4 Anwendungen

Stirling- und Bellzahlen

→ gewöhnliche vs. exponentielle Erzeugendefkt:

$\sum a_n x^n$ $\qquad\qquad$ $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$

oft: ungeordneter $\qquad$ geordneter $\qquad$ Kontext

siehe z.B. Produkt:

gewöhnliche Erzeugendenfunktion:

$$A(x)B(x) = \sum_{n\geq 0} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}_{\text{ungeordnete Partition der n-Menge}} x^n$$

Bsp: n Cent mit 1/2-Cent-Münzen zahlen:

nur 1 Cent: $A(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$

nur 2 Cent: $B(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$

mit 1 und 2 Cent:

$$A(x)B(x) = \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x^2} = \frac{1+x}{(1-x^2)^2}$$

$$= \sum c_n x^n, \quad c_n = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor$$

exponentielle Erzeugendenfkt:

$$A(x)\,B(x) = \sum_{n\geq 0}\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}}_{\text{geordnete Partition der } n\text{-Menge}}\Big)x^n$$

Bsp: # Anordnungen von a, b der Länge n

→ nur a: $A(x) = \sum 1\cdot\frac{x^n}{n!} = e^x$

nur b: $B(x) =$ —— " ——

a und b:

$$A(x)\,B(x) = e^x\cdot e^x = e^{2x} = \sum 2^n\frac{x^n}{n!}$$

→ $c_n = 2^n$ //

Anordnungen mit min. einem a?

$$A(x) = e^x - 1$$

$$A(x)B(x) = (e^x-1)e^x = e^{2x}-e^x = \sum(2^n-1)\frac{x^n}{n!}$$

≙ # nichtleere Teilmengen einer n-Menge

Funktionen $[n] \to [k]$?

≙ geordnete Partitionen $[n] = A_1 \cup \ldots \cup A_k$

$\Rightarrow \mathcal{A}(x) = (e^x)^k = e^{kx} = \sum_{n\geq 0} k^n \frac{x^n}{n!}$ 7-3

\# surjektive Funktionen?

$\hat{=}$ alle Teile nichtleer

$\Rightarrow \mathcal{A}(x) = (e^x - 1)^k$

wir wissen: \# surjektive Funktionen $[n] \to [k]$ ist $k!\, S(n,k)$,

$S(n,k)$ Stirlingzahl zweiter Art

$$\Rightarrow (e^x-1)^k = \mathcal{A}(x) = \sum_{n\geq 0} k!\, S(n,k) \frac{x^n}{n!}$$

und damit

$$S_k(x) := \sum_{n\geq 0} S(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x-1)^k$$

exp. Erzeugendenfunktion der Stirlingzahlen zweiter Art.

Erinnerung: $S(n,k) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k!} \binom{k}{j} (-1)^j (k-j)^n$

Für die Bellzahlen gilt:

$$b(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

und damit für die exponentielle Erzeugendenfunktion

$$B(x) = \sum_{n \geq 0} b(n) \frac{x^n}{n!}$$

$$B(n) - 1 = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n} S(n,k) \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} S(n,k) \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{k \geq 1} S_k(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k$$

$$= e^{e^x - 1} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{B(x) = e^{e^{x-1}} - 1}$$

Man kann auch zeigen:

<u>Satz</u> $S_k^{gew}(x) = \sum_{n \geq 0} S(n,k) x^n = \prod_{j=1}^{k} \frac{x^k}{(1 - j \cdot x)}$

$$s_k(x) = \sum_{n \geq 0} s(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\ln(1+x) \right)^k$$

∎

Binäre Bäume

→ binäre Bäume: • Datenstrukturen (Einf Prog I)
• Entscheidungs-/Suchbäume (ADM)

→ betrachten Bäume mit Wurzel

Baum: • kreisfreier zusammenhängender Graph $T = (V, E)$

• mit Wurzel $r \in V$

T Baum: es gibt eindeutigen Weg von $v \in V$ nach r

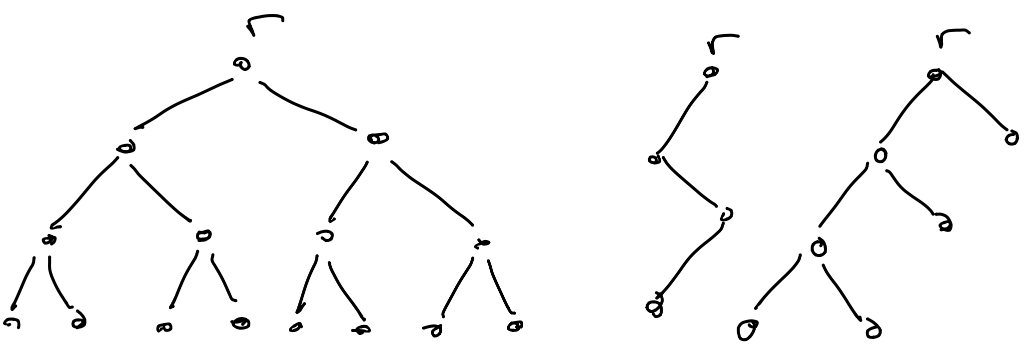
wenn der Weg $v = w_0 w_1 \dots w_k = r$ ist, dann:

w_1: Elternknoten von v

$v = w_0$: Kind von w_1

T ist binär: jeder Knoten hat ≤ 2 Kinder

[alternativ: $\deg(v) \leq 3 \ \forall v$, $\deg(r) \leq 2$]



nützliches: Induktive Definition:

T binärer Baum $\Leftrightarrow$

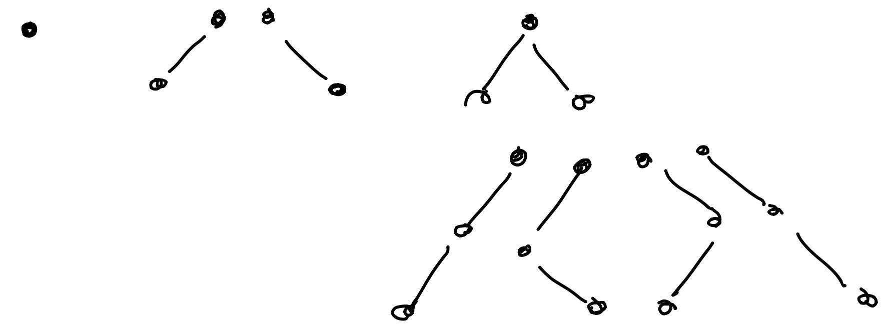
T ist entweder leer, oder

T besteht aus einer ausgezeichneten Ecke (Wurzel) r und einem rechten und linken Teilbaum

$\rightarrow$ wenn nicht leer, sind Wurzeln der Teilbäume mit r verbunden.

Setze: $b_n :=$ Anzahl binärer Bäume auf n Ecken

$n =$	0	1	2	3
	$\emptyset$			



	1	1	2	5

Setzen $B(x) := \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ Erzeugendenfunktion.

für $n \geq 1$: $b_n \;\hat{=}\;$ Anzahl geordneter Paare (T, T') von binären Bäumen mit insgesamt $n-1$ Ecken

$$\Rightarrow b_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-1-k}$$

Erinnerung:

$$\left(\sum_{n\geq 0} p_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} q_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n$$

$\Rightarrow$ b_n ist Koeffizient von x^{n-1} in $B(x)\cdot B(x)$

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \dots + b_{n-1} b_0$$

$\Rightarrow$ b_n ist Koeffizient von x^n in $x B(x)^2$

$\Rightarrow$ $x B(x)^2$ erzeugt die Folge $(0, b_0, b_1, b_2, \dots)$

$\Rightarrow$
$$B(x) = 1 + x B(x)^2$$

$\leadsto$ jetzt ist es hilfreich, Konvergenz für kleine x anzunehmen

[ÜA: $b_n \leq C^n$ für Konstante $C>0$
$\Rightarrow$ Konvergenz für $|x| < \frac{1}{C}$]

Damit: Wenn $B(x)$ für ein x konvergiert, dann erfüllt $B(x)\in\mathbb{R}$ die quadratische Gleichung

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

$\rightarrow$ welche der beiden Lösungen ist die richtige?

7-8

$\to B(x)$ ist stetig,

$\Rightarrow$ gleicher Zweig für alle x, für die $B(x)$ konvergiert

für $x \to 0$ brauchen wir $B(x) \to b_0 = 1$

denn: $\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ divergiert für $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{2\sqrt{1-4x}}}{2} = 1$$

also $B(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

$\to$ Reihenentwicklung:

nach dem verallg. Binomialsatz:

$$\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2} = \sum_{k\geq 0} (-4)^k \binom{1/2}{k} x^k$$

Koeffizient für $k=0$: $(-4)^0 \binom{1/2}{0} = 1$

$\Rightarrow$ der konstante Koeffizient der Reihe zu

$1-\sqrt{1-4x}$ ist $1-1=0$.

$\Rightarrow$ wir können Reihe zu $1-\sqrt{1-4x}$ durch $2x$ teilen.

$$\Rightarrow b_n = -\frac{1}{2}(-4)^{n+1}\binom{1/2}{n+1}$$

$$= -\frac{1}{2}(-4)^{n+1}\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!}$$

$$= (-4)^n \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!}$$

$$= 2^n \cdot \frac{1}{n+1}\,\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{n!}$$

$$= \frac{1}{n+1}\,2^n\,\frac{(2n-1)!}{n!\,2^{n-1}(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{n+1}\,\frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

<u>Def</u>: $b_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ ist die n-te <u>Catalanzahl</u>

Aus

$$B(x) = \sum b_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

folgt für $x = 1/4$:

<u>Prop</u>

$$\sum \frac{b^n}{4^n} = 2$$

$\boxtimes$