Die Lewis-Zagier-Korrespondenz

① Eine Maaß-Spitzenform zu $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ mit Eigenwert $\lambda = r(1-r) \in \mathbb{C}$ ist eine glatte Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit:

1) $f(\gamma\tau) = f(\tau) \quad \forall \gamma \in \Gamma$

2) $\Delta f = r(1-r)\, f$

3) $\int_{\mathcal{F}(\mathbb{H})} |f(\tau)|^2 \, d\mu(\tau) < \infty$

4) $c_f(0;0) = 0$, wobei $f(\tau) = \sum_{u \in \mathbb{Z}} c_f(u;v)\, e(nu)$, $(\tau = u + iv)$

Satz (Lewis-Zagier)

Sei $r \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(r) > 0$. Dann gibt es eine Korrespondenz zw. der folgenden Fkten:

1. Maaß-Spitzenformen u auf $SL_2(\mathbb{Z})$ mit EW $\lambda = r(1-r)$
2. Paaren von L-Reihen $L_\varepsilon(s)$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, die in s auf einer Halbebene konvergieren, sodass die Funktionen
$$L_\varepsilon^*(s) := \frac{1}{4\pi^{s+\varepsilon}} \Gamma\left(\frac{s+\varepsilon-r+1/2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+\varepsilon+r-1/2}{2}\right) L_\varepsilon(s)$$
ganz und von endl. Ordnung sind, sowie die Funktionalgl. $L_\varepsilon^*(1-s) = (-1)^\varepsilon L_\varepsilon^*(s)$ erfüllen.
3. holomorphe Funktionen $\varphi : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ mit
$$\varphi(z) = \varphi(z+1) + (z+1)^{-2r} \varphi\left(\frac{z}{z+1}\right)$$
4. holomorphe Funktionen $f(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, invariant unter $z \mapsto z+1$ und beschr. durch $|\mathrm{Im}(z)|^{-t}$ für ein $t > 0$, sodass $f(z) - z^{-2r} f(-1/z)$ hol. fortsetzbar über reelle Achse ist und auf der rechten Halbebene beschr. ist

Beweisideen

① ⇔ ② Mellin-Trafo + inverse MT

② ⇒ ④ $L_\varepsilon(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n,\varepsilon}}{n^s}$

Def. $f(z) = \begin{cases} \sum_{n>0} n^{s-1/2} A_n e^{2\pi i n z}, & \operatorname{Im} z > 0 \\ -\sum_{n<0} |n|^{s-1/2} A_n e^{2\pi i n z}, & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$

berr. MT von f und dann wurscteln

④ ⇒ ③ Def. C(s) $\varphi(z) = f(z) - z^{-2s} f(-1/z)$

⇒ Periodizität von f

3-term fct. eq.

③ ⇒ ② MT + Darst von MT von f in Termen von L_ε

Verbindungen zu klassischer Eichler-Shimura-Theorie

$f \in S_{2k}(SL_2(\mathbb{Z}))$. Dann gibt es folgende (äquivalente) Definitionen des Periodenpolynoms:

1) $r_f(z) \doteq \mathcal{E}_f(z) - z^{2k}\, \mathcal{E}_f(-1/z)$

$$\mathcal{E}_f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{2k+1}} e^{2\pi i n z} \quad \left(f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \right)$$

($\hat{=}$ f aus Korrespondenz)

2) $r_f(x) \doteq \int_0^{\infty} f(\tau)(\tau - x)^{2k-2}\, d\tau$ → φ = Integral einer geschl. Form ass. zu u

$\hat{=}$ Taylor-koeff. von φ

3) $$r_f(x) \doteq \sum_{r=0}^{2k-2} \frac{(-2\pi i)^r}{(2k-2-r)!} L_f(r+1)\, X^r$$

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

<u>Bsp</u>: (Goldfeld)

$$\sigma(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(-q;q)_n} =: \sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, q^{\frac{n-1}{24}}$$

$$\sigma^*(q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2}}{(q;q)^2} =: \sum_{n=-\infty}^{-1} T(n)\, q^{\frac{|n|-1}{24}}$$

Definieren: $$C(\tau) := v^{1/2} \sum_{n \in 1+24\mathbb{Z}} T(n)\, K_0\left(\frac{2\pi |n| v}{24}\right) e\left(\frac{nu}{24}\right)$$

dyn. System

Verbindungen zu mathematischer Physik

Mayer: $s \in \mathbb{C}$, der Transferop. $\mathcal{L}_s$ der Gauss-Abb.

$$\mathcal{L}_s f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^{2s}} f\left(\frac{1}{z+n}\right)$$

erfüllt $Z(s) := \prod_{\gamma} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - e^{-(s+k)\,\ell(\gamma)}\right)$

γ: prim period. Geod. auf $\Gamma \backslash \mathbb{H}$

$$= \det\left(1 - \mathcal{L}_s^2\right)$$

(Die Gauss-Abb bekommt man durch eine Diskretisierung des geod. Flusses auf $\Gamma \backslash \mathbb{H}$)

$\pm$-Eigenfktn von $\mathcal{L}_s$ sind isom. zu (geeigneten) Lsgen von

$$f(x) = f(x+1) + (x+1)^{-2s} f\left(\frac{x}{x+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}_{>0}$$