



Diracs Gürteltrick

Lange Nacht der Mathematik 2025



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Der Gürteltrick

Es gibt Objekte, die erst durch eine Drehung um 720 Grad wieder in ihren Ausgangszustand zurückversetzt werden. Man betrachte einen ausgestreckten Gürtel, der an der Spitze festgehalten wird (siehe Bild 1). Drehen wir die Gürtelschnalle um 360 Grad, so befindet diese sich wieder in ihrer Ausgangslage. Der gesamte Gürtel ist aber nicht mehr in seinem ursprünglichen Zustand. Der Gürtel ist nun einmal verdreht (siehe Bild 2). Erstaunlicherweise können wir aber den Gürtel in seine Ausgangslage zurückversetzen, indem wir die Schnalle um weitere 360 Grad in dieselbe Richtung drehen. Nun ist der Gürtel zweimal verdreht (siehe Bild 3). Durch Umstülpen des Gürtels über die Schnalle können wir diese Drehung aber wieder aufheben, ohne dabei die Schnalle wieder zurückzudrehen (siehe Bild 4). Wir sehen also, dass der Gürtel erst durch eine Drehung um 720 Grad wieder in seinen Ausgangszustand zurückversetzt wurde (Bild 5).

Solche Objekte muss es geben, weil die Drehgruppe $SO(3)$ eine nicht-triviale doppelte Überlagerung besitzt, $Spin(3)$ genannt. Eine Drehung um 720 Grad überführt aber jedes Objekt wieder in seinen Ausgangszustand, was daran liegt, dass $Spin(3)$ einfach zusammenhängend ist. Dies möchten wir genauer Erklären.

Drehgruppen

Mit $SO(3)$ bezeichnen wir die Gruppe aller Drehungen im 3-dimensionalen Raum. Topologisch entspricht diese Gruppe dem projektiven 3-dimensionalen Raum $P^3(\mathbb{R})$. Diese Gruppe besitzt eine sogenannte nicht-triviale doppelte Überlagerung, $Spin(3)$. Diese ist topologisch gleich der 3-Sphäre. Da man 4 Dimensionen benötigen würde, um diese zu visualisieren, wollen wir stattdessen den projektiven 2-dimensionalen Raum und die 2-Sphäre betrachten.



Bild 1

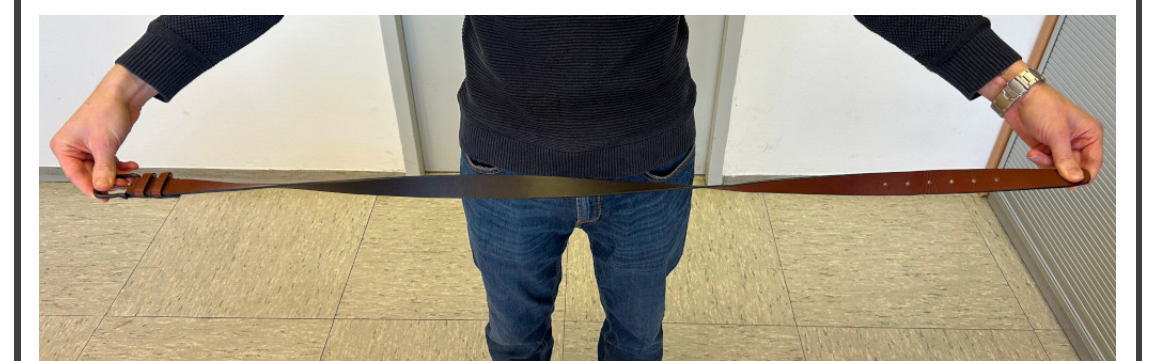


Bild 2



Bild 3



Bild 4



Bild 5

Topologie

Der projektive 2-dimensionale Raum $P^2(\mathbb{R})$ besteht aus allen Geraden im $\mathbb{R}^3$ durch den Ursprung. Die 2-Sphäre S^2 ist die Oberfläche einer Kugel. Es gibt eine natürliche Abbildung von der 2-Sphäre in den projektiven 2-dimensionalen Raum, nämlich legen wir die Kugel in den $\mathbb{R}^3$, sodass der Mittelpunkt auf dem Ursprung liegt und bilden einen Punkt auf der Kugeloberfläche auf die Gerade ab, die durch den Ursprung und diesen Punkt verläuft. Auf diese Weise treffen wir offensichtlich alle Geraden durch den Ursprung und eine Gerade wird immer von genau 2 Punkten getroffen, nämlich genau zwei sich gegenüberliegende Punkte. Solch eine Abbildung von topologischen Räumen nennt man doppelte Überlagerung. Wir können also auch den projektiven 2-dimensionalen Raum als 2-Sphäre auffassen, wobei aber sich gegenüberliegende Punkte miteinander identifiziert werden. Insbesondere gibt es zu jedem Punkt auf der unteren Hemisphäre einen Punkt auf der oberen Hemisphäre, der mit diesem identifiziert wird. Wir vereinfachen das Bild noch weiter und stellen uns den $P^2(\mathbb{R})$ als obere Hemisphäre vor, wobei wir sich gegenüberliegende Punkte auf dem Äquator miteinander identifizieren.

Es stellt nun jede Rotation der Gürtelschnalle einen Punkt in $P^2(\mathbb{R})$ dar (Gelb). Genauso stellt aber auch jeder andere Querschnitt des Gürtels solch einen Punkt dar, insbesondere auch die Gürtelspitze (Grün). Da der Gürtel zusammenhängend ist, bilden alle anderen Punkte einen stetigen Pfad von Grün nach Gelb (Rot).

Beweis

Der Gürtel im Ausgangszustand entspricht dem trivialen Pfad (Grün, Gelb und Rot im selben Punkt), da hier die Rotation überall gleich ist. Drehen wir die Gürtelschnalle um 360 Grad, entspricht dies einer gradlinigen Bewegung in $P^2(\mathbb{R})$. Wir erhalten einen Halbkreis (Bild 7). Dies ist ein geschlossener Pfad, da ja sich gegenüberliegende Punkte auf dem Äquator miteinander identifiziert werden. Man sieht leicht, dass sich dieser Pfad nicht ohne zerschneiden in den trivialen Pfad überführen lässt. Nun drehen wir die Gürtelschnalle um weitere 360 Grad. Wir gehen den Pfad also zweimal. Betrachten wir diesen Pfad aber in der doppelten Überlagerung S^2 , so erhalten wir einen vollen Großkreis (Bild 8). Diesen kann man offensichtlich ohne Zerschneiden in den trivialen Pfad überführen (Bild 9). Führt man diese Bewegung auf dem Gürtel durch, erhält man den Gürteltrick! Tatsächlich ist S^2 einfach-zusammenhängend, d.h. für zwei beliebige Punkte A, B auf S^2 gibt es immer einen stetigen Pfad von A nach B und zwei beliebige solcher Pfade sind immer ohne Zerschneiden ineinander überführbar. Insbesondere ist also jeder geschlossene Pfad in den trivialen Pfad überführbar. Wir erinnern nochmal daran, dass die Rotationsgruppe $SO(3)$ eigentlich dem $P^3(\mathbb{R})$ entspricht und $Spin(3)$ der 3-Sphäre. Die Argumente sind aber analog.

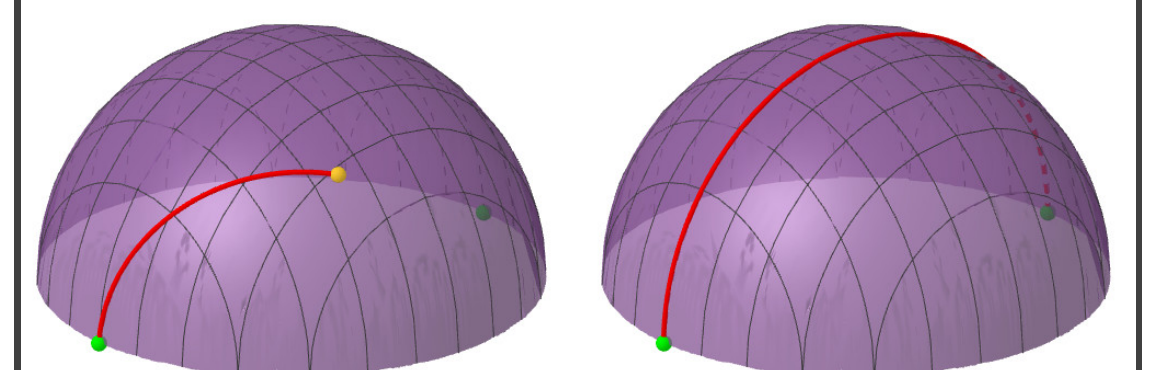


Bild 6

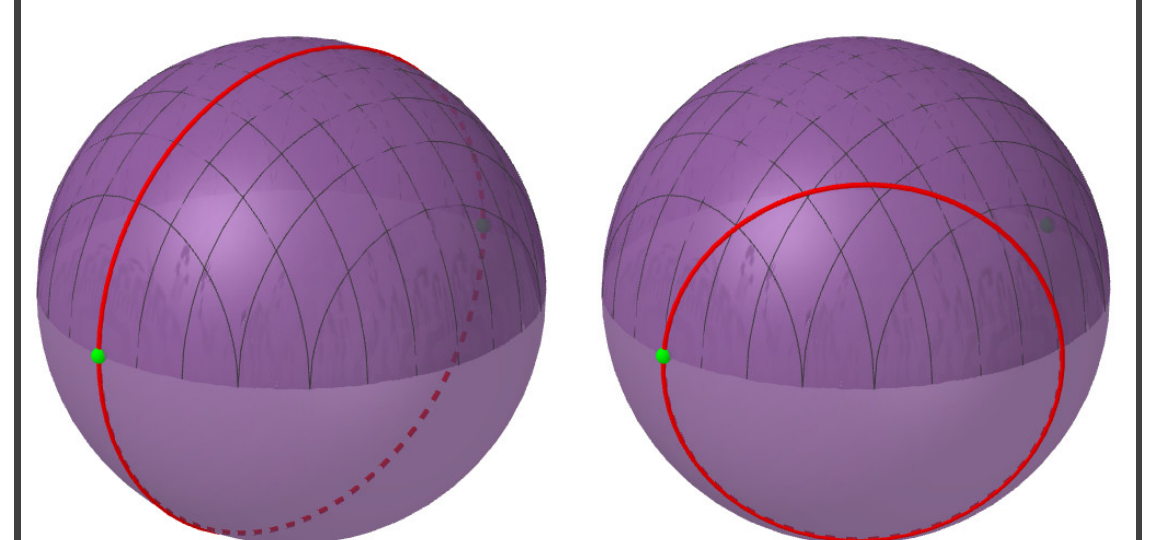


Bild 8

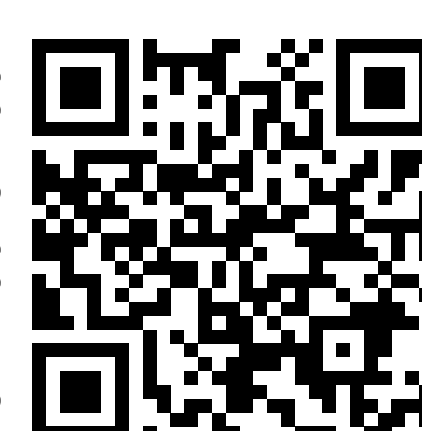


Bild 9

Exkurs

Das Phänomen des Gürteltricks findet Anwendung in der Quantenelektrodynamik. Fermionen mit Spin 1/2 kehren in ihren Ursprungszustand erst nach einer Drehung um 720 Grad zurück.

Die lange Nacht
der Mathematik



Link zu diesem
Handout

