Erzeugendenfunktionen II

$(a_n)_{n\geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ Folge

$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ Erzeugendenfunktion

→ formale Potenzreihe
Rechenregeln wie bei Polynomen

Bsp: $a_n = (n+1)^2$

Dann: $b_n = 1 \longrightarrow B(x) = \frac{1}{1-x} = \sum x^n$

Ableiten: $B'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n$

$$B''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 1} n(n+1) x^{n-1}$$

$$= \sum_{n\geq 0} (n+1)(n+2) x^n$$

$$= \sum \left((n+1)^2 + (n+1)\right) x^n$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{3-x}{(1-x)^3}$$

in allen Bsp bisher:

$A(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für Polynome p, q

→ wir können charakterisieren, wann eine solche Darstellung gibt

Satz $q_1, \dots, q_d \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), $d \geq 1$

$$q(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_d z^d$$
$$= (1-\alpha_1 z)^{d_1} \cdots (1-\alpha_k z)^{d_k}$$

Dann sind für $a : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{K}$ äquivalent:

(1) $a(n+d) + \sum q_i a(n+d-i) = 0$

(2) $A(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a(n) x^n = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

für Polynom p mit $\deg p < d$

(3) $A(z) = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$,

für Polynome g_i mit $\deg g_i < d_i$

<u>Partialbruchzerlegung</u>

(4) $a(n) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(n) \alpha_i^n$

für Polynome p_i mit $\deg p_i < d_i$

<u>geschlossene Form</u>

$V_i := \{ a : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{K} \mid a \text{ erfüllt } (i) \}$

$\to$ Vektorräume der Dimension d

(1): eine lineare Gleichung auf $\mathbb{K}^{d+1}$

(2), (3), (4) $\quad \dim \mathbb{K}[x]_n = n+1$

- $a \in V_2$: $\quad q(z) A(z) = p(z)$

  + Koeffizientenvergleich

  $\Rightarrow a \in V_1$

- $a \in V_3$: $\quad A(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d}}$

  $\to$ auf Hauptnenner! $\quad q(z)$

  Zähler: $\quad \underbrace{\sum \prod_{j \neq i} (1-\alpha_j z)^{d_j} g_i(z)}$

  $\deg = \sum_{j \neq i} d_j + \deg g_i < d$

  $\Rightarrow a \in V_2$

außerdem:

$$\frac{1}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n \geq 0} \binom{d_i + n - 1}{d_i - 1} \alpha_i^n z^n$$

$$\Rightarrow A(x) = \sum_{i=1}^{t} q_i(z) \sum_{u\geq 0} \binom{d_i+u-1}{d_i-1} \alpha_i^u z^u$$

$$= \sum_{u\geq 0} \sum_{i=1}^{t} q_i(z) \binom{d_i+u-1}{d_i-1} \alpha_i^u z^u$$

$$= \sum_{u\geq 0} \sum_{i=1}^{t} \underbrace{\sum_{j=0}^{d_i-1} q_{ij} \binom{d_i+u-j-1}{d_i-1}}_{\deg < d_i} \alpha_i^u z^u$$

$\Rightarrow a \in V_4$

$\Rightarrow V_3 \subseteq V_2 \subseteq V_1$ und $V_3 \subseteq V_4$

Da alle gleiche Dim. haben: $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$

Bsp (1) $a(u+2) - a(u+1) - a(u) = 0$, $a(0) = 0$, $a(1) = 1$

$\rightarrow q(z) = 1 - x - x^2 = (1-\varphi_+ x)(1-\varphi_- x)$

für $\varphi_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

mit $q(z)A(z) = x$

$$A(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{r}{1-\varphi_+ z} + \frac{s}{1-\varphi_- z}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 & \Rightarrow r = -s \\ x = 1 & \Rightarrow -1 = r(\varphi_- + \varphi_+) \end{array}\right\} r = \frac{1}{\sqrt{5}},\ s = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow A(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \geq 0} (\varphi_+^n - \varphi_-^n) z^n$$

und $a(n) = (\frac{1}{\sqrt{5}} \varphi_+^n - \varphi_-^n)$

(2) $a_n = \lfloor n/2 \rfloor$

$$A(x) = \frac{x^2 + x^3}{(1-x^2)^2} \rightarrow q(x) = 1 - 2x^2 + x^4$$

$$\Rightarrow a(n+4) = 2a(n+2) - a(n)$$

Die meisten Rekursionen sind allerdings nicht von dieser Form

$\rightarrow$ könnten z.B. konstanten Term haben

$\rightarrow$ trotzdem sind die Methoden oft erfolgreich

Def: $(a_n)_{n \geq 0}$ Folge. Dann

$A(x) = \sum \frac{a_n}{n!} x^n$ exponentielle Erzeugendenfunktion

$\rightarrow$ erhalten ähnliche Regeln wie für gewöhnliche Erz. fkt.

Bsp: • # Anordnungen der Länge n von a, b bei der die Anzahl der b's gerade ist:

[$n=4$: aaaa, aabb, abab, baab, abba, baba, bbaa, bbbb]

$$A(x) = \sum 1 \cdot \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$B(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$P(x) = A(x)B(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} \frac{2^n x^n}{n!} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2^{n-1} & n \geq 1 \end{cases}$$

$$= (1, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$$

Wenn wir noch eine ungerade Anzahl c hinzunehmen:

$$C(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$Q(x) = C(x)P(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^{2x} + 1) = \frac{1}{4}(e^{3x} - e^{-x})$$

$$= \frac{1}{4} \sum (3^n - (-1)^n) \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow q(n) = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n) = (0, 1, 2, 7, 20, 61, \ldots)$$