unlikely Intersections

Faltings $\quad C \quad g$ genus $\begin{cases} 0 & \text{unendliche} \\ 1 & \text{endlich erzeugt} \\ \geq 2 & \text{endliche} \end{cases}$

G algebraische gruppe $\quad \mathbb{G}_m^m$

A

$V \subseteq G$

V „~~alt~~ genug allgemein" ist

$\Downarrow$

einige untermenge, die "arithmetisch" sind, sind "klein"

Manin-Mumford Conjecture

V keine Torsionsvarietät $\Rightarrow V \cap \mathrm{Tor}_G$ ist nicht Z-dicht in V

'83 für abelsche Varietäten

, für algebraische Torusen

Mordell-Lang Conjecture

V kein Translat ist
$\Gamma < G$ endlich Rang $\Rightarrow$ $V \cap \Gamma$ ist nicht dicht

"Unlikely" X, Y

$$\operatorname{codim}(X \cap Y) = \operatorname{cod} X + \operatorname{cod} Y$$

$V \cap \mathrm{Tor}_G$

$V \cap \bigcup_{\operatorname{cod} H > \dim V} H$ H a.g. untergruppe

✓ "~~[illegible]~~ transverse" $\Longrightarrow$ diese Schnitte ist nicht dicht

$\subseteq B \subsetneq G$

Torsionsvarietät

Theorem (Checcoli - V - Viada)

E elliptische Kurve mit CM

V weak-transverse in E^N $\operatorname{codim} V = 2$

$Y \subseteq V$ Y ist V-Torsion-anomalous.

$\exists$ $B \subseteq E^N$ Torsions Untervarietät

- Y ist a component of $V \cap B$
- $\operatorname{codim} Y < \operatorname{codim} V + \operatorname{codim} B$

$$h(Y) \ll_\varepsilon (h(V) + \deg V)^{\frac{N-1}{N-\dim V-1}+\varepsilon}$$

$$\deg(Y) \ll_\varepsilon \deg V (h(V) + \deg V)^{\frac{\dim V}{N-\dim V-1}+\varepsilon}$$

Y is not a translate

[h the subvariety $\longmapsto$ $\mathbb{R}_{\geq 0}$

$h(V) = 0 \iff V$ is a torsion variety

$h(\{P\}) = \hat{h}(P)$]

[$$h(V \cap W) \leq \deg V \cdot h(W) + \deg W \cdot h(V) + c \cdot \deg V \cdot \deg W$$]

$$\hat{h}(P) \gg \frac{1}{\deg[k(P):k]^{1+\varepsilon}}$$

$$h(V) \gg \frac{1}{(n \deg V)^{\frac{1}{\operatorname{codim} V}+\varepsilon}}$$

if they are not torsion points / varieties

Explicit applications

$E: \quad y^2 = x^3 + x - 1$

$$\underset{(x_1, y_1)}{E} \times \underset{(x_2, y_2)}{E}$$

$C_n \subseteq E^2 \quad x_1^n = y_2$

$P \in C_n(\mathbb{Q}) \qquad h(P) \leq 3.71\ldots \cdot 10^{38}(n+1)^3$