



Brett mit Nägeln



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

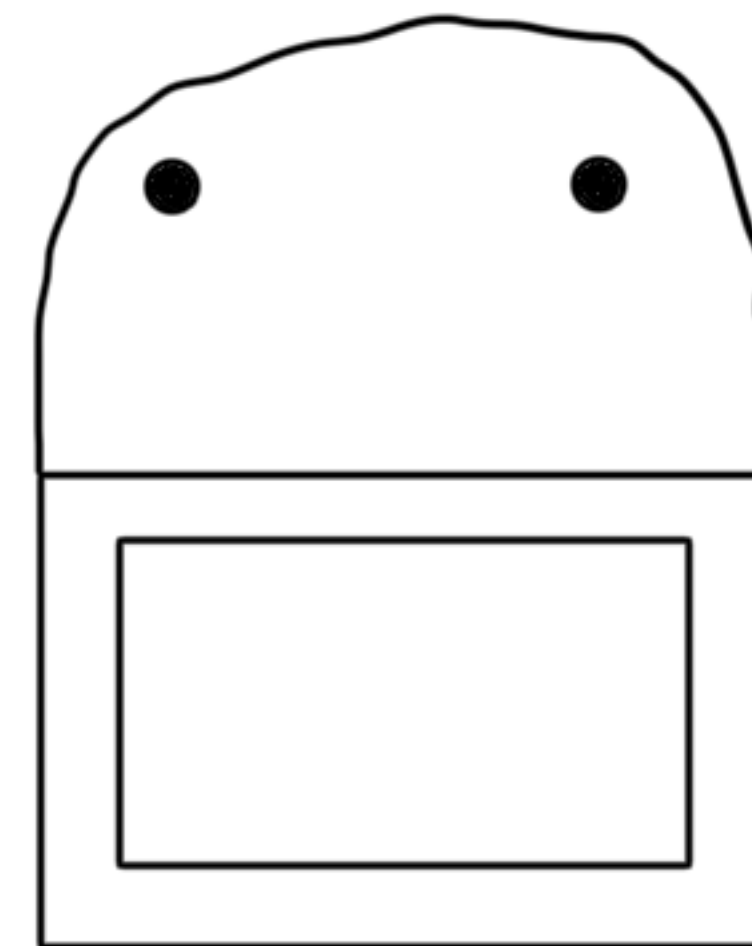
Lange Nacht der Mathematik 2024

Hängen Sie ein Bild mit einem Faden so an zwei Nägeln auf, dass es herunterfällt, sobald ein beliebiger Nagel aus der Wand gezogen wird.

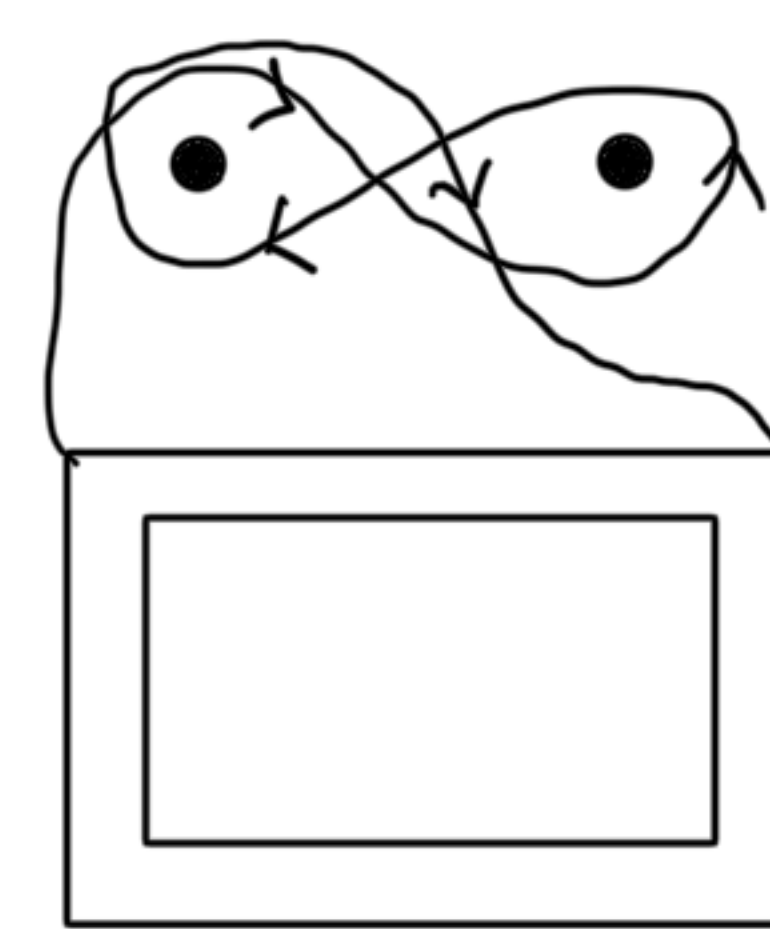
Schritt 1

Wir versuchen das Problem mathematisch zu formulieren. Wir fangen an einer Ecke des Bildes an und gehen entlang des Fadens. Dabei schreiben wir L , wenn wir den Faden im Uhrzeigersinn um den linken Nagel wickeln und L' , wenn wir den Faden gegen den Uhrzeigersinn um den linken Nagel wickeln. Genauso schreiben wir R und R' , wenn wir den Faden um den rechten Nagel wickeln. Das machen wir so lange, bis wir an der rechten Ecke des Bildes ankommen. Eine Aneinanderreihung der Symbole L, L', R, R' nennt man ein Wort und für jedes solche Wort erhalten wir eine Möglichkeit, den Faden um die Nägel zu wickeln und umgekehrt. Wickeln wir den Faden gar nicht um die Nägel, so erhalten wir das sogenannte leere Wort, welches wir mit 0 bezeichnen. Unten sehen Sie ein paar Beispiele.

Beispiele für Wörter:



LR

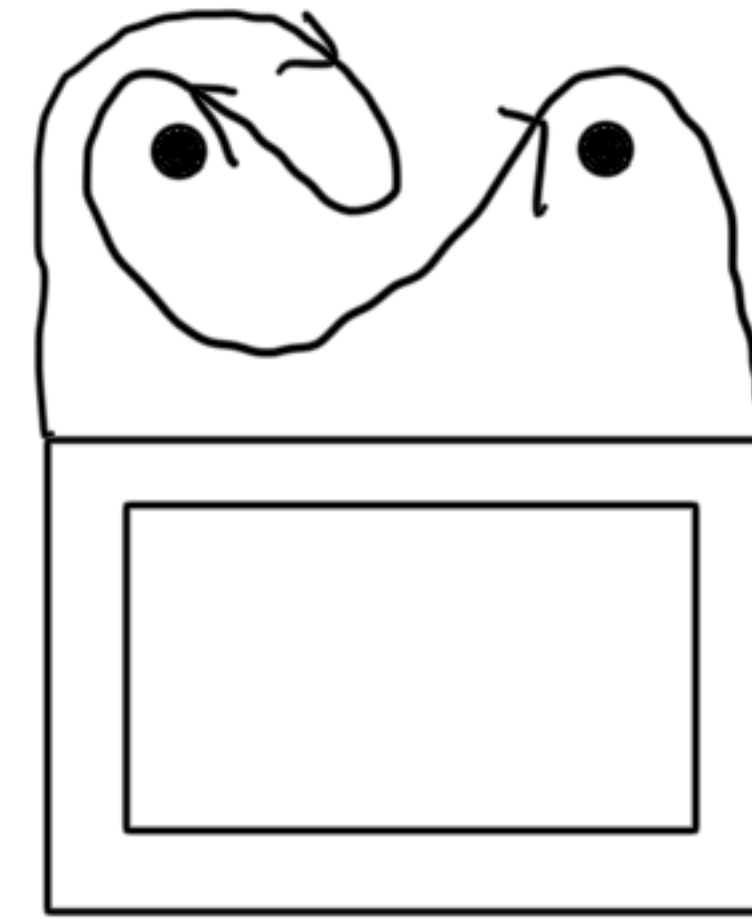


LRL

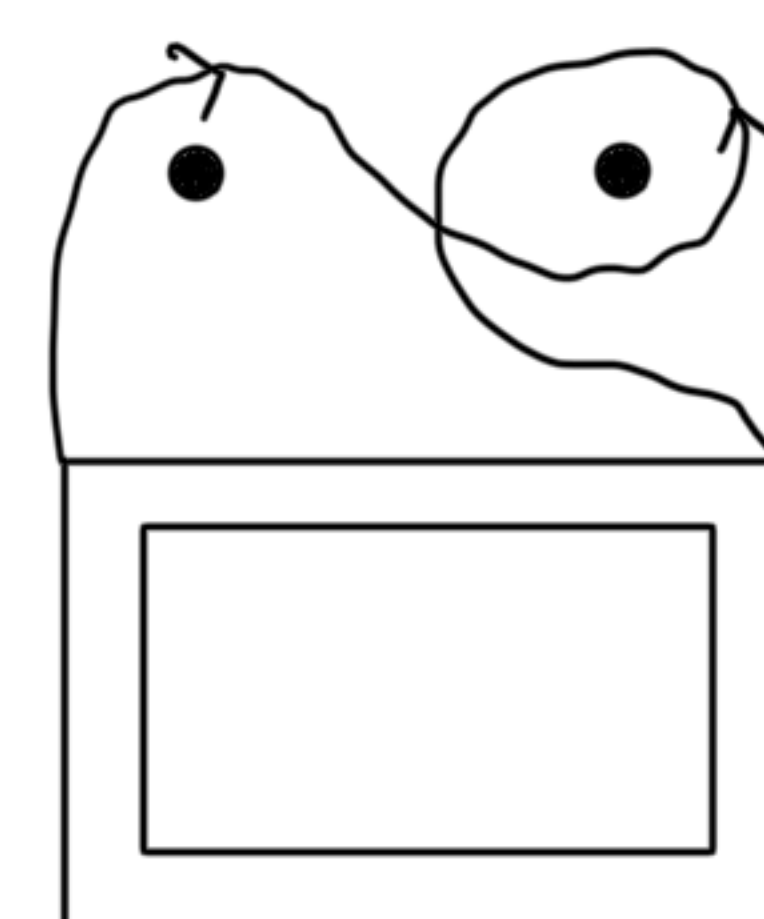
Schritt 2

Wenn wir den Faden zunächst im Uhrzeigersinn und danach gegen den Uhrzeigersinn um den selben Nagel wickeln, so hat dies offenbar den selben Effekt, als hätten wir ihn gar nicht um den Nagel gewickelt. Insbesondere können wir Wörter in denen Kombinationen der Form $LL', L'L, RR'$ oder $R'R$ vorkommen kürzen, indem wir diese aus dem Wort streichen. Zum Beispiel liefern $RL'LR$ und RR die selben Wicklungen um die Nägel und wir schreiben $RL'LR = RR$. Können wir dies für ein Wort so lange wiederholen, bis kein Symbol mehr übrig bleibt, wir also das leere Wort 0 erhalten, so fällt der Faden herunter. Zum Beispiel fällt der zum Wort $RL'LR'$ gehörige Faden herunter, da $RL'LR' = RR' = 0$.

Was passiert, wenn man den rechten bzw. linken Nagel herauszieht?



$LL'R = R$

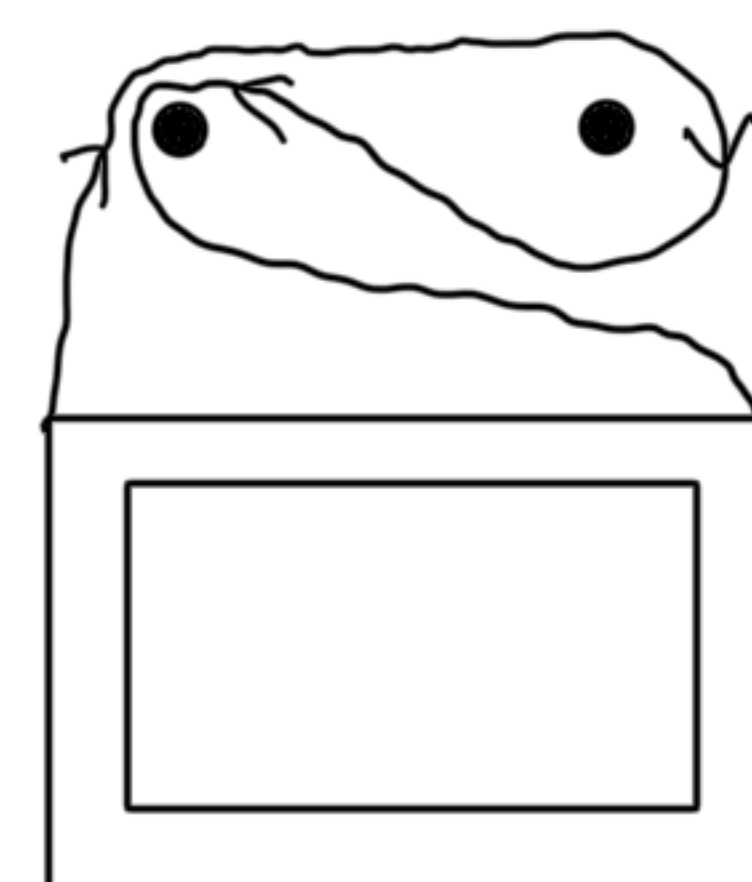


LR'

Schritt 3

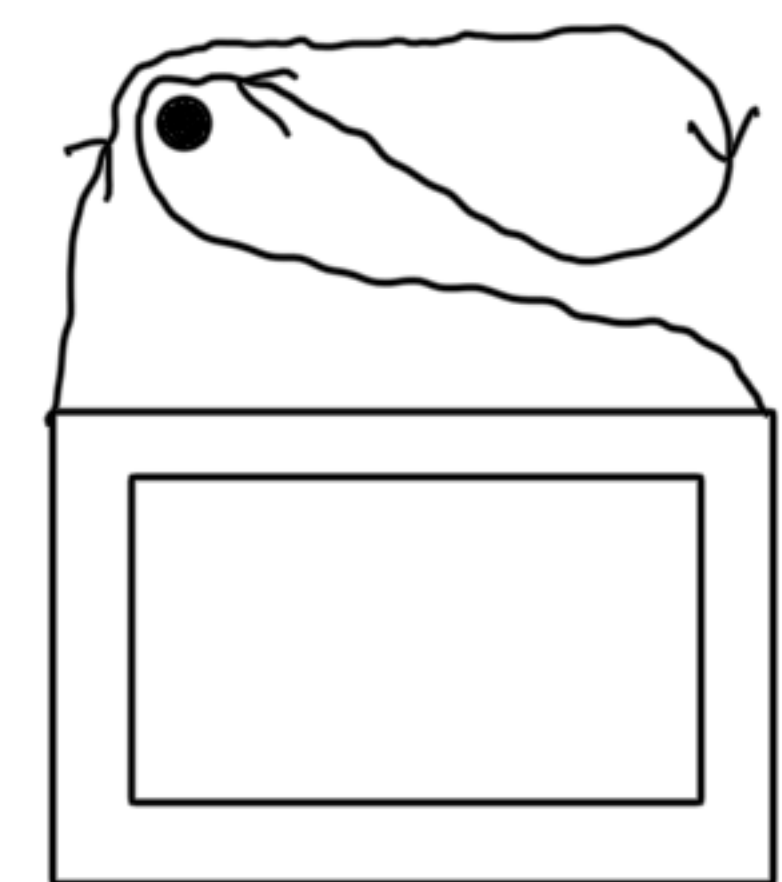
Ziehen wir den linken Nagel aus der Wand, so werden alle L und L' aus dem Wort gestrichen. Ziehen wir den rechten Nagel aus der Wand, so werden alle R und R' aus dem Wort gestrichen. Das Wort LRL' wird also zum Wort $LL' = 0$, wenn wir den rechten Nagel ziehen und zum Wort R , wenn wir den linken Nagel ziehen.

Beispiele fürs Kürzen:



LRL'

wird zu



$LL' = 0$

Schritt 4

Wir suchen ein Wort, welches sich nicht zum leeren Wort kürzt und sich nach rausstreichen aller L und L' zum leeren Wort kürzt und nach dem Rausstreichen aller R und R' zum leeren Wort kürzt.

Schritt 5

Ein Beispiel ist gegeben durch $LRL'R'$. Nach dem Rausstreichen von L, L' erhalten wir $RR' = 0$ und nach dem Rausstreichen von R, R' erhalten wir $LL' = 0$.

Weiterführendes:

Was passiert, wenn man (was sicherlich oft vorkommt) das Bild an drei oder mehr Nägeln aufhängt?

Probleme wie das hier dargestellte fallen in das Gebiet der *Topologie*. Mögliche Google- oder KI-Schlagworte sind: *Topologie, Fundamentalgruppe, Homotopie, Knotentheorie*.



Die lange Nacht
der Mathematik



Link zu diesem
Poster