# Hyperbolische und elliptische Eisenstein Reihen

Fabian Völz

TU Darmstadt

3. März 2015

# Gliederung

# Einleitung / Wiederholung

## Definition

Für eine Geodäte $\mathcal{L}$ von $\Gamma$ definieren wir

$$E_{\mathcal{L}}^{\mathrm{hyp}}(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathcal{L}} \backslash \Gamma} \cosh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(\gamma z, \mathcal{L}))^{-s}, \qquad z \in \mathbb{H}, \mathrm{Re}(s) > 1,$$

die *hyperbolische Eisenstein Reihe* zur Geodäte $\mathcal{L}$.

# Einleitung / Wiederholung

## Definition

Für eine Geodäte $\mathcal{L}$ von $\Gamma$ definieren wir

$$E_{\mathcal{L}}^{\mathrm{hyp}}(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathcal{L}} \backslash \Gamma} \cosh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(\gamma z, \mathcal{L}))^{-s}, \qquad z \in \mathbb{H}, \mathrm{Re}(s) > 1,$$

die *hyperbolische Eisenstein Reihe* zur Geodäte $\mathcal{L}$.

## Definition

Für einen Punkt $w \in \mathbb{H}$ definieren wir

$$E_{w}^{\mathrm{ell}}(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{w} \backslash \Gamma} \sinh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(\gamma z, w))^{-s}, \qquad z \in M, \mathrm{Re}(s) > 1,$$

die *elliptische Eisenstein Reihe* zur Geodäte $\mathcal{L}$. Hierbei ist $M := \mathbb{H} \setminus \Gamma w$.

# Heegner Punkte und Geodäten

- Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $(L, q)$ das Gitter $\mathbb{Z}^3$ in $V$ versehen mit der ganzen quadratischen Form

  $$q(x, y, z) = xy - z^2$$

  der Signatur $(1, 2)$.

# Heegner Punkte und Geodäten

- Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $(L, q)$ das Gitter $\mathbb{Z}^3$ in $V$ versehen mit der ganzen quadratischen Form

$$q(x, y, z) = xy - z^2$$

  der Signatur $(1, 2)$.
- Die entsprechende Grassmannsche ist gegeben durch

$$\mathrm{Gr}(V) = \{U \subseteq V \text{ lin. Unterraum} \colon \dim(U) = 2, q|_U < 0\}.$$

# Heegner Punkte und Geodäten

- Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $(L, q)$ das Gitter $\mathbb{Z}^3$ in $V$ versehen mit der ganzen quadratischen Form

$$q(x, y, z) = xy - z^2$$

der Signatur $(1, 2)$.

- Die entsprechende Grassmannsche ist gegeben durch

$$\mathrm{Gr}(V) = \{U \subseteq V \text{ lin. Unterraum}\colon \dim(U) = 2, q|_U < 0\}.$$

- Es ist $\mathrm{Gr}(V) \cong \mathbb{H}$ und $\mathrm{SO}_0(q) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$.

# Heegner Punkte und Geodäten

- Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $(L, q)$ das Gitter $\mathbb{Z}^3$ in $V$ versehen mit der ganzen quadratischen Form
$$q(x, y, z) = xy - z^2$$
der Signatur $(1, 2)$.
- Die entsprechende Grassmannsche ist gegeben durch
$$\mathrm{Gr}(V) = \{U \subseteq V \text{ lin. Unterraum} \colon \dim(U) = 2, q|_U < 0\}.$$
- Es ist $\mathrm{Gr}(V) \cong \mathbb{H}$ und $\mathrm{SO}_0(q) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$.
- Die folgenden beiden Wirkungen sind miteinander kompatibel:
$$\mathrm{SO}_0(q) \circlearrowright \mathrm{Gr}(V) \quad \text{und} \quad \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \circlearrowright \mathbb{H}.$$

# Heegner Punkte und Geodäten

- Sei $h = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m > 0$.

# Heegner Punkte und Geodäten

- Sei $h = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m > 0$.
- Dann definiert $U_h := h^\perp$ einen Punkt in $\mathrm{Gr}(V)$.

# Heegner Punkte und Geodäten

- Sei $h = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m > 0$.
- Dann definiert $U_h := h^\perp$ einen Punkt in $\mathrm{Gr}(V)$. Dieser entspricht in $\mathbb{H}$ dem Punkt

$$\tau_h := \frac{z}{y} + i\frac{\sqrt{m}}{|y|}.$$

# Heegner Punkte und Geodäten

- Sei $h = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m > 0$.
- Dann definiert $U_h := h^\perp$ einen Punkt in $\mathrm{Gr}(V)$. Dieser entspricht in $\mathbb{H}$ dem Punkt

$$\tau_h := \frac{z}{y} + i\frac{\sqrt{m}}{|y|}.$$

Wir nennen $\tau_h$ einen *Heegner Punkt* der Stufe $m$.

# Heegner Punkte und Geodäten

- Sei $h = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m > 0$.
- Dann definiert $U_h := h^\perp$ einen Punkt in $\mathrm{Gr}(V)$. Dieser entspricht in $\mathbb{H}$ dem Punkt

$$\tau_h := \frac{z}{y} + i\frac{\sqrt{m}}{|y|}.$$

  Wir nennen $\tau_h$ einen *Heegner Punkt* der Stufe $m$.

- Sei $h = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m < 0$.

# Heegner Punkte und Geodäten

- Sei $h = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m > 0$.
- Dann definiert $U_h := h^\perp$ einen Punkt in $\mathrm{Gr}(V)$. Dieser entspricht in $\mathbb{H}$ dem Punkt

$$\tau_h := \frac{z}{y} + i\frac{\sqrt{m}}{|y|}.$$

Wir nennen $\tau_h$ einen *Heegner Punkt* der Stufe $m$.

- Sei $h = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m < 0$.
- Betrachte die Menge $L_h := \{U \in \mathrm{Gr}(V) \colon h \in H\}$.

# Heegner Punkte und Geodäten

- Sei $h = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m > 0$.
- Dann definiert $U_h := h^\perp$ einen Punkt in $\mathrm{Gr}(V)$. Dieser entspricht in $\mathbb{H}$ dem Punkt

$$\tau_h := \frac{z}{y} + i\frac{\sqrt{m}}{|y|}.$$

Wir nennen $\tau_h$ einen *Heegner Punkt* der Stufe $m$.

- Sei $h = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m < 0$.
- Betrachte die Menge $L_h := \{U \in \mathrm{Gr}(V) \colon h \in H\}$. Diese entspricht in $\mathbb{H}$ der Geodäten

$$\mathcal{L}_h := \{\tau \in \mathbb{H} \colon x + y|\tau|^2 - 2z\,\mathrm{Re}(\tau) = 0\}.$$

# Heegner Punkte und Geodäten

- Sei $h = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m > 0$.
- Dann definiert $U_h := h^\perp$ einen Punkt in $\mathrm{Gr}(V)$. Dieser entspricht in $\mathbb{H}$ dem Punkt

$$\tau_h := \frac{z}{y} + i\frac{\sqrt{m}}{|y|}.$$

Wir nennen $\tau_h$ einen *Heegner Punkt* der Stufe $m$.

- Sei $h = (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m < 0$.
- Betrachte die Menge $L_h := \{U \in \mathrm{Gr}(V) \colon h \in H\}$. Diese entspricht in $\mathbb{H}$ der Geodäten

$$\mathcal{L}_h := \{\tau \in \mathbb{H} \colon x + y|\tau|^2 - 2z\,\mathrm{Re}(\tau) = 0\}.$$

Wir nennen $\mathcal{L}_h$ eine *Heegner Geodäte* der Stufe $m$.

# Heegner Punkte und Geodäten

- Für $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ operiert die Gruppe

$$\mathrm{SO}_0(q, \mathbb{Z}) := \mathrm{SO}_0(q) \cap \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$$

auf auf den Heegner Punkten bzw. Geodäten der Stufe $m$.

# Heegner Punkte und Geodäten

- Für $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ operiert die Gruppe

$$\mathsf{SO}_0(q, \mathbb{Z}) := \mathsf{SO}_0(q) \cap \mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$$

  auf auf den Heegner Punkten bzw. Geodäten der Stufe $m$.
- In unserem Fall ist $\mathsf{SO}_0(q, \mathbb{Z}) \cong \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$.

# Heegner Punkte und Geodäten

- Für $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ operiert die Gruppe

$$\mathrm{SO}_0(q,\mathbb{Z}) := \mathrm{SO}_0(q) \cap \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$$

  auf auf den Heegner Punkten bzw. Geodäten der Stufe $m$.
- In unserem Fall ist $\mathrm{SO}_0(q,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$.
- Für $q(x,y,z) = Nxy - z^2$ mit $N$ quadratfrei erhält man zum Beispiel $\mathrm{SO}_0(q,\mathbb{Z}) \cong \Gamma_0^*(N)/\{\pm 1\}$ mit

$$\Gamma_0^*(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a\sqrt{Q} & b/\sqrt{Q} \\ cN/\sqrt{Q} & d\sqrt{Q} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{Z} \\ Q|N \end{matrix} \right\}.$$

# Hyperbolische und elliptische Eisenstein Reihen der Stufe $m$

## Definition

Für $m < 0$ definieren wir

$$E_m^{\mathrm{hyp}}(z,s) = \sum_{\substack{\mathcal{L} \text{ Heegner Geodäte} \\ \text{der Stufe } m \text{ modulo } \Gamma}} E_{\mathcal{L}}^{\mathrm{hyp}}(z,s), \qquad z \in \mathbb{H}, \mathrm{Re}(s) > 1,$$

die *hyperbolische Eisenstein Reihe* der Stufe $m$.

# Hyperbolische und elliptische Eisenstein Reihen der Stufe $m$

## Definition

Für $m < 0$ definieren wir

$$E_m^{\mathrm{hyp}}(z,s) = \sum_{\substack{\mathcal{L} \text{ Heegner Geodäte} \\ \text{der Stufe } m \text{ modulo } \Gamma}} E_{\mathcal{L}}^{\mathrm{hyp}}(z,s), \qquad z \in \mathbb{H}, \mathrm{Re}(s) > 1,$$

die *hyperbolische Eisenstein Reihe* der Stufe $m$.

## Definition

Für $m > 0$ definieren wir

$$E_m^{\mathrm{ell}}(z,s) = \sum_{\substack{\tau \text{ Heegner Punkt} \\ \text{der Stufe } m \text{ modulo } \Gamma}} E_{\tau}^{\mathrm{ell}}(z,s), \qquad z \in M, \mathrm{Re}(s) > 1,$$

die *elliptische Eisenstein Reihe* der Stufe $m$. Hierbei ist $M := \mathbb{H} \setminus \bigcup_\tau \Gamma\tau$.

# Die hyperbolische Eisenstein Reihe als Theta-Lift

## Satz

*Sei $m$ eine negative ganze Zahl. Dann ist*

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s + 1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle \;=\; \frac{\Gamma(s)}{(4\pi|m|)^s}\; E_m^{\mathrm{hyp}}(w, 2s)$$

*für $w \in \mathbb{H}$ und* $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{4}$.

# Die hyperbolische Eisenstein Reihe als Theta-Lift

## Satz

*Sei $m$ eine negative ganze Zahl. Dann ist*

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle \;=\; \frac{\Gamma(s)}{(4\pi|m|)^s}\; E_m^{\mathrm{hyp}}(w, 2s)$$

*für $w \in \mathbb{H}$ und* $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{4}$.

Dabei ist

$$P_m(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \overline{\nu_D(\gamma)} \left(\frac{cz+d}{c\bar{z}+d}\right)^{1/4} \mathrm{Im}(\gamma z)^s e\left(m\gamma\,\bar{z}\right)$$

für $z \in \mathbb{H}$ und $\mathrm{Re}(s) > 1$

# Die hyperbolische Eisenstein Reihe als Theta-Lift

**Satz**

*Sei $m$ eine negative ganze Zahl. Dann ist*

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle = \frac{\Gamma(s)}{(4\pi|m|)^s}\, E_m^{\mathrm{hyp}}(w, 2s)$$

*für $w \in \mathbb{H}$ und $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{4}$.*

und

$$\Theta(z, w) := \sum_{h \in \mathbb{Z}^3} e\left(xq(h) + iyq_w^+(h)\right)$$

für $z \in \mathbb{H}$ und $w \in \mathrm{Gr}(V)$ mit $q_w^+(h) = q(h_{w^\perp}) - q(h_w)$.

# Beweisskizze

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s + 1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle$$

# Beweisskizze

$$\begin{aligned}&\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle\\&\qquad = \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}} y^{s+1} e(m\overline{z})\overline{\Theta(z,w)}\,d\nu(z)\end{aligned}$$

# Beweisskizze

$$
\begin{aligned}
&\left\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\right\rangle \\
&\quad = \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}} y^{s+1} e(m\overline{z})\overline{\Theta(z,w)}\,d\nu(z) \\
&\quad = \int_0^\infty y^{s-1} \sum_{h\in\mathbb{Z}^3} e\left(iy(q_w^+(h)-m)\right) \int_0^1 e\left(x(m-q(h))\right) dx\ dy
\end{aligned}
$$

# Beweisskizze

$$
\begin{aligned}
&\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle \\
&\quad = \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}} y^{s+1} e(m\overline{z})\overline{\Theta(z,w)}\,d\nu(z) \\
&\quad = \int_0^\infty y^{s-1} \sum_{h\in\mathbb{Z}^3} e\left(iy(q_w^+(h)-m)\right) \underbrace{\int_0^1 e\left(x(m-q(h))\right)dx}_{=\begin{cases}1, & q(h)=m,\\ 0, & q(h)\neq m.\end{cases}}\, dy
\end{aligned}
$$

# Beweisskizze

$$
\begin{aligned}
&\left\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\right\rangle \\
&\quad = \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}} y^{s+1} e(m\overline{z})\overline{\Theta(z,w)}\,d\nu(z) \\
&\quad = \int_0^\infty y^{s-1} \sum_{h\in\mathbb{Z}^3} e\left(iy(q_w^+(h)-m)\right) \int_0^1 e\left(x(m-q(h))\right) dx\ dy \\
&\quad = \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3 \\ q(h)=m}} \int_0^\infty y^{s-1} e\left(iy(q_w^+(h)-m)\right) dy
\end{aligned}
$$

# Beweisskizze

$$
\begin{aligned}
&\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle \\
&\quad = \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}} y^{s+1} e(m\overline{z})\overline{\Theta(z,w)}\,d\nu(z) \\
&\quad = \int_0^\infty y^{s-1} \sum_{h\in\mathbb{Z}^3} e\left(iy(q_w^+(h)-m)\right) \int_0^1 e\left(x(m-q(h))\right) dx\ dy \\
&\quad = \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} \underbrace{\int_0^\infty y^{s-1} e\left(iy(q_w^+(h)-m)\right) dy}_{=\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}(q_w^+(h)-m)^{-s}}
\end{aligned}
$$

# Beweisskizze

$$
\begin{aligned}
&\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle \\
&\quad = \int_{\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H}} y^{s+1} e(m\overline{z})\overline{\Theta(z,w)}\,d\nu(z) \\
&\quad = \int_0^\infty y^{s-1} \sum_{h\in\mathbb{Z}^3} e\left(iy(q_w^+(h)-m)\right) \int_0^1 e\left(x(m-q(h))\right) dx\ dy \\
&\quad = \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} \int_0^\infty y^{s-1} e\left(iy(q_w^+(h)-m)\right) dy \\
&\quad = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} (q_w^+(h)-m)^{-s}.
\end{aligned}
$$

# Beweisskizze

Wir haben also

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s + 1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\substack{h \in \mathbb{Z}^3 \\ q(h)=m}} (q_w^+(h) - m)^{-s}.$$

# Beweisskizze

Wir haben also

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} (q_w^+(h) - m)^{-s}.$$

## Lemma

*Sei $m$ eine negative ganze Zahl. Dann ist*

$$(q_w^+(h) - m)^{-s} = \frac{2\Gamma(2s)}{(8|m|)^s\Gamma(s)^2} \int_{\mathcal{L}_h} \cosh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w,\tau))^{-2s}\, \mathrm{ds}_{\mathrm{hyp}}(\tau)$$

*für $w \in \mathrm{Gr}(V)$, $h \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m$ und $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$.*

# Beweisskizze

Wir haben also

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} (q_w^+(h) - m)^{-s}.$$

$$= \frac{2\Gamma(2s)}{(16\pi|m|)^s\Gamma(s)} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} \int_{\mathcal{L}_h} \cosh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w,\tau))^{-2s}\, \mathrm{ds}_{\mathrm{hyp}}(\tau)$$

# Beweisskizze

Wir haben also

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\substack{h \in \mathbb{Z}^3 \\ q(h)=m}} (q_w^+(h) - m)^{-s}.$$

$$= \frac{2\Gamma(2s)}{(16\pi|m|)^s \Gamma(s)} \sum_{\substack{h \in \mathbb{Z}^3 \\ q(h)=m}} \int_{\mathcal{L}_h} \cosh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w, \tau))^{-2s} \, \mathrm{ds}_{\mathrm{hyp}}(\tau)$$

Die Gruppe $\mathrm{SO}_0(q, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wirkt auf $\{h \in \mathbb{Z}^3 \colon q(h) = m\}$.

## Beweisskizze

Wir haben also

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} (q_w^+(h)-m)^{-s}.$$

$$= \frac{2\Gamma(2s)}{(16\pi|m|)^s\Gamma(s)} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} \int_{\mathcal{L}_h} \cosh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w,\tau))^{-2s}\, \mathrm{ds}_{\mathrm{hyp}}(\tau)$$

Die Gruppe $\mathrm{SO}_0(q,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wirkt auf $\{h \in \mathbb{Z}^3 \colon q(h) = m\}$. Schreibe

$$\{h \in \mathbb{Z}^3 \colon q(h) = m\} = \bigsqcup_{i\in I} \mathrm{SO}_0(q,\mathbb{Z}) h_i$$

# Beweisskizze

Wir haben also

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} (q_w^+(h)-m)^{-s}.$$

$$= \frac{2\Gamma(2s)}{(16\pi|m|)^s\Gamma(s)} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} \int_{\mathcal{L}_h} \cosh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w,\tau))^{-2s}\, \mathrm{ds}_{\mathrm{hyp}}(\tau)$$

Die Gruppe $\mathrm{SO}_0(q,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wirkt auf $\{h \in \mathbb{Z}^3 \colon q(h) = m\}$.
Schreibe

$$\{h \in \mathbb{Z}^3 \colon q(h) = m\} = \bigsqcup_{i\in I} \mathrm{SO}_0(q,\mathbb{Z})h_i$$

und setze $\Gamma_i := \{\gamma \in \Gamma \colon \gamma.h_i = h_i\}$, $\mathcal{L}_i := \mathcal{L}_{h_i}$.

# Beweisskizze

Wir haben also

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} (q_w^+(h)-m)^{-s}.$$

$$= \frac{2\Gamma(2s)}{(16\pi|m|)^s\Gamma(s)} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} \int_{\mathcal{L}_h} \cosh(\mathrm{d_{hyp}}(w,\tau))^{-2s}\, \mathrm{ds_{hyp}}(\tau)$$

Die Gruppe $\mathrm{SO}_0(q,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wirkt auf $\{h \in \mathbb{Z}^3 \colon q(h) = m\}$. Schreibe

$$\{h \in \mathbb{Z}^3 \colon q(h) = m\} = \bigsqcup_{i\in I} \mathrm{SO}_0(q,\mathbb{Z})h_i$$

und setze $\Gamma_i := \{\gamma \in \Gamma \colon \gamma.h_i = h_i\}$, $\mathcal{L}_i := \mathcal{L}_{h_i}$. Weiter ist $\mathcal{L}_{\gamma.h_i} = \gamma\mathcal{L}_i$.

# Beweisskizze

Wir haben also

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} (q_w^+(h)-m)^{-s}.$$

$$= \frac{2\Gamma(2s)}{(16\pi|m|)^s\Gamma(s)} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} \int_{\mathcal{L}_h} \cosh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w,\tau))^{-2s}\,\mathrm{ds}_{\mathrm{hyp}}(\tau)$$

Die Gruppe $\mathrm{SO}_0(q,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wirkt auf $\{h \in \mathbb{Z}^3 \colon q(h) = m\}$. Schreibe

$$\{h \in \mathbb{Z}^3 \colon q(h) = m\} = \bigsqcup_{i\in I} \mathrm{SO}_0(q,\mathbb{Z})h_i$$

und setze $\Gamma_i := \{\gamma \in \Gamma \colon \gamma.h_i = h_i\}$, $\mathcal{L}_i := \mathcal{L}_{h_i}$. Weiter ist $\mathcal{L}_{\gamma.h_i} = \gamma\mathcal{L}_i$. Es folgt

$$= \frac{2\Gamma(2s)}{(16\pi|m|)^s\Gamma(s)} \sum_{i\in I} \int_{\mathcal{L}_i} \sum_{\gamma\in\Gamma_i\backslash\Gamma} \cosh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(\gamma w,\tau))^{-2s}\,\mathrm{ds}_{\mathrm{hyp}}(\tau).$$

# Der elliptische Fall

Können wir für positive ganze $m$ etwas ähnliches machen?

# Der elliptische Fall

Können wir für positive ganze $m$ etwas ähnliches machen?

Die Gleichheit

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} (q_w^+(h)-m)^{-s}$$

gilt für $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$.

# Der elliptische Fall

Können wir für positive ganze $m$ etwas ähnliches machen?

Die Gleichheit

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} (q_w^+(h)-m)^{-s}$$

gilt für $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$.

**Lemma**

*Sei $m$ eine positive ganze Zahl. Dann ist*

$$q_w^+(h) + m = 2m\cosh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w, \tau_h))^2$$

*für $w \in \mathrm{Gr}(V)$ und $h \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m$.*

# Der elliptische Fall

Können wir für positive ganze $m$ etwas ähnliches machen?

Die Gleichheit

$$\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,, w)\rangle = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\substack{h \in \mathbb{Z}^3 \\ q(h)=m}} (q_w^+(h) - m)^{-s}$$

gilt für $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$.

**Lemma**

*Sei $m$ eine positive ganze Zahl. Dann ist*

$$q_w^+(h) - m = 2m \sinh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w, \tau_h))^2$$

*für $w \in \mathrm{Gr}(V)$ und $h \in \mathbb{Z}^3$ mit $q(h) = m$.*

# Der elliptische Fall

Zuvor hatten wir

$$\int_0^\infty y^{s-1} e\left(iy(q_w^+(h) - m)\right) dy = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}(q_w^+(h) - m)^{-s}.$$

# Der elliptische Fall

Zuvor hatten wir

$$\int_0^\infty y^{s-1} e\left(iy(q_w^+(h) - m)\right) dy = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}(q_w^+(h) - m)^{-s}.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty y^{s-1} e\left(iy(q_w^+(h) - m)\right) dy$$
$$= \begin{cases} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}(q_w^+(h) - m)^{-s} & , q_w^+(h) - m > 0 \\ \infty & , q_w^+(h) - m \leqslant 0. \end{cases}$$

# Der elliptische Fall

Zuvor hatten wir

$$\int_0^\infty y^{s-1} e\left(iy(q_w^+(h) - m)\right) dy = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} (q_w^+(h) - m)^{-s}.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty y^{s-1} e\left(iy(q_w^+(h) - m)\right) dy$$
$$= \begin{cases} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} (q_w^+(h) - m)^{-s} & , q_w^+(h) - m > 0 \\ \infty & , q_w^+(h) - m \leqslant 0. \end{cases}$$

Sei $q(h) = m$.

# Der elliptische Fall

Zuvor hatten wir

$$\int_0^\infty y^{s-1} e\left(iy(q_w^+(h) - m)\right) dy = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}(q_w^+(h) - m)^{-s}.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty y^{s-1} e\left(iy(q_w^+(h) - m)\right) dy$$
$$= \begin{cases} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}(q_w^+(h) - m)^{-s} & , q_w^+(h) - m > 0 \\ \infty & , q_w^+(h) - m \leqslant 0. \end{cases}$$

Sei $q(h) = m$. Dann ist $q_w^+(h) - m = -2q(h_w) \geqslant 0$

# Der elliptische Fall

Zuvor hatten wir

$$\int_0^\infty y^{s-1} e\left(iy(q_w^+(h) - m)\right) dy = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}(q_w^+(h) - m)^{-s}.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty y^{s-1} e\left(iy(q_w^+(h) - m)\right) dy$$
$$= \begin{cases} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}(q_w^+(h) - m)^{-s} & , q_w^+(h) - m > 0 \\ \infty & , q_w^+(h) - m \leqslant 0. \end{cases}$$

Sei $q(h) = m$. Dann ist $q_w^+(h) - m = -2q(h_w) \geqslant 0$ und

$$q(h_w) = 0 \iff h^\perp = w \iff \begin{array}{c} w \text{ ist Heegner Punkt} \\ \text{der Stufe } m \end{array}.$$

# Der elliptische Fall

Wir können daher schreiben

$$\sum_{\substack{h \in \mathbb{Z}^3 \\ q(h)=m}} \sinh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w, \tau_h))^{-2s}$$

$$= \frac{(4m\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty y^{s-1} \sum_{\substack{h \in \mathbb{Z}^3 \\ q(h)=m}} e\left(iy(q_w^+(h) - m)\right) dy$$

# Der elliptische Fall

Wir können daher schreiben

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} \sinh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w,\tau_h))^{-2s} \\
&= \frac{(4m\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty y^{s-1} \sum_{h\in\mathbb{Z}^3} e\left(iy(q_w^+(h)-m)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot \int_0^1 e\left(x(m-q(h))\right) dxdy
\end{aligned}
$$

.

# Der elliptische Fall

Wir können daher schreiben

$$\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} \sinh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w,\tau_h))^{-2s}$$

$$= \frac{(4m\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty y^{s-1} \sum_{h\in\mathbb{Z}^3} e\left(iy(q_w^+(h) - m)\right)$$

$$\cdot \int_0^1 e\left(x(m - q(h))\right) dxdy$$

$$= \frac{(4m\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \int_0^1 y^{s-1} e(m\overline{z})\overline{\Theta(z,w)} dxdy$$

.

# Der elliptische Fall

Wir können daher schreiben

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} & \sinh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w,\tau_h))^{-2s} \\
&= \frac{(4m\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty y^{s-1} \sum_{h\in\mathbb{Z}^3} e\left(iy(q_w^+(h)-m)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \int_0^1 e\left(x(m-q(h))\right) dxdy \\
&= \frac{(4m\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \int_0^1 y^{s-1} e(m\overline{z})\overline{\Theta(z,w)} dxdy \\
&= \frac{(4m\pi)^s}{\Gamma(s)} \left\langle P_m(\,\cdot\,, s+1/4), \Theta(\,\cdot\,,w)\right\rangle .
\end{aligned}
$$

# Der elliptische Fall

Wir können daher schreiben

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}^3\\ q(h)=m}} & \sinh(\mathrm{d}_{\mathrm{hyp}}(w,\tau_h))^{-2s} \\
&= \frac{(4m\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty y^{s-1} \sum_{h\in\mathbb{Z}^3} e\left(iy(q_w^+(h)-m)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot \int_0^1 e\left(x(m-q(h))\right) dxdy \\
&= \frac{(4m\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \int_0^1 y^{s-1} e(m\overline{z})\overline{\Theta(z,w)} dxdy \\
&= \frac{(4m\pi)^s}{\Gamma(s)} \left\langle P_m(\,\cdot\,,s+1/4), \Theta(\,\cdot\,,w)\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Dies liefert tatsächlich ein ähnliches Resultat für elliptische Eisenstein Reihen positiver Stufe.

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!