9 Planare Graphen III

- G eben, 2-zshgd.
  $\Rightarrow$ G hat Ohrenzerlegung und alle Länder sind durch Kreis begrenzt

- G planar, n = Anzahl Knoten
  k = — " — Kanten
  f = —— " — Länder

  Dann: $n - k + f = 2$

  und $k \leq 3n - 6$

  sowie $k \leq 2n - 4$ falls G dreiecksfrei

<u>Prop</u>: G eben, dann $f \leq 2n - 4$

$\lceil$ aus $f + n - 2 = k \leq 3n - 6$ $\rfloor$

<u>Def</u> $G = (V, E)$ Graph, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Eine Abbildung

$$c : V \to [k]$$

heißt Färbung von G, wenn für alle $\{u, v\} \in E$

$$c(u) \neq c(v)$$

gilt.

Das kleinste k, für das es eine Färbung von G gibt, heißt <u>chromatische Zahl</u> $\chi(G)$ von G

→ Definition gilt für allgemeine Graphen.

→ $\chi(K_n) = n = |V|$

Def Die Cliquenzahl $\omega(G)$ eines Graphen G ist das größte k, so dass G einen Teilgraphen isomorph zu K_k hat

Prop: $\chi(G) \geq \omega(G)$ ☒

→ C_5 : $\omega(G) = 2 < 3 = \chi(G)$

sogar: Für jedes ω kann χ beliebig groß werden (also man braucht viele Knoten)

Bsp: Mycielski-Graphen:

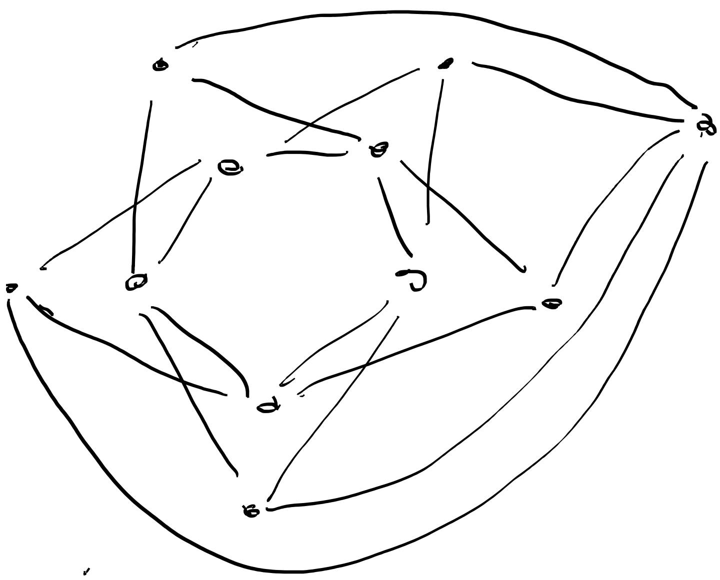
$G_0 = C_5$

G_i aus G_{i-1} : $V_{i-1} = \{x_1, \dots, x_n\}$

dann: $V_i = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_n\} \cup \{z\}$

$E_i = E_{i-1} \cup \{y_k u \mid u \in N(x_k)\}$

$\cup \{y_k z\}$

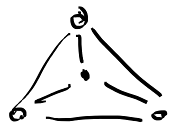


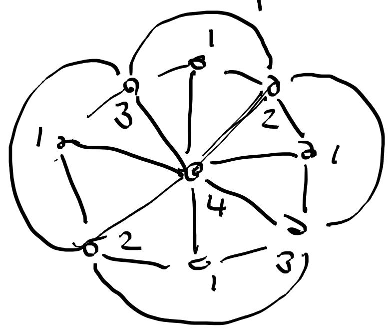
Def: G heißt perfekt, wenn $\chi(G) = \omega(G)$

Satz (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas)
G perfekt $\Leftrightarrow$ weder G noch $\overline{G}$ haben induzierten Kreis ungerader Länge $k \geq 5$

[ohne Beweis]

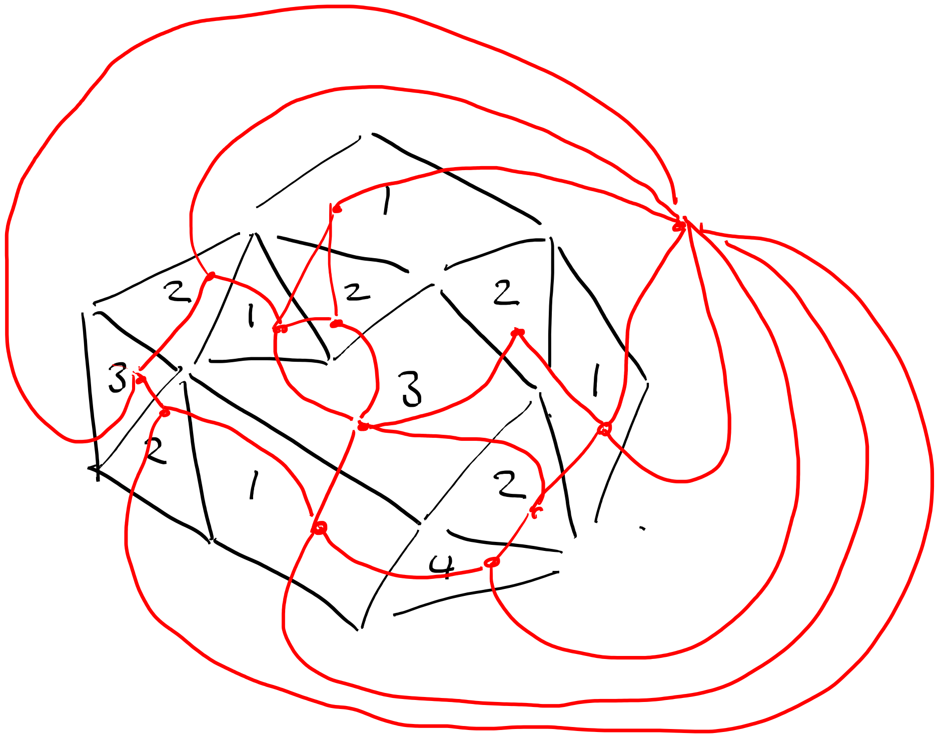
→ wie sieht das für ebene Graphen aus?





→ ursprüngliche Motivation für diese Färbungsprobleme: Färben von Landkarten
→ Länder mit gem. Grenze sollen unterschiedliche Farbe bekommen.
→ Annahme: Länder zusammenhängend.

→ können jeder Landkarte einen Graphen zuweisen:
- Knoten für jedes Land.
- Kante, wenn gemeinsame Grenze.

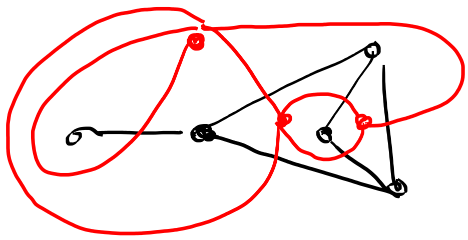


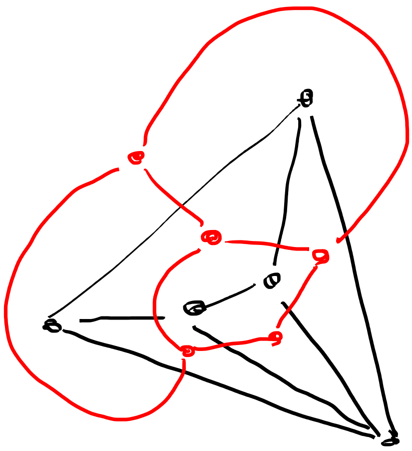
→ der duale Graph ist eben:
können duale Kante zwischen Ländern durch gemeinsame Grenze laufen lassen.

Formal: G ebener Graph (mit Zeichnung)
Dualer Graph G^* definiert durch:
- Ein Knoten für jedes Land (auch das äußere!)
- Eine duale Kante für jede Kante in G

→ das angrenzende Land kann zweimal das gleiche sein!

→ G^* kann Mehrfachkanten und Schleifen haben.





→ ist nicht eindeutig:

Prop: Für abstrakte Graphen gilt $G^{**} \cong G$

Damit:

Vier-Farben-Problem

Kann jede Landkarte mit vier Farben so gefärbt werden, dass angrenzende Länder verschiedene Farben haben?

$\triangleq$ ist $\chi(G) \leq 4$ für alle planaren Graphen?

1852 Guthrie, de Morgan, Hamilton
→ Vermutung formuliert

1853 fehlerhafter Beweis von Kempe

1864 Heawood findet den Fehler

1880 Tait: zweiter Beweisversuch

1891 Petersen erkennt den Fehler

⋮

1976 Computerbeweis Appel & Haken

1989 formalisierte Version vorgelegt

1996 Robertson, Sanders, Seymour, Thomas
verbesserte Version
2005 Gonthier, Werner: formaler Beweis in Coq

Satz (Appel & Haken) $\chi(G) \leq 4$ für alle ebenen Graphen $\boxtimes$

Satz (Fünf-Farben-Satz) $\chi(G) \leq 5$ für alle ebenen Graphen.