Diskrete Mathematik

Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
22. Dezember 2022
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 10.1: Radon-Lemma

Eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist *konvex*, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in P$ auch das Verbindungssegment $\lambda x + (1-\lambda)y$ für $0 \leq \lambda \leq 1$ in P enthalten ist. Die *konvexe Hülle* einer endlichen Menge $V = \{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ von Punkten ist die Menge

$$\operatorname{conv}(V) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq m \text{ und } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$$

aller *Konvexkombinationen* von Punkten aus V. Das ist gleichzeitig die kleinste konvexe Menge, die V enthält.

Wir betrachten nun eine Menge $S = \{s_1, \ldots, s_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $|S| \geq n+2$. Zeigen Sie, dass Sie S so in zwei disjunkte Teilmengen S_1 und S_2 aufteilen können, dass die konvexen Hüllen von S_1 und S_2 einen nichtleeren Schnitt haben.

Hinweis: Wir suchen also einen Punkt p, der sich als Komvexkombination sowohl von Punkten aus S_1 als auch von Punkten aus S_2 schreiben lässt. Betrachten Sie dafür eine nichttriviale Linearkombination $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i s_i = 0$ (warum gibt es diese?) und teilen Sie die Summe geeignet in zwei Summanden.

Aufgabe 10.2: Graphen färben

Der Greedy-Algorithmus zur Konstruktion einer zulässigen Knotenfärbung eines Graphen mit Farben aus $\mathbb{Z}_{>0}$ bringt zuerst die Knoten in eine beliebige Reihenvolge $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und färbt dann Knoten v_i mit der kleinsten Farbe, die nicht in der Nachbarschaft von v_i vorkommt (noch ungefärbte Knoten werden dabei nicht berücksichtigt). Der Knoten v_1 bekommt also die Farbe 1, und der Knoten v_2 bekommt die Farbe 1, wenn v_1v_2 keine Kante des Graphen ist, und die Farbe 2 sonst.

1. Die chromatische Zahl bipartiter Graphen ist 2. Zeigen Sie, dass es zu jedem $k > 0$ einen bipartiten Graphen G und eine Reihenfolge auf den Knoten gibt, so dass der Greedy-Algorithmus mindestens k Farben benötigt.
2. Können Sie ein solches Beispiel auch angeben, wenn der Graph planar (aber nicht notwendig bipartit) ist?
3. Zeigen Sie, dass der Greedy-Algorithmus höchstens $1+\Delta(G)$ Farben braucht, wobei $\Delta(G)$ der maximale Grad eines Knotens in G ist.
4. Eine mögliche Verbesserung des Algorithmus wäre, als nächstes immer den Knoten mit dem höchsten Grad unter allen noch ungefärbten Knoten zu färben. Zeigen Sie, dass es immer noch Graphen gibt, die beliebige viele Farben brauchen.

5. Zeigen Sie, dass es andererseits immer eine Reihenfolge auf den Knoten gibt, so dass der Greedy-Algorithmus auf G nur $\chi(G)$ Farben benötigt.

Aufgabe 10.3: Platonische Körper

1. Ein dreidimensionales Polytop ist *regulär*, wenn alle Seiten kongruente reguläre Polygone sind, und an jeder Ecke die gleiche Anzahl von Seiten zusammentrifft.
   Zeigen Sie, dass es höchstens fünf reguläre dreidimensionale Polytope geben kann. Bestimmen Sie dazu, welche regulären Polygone als Seitenflächen auftauchen können und wie viele davon an einer Ecke zusammenkommen.

   Hinweis: Graphen von dreidimensionalen Polytopen sind planar und erfüllen damit die Eulerformel $v - k + f = 2$ für die Zahl der Ecken, Kanten und Seiten.

(*) 2. Ein 3-Polytop ist *semiregulär*, wenn alle Seitenflächen reguläre Polygone sind und die Symmetriegruppe transitiv auf den Ecken ist (d.h. zu je zwei Ecken gibt es eine Abbildung aus der Symmetriegruppe, die die eine auf die andere Ecke abbildet). Insbesondere kommen an jeder Ecke Polygone gleichen Typs in der gleichen Reihenfolge zusammen.
   Wie viele semireguläre Polytope können Sie finden?

   Hinweis: Es gibt zwei unendliche Familien von semiregulären Polytopen sowie 13 weitere, die Archimedischen Körper.

Aufgabe 10.4: Chromatische Zahlen

Sei G ein (nicht notwendig ebener) Graph. Der *Minimalgrad* von G ist $\delta(G) := \min(\deg(v) \mid v \in V)$.

1. Zeigen Sie, dass $\chi(G) \leq 1 + \max(\delta(H) \mid H \leq G)$, wobei H über alle Teilgraphen von G läuft.
2. Sei nun G ein planarer dreiecksfreier Graph. Zeigen Sie $\chi(G) \leq 4$.

* Aufgabe 10.5: f-Vektoren 3-dimensionaler Polytope

Der f-Vektor eines 3-Polytopes P ist der Vektor (v, k, f) seiner Ecken, Kanten und Seiten. Aus der Eulerformel folgt $k = v + f - 2$, so dass die Angabe von (v, f) ausreicht, um den f-Vektor vollständig zu bestimmen.

1. Zeigen Sie, dass der duale Graph eines 3-zusammenhängenden Graphen einfach und schleifenfrei ist.
2. Zeigen Sie, dass jeder f-Vektor eines 3-Polytops die folgenden beiden linearen Ungleichungen erfüllt.

$$f \leq 2v - 4 \qquad\qquad v \leq 2f - 4\,.$$

3. Die von den beiden Ungleichungen $x \leq 2y - 4$ und $y \leq 2x - 4$ im $\mathbb{R}^2$ bestimmte Fläche ist ein affiner Kegel C. Zeigen Sie, dass jedes Paar $(v, f) \in C \cap \mathbb{Z}^2$ der f-Vektor eines 3-Polytops ist.

   Hinweis: Überlegen Sie sich einfache Operationen, mit denen Sie aus einem 3-Polytop ein weiteres so gewinnen können, dass sich der f-Vektor möglichst wenig ändert. Überlegen Sie, welche Punkte in $C \cap \mathbb{Z}^2$ Sie damit erreichen können.

* Aufgabe 10.6: Selbstduale Graphen

Ein planarer Graph G heisst *selbstdual*, wenn G und sein Dualgraph G^* isomorph sind.

1. Zeigen Sie, dass für die Zahl n der Ecken und k der Kanten notwendig $k = 2n - 2$ gilt.
2. Konstruieren Sie selbstduale Graphen für jedes $n \geq 4$.