Polyederformel

Lange Nacht der Mathematik 2024

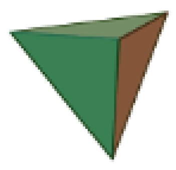
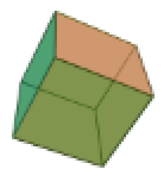
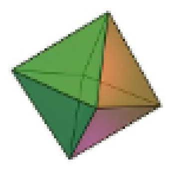
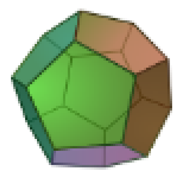
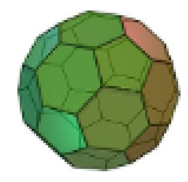
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Grundfrage

Polyeder (genauer konvexe Polyeder) sind dreidimensionale Körper, die ausschließlich von Ebenen begrenzt werden. Wir wollen herausfinden, ob bei Polyedern ein Zusammenhang zwischen der Anzahl an **Ecken** (E), **Kanten** (K) und **Flächen** (F) besteht.

Ein solcher Zusammenhang könnte bspw. sein:

$$E + F = K, \quad E \cdot F = K, \quad 5\,E + 13\,F = K!.$$

Name	Tetraeder	Würfel	Oktaeder	Dodekaeder	Fußball
Bild					
(E, K, F)	$(4, 6, 4)$	$(8, 12, 6)$	$(6, 12, 8)$	$(20, 30, 12)$	$(60, 90, 32)$

Vermutung

In obigen Beispielen gilt

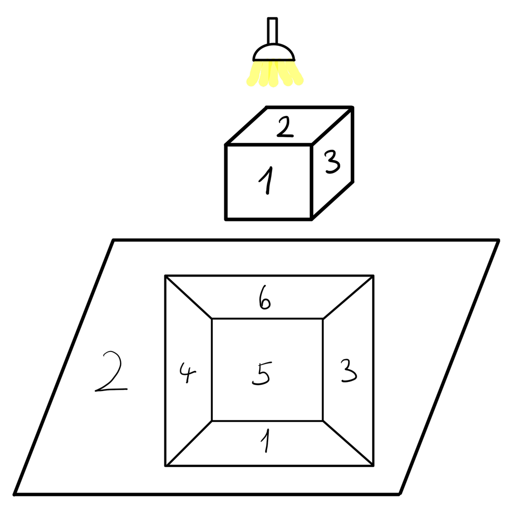
$$E + F = K + 2.$$

Aber: Das könnte Zufall sein. Es genügt also nicht, Beispiele zu betrachten.

Planare Graphen

Wir reduzieren unsere Frage auf die analoge Frage für zusammenhängende planare Graphen.
Planare Graphen bestehen aus Punkten in der Ebene zusammen mit sich nicht überschneidenden Verbindungen zwischen diesen Punkten. Ein planarer Graph ist zusammenhängend, wenn jeder Punkt von jedem anderen Punkt aus über Verbindungen erreicht werden kann. Wir betrachten nun die Punkte als Ecken (E), die Verbindungen als Kanten (K) und die von Kanten getrennten Bereiche als Flächen (F). Wir werden zeigen, dass dann gilt

$$E + F = K + 2.$$



Wie folgt daraus das Resultat für Polyeder?
Durch Projektion eines Polyeders auf die Ebene erhalten wir einen zusammenhängenden planaren Graphen. Die Ecken, Kanten und Flächen des Polyeders bilden eins zu eins die Ecken, Kanten und Flächen des planaren Graphen (siehe Bild rechts).

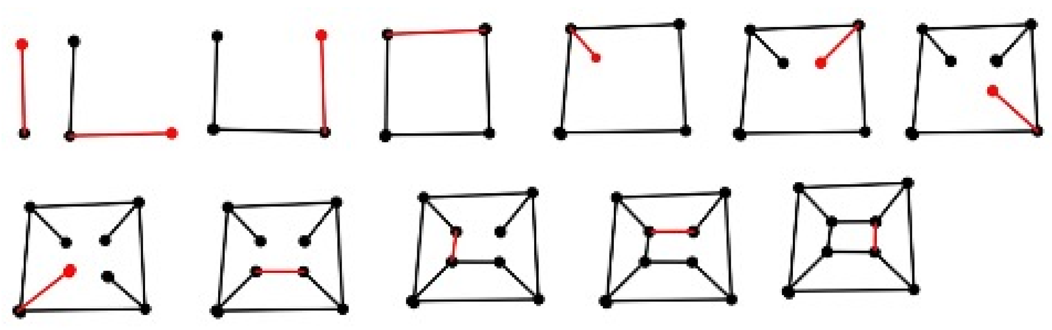
Beweis

Beweisidee

Jeder zusammenhängende planare Graph entsteht aus einem einzelnen Punkt schrittweise durch zwei Operationen:

- das Hinzufügen von einer Verbindung mit Endpunkt und
- das Verbinden bereits vorhandener Punkte.

Es genügt also zu zeigen, dass die Aussage $E + F = K + 2$ für einen einzelnen Punkt gilt und nach jeder der beiden obigen Operationen gilt, wenn sie vorher galt.



Schritt 1, Startzustand

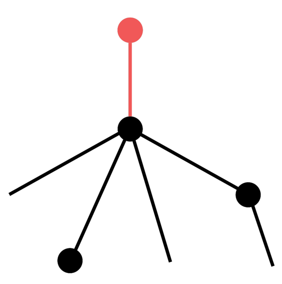
Für einen einzelnen Punkt in der Ebene ist

$$\begin{aligned} E + F &= 1 + 1 \\ &= 0 + 2 = K + 2. \end{aligned}$$

Die Aussage gilt also.

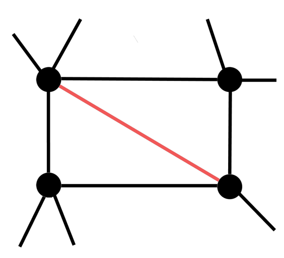
Schritt 2, Verbindung mit Endpunkt

Wir fügen einen Punkt mitsamt Verbindung zu einem vorhandenen Punkt ein. Dadurch erhöht sich die Anzahl an Ecken und Kanten jeweils um eins, die Anzahl an Flächen bleibt gleich. Die Aussage gilt weiterhin.



Schritt 3, Verbindung zwischen Punkten

Wir fügen eine Verbindung zwischen zwei Punkten ein. Die Anzahl an Ecken bleibt gleich, die der Kanten steigt um eins. Die Verbindung teilt eine Fläche in zwei, d.h. auch die Anzahl an Flächen erhöht sich um eins.

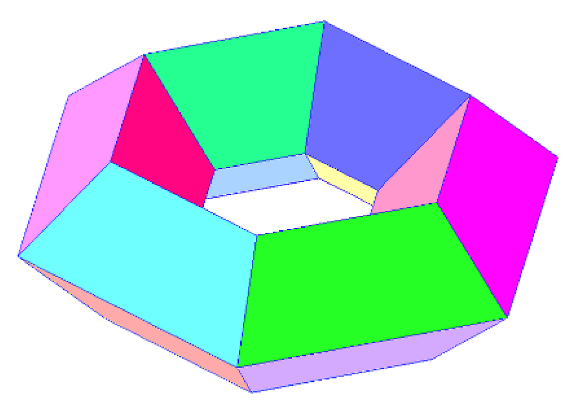


Exkurs

Lässt sich die Polyederformel auf

- nicht-konvexe Polyeder verallgemeinern (siehe Bild rechts)?
- Polytope verallgemeinern, d.h. Polyeder in anderen als dem 3-dimensionalen Raum?

Die Antwort lautet in beiden Fällen ja, die Formel muss aber angepasst werden. Findet Ihr die richtige Formel?



Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt,
AG Algebra

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Handout