Geometrische und arithmetische Siegel-Weil-Formeln (mit T. Yang)

L $$\sum_{M \in \mathrm{Gen}(L)} \frac{\Theta(\tau, M)}{|\mathrm{Aut}(M)|} = E(\tau, L)$$

Geometrische SW-Formel

(V, Q) Signatur $(m, 2)$

$L \subset V$ gerades Gitter (unimodular)

$H = SO(V)$

$\Gamma = SO(L)$

$$\mathcal{D} = \{ z \in V \otimes \mathbb{C} \mid (z, z) = 0, (z, \bar{z}) < 0 \} / \mathbb{C}^\times$$

$$X = \Gamma \backslash \mathcal{D}$$

Spezielle Zykel

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in V^n$, $Q(x) = \frac{1}{2}((x_i, x_j))_{i,j} > 0$

$$\mathcal{D}_x = \{ z \in \mathcal{D} \mid (z, x_i) = 0 \} \subset \mathcal{D}$$

$T \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Q})$, halbganz, $T > 0$ codim n

$$Z(T) = \Gamma \backslash \sum_{\substack{x \in L^n \\ Q(x) = T}} \mathcal{D}_x \hookrightarrow X$$

Satz (KM)

$$A_n^{\mathrm{coh}}(\underset{\underset{\mathbb{H}_n}{\uparrow}}{\tau}) = \sum_{T \geq 0} [Z(T)]\, q^T$$

$$\in M_k(Sp_n(\mathbb{Z})) \otimes H^{2n}(X), \quad k = 1 + \frac{m}{2}.$$

Bem W. Zhang, B.-Raum

$$A_n^{CH}(\tau) \in M_k(Sp_n(\mathbb{Z})) \otimes CH^n(X)$$

Frage: Was für MF erhält man?

Antwort für $n = m$

$Z(T)$ hat dim 0

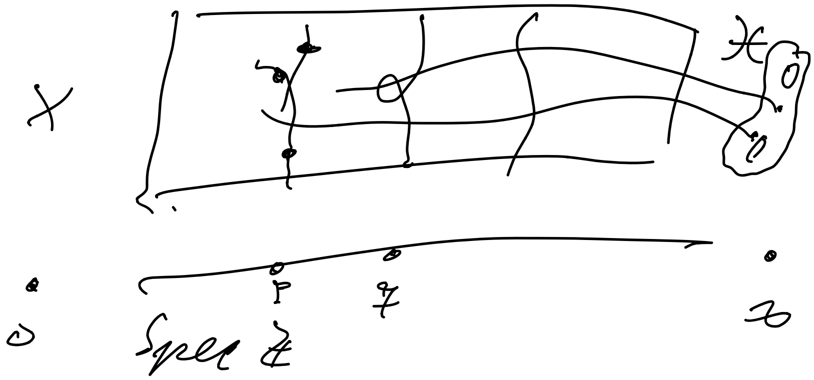
$H^{2n}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ (Ann. X kompakt)

Satz (Kudla)

$$\deg A_n^{\mathrm{coh}}(\tau) = \sum_{T \geq 0} \deg(Z(T))\, q^T$$
$$= E(\tau, \xi, k)$$

Arithmetische SW-Formel

Kudla Programm: sollte analoge Resultate geben für spezielle Zykel auf ganzen Modellen.



$$X \rightsquigarrow \mathcal{X}/\mathbb{Z}$$

$$Z(T) \rightsquigarrow \mathcal{Z}(T) \rightsquigarrow \hat{\mathcal{Z}}(T) = (\mathcal{Z}(T), G_T)$$

$$H^{2n}(X) \rightsquigarrow \widehat{CH}^n(\mathcal{X})$$

Green-Funktionen

$\underline{n=1}$ Für $x \in V$ $\quad D_x$

$$\xi_0(x, \underset{\in D}{z}) = -Ei(-2\pi R(x,z))$$

$$Ei(u) = \int_{-\infty}^{u} e^t \frac{dt}{t}$$

$$R(x,z) = -(x_{z^\perp}, x_z) \quad (=0 \iff z \in D_x)$$

$n \geq 1$ $$\xi_0^n(x,z) = \xi_0(x_1,z) * \cdots * \xi_0(x_n,z)$$

$$G_T(v,z) = \sum_{\substack{x \in L^n \\ Q(x) = T}} \xi_0^n(xa, z)$$

$v \in Pos_n(\mathbb{R})$

$v = a\,{}^t a$

Ganze Modelle

(Kisin, Vasiu, Madapusi-Pera)

$C(V)$ dim 2^{m+2}

Betr. symplektische Form $\Psi(x,y)$

Erhalte Einbettung

$$GSpin(V) \longrightarrow GSp(C(V))$$

$$1 \longrightarrow G_m \longrightarrow GSpin(V) \longrightarrow SO(V) \longrightarrow 1$$

$A \longrightarrow \mathcal{X}$ Vruga-Tabelle als Vect

2^{4m+2}

$C(L)$ - Operation

$S \longrightarrow \mathcal{X}$ A_S

$$V(A_S) \subset \mathrm{End}_{C(L)}(A_S).$$

Raum der speziellen End.

$$(V(A_S), Q)$$

<u>Def</u> $\mathcal{Z}(r)$ = Unter-stack von $\mathcal{X}$ deren S-wertige Punkte $x \in V(A_S)$ mit $Q(x) = r$

$$\hat{Z}(T) = (Z(T), G_T(v)) \in \widehat{CH}^n(\mathcal{X})$$

<u>Bester Fall $n = m+1$</u>

$$\widehat{\deg} : \widehat{CH}^n_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\widehat{\deg} = \sum_{p \leq \infty} \widehat{\deg}_p$$

<u>Vermutung (Kudla)</u>

Sei $n = m+1$ und $T \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Q})$ invertierbar. Dann gilt

$$\widehat{\deg}(\hat{Z}(T,v)) \cdot q^T = E'_T(\tau, 0, \kappa)$$

<u>Satz</u> (B.-Yang)

Die Vermutung ist wahr für

„gute" T.