9 Planare Graphen II

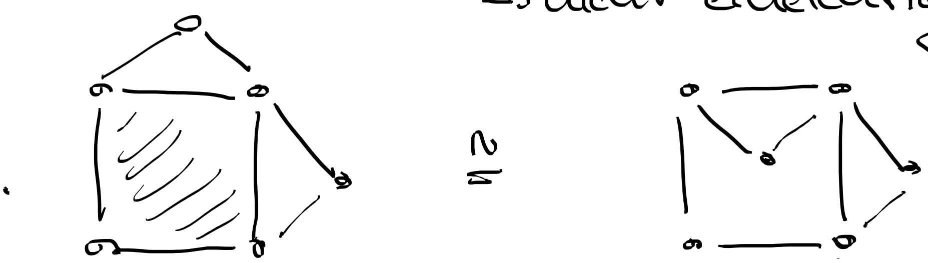
→ unterscheiden: • Graph als Paar von Knoten und Kanten

• ebener Graph: Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, die sich als Graph interpretieren lässt

→ ebener Graph definiert eindeutigen Graph

→ Graph ist planar $\Leftrightarrow$ es gibt ebene Zeichnung

→ nicht eindeutig



Gebiet mit vier Ecken

G ebener Graph: $\mathbb{R}^2 \setminus G$ zerfällt in Zshgkomponenten

→ Länder | Gebiete von G

→ genau ein unbeschränktes Land

<u>Satz</u> K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

<u>Satz</u> (Satz von Kuratowski) Ein Graph ist genau dann planar, wenn es keinen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor enthält

[ohne Beweis]

Def G Graph. G ist k-zusammenhängend, wenn $|V| \geq k+1$ und für alle $W \subseteq V$ mit $|W| \leq k-1$ ist $G-W$ zusammenhängend

[Achtung: es gibt auch k-kantenzshgd]

Satz G ist 2-zshgd $\Leftrightarrow$ Zu je zwei Ecken gibt es Kreis, der sie enthält

Γ „$\Leftarrow$" ✓

„$\Rightarrow$" $u, v \in V$, Induktion nach Abstand $d(u,v)$

$d(u,v) = 1 \Rightarrow uv \in E$

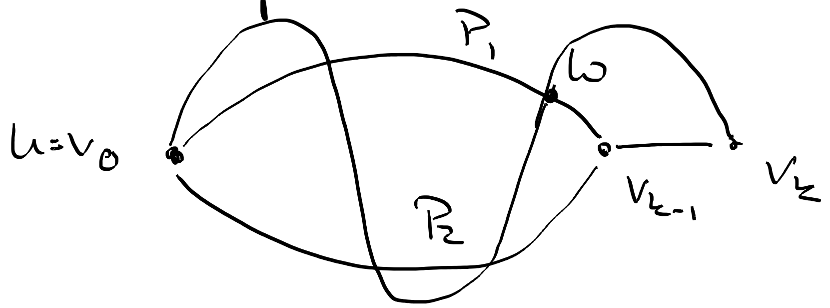
$G-u$, $G-v$ zshgd $\Rightarrow$ $G-e$ zshgd

$\Rightarrow$ es gibt Pfad von u nach v in $G-e$

$d(u,v) = k \geq 2$: $P: u = v_0 v_1 \dots v_k = v$ kürzester Pfad

$\Rightarrow d(u, v_{k-1}) < k$

$\Rightarrow$ es gibt Kreis $C = P_1 \cup P_2$ mit u, v_{k-1}



Ausserdem: $G - v_{k-1}$ zshgd

$\Rightarrow$ Pfad P von u nach v ohne v_{k-1}

Setze: w letzter Knoten von P auf P_1, P_2 (kann u sein)

Dann ist $P_1|_{uw} + P|_{wv} + v_k v_{k-1} + P_2$ Kreis mit u, v ┘

Bem G 2-zshgd $\Leftrightarrow$ jede Unterteilung von G ist 2-zshgd. ☒

Satz G zshdg. G ist genau dann 2-zshgd, wenn G aus einem Dreieck durch
- Unterteilen von Kanten
- Hinzufügen von Kanten

erzeugt werden kann.

alternativ:
wenn G als Folge $G_0, G_1, \ldots, G_k = G$ erzeugt werden kann, wobei G_0 ein Kreis ist und G_i aus G_{i-1} durch Hinzufügen eines Pfads mit Endpunkten in G_{i-1} entsteht.
$\rightarrow$ Ohrenzerlegung.

Beweisen zweite Formulierung.

„$\Leftarrow$" ✓

„$\Rightarrow$" Es gibt Kreis G_0 in G

Angenommen, haben durch Hinzufügen von Pfaden Untergraph $G_i = (V_i, E_i)$ von G erzeugt.

$G_i = G$: ✓

sonst: es gibt Kante $e \notin E_i$ mit $e \cap V_i \neq \emptyset$

(1) beide Enden in V_i:

$\Rightarrow e$ ist Ohr $\to G_{i+1} = (V_i, E_i \cup \{e\})$

(2) $v = e \cap V_i$, anderes Ende $v' \notin V_i$

wähle $u \in V_i \setminus \{v\}$

$G - v$ 2-zshgd $\Rightarrow$ es gibt Pfad $P : v' \to u$ in $G - v$

u' erster Knoten auf P in V_i

$\Rightarrow v \to v' \to u'$ ist neues Ohr ⌟

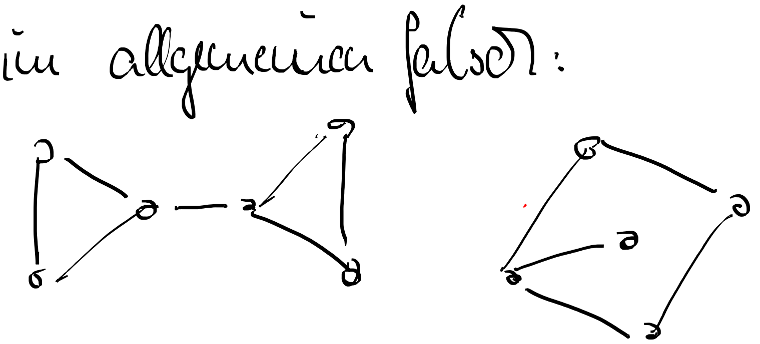
<u>Satz</u> G 2-zshgd $\Rightarrow$ jedes Gebiet wird durch Kreis in G (Jordankurve) begrenzt.

⌜ Induktion:

G aus $G - e$: e zerlegt Kreis in zwei Teile

G aus Unterteilung von G' : Unterteilung von Kreis ist Kreis. ⌟

Bem: Das ist im allgemeinen falsch:



→ betrachten nun Zusammenhang zwischen Anzahl n der Knoten, k der Kanten und der Anzahl f der Länder

Satz (Euler-Formel)
G zusammenhängender planarer Graph. Dann

$$n - k + f = 2$$

⌈ Induktion nach k:

$k = 0$: Dann $n = 1, f = 1$ ✓

$k \geq 1$: G Baum $\Rightarrow f = 1, k = n - 1$ ✓
sonst: G enthält Kreis C
Sei e Kante in C $\Rightarrow$ $G - e$ ist zshgd.
Ausserdem: $G - e$ hat eine Kante und ein Land weniger
→ die beiden von e getrennten Länder verschmelzen.

$\Rightarrow$ in $G - e$: $n - (k-1) + (f-1) = 2$

$\Rightarrow n - k + f = 2$ ⌋

Kor: G mit c Zshgkomponenten. Dann

$$n - k + f - c = 1$$

☒

Satz G eben, $n \geq 3$
Dann $k \leq 3n - 6$

Alle Länder haben ≥ 3 Kanten am Rand

$$2k \geq 3f = 3 + 3c + 3k - 3n$$

$$\Rightarrow k \leq 3n - 3 - 3c \leq 3n - 6$$

Satz G eben und dreiecksfrei, $n \geq 4$
Dann $k \leq 2n - 4$

$$2k \geq 4f = 4 + 4c + 4k - 4n$$

$$\Rightarrow k \geq 2n - 4$$

Kor K_5 ist nicht planar

$k = 10$, $n = 5$ $\quad 3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10$ ↯

Kor $K_{3,3}$ ist nicht planar

$n = 6$, $k = 9$ $\quad 2 \cdot 6 - 4 = 8 < 9$ ↯

Kor: Jeder planare Graph hat Ecke vom Grad ≤ 5 ∎

Def $G=(V,E)$ Graph, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Eine Abbildung

$$c : V \to [k]$$

heißt Färbung von G, wenn $c(u) \neq c(v)$ ist für alle $\{u,v\} \in E$

Die chromatische Zahl $\chi(G)$ von G ist das kleinste k, so dass es eine Färbung von G gibt.

→ hier muss G nicht planar sein.

→ $\chi(G)$ kann groß werden: $\chi(K_n) = n$.

→ wie sieht das für ebene Graphen aus?