8 Lineare Algebra in der Kombinatorik

→ Anwendungen oft wieder in der extremalen Kombinatorik

→ Methoden aus linearer Algebra:
  z.B. Konfigurationen mit Vektoren in geeigneten Vektorraum identifizieren

→ schauen uns Mengenfamilien mit Einschränkung an Parität der Kardinalitäten von Mengen und Schnitten an.
  dafür: Menge A ist (un)gerade ⟺ $|A|$ ist (un)gerade

geg.: Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von $[n]$ mit:

- Alle Mengen sind gerade/ungerade
- Der Schnitt von je zwei Mengen ist gerade/ungerade
- Alle Mengen sind verschieden.

⌈klassische Interpretation: Eventown/Oddtown
→ wieviele Vereine lassen sich bilden?⌋

Bsp: n gerade, alle Mengen und Schnitte sollen gerade sein

$\rightarrow$ können $m = \frac{n}{2}$ Paare $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$ bilden

$\mathcal{F} = 2^P$ erfüllt Bedingungen, $|\mathcal{F}| = 2^m = 2^{n/2}$

Bsp: Mengen ungerade, Schnitte gerade

- n gerade: $\mathcal{F} :=$ alle $(n-1)$-Teilmengen von $[n]$
  $\rightarrow |\mathcal{F}| = n$
- $\mathcal{F}$ alle 1-Teilmengen von $[n]$ $\rightarrow |\mathcal{F}| \leq n$

Satz (Oddtown) $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$
$|A|$ ungerade für alle $A \in \mathcal{F}$
$|A \cap B|$ gerade für alle $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$

Dann $|\mathcal{F}| \leq n$

Sei $m := |\mathcal{F}|$

Betrachte Inzidenzvektoren $\chi^A \in \mathbb{Z}_2^n$ mit

$$\chi_i^A = \begin{cases} 1 & i \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann:

$$\langle \chi^A, \chi^B \rangle = \sum_{k \in A \cap B} 1 = \begin{cases} 1 & A = B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \chi^A$ für $A \in \mathcal{F}$ sind linear unabhängig in $\mathbb{Z}_2^n$

$\Rightarrow m \leq \dim \mathbb{Z}_2^n = n$

Satz (Eventown)
$\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, $|A|$ gerade für alle $A \in \mathcal{F}$
$|A \cap B|$ gerade für alle $A, B \in \mathcal{F}$

Dann $|\mathcal{F}| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$

Γ $\chi^A \in \mathbb{Z}_2^n$ Inzidenzvektoren zu $A \in \mathcal{F}$

Dann: $\langle \chi^A, \chi^B \rangle = 0$ für alle $A, B \in \mathcal{F}$

Sei: $V := \mathrm{lin}(\chi^A \mid A \in \mathcal{F}) \subseteq \mathbb{Z}_2^n$

der von den χ^A aufgespannte Unterraum

und $V^\perp := \{ v \in \mathbb{Z}_2^n \mid \langle v, \chi^A \rangle = 0 \ \forall A \in \mathcal{F} \}$

der Orthogonalraum zu V.

Dann: $\chi^A \in V^\perp \Rightarrow V^\perp \subseteq V$

Nach der Dimensionsformel

$n = \dim \mathbb{Z}_2^n = \dim V + \dim V^\perp \geq \dim V + \dim V$

$\Rightarrow \dim V \leq n/2$

$\Rightarrow |V| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ $\lrcorner$

Satz $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, $|A|$ gerade für alle $A \in \mathcal{F}$
$|A \cap B|$ ungerade für alle $A, B \in \mathcal{F}, A \neq B$

Dann $|\mathcal{F}| \leq n$

$\chi^A \in \mathbb{Z}_2^n$ Inzidenzvektoren

Dann:
$$\langle \chi^A, \chi^B \rangle = \begin{cases} 1 & A \neq B \\ 0 & A = B \end{cases}$$

Angenommen $m := |\mathcal{F}| \geq n+1$
$\rightarrow$ wähle $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ mit $|\mathcal{F}'| = n+1$

Dann gibt es $\lambda_A \in \mathbb{Z}_2$, $A \in \mathcal{F}'$, nicht alle $\lambda_A = 0$ mit
$$\sum_{A \in \mathcal{F}'} \lambda_A \chi^A = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \langle \chi^B, \sum_A \lambda_A \chi^A \rangle = \sum_{A \neq B} \lambda_A$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung für verschiedene B, B' folgt
$$\lambda_B = \lambda_{B'} \quad \text{für alle } B \neq B'$$
Nicht alle 0 $\Rightarrow$ $\lambda_A = 1 \quad \forall A \in \mathcal{F}'$

Damit:

(1) $\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{F}'} \chi^A = 0$

(2) $0 = \langle \chi^B, \sum \lambda_A \chi^A \rangle = |\mathcal{F}| - 1 \pmod 2 = n \pmod 2$
$\Rightarrow n$ ist gerade

Setze nun $\overline{\mathcal{F}}' := \{[n] \setminus A \mid A \in \mathcal{F}'\}$

Wegen (2): • $|\overline{A}|$ ist gerade für $\overline{A} \in \overline{\mathcal{F}}'$
• $|\overline{A} \cap \overline{B}|$ ist ungerade für $\overline{A}, \overline{B} \in \overline{\mathcal{F}}'$, $\overline{A} \neq \overline{B}$

Wie zuvor folgt $\displaystyle\sum \chi^{\overline{A}} = 0$

Damit ergibt sich:

$$0 = \sum \chi^{A} + \sum \chi^{\bar{A}} = (n+1)\,\mathbb{1}$$

$\Rightarrow n+1$ ist gerade $\Rightarrow n$ ist ungerade $\lightning$ $\lrcorner$

Es gibt noch eine letzte Kombination:

<u>Satz</u> $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, $|A|$ ungerade für $A \in \mathcal{F}$
$|A \cap B|$ ungerade für $A, B \in \mathcal{F}$

Dann $|\mathcal{F}| \leq n$

$\ulcorner$ Bew: Übungen* $\lrcorner$

Anwendung $\to$ Übungen

<u>Def:</u> Graph $G = (V, E)$ heißt <u>k-Ramsey-Graph</u>, wenn G weder k-Clique noch k-stabile Menge enthält.

Wieviele Knoten kann G haben?

Turan-Graph $T_{(k-1)^2, (k-1)}$ ist k-Ramsey mit $O(k^2)$ Knoten

Übungen: es geht auch $O(k^3)$

Statt der Parität können wir auch die Größe des Schnitts festlegen:

$$\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]} \text{ und } |A \cap B| = \lambda \text{ für } A \neq B$$

Bsp: $\lambda = 1$: $\{1\}, \{1, j\}$ für $2 \le j \le n$: $|\mathcal{F}| \le n$

$\lambda = n-2$ $\binom{[n]}{n-1}$

<u>Satz</u> (Fisher-Ungleichung) $1 \le \lambda \le n$, $\mathcal{F} \in 2^{[n]}$ mit $|A \cap B| = \lambda$ für alle $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$

Dann $|\mathcal{F}| \le n$

$\rightarrow$ nicht bekannt, ob es Gleichheit für alle λ geben kann

$\rightarrow$ Designs

Γ Sei $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$,

$\chi_i := \chi^{A_i} \in \mathbb{R}^n$ Inzidenzvektor

Angenommen, $|A_k| = \lambda$ für ein k.

$\Rightarrow A_k \subseteq A_i \quad \forall \; 1 \le i \le m$,

$A_i \setminus A_k \cap A_j \setminus A_k = \emptyset$ für $i \neq j$.

$\Rightarrow m \le n + 1 - \lambda \le n$

können also $d_i := |A_i| - \lambda > 0$ annehmen.

Sei $M := (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m_{ij} = \begin{cases} 1 & j \in A_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \chi_1^t \\ \vdots \\ \chi_m^t \end{pmatrix}$$

und $\underline{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Matrix mit

1 in jeder Eintrag,

$D := \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_m)$

Dann:

$$M M^t = \lambda \underline{M} + D$$

Nun ist $\lambda \underline{M}$ positiv semidefinit $(x^t \lambda \underline{M} x^t \geq 0 \ \forall x)$

und D positiv definit $(x^t D x \geq 0 \ \forall x, \dots = 0 \iff x = 0)$

$\Rightarrow \lambda \underline{M} + D$ ist positiv definit

$\Rightarrow \operatorname{rang}(M M^t) = \operatorname{rang}(\lambda \underline{M} + D) = m$

$\Rightarrow m = \operatorname{rang} M M^t = \operatorname{rang} M \leq n$

$\square$