Diskriminantenformen und vektorwertige Modulformen

Sebastian Opitz

Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt

Winterseminar - Frankreich
4. März 2015

Modulformen

Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ wirkt durch Möbiustransformationen,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

auf die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{im}(\tau) > 0\}$.

Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt Modulform vom Gewicht k für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ falls

$$f(M\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und f ist meromorph in $i\infty$ ist, d.h. $f(\tau) = \sum_{n \geq n_0} c_n q^n$ wobei $q = e^{2\pi i \tau}$.

Sei L ein gerades Gitter mit gerader Signatur, L' das duale Gitter und $D = L'/L$ die zugehörige Diskriminantenform. D hat eine quadratische Form $D \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\gamma \mapsto \gamma^2/2$. Die Weildarstellung von $SL_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{C}[D]$ ist gegeben durch

$$\rho_D(T)\, e^\gamma = e(-\gamma^2/2)\, e^\gamma$$

$$\rho_D(S)\, e^\gamma = \frac{e(\mathrm{sign}(D)/8)}{\sqrt{|D|}} \sum_{\beta \in D} e(\gamma\beta)\, e^\beta.$$

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generieren $SL_2(\mathbb{Z})$.

Sei $F(\tau) = \sum_{\gamma \in D} F_\gamma(\tau) e^\gamma$ eine holomorphe Funktion auf der oberen Halbebene mit Werten in $\mathbb{C}[D]$ und k eine ganze Zahl. F ist eine Modulform für ρ_D vom Gewicht k falls

$$F(M\tau) = (c\tau + d)^k \rho_D(M) F(\tau)$$

für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ und F meromorph in $i\infty$ ist.

Die Dimensionsformel

Den Raum der vektorwertigen Modulformen für ρ_D bezeichnen wir mit $M_{k,D}$. Sei $e(z) := e^{2\pi iz}$. Im Fall $2k + \operatorname{sign}(D) = 0 \bmod 4$ lautet die Dimensionsformel

$$\dim_{\mathbb{C}}(M_{k,D}) = d + dk/12 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3.$$

Die Dimensionsformel

Hierbei ist

$$\begin{aligned}
d &= |D/\{\pm 1\}|,\\
\alpha_1 &= \frac{d}{4} - \frac{1}{4\sqrt{|D|}}\; e((2k + \operatorname{sign}(D))/8)\; \Re(G(2,D)),\\
\alpha_2 &= \frac{d}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3|D|}}\; \Re(e((4k + 3\operatorname{sign}(D) - 10)/24)\; (G(1,D) + G(-3,D))),\\
\alpha_3 &= \sum_{\gamma \in D/\{\pm 1\}} \underbrace{-\gamma^2/2}_{0 \le -\gamma^2/2 < 1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\gamma \in D} -\gamma^2/2 + \sum_{\substack{\gamma \in D \\ 2\gamma = 0}} -\gamma^2/2 \right).
\end{aligned}$$

$\operatorname{sign}(D)$ bezeichnet die Signatur von D bzw. L. Die Terme der Form $G(c, D)$ stehen für Gausssummen über D.

Der Term

$$\sum_{\gamma \in D} \underbrace{-\gamma^2/2}_{0 \leq -\gamma^2/2 < 1}$$

aus α_3 ist hierbei der schwierige Term, in ihn gehen alle Werte der quadratischen Form entsprechend ihrer Häufigkeit ein. Es stellt sich folgende Frage:

Wie oft wird ein Wert in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ durch die quadratische Form einer Diskriminantenform D dargestellt?

Diskriminantenformen sind endliche abelsche Gruppen D mit einer quadratischen Form $D \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \ \gamma \mapsto \gamma^2/2$, so dass die zugehörige Bilinearform nicht ausgeartet ist. Es ist bekannt, dass Diskriminantenformen in eine orthogonale Summe von p-Gruppen zerfallen.

$D = 3^{-3}\ 27^{+2}$ bedeutet, dass $D \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \oplus (\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^2$ als abelsche Gruppe ist. Als Diskriminantenform ist D isomorph zur orthogonalen Summe von 3^{-3} und 27^{+2}. Die Vorzeichen geben hier die genaue quadratische Form an, bei ungeraden Primzahlen gibt es immer genau zwei Möglichkeiten.

Darstellungsanzahlen für Diskriminantenformen

Da Diskriminantenformen in eine orthogonale Summe von p-Gruppen zerfallen, beschränken wir uns auf Diskriminantenformen der Ordnung p^l.

Wie oft wird ein Wert in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ durch die quadratische Form einer Diskriminantenform D der Ordnung p^l dargestellt?

$p = 2$:

Man kann Formeln für die Darstellungsanzahlen in den irreduziblen (und einigen reduziblen) Blöcken finden.

p ungerade:

Man kann die Diskriminantenform „effizient“ in ihre Orbits bzgl. der eigenen Orthogonalen Gruppe $\mathrm{Aut}(D)$ zerlegen.

Orbits

Sei m eine ganze Zahl und D eine Diskriminantenform. m wirkt durch Multiplikation auf D und wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \to D_m \to D \to D^m \to 0.$$

D_m bezeichnet den Kern und D^m das Bild unter Multiplikation mit m, mit den passenden quadratischen Formen erhalten wir daraus neue Diskriminantenformen.

Orbits

Theorem (Scheithauer)

Sei $m \in \mathbb{Z}$, D eine Diskriminantenform und $\pi_m : D \to D/D_m$ die kanonische Projektion. Dann ist D/D_m mit der quadratischen Form q_m definiert durch $q_m(\pi(\gamma)) = mq(\gamma) \bmod 1$ eine Diskriminantenform.

Theorem (Scheithauer)

Sei $m \in \mathbb{Z}$, D eine Diskriminantenform. Dann ist D^m mit der quadratischen Form q^m definiert durch $q^m(m\gamma) = mq(\gamma) \bmod 1$ eine Diskriminantenform. D/D_m und D^m sind isomorph.

Orbits

Definition

Sei D eine Diskriminantenform und $\gamma \in D$. Wir definieren die **Multiplizität** $v(\gamma)$ als den größten Teiler k der Stufe von D, so dass $\gamma = kx$ für ein $x \in D$ und die **reduzierte Norm** q^{red} durch $q^{red}(\gamma) = kq(x)$.

Theorem (Scheithauer)

Sei D eine Diskriminantenform der Stufe p^l, wobei p eine ungerade Primzahl ist. Seien $\gamma, \mu \in D$ zwei Elemente der Ordnung $n > 1$. Dann gibt es einen Automorphismus, der γ auf μ abbildet, genau dann wenn

$$v(\pi_m(\gamma)) = v(\pi_m(\mu))$$

$$q_m^{\text{red}}(\pi_m(\gamma)) = q_m^{\text{red}}(\pi_m(\mu))$$

für alle $m|n$, $m < n$.

Orbitlängen

Orbitlängen der Diskriminantenform $3^{-3}\ 27^{+2}$:

[1, 1],	[27, 1, 1, 1, 1/27, 1/9, 1/3, 972],
[3, 1, 0, 72],	[27, 1, 1, 1, 2/27, 2/9, 2/3, 972],
[3, 1, 1/3, 54],	[27, 1, 1, 1, 4/27, 4/9, 1/3, 972],
[3, 1, 2/3, 108],	[27, 1, 1, 1, 5/27, 5/9, 2/3, 972],
[3, 9, 1/3, 4],	[27, 1, 1, 1, 7/27, 7/9, 1/3, 972],
[3, 9, 2/3, 4],	[27, 1, 1, 1, 8/27, 8/9, 2/3, 972],
[9, 1, 3, 0, 1/3, 432],	[27, 1, 1, 1, 10/27, 1/9, 1/3, 972],
[9, 1, 3, 0, 2/3, 216],	[27, 1, 1, 1, 11/27, 2/9, 2/3, 972],
[9, 1, 3, 1/3, 1/3, 288],	[27, 1, 1, 1, 13/27, 4/9, 1/3, 972],
[9, 1, 3, 1/3, 2/3, 432],	[27, 1, 1, 1, 14/27, 5/9, 2/3, 972],
[9, 1, 3, 2/3, 1/3, 216],	[27, 1, 1, 1, 16/27, 7/9, 1/3, 972],
[9, 1, 3, 2/3, 2/3, 288],	[27, 1, 1, 1, 17/27, 8/9, 2/3, 972],
[9, 3, 3, 1/9, 1/3, 12],	[27, 1, 1, 1, 19/27, 1/9, 1/3, 972],
[9, 3, 3, 2/9, 2/3, 12],	[27, 1, 1, 1, 20/27, 2/9, 2/3, 972],
[9, 3, 3, 4/9, 1/3, 12],	[27, 1, 1, 1, 22/27, 4/9, 1/3, 972],
[9, 3, 3, 5/9, 2/3, 12],	[27, 1, 1, 1, 23/27, 5/9, 2/3, 972],
[9, 3, 3, 7/9, 1/3, 12],	[27, 1, 1, 1, 25/27, 7/9, 1/3, 972],
[9, 3, 3, 8/9, 2/3, 12],	[27, 1, 1, 1, 26/27, 8/9, 2/3, 972]

Die Orbits von Aut(D) auf D werden hier in der Form

$$[p^{k+1}, v_1, \ldots, v_{p^k}, t_1, \ldots, t_{p^k}, \text{Länge}]$$

Ordnung

Multiplizitäten

Reduzierte Normen

dargestellt. Für Elemente γ in diesem Orbit gilt $\gamma^2/2 = v_1 t_1$.

Darstellungsanzahlen der Diskriminantenform $3^{-3}\ 27^{+2}$:

0	1/27	2/27	1/9	4/27	5/27	2/9
729	972	972	0	972	972	0
7/27	8/27	1/3	10/27	11/27	4/9	13/27
972	972	810	972	972	0	972
14/27	5/9	16/27	17/27	2/3	19/27	20/27
972	0	972	972	648	972	972
7/9	22/27	23/27	8/9	25/27	26/27	
0	972	972	0	972	972	

Dimensionen der Räume der vektorwertigen Modulformen zur Weildarstellung ρ_D der Diskriminantenform $D = 3^{-3}\ 27^{+2}$ nach Gewicht:

3	5	7	9	11	13	15
1811	3451	5087	6732	8372	10008	11653
17	19	21	23	25	27	29
13293	14929	16574	18214	19850	21495	23135
31	33	35	37	39	41	43
24771	26416	28056	29692	31337	32977	34613

$p = 2$

Theorem

Für ungerade 2-adische Komponenten gilt

$$q_t^{\pm n} \simeq \begin{cases} q_{t_1}^{\pm 1} & , n = 1, \\ q_{t_1}^{\pm 1} \oplus q_{t_2}^{+1} & , n = 2, \\ q_{t_1}^{\pm 1} \oplus q_{t_2}^{+1} \oplus q_{t_3}^{+1} \oplus q_{II}^{+2\frac{n-3}{2}} & , n \geq 3 \textit{ ungerade}, \\ q_{t_1}^{\pm 1} \oplus q_{t_2}^{+1} \oplus q_{t_3}^{+1} \oplus q_{t_4}^{+1} \oplus q_{II}^{+2\frac{n-4}{2}} & , n \geq 4 \textit{ gerade}, \end{cases}$$

wobei $\sum_i t_i = t \bmod 8$, $\left(\frac{t_1}{2}\right) = \pm 1$ *und* $\left(\frac{t_i}{2}\right) = +1$ *für* $i \geq 2$. *Falls solche* t_i *nicht existieren, so existiert auch* $q_t^{\pm n}$ *nicht. Dies kann nur in den Fällen* $n = 1$ *und* $n = 2$ *auftreten, sofern* $t = n \bmod 2$ *erfüllt ist. Für gerade 2-adische Komponenten gilt*

$$q_{II}^{\pm 2n} \simeq \begin{cases} q_{II}^{+2n} & , \pm = +, \\ q_{II}^{-2} \oplus q_{II}^{+2(n-1)} & , \pm = -. \end{cases}$$

$p = 2$

Theorem

Sei $q = 2^l$ mit $l \geq 1$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&N(q_{II}^{-2}, j) \\
&= \begin{cases} \frac{q}{2}\ \frac{3+(-1)^l}{2} & , j = 0\ (2^l), \\ \frac{q}{2}\ 3\ \frac{1+(-1)^k}{2} & , 2^k \,\|\, j \neq 0\ (2^l), \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2^l & , j = 0\ (2^l),\ l \text{ gerade}, \\ 2^{l-1} & , j = 0\ (2^l),\ l \text{ ungerade}, \\ 3 \cdot 2^{l-1} & , 2^k \,\|\, j \neq 0\ (2^l),\ k \text{ gerade}, \\ 0 & , 2^k \,\|\, j \neq 0\ (2^l),\ k \text{ ungerade}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Beweis.

- Die Diskriminantenform q_{II}^{-2} wird von γ und δ mit $q\gamma = q\delta = 0$, $\gamma^2/2 = \delta^2/2 = (\gamma, \delta) = \frac{1}{q}$ mod 1 generiert.
- In den Fällen $l = 1$ und $l = 2$ rechnet man nach, dass die Formel gilt.
- Im Fall $l \geq 3$ beziehungsweise $q \geq 8$ gilt

$$N(q_{II}^{-2}, j) = \begin{cases} 2 \cdot N\left(\left(\frac{q}{2}\right)_{II}^{-2}, j\right) & \text{falls } j \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } 2 \,\|\, j \neq 0 \bmod q, \\ 4 \cdot N\left(\left(\frac{q}{4}\right)_{II}^{-2}, \frac{j}{4}\right) & \text{falls } 4 \mid j. \end{cases}$$

- Mit dieser Rekursionsformel können wir $N(q_{II}^{-2}, j)$ für $q \geq 8$ auf die Fälle $q = 2$ und $q = 4$ reduzieren. Das Resultat folgt induktiv.

$\square$

$p = 2$

Theorem

Sei $q = 2^l$ *mit* $l \geq 1$. *Es gilt*

$$
\begin{aligned}
&N(q_{II}^{+2n}, j) \\
&= \begin{cases} \left(\frac{q}{2}\right)^n \left[(2^n - 1)\sum_{k'=0}^{l} 2^{(n-1)k'} + 1\right] & , j = 0\ (2^l), \\ \left(\frac{q}{2}\right)^n (2^n - 1)\sum_{k'=l-k}^{l} 2^{(n-1)k'} & , 2^k \,\|\, j \neq 0\ (2^l), \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{q}{2}\,(l+2) & , j = 0\ (2^l),\ n = 1, \\ \frac{q}{2}\,(k+1) & , 2^k \,\|\, j \neq 0\ (2^l),\ n = 1, \\ \left(\frac{q}{2}\right)^n \left[\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}\left(2^{(n-1)(l+1)} - 1\right) + 1\right] & , j = 0\ (2^l),\ n > 1, \\ \left(\frac{q}{2}\right)^n \frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}\left(2^{(n-1)(l+1)} - 2^{(n-1)(l-k)}\right) & , 2^k \,\|\, j \neq 0\ (2^l),\ n > 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

$p = 2$

Theorem

Sei $q = 2^l$ *mit* $l \geq 1$, $\varepsilon = \pm 1$. *Es gilt*

$$N(q_{II}^{\varepsilon 2n}, j)$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{q}{2}\right)^n \left[(2^n - \varepsilon)\varepsilon^l \sum_{k'=0}^{l} (\varepsilon 2^{n-1})^{k'} + \varepsilon^{l+1}\right] & , j = 0\ (2^l), \\ \left(\frac{q}{2}\right)^n (2^n - \varepsilon)\varepsilon^l \sum_{k'=l-k}^{l} (\varepsilon 2^{n-1})^{k'} & , 2^k \parallel j \neq 0\ (2^l), \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{q}{2}(l+2) & , j = 0\ (2^l),\ \varepsilon 2n = +2, \\ \frac{q}{2}(k+1) & , 2^k \parallel j \neq 0\ (2^l),\ \varepsilon 2n = +2, \\ \left(\frac{q}{2}\right)^n \left[\frac{2^n-\varepsilon}{2^{n-1}-\varepsilon}\left(2^{(n-1)(l+1)} - \varepsilon^{l+1}\right) + \varepsilon^{l+1}\right] & , j = 0\ (2^l),\ \textit{sonst}, \\ \left(\frac{q}{2}\right)^n \frac{2^n-\varepsilon}{2^{n-1}-\varepsilon}\left(2^{(n-1)(l+1)} - \varepsilon^{k+1} 2^{(n-1)(l-k)}\right) & , 2^k \parallel j,\ \textit{sonst}. \end{cases}$$