Wolle und Geometrie

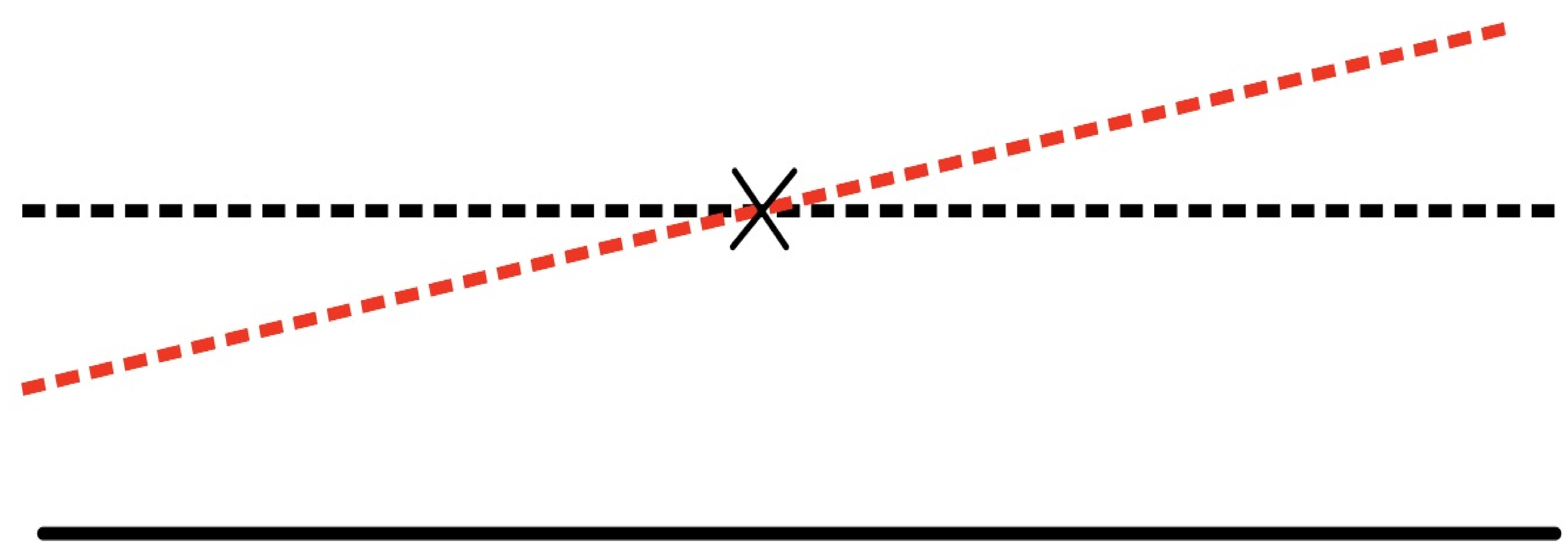
Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Krümmungen auf Flächen

Wenn wir eine Gerade und einen Punkt fixieren, welcher nicht auf der Geraden liegt, dann gibt es auf der euklidischen Ebene genau eine parallele Gerade die durch den Punkt geht. Das liegt daran, dass die euklidische Ebene keine Krümmung hat. Das kann man auch daran sehen, dass die Innenwinkel eines Dreiecks immer 120° ergeben.

Parallele geraden durch einen Punkt



Die Grundfrage

Was passiert bei Räumen, die gekrümmt sind, zum Beispiel einer Kugel oder einem Sattel? Kann man anhand der Winkel oder der Geraden durch einen Punkt die Krümmung herausfinden?

Überlegung

Zuerst müssen wir festlegen, was eine Gerade ist. Diese werden auch als Geodäten bezeichnet. Intuitiv heißt das, dass man von einem Punkt aus einfach gerade aus läuft.

Auf einer Kugel ist zum Beispiel der Äquator eine Geodäte. Auf einem Sattel sieht das schon komplizierter aus, erst recht auf einer Hyperbolischen Ebene. Der Trick ist es die Hyperbolische Ebene zu falten. Dadurch ensteht eine gerade Linie.

Man kann also sehr gut sehen, was auf einer Kugel und einem Sattel passiert.

Häkeln

Auf dem Junior retreat der Algebra haben wir zusammen mit den Arbeitsgruppen der Uni Frankfurt, Heidelberg und Mainz hyperbolische Ebenen und Möbuisbänder gehäkelt.

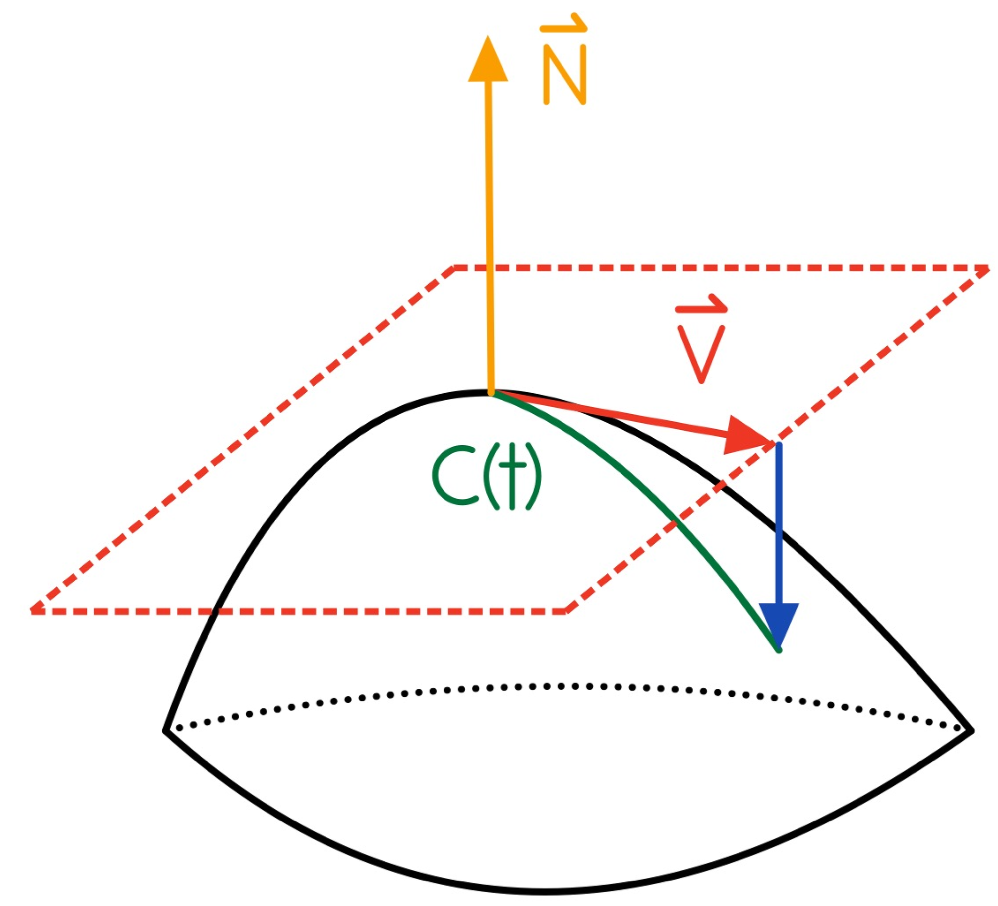
Falls man eine Halbkugel Häkeln möchte, so kann man mit einer Ebene anfangen. Intuitiv zieht man nach und nach am Faden, also man nimmt Stoff weg.

Für eine hyperbolische Ebene ist das genau anders herum. Man fügt immer mehr Stoff hinzu. So hat hyperbolische Ebene auf dem gleichen Grundriss gesehen mehr Stoff und die Kugel weniger.

Die Mathematik dahinter

Wie definiert man nun Krümmung? Die Idee dazu bleibt gleich: Wir schauen uns Geraden an. Sei F eine glatte Fläche im 3-dimensionalen Raum (also ohne Spitzen). Wir nehmen uns erst eine Richtung, die wir als Vektor v im 3-dimensionalen Raum bezeichnen. Wir definieren auf unserer Fälche F eine Funktion $c(t)$, die auf dieser Fläche in Richtung v geht.

Nun können wir mithilfe der Ableitung überpfrüfen, ob die Kurve nach unten oder nach oben geht. Falls es nach oben geht, so hat unsere Fläche positive Krümmung $K_v > 0$ in Richtung v und falls es runter geht negative Krümmung $K_v < 0$ in Richtung v. Das ganze machen wir nochmal mit einem anderen Richtungsvektor w der senkrecht auf v steht und multiplizieren $K_F = K_v \cdot K_w$, das ist die Krümmung unserer Fläche F.

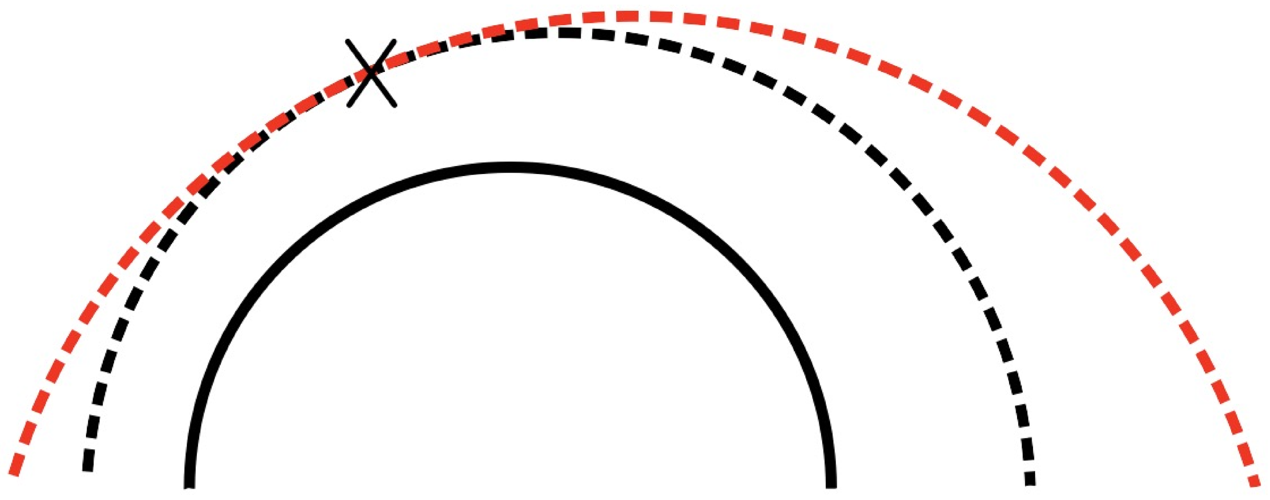


Krümmung der Kugel und des Sattels

Auf einer Schüssel C zum Beispiel geht es vom Boden der Schüssel nur hoch. Daher $K_C > 0$. In der Mittel von einem Sattel S geht es in eine Richtung hoch und in der anderen runter, daher ist $K_S < 0$.

Frage: Was passiert auf einem Kegel? Wie sehen die Geodäten aus. Wie sehen sie aus, wenn man den Kegel äufklappt"?

2 parallele Geodäten eines Kegels durch einen Punkt



Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Algebra

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster