Diskrete Mathematik

Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
10. November 2022
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1: Derangements

Sei d_n die Anzahl der Derangements von $[n]$. Wir wollen die uns bekannte Formel für d_n auf anderem Weg herleiten.

1. Zeigen Sie die Identität
$$n! \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k \tag{1}$$
2. Sei nun $D(x) := \sum_{n \geq 0} d_n \frac{x^n}{n!}$ die exponentielle Erzeugendenfunktion der d_n und $E(x)$ die exponentielle Erzeugendenfunktion der Folge $e_n = 1$ für $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass die rechte Seite von (1) der n-te Koeffizient c_n der exponentiellen Erzeugendenfunktion $C(x) := D(x)E(x) = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^n}{n!}$ ist.
3. Folgern Sie daraus $D(x)$.
4. Wir fassen $D(x)$ nun als *gewöhnliche* Erzeugendenfunktion zu den Koeffizienten $\frac{d_n}{n!}$ auf. Benutzen Sie Aufgabe 3.4, um die bekannte Formel
$$\frac{d_n}{n!} \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$
herzuleiten.

Aufgabe 4.2: Gitterwege

Wir betrachten ein Rechteckgitter mit $m+1$ senkrechten und $n+1$ waagerechten Kanten. Ein rh-Weg ist ein Weg entlang Gitterkanten, der von $(0,0)$ nach (m,n) geht, und nur nach rechts oder hoch geht.

1. Zeigen Sie, dass es $\binom{m+n}{n}$ solcher rh-Wege gibt.
2. Betrachten Sie nun rh-Wege, die auf Höhe k den rechten Rand erreichen (also notwendig durch eine nach rechts verlaufende Kante!), um die Identität
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} \;=\; \binom{m+n+1}{n}$$
zu zeigen.

Aufgabe 4.3: Catalanzahlen

Sei $b_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ die n-te Catalanzahl. Zeigen Sie (soweit nicht schon in der Vorlesung diskutiert) das b_n die folgenden Objekte zählt:

(!) 1. Bäume mit $n+1$ Knoten.
2. Vollständige Klammerungen eines Ausdrucks mit $n+1$ Variablen.
3. Triangulierungen eines $(n+2)$-Ecks.
4. Gitterwege von $(0,0)$ nach $(2n,0)$, die sich von (i,j) entweder nach $(i+1,j+1)$ oder $(i+1.j-1)$ bewegen, und die die x-Achse nicht unterschreiten.
5. Folgen $(a_1,a_2,\dots,a_{2n})$ mit $a_i \in \{0,1\}$ und $a_1+\cdots+a_k \leq \frac{1}{2}k$ für $1 \leq k \leq 2n$ sowie $a_1+\cdots a_{2n} = n$.
6. Parkettierungen des nichtkonvexen Polyons mit den Ecken

$$\begin{aligned}(0,0),(0,n),(1,n),&(1,n-1),(2,n-1),(2,n-2),\\ &\dots,(n-2,3),(n-2,2),(n-1,2),(n-1,1),(n,1),(n,0)\,.\end{aligned}$$

nit n Rechtecken.

Hinweis: Nicht alle Äquivalenzen sind einfach, und es ist nicht Ziel der Aufgabe, alle zu finden. Probieren Sie, welche Sie finden können.

Manchmal kann es auch leichter sein, die Rekursionsformel für die Catalanzahlen nachzuweisen anstatt eine Äquivalenz zu einer der anderen Punkte.

Aufgabe 4.4: Identitäten

Zeigen Sie

1. $\binom{n-m}{r-m} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n-k}{r}$
2. $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ und $\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m\binom{n}{m}$

$*$ Aufgabe 4.5: Dominosteine

Sei A_n die Anzahl möglicher Überdeckungen eines $(2\times n)$-Gitters mit (2×1)-Dominosteinen. Für $n=2$ gibt es dann zwei Möglichkeiten, für $n=3$ gibt es drei. Bestimmen Sie A_n.