Harmonische Maaß Formen und Perioden

Claudia Alfes

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Chalet Giersch März 2015

Übersicht

Harmonische Maaß Formen

- Sei $\Delta_k = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + iky\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)$ der hyperbolische Laplace-Operator von Gewicht k ($\in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$).

Definition

Eine glatte Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *harmonische Maaß Form von Gewicht* k *zu* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ falls

- $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z),$ für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
- $\Delta_k f = 0$.
- Es gibt ein Fourierpolynom $P_f(z) = \sum_{n \leq 0} c^+(n) q^n \in \mathbb{C}[q^{-1}]$, sodass $f(z) - P_f(z) = \mathcal{O}(e^{-Cy})$ für $y \to \infty$ für ein $C > 0$.

Die Fourierentwicklung

Lemma (Bruinier/Funke)

Eine harmonische Maaß Form von Gewicht k ($k \neq 1$) hat eine Fourierentwicklung der Form

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n \gg -\infty} c_f^+(n) q^n}_{\text{holomorpher Teil } f^+} + \underbrace{\sum_{n<0} c_f^-(n) \Gamma(k-1, 4\pi|n|v) q^n}_{\text{nicht-holomorpher Teil } f^-},$$

wobei $\Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ die unvollständige Γ-Funktion bezeichnet.

Notation - Abkürzungen für die verschiedenen Räume

Wir setzen:

- $M_k(p) :=$ Raum der Modulformen von Gewicht k zu $\Gamma_0(p)$
- $S_k(p) :=$ Raum der Spitzenformen von Gewicht k zu $\Gamma_0(p)$
- $M_k^!(p) :=$ Raum der schwach holomorphen Modulformen von Gewicht k zu $\Gamma_0(p)$
- $H_k(p) :=$ Raum der harmonischen Maaß Formen von Gewicht k zu $\Gamma_0(p)$

Beziehung zu klassischen Modulformen

Lemma (Bruinier/Funke)

Definiere den Differentialoperator $\xi_k := 2iy^k \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}$*. Wir erhalten eine Abbildung*

$$\xi_k : H_k \to S_{2-k}.$$

- $\xi_k(f) = \xi_k(f^-)$.
- ξ_k *ist surjektiv.*

„Erzeugendenreihen" für $L(G, \chi_\Delta, 1)$ und $L'(G, \chi_\Delta, 1)$

$$\begin{tikzcd} & G \in S_2(p) \\ f \in H_{\frac{1}{2}}(4p) \arrow[r, "\xi_{1/2}"] & g \in S_{\frac{3}{2}}(4p) \arrow[u, "\text{Shimura}"'] \end{tikzcd}$$

Satz (Bruinier/Ono)

Sei $G \in S_2(p)$ mit $L(G,1) = 0$ und f, g wie oben. Wir schreiben $f(z) = \sum_{n \gg -\infty} c_f^+(n) q^n + \sum_{n<0} c_f^-(n) \Gamma\left(\frac{1}{2}, 4\pi|n|y\right) q^n$. Dann gilt:

1. Für $\Delta < 0$ FD mit $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1$: $L(G, \chi_\Delta, 1) =$ Konstante $\cdot\, c_f^-(\Delta)^2$.
2. Für $\Delta > 0$ FD mit $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1$: $L'(G, \chi_\Delta, 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_f^+(\Delta) \in \mathbb{Q}$.

„Erzeugendenreihen“ für $L(G_E, \chi_\Delta, 1)$ und $L'(G_E, \chi_\Delta, 1)$

$$
\begin{tikzcd}
 & G_E \in S_2(p) \\
f \in H_{\frac{1}{2}}(4p) \arrow[r, "\xi_{1/2}"] & g \in S_{\frac{3}{2}}(4p) \arrow[u, "\text{Shimura}"]
\end{tikzcd}
$$

Frage

Kann man explizite Formeln für $c_f^-(\Delta)^2$ und $c_f^+(\Delta)$ finden?

- Für $c_f^-(\Delta)^2$ einfach, weil $\xi(f) = \xi(f^-) = g$.
- Für $c_f^+(\Delta)$?

„Erzeugendenreihen" für $L(G_E, \chi_\Delta, 1)$ und $L'(G_E, \chi_\Delta, 1)$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "?"] & G_E \in S_2(p) \\ f \in H_{\frac{1}{2}}(4p) \arrow[r, "\xi_{1/2}"] & g \in S_{\frac{3}{2}}(4p) \arrow[u, "\text{Shimura}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\xi_0"] & G_E \in S_2(p) \\ f \in H_{\frac{1}{2}}(4p) \arrow[r, "\xi_{1/2}"] & g \in S_{\frac{3}{2}}(4p) \arrow[u, "\text{Shimura}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F \in H_0(p) \arrow[r, "\xi_0"] & G_E \in S_2(p) \\ f \in H_{\frac{1}{2}}(4p) \arrow[r, "\xi_{1/2}"] & g \in S_{\frac{3}{2}}(4p) \arrow[u, "\text{Shimura}"'] \end{tikzcd}$$

„Erzeugendenreihen“ für $L(G_E, \chi_\Delta, 1)$ und $L'(G_E, \chi_\Delta, 1)$

$$\begin{tikzcd}
F \in H_0(p) \arrow[r, "\xi_0"] \arrow[d, "\mathcal{I}_{-d}"] & G_E \in S_2(p) \arrow[d, "\text{Shintani}"] \\
f \in H_{\frac{1}{2}}(4p) \arrow[r, "\xi_{1/2}"] & g \in S_{\frac{3}{2}}(4p)
\end{tikzcd}$$

- Brauchen: Ein „ausgezeichnetes“ Urbild von $G_E \in S_2(p)$ unter ξ_0.
- Liftung $\mathcal{I}_{-d}$, die $F \in H_0(p)$ auf $f \in H_{\frac{1}{2}}(4p)$ abbildet und ertragreiche Beschreibung der Fourierkoeffizienten liefert.

Ein kanonisches Urbild von $G_E \in S_2(p)$ unter ξ_0

- Sei E eine elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$. Es ist $E \simeq \mathbb{C}/\Lambda_E$, Λ_E Gitter in $\mathbb{C}$.
- Sei ζ die Weierstraßsche ζ-Funktion und definieren

$$\zeta^*(z, \Lambda_E) = \zeta(\Lambda_E; z) - S(\Lambda_E)z - \frac{\pi}{a(\Lambda_E)}\overline{z},$$

  wobei $S(\Lambda_E) \approx$ Eisensteinreihe von Gewicht 2 und $a(\Lambda_E)$ Fläche eines Fundamentalparallelogramms.
- Definieren das Eichler-Integral von E durch

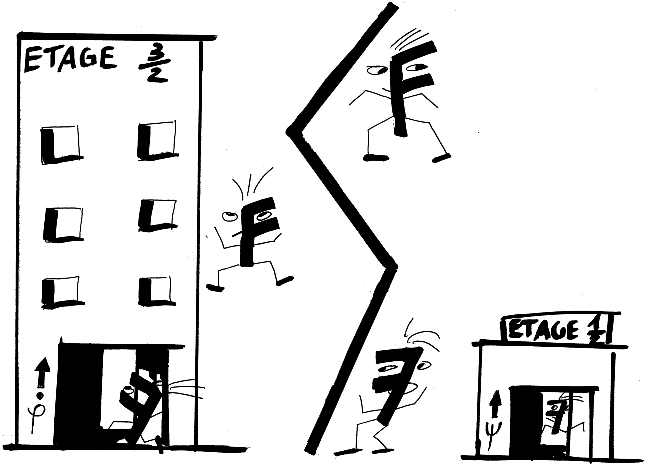
$$\mathcal{E}_E(z) := -2\pi i \int_z^{i\infty} G_E(\tau)d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_E(n)}{n} q^n.$$

Satz (Guerzhoy, (AGOR))

Es gibt eine schwach holomorphe Modulfunktion $M_E(z)$ auf $\Gamma_0(p)$ mit algebraischen Fourierkoeffizienten, sodass $\mathcal{W}_E(z) = \zeta^*(\Lambda_E, \mathcal{E}_E(z)) - M_E(z)$ eine harmonische Maaß Form von Gewicht 0 ist.

Die Liftung $\mathcal{I}_{-d}$

Bruinier/Funke Twisten (A./Ehlen) A.



Die Liftung $\mathcal{I}_{-d}$

Sei $\tau \in \mathbb{H}$ und $-d$ negative FD. Betrachte für $F \in H_0(p)$ (mit verschwindenden konstanten Koeffizienten in allen Spitzen):

$$\mathcal{I}_{-d}(\tau, F) = \int_{\Gamma_0(p)\backslash\mathbb{H}} F(z)\Theta_{-d}(\tau, z, \psi_{\text{KM}})d\mu(z).$$

- $\Theta_{-d}(\tau, z, \psi_{\text{KM}})$ hat Gewicht 0 in z.
- $\Theta_{-d}(\tau, z, \psi_{\text{KM}})$ hat Gewicht $1/2$ in τ.
- $\Theta_{-d}(\tau, z, \psi_{\text{KM}})$ wächst *gut* in den Spitzen $\Rightarrow$ Integral konvergiert.

Die Liftung $\mathcal{I}_{-d}$

- $-d < 0$ und $\Delta > 0$ Fundamentaldiskriminanten (FD)
- $\alpha_Q \in \mathbb{H}$ CM Punkt, d.h. *Nullstelle* einer binären ganzzahligen quadratischen Form $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ (mit $-d\Delta = b^2 - 4ac$)
- Definieren *getwistete Spuren*

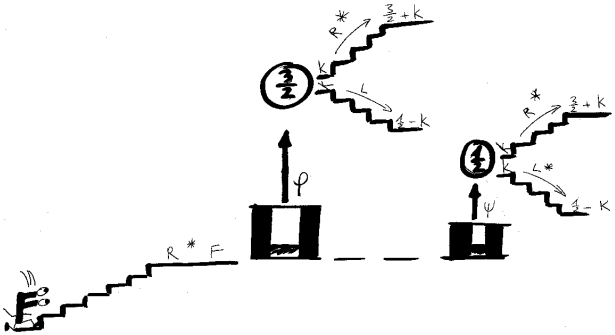
$$\mathbf{t}_{-d}(F;\Delta) = \sum_{Q \in \Gamma_0(p) \backslash \mathcal{Q}_{-d\Delta,p}} \chi_\Delta(Q) F(\alpha_Q).$$

Satz (A.)

Sei $F \in H_0(p)$ (mit verschwindenden konstanten Koeffizienten in allen Spitzen und mit $F(-1/(pz)) = F(z)$). Dann ist $\mathcal{I}_{-d}(\tau, F)$ eine harmonische Maaß Form von Gewicht $1/2$ für $\Gamma_0(4p)$. Der Δ-te Koeffizient des holomorphen Teils von $\mathcal{I}_{-d}(\tau, F)$ ist gegeben durch

$$\frac{\sqrt{d}}{2\sqrt{\Delta}} \mathbf{t}_{-d}(F;\Delta).$$

Allgemeines Theorem über diese Art von Lifts



Bemerkungen:

- Bruinier/Ono: $L_{3/2,\tau} \int (R_{-2,z}F(z))\Theta(\tau, z, \varphi_{\text{KM}})d\mu(\tau) \in H_{-1/2}(4p)$.
- Koeffizienten des holomorphen Teils gegeben durch getwistete Spuren von CM Werten von R^*F.

„Erzeugendenreihen“ für $L(G_E, \chi_\Delta, 1)$ und $L'(G_E, \chi_\Delta, 1)$

Satz (A.)

Sei E eine elliptische Kurve mit Führer p und $G_E \in S_2(p)$ die zugehörige Spitzenform. Sei $f_E(\tau) = \mathcal{I}_{-d}(\tau, \mathcal{W}_E)$. (Wobei $\mathcal{W}_E$ so, dass nur der Hauptteil in der Spitze ∞ nicht verschwindet, alle konstanten Terme verschwinden, $\mathcal{W}_E = G_E/||G_E||^2$ und $\mathcal{W}_E(-1/(pz)) = \mathcal{W}_E(z)$). Schreiben

$$f_E(z) = \sum_{n \gg -\infty} c_E^+(n) q^n + \sum_{n<0} c_E^-(n) \Gamma\left(\frac{1}{2}, 4\pi|n|y\right) q^n.$$

Dann gilt für eine Fundamentaldiskriminante $\Delta > 0$ mit $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1$:

$$L'(G_E, \chi_\Delta, 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_E^+(\Delta) \in \mathbb{Q}.$$

Ein Beispiel - die elliptische Kurve $37a1$

- $E: y^2 = 4x^3 - 4x + 1$
- $G_E(z) = q - 2q^2 - 3q^3 + 2q^4 - 2q^5 + 6q^6 + \cdots \in S_2^{\text{new}}(\Gamma_0(37))$

Δ	$c_E^+(\Delta)$	$L'(E(\Delta),1)$	$\text{rank}(E(\Delta)(\mathbb{Q}))$
1	$-0.2817617849\ldots$	$0.3059997738\ldots$	1
12	$-0.4885272382\ldots$	$4.2986147986\ldots$	1
21	$-0.1727392572\ldots$	$9.0023868003\ldots$	1
28	$-0.6781939953\ldots$	$4.3272602496\ldots$	1
33	$0.5663023201\ldots$	$3.6219567911\ldots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1489	9	0	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4393	66	0	3

(Berechnet mit `Sage` von Stephan Ehlen und Fredrik Strömberg.)

Harmonische Maaß Formen und Perioden

Können schreiben

$$F(z) = \left(-\frac{1}{2i} \int_p^z \overline{\xi_0(F)} d\bar{z} + 2\pi i \int_p^z D(F) dz \right),$$

und damit ist die getwistete Spur von F gegeben durch

$$\sum_{z_{-d} \in \widetilde{Z}_{-d}(\Delta)} \left(-\frac{1}{2i} \int_p^{z_{-d}} \overline{\xi_0(\mathcal{W}_E)} d\bar{z} + 2\pi i \int_p^{z_{-d}} D(\mathcal{W}_E) dz \right).$$

- Noch ein alternativer Beweis?
- Vergleich mit Ergebnissen von Jan: $c_f(\Delta) = \frac{\text{Periode eines Differentials 3. Ordnung}}{\text{reelle Periode}}$.