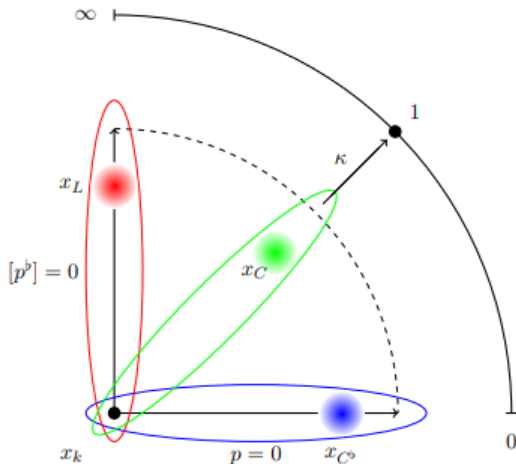


Figure: Aus lecture notes on  $p$ -adic geometry (Scholze, Weinstein)

# Die adische Fargues-Fontaine-Kurve

## Definition

Der adische Raum  $\mathcal{X}_{FF} := \mathcal{Y}_{(0,\infty)}/\varphi^{\mathbb{Z}}$  heißt **adische Fargues-Fontaine-Kurve**.

## Bemerkung

Vektorbündel auf  $\mathcal{X}_{FF}$  entsprechen  $\varphi$ -äquivalenten Vektorbündeln auf  $\mathcal{Y}_{(0,\infty)}$ , d.h. Paaren  $(\mathcal{E}, \varphi_{\mathcal{E}})$  bestehend aus

- einem Vektorbündel  $\mathcal{E}$  auf  $\mathcal{Y}_{(0,\infty)}$  und
- einem Isomorphismus von Vektorbündeln  $\varphi_{\mathcal{E}} : \varphi^* \mathcal{E} \cong \mathcal{E}$ .

# Die algebraische Fargues-Fontaine-Kurve

## Theorem (Fontaine, Fargues)

- Aus den Geradenbündeln auf  $\mathcal{X}_{FF}$  konstruiert man ein reguläres noethersches Schema  $X_{FF}$  der Dimension 1 mit einem Morphismus von lokal geringten Räumen  $\mathcal{X}_{FF} \rightarrow X_{FF}$ .
- Dieser Morphismus induziert eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der Vektorbündel auf  $X_{FF}$  und der Kategorie der Vektorbündel auf  $\mathcal{X}_{FF}$ .
- Die abgeschlossenen Punkte von  $X_{FF}$  korrespondieren zu *Untilts von  $C^b$*  (d.h. Paaren  $(C', \psi : (C')^b \cong C^b)$ ).
- $U := X_{FF} \setminus \{x_C\}$  ist das affine Spektrum eines Hauptidealringes  $B_e$ .

# Der Ring $B_{dR}^+$

## Beobachtungen

- $B_{dR}^+ := \widehat{\mathcal{O}_{X_{FF}, X_C}} = \widehat{\mathcal{O}_{X_{FF}, X_C}}$  ist ein diskreter Bewertungsring mit Uniformisierer  $\xi = (p - [p^b])$  und Restklassenkörper  $C$ .
- Wir setzen  $B_{dR} := \text{Quot}(B_{dR}^+)$ .
- Vektorbündel auf  $X_{FF}$  korrespondieren zu Tripeln  $(M_e, M_{dR}^+, \alpha)$
- Hierbei ist  $M_e$  (bzw.  $M_{dR}^+$ ) ein endlich erzeugter freier  $B_e$ - (bzw.  $B_{dR}^+$ -)Modul und  $\alpha : M_e \otimes_{B_e} B_{dR} \cong M_{dR}^+ \otimes_{B_{dR}^+} B_{dR}$  ein Isomorphismus.
- Isomorphieklassen von Vektorbündeln vom Rang  $n$  auf  $X_{FF}$  korrespondieren zu Elementen des Doppelquotienten

$$\text{GL}_n(B_e) \backslash \text{GL}_n(B_{dR}) / \text{GL}_n(B_{dR}^+).$$

## Konstruktion der Abbildung: Teil 1

- Zu  $W \in \mathcal{F}l_{(n,d)}(C)$  assoziieren wir das  $B_{dR}^+$ -Gitter  $\Xi_W := \{x \in (B_{dR}^+)^n \mid x \bmod \xi \in W\}$ .
- Damit erhalten wir das Tripel  $(B_e^n, \Xi_W, \alpha)$ , wobei  $\alpha$  durch die Inklusion  $\Xi_W \subseteq (B_{dR})^n = (B_e)^n \otimes_{B_e} B_{dR}$  induziert wird.
- Ein solches Tripel korrespondiert zu einem Vektorbündel  $\mathcal{F}$  auf  $X_{FF}$  zusammen mit einer Trivialisierung  $\beta : \mathcal{F}|_U \cong (\mathcal{O}_{X_{FF}}|_U)^n$ .
- $\mathcal{F}$  korrespondiert zu einem  $\varphi$ -äquivalenten Vektorbündel  $(\mathcal{F}, \varphi_{\mathcal{F}})$  auf  $\mathcal{Y}_{(0,\infty)}$ .
- $\beta$  korrespondiert zu einem  $\varphi$ -äquivalenten Isomorphismus  $\beta'$  auf dem Komplement von  $\varphi^{\mathbb{Z}}(x_C)$  zwischen  $(\mathcal{F}, \varphi_{\mathcal{F}})$  und dem trivialen  $\varphi$ -äquivalenten Bündel  $((\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(0,\infty)}})^n, \varphi)$  auf  $\mathcal{Y}_{(0,\infty)}$ .



# Veranschaulichung von $\text{Spa}(A_{\text{inf}})$

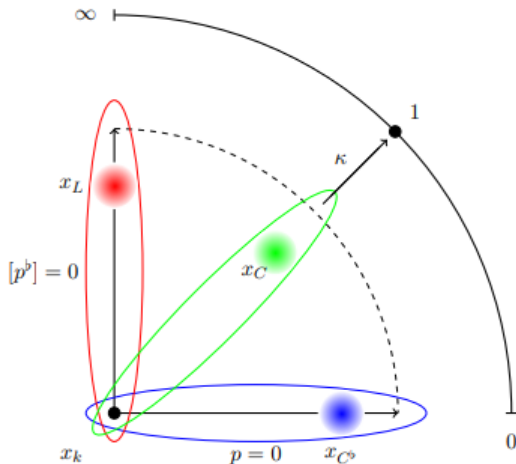


Figure: Aus lecture notes on  $p$ -adic geometry (Scholze, Weinstein)

## Konstruktion der Abbildung: Teil 2

- Das  $\varphi$ -äquivariante Vektorbündel  $(\mathcal{F}, \varphi_{\mathcal{F}})$  lässt sich kanonisch auf  $\mathcal{Y}_{(0, \infty]}$  forsetzen.
- $((\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(0, \infty)}})^n, \varphi)$  lässt sich kanonisch auf  $\mathcal{Y}_{[0, \infty)}$  forsetzen.
- Das Verkleben dieser beiden Bündel entlang  $\beta'$  liefert ein Vektorbündel  $\mathcal{E}'$  auf  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{[0, \infty]}$  mit einem Isomorphismus  $\varphi^* \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}'$  auf dem Komplement von  $\varphi^{\mathbb{Z}}(x_C)$ .
- Dieses Vektorbündel kann wiederum kanonisch auf  $\mathrm{Spa}(A_{\mathrm{inf}})$  fortgesetzt werden.
- Damit erhalten wir einen *Breuil-Kisin-Fargues-Modul*.

### Definition

Ein **Breuil-Kisin-Fargues-Modul** ist ein endlicher freier  $A_{\mathrm{inf}}$ -Modul  $M$  mit einem  $\varphi$ -linearen Isomorphismus  $\varphi_M : M[\frac{1}{\varphi^{-1}(\xi)}] \rightarrow M[\frac{1}{\xi}]$ .

# Breuil-Kisin-Fargues-Moduln

## Theorem (Scholze)

Die folgenden Kategorien sind äquivalent:

- $\{(T, \Xi)\}$ , wobei  $T$  ein endlich erzeugter freier  $\mathbb{Z}_p$ -Modul und  $\Xi \subseteq T \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{dR}$  ein  $B_{dR}^+$ -Gitter ist.
- $\{(\mathcal{F}, \mathcal{F}', \beta, T)\}$ .
- Breuil-Kisin-Fargues-Moduln

## Bemerkung

- Der Funktor  $\{(T, W)\} \rightarrow \{(T, \Xi)\}, (T, W) \mapsto (T, \Xi_W)$  ist volltreu.
- Im oben beschriebenen Fall erhalten wir einen Breuil-Kisin-Fargues-Modul mit  $\xi M \subseteq \varphi_M(M) \subseteq M$ .

## Konstruktion der Abbildung: Teil 3

- Durch den Ringhomomorphismus  $A_{\text{inf}} = W(\mathcal{O}_C^b) \rightarrow W(k)$  erhalten wir einen Funktor von der Kategorie der Breuil-Kisin-Fargues-Moduln in die Kategorie der *Kristalle*:

$$(M, \varphi_M) \mapsto (M \otimes_{A_{\text{inf}}} W(k), \varphi \otimes \sigma).$$

- Ein Kristall, den wir aus einem  $W \in \mathcal{F}l_{(n,d)}(C)$  konstruieren, wird so auf einen Dieudonné-Modul vom Typ  $(n, d)$  (d.h. vom Typ  $(GL_n, \mu_d)$ ) abgebildet.
- Dies definiert eine Abbildung  $\delta : \mathcal{F}l_{(n,d)}(C) \rightarrow \{\text{Dieudonné-Moduln vom Typ } (n, d)\}.$

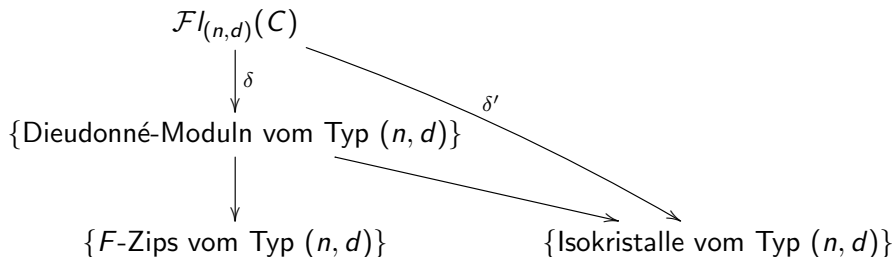
## Beispiel

Wir betrachten den Fall  $n = 2$  und  $d = 1$ .

- Dann ist  $\mathcal{F}l_{(n,d)}(C) = \mathbb{P}^1(C) = \{\text{Geraden im } C^2\}$ .
- In diesem Fall gibt es bis auf Isomorphie nur zwei Dieudonné-Moduln vom Typ  $(n, d)$ .
- Falls die Steigung von  $W$  rational ist, so sind  $(\mathbb{Z}_p^n, W)$  und  $(\mathbb{Z}_p^n, W')$  isomorph in  $\{(T, W)\}$  für  $W' = (1, 0) \cdot C$ .
- Man zeigt, dass dies eine Stratifizierung von  $\mathcal{F}l_{(n,d)}(C) = \mathbb{P}^1(C)$  in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \sqcup \Omega^2$  liefert, wobei  $\Omega^2$  die Drinfeldsche obere Halbebene bezeichnet.

## Ausblick

Wir haben das folgenden kommutative Diagramm:



- Caraiani und Scholze definieren über die Abbildung  $\delta'$  die Newton-Stratifizierung der Flaggenvarietät.
- Mit Hilfe ihrer Beweismethoden wollen wir die Fasern der vertikalen Abbildung untersuchen.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!