DIE KURIOSITÄTEN DER UNENDLICHKEIT

PATRICK TOLKSDORF

In diesem Projekt wollen wir uns der Untersuchung "unendlicher Summen" widmen. Dabei stellt sich primär die Frage ob und wie man solch einer Summe einen sinnvollen Wert zuordnen kann. Betrachtet man zum Beispiel die Summe

$$1+1+1+1+1+1+\cdots,$$

so wäre unendlich ein sinnvoller Wert. Doch was ist mit

$$1-1+1-1+1-1+\cdots ?$$

Einerseits könnten wir diese Summe durch

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0$$

berechnen, andererseits durch

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1.$$

Hier sieht man bereits, dass eine gute Art und Weise um der Summe einen *sinnvollen* Wert zuzuordnen, gefunden werden muss.

Wir werden uns aber noch einigen anderen Fragen widmen. Nämlich werden Kriterien herausgearbeitet, wann sich eine unendliche Summe zu einem endlichen Wert summiert und in manchen Fällen werden wir diesen auch berechnen. Weiterhin werden wir uns genauer mit der Summe

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$$

befassen. Es kann gezeigt werden, dass der Wert dieser Summe gleich $\ln(2)$ ist. Wir werden uns die Frage stellen, was passiert, wenn man die Ziffern dieser Summe in anderen Reihenfolgen aufsummiert. Während sich der Wert bei endlichen Summen wegen des Kommutativitätsgesetzes nicht ändert, ist dies bei dieser unendlichen Summe nicht der Fall. Wir werden beweisen, dass man die Reihenfolge der Summanden so ändern kann, dass zum Beispiel der Wert dieser umsortierten Summe gleich π ist. Dabei ist π willkürlich gewählt, man könnte die Summanden auch in anderen Reihenfolgen aufsummieren, sodass 0 oder $\frac{1}{2}$ oder $-\infty$ herauskommt. Dieses Phänomen ist als der *Riemannsche Umordnungssatz* bekannt und kann als eines der Hauptresultate angesehen werden, die wir in diesem Projekt bearbeiten werden.