THÈSES
présentés
À LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
pour obtenir le grade de
DOCTEUR ÈS-SCIENCES
MATHÉMATIQUES
par

Klaus KEIMEL

1re Thèse. - Représentation de groupes et d'anneaux réticulés par des sections dans des faisceaux.
2e Thèse. - Propositions données par la Faculté.

Soutenues, le 16 juin 1970, devant la Commission d'Examen:

Mme	M. L.	DUBREIL-JACOTIN	Président
MM.	J.	DIXMIER	
	M.	SCHÜTZENBERGER	Examinateurs

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Méthodes combinatoires de Cartier–Foata
en calcul des probabilités

Vu et approuvé
Paris le 28 juin 1970
Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris
Marc ZAMANSKI

Vu et permis d'imprimer
Le Recteur del'Académie de Paris
Robert MALLET

Note added in 2011

This thesis had never been published in its original form. The main part on sheaf representations which is contained in Chapter 3 of this thesis and the results therein have been published in English under the title
The representation of lattice-ordered groups and rings by sections in sheaves
in: Lecture Notes on the Applications of Sheaves to Ring Theory, Lecture Notes in Mathematics, **248** (1971), Springer Verlag, pp. 1-98.

In this English published version the presentation has been restricted to lattice-ordered groups and rings. In the original French version we have introduced a structure, *annéloïdes réticulés*, which covers both lattice-ordered groups and rings.

At the other hand, the published English version contains a GENERAL REPRESENTATION THEOREM (3.3) which is an improvement of the results contained in the French original.

There is also a mistake in the published English version: In the FIRST SPECIAL REPRESENTATION THEOREM (4.9) it is claimed that the stalks of the sheaf over the Stone space of the Boolean algebra of direct factors are directly indecomposable. But in the proof there is a gap; there is a reference to lemma 4.4; but in this lemma the surjectivity of the homomorphism of Boolean algebras is not claimed; but this surjectivity is used in the proof of indecomposability. This error is not present in the French original, as section 4 of the English version is not contained in the French original.

But the French original contains a section 4 in Chapter III which has been omitted in the published English text. Results contained in this unpublished section have been proved later on by other authors.

In 2010/2011 this electronic version of the original thesis has been produced by copying word by word from the original. Only some misprints have been corrected. Of course, the outlay has changed because of the use of LaTex.

For the moment, the later sections of Chapter 3 are reproduced only incompletely.

Je remercie vivement Mme DUBREIL-JACOTIN qui m'a encouragé à écrire ce travail, M. DIXMIER qui a bien voulu rapporter cette Thèse et M. SCHÜTZENBERGER qui m'a donné le sujet de ma deuxième thèse, ainsi que mes collègues A. BIGARD et S. WOFLFENSTEIN pour des nombreuses conversations utiles.

Je tiens à remercier chaleureusement M. K. H. HOFMANN (Tulane University) dont les idées sont à l'origine de ce travail et qui n'a jamais ménagé son temps ni ses conseils à l'égard de mon travail.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'établir une théorie de représentation pour les anneaux réticulés et d'en donner des applications.

Nombreux sont les auteurs qui ont donneé des représentations de groupes réticulés archimédiens et d'anneaux de fonctions archimédiens au moyen de fonctions continues définies sur certains espaces topologiques á valeurs dans la droite réelle achevée, par exemple D. G. Johnson [21], D. Papert [27], J. Kist [25], J. S. Bernau [1], B. Z. Vulikh [41]. (Nous appelons anneau de fonctions, ou simplement f-anneau, tout anneau réticulé, produit sous-direct d'anneaux totalement ordonnés.) Let méthodes utilisées par ces auteurs ne peuvent plus être appliquées aux groupas réticulés non-archimédiens ni aux anneaux réticulés en général.

Nous cherchons à représenter les anneaux réticulés par des sections de certains faisceaux. Les méthodes que nous utilisons ont été développées par J. Dauns et K. H. Hofmann [11, 12] ainsi que par R. S. Pierce [28] dans la théorie des anneaux (non réticulés). Kist [42], Ch. Mulvey [43] et S. Teleman [34, 35, 36, 37] ont utilisé ces mêmes méthodes de représentation.

Le poblême principal que nous nous sommes posé est le suivant:

Etant donné un anneau réticulé A, trouver canoniquement un espace topologique compact βA et un faisceau $\mathcal{F}^\beta(A)$ d'anneaux réticulés de base βA, tels que A soit isomorphe à l'anneau réticulé $\Gamma\mathcal{F}^\beta(A)$ de toutes les sections (globales et continues) de $\mathcal{F}^\beta(A)$.

Ce problème est résolu en toute généralité.

Une note de J. R. Isbell [18] a été extrémement utile pour la solution du probléme. Isbell a associé fonctoriellement à tout groupe réticulé commutatif un espace compact. La construction d'Isbell n'utilise que les propriétés du treillis des idéaux de A. (Ici on appelle idéal tout noyau d'un homomorphisme de groupes (respectivement d'anneaux) réticulés.) Généralisant la construction d'Isbell, nous exposons dans le deuxième chapitre une construction qui permet d'associer canoniquement à tout treillis distributif pseudo-complémenté, un espace topologique compact. Le treillis des idéaux d'un anneau réticulé A étant distributif et pseudo-complémenté, cette construction nous permets d'associer à tout anneau réticlé A uns espace compact βA. Si l'on définit les morphismes d'anneaux réticulés d'une manière appropriée, β est un foncteur. Nous montrons aussi que βA n'est rien d'autre que le compactifié de Stone-Cech de l'espace des idéaux irréductibles de A, muni de la topologie de Zariski. Dans la cas particulier o'u A est l'anneau $C(X)$ des fonctions réelles continues sur un espace topologique X, l'espace βA est le compactifié de Stone-Cech de X.

Sur cet espace βA nous construisons un faisceau$\mathcal{F}^\beta(A)$ d'anneaux réticulés tel que A soit isomorphe à l'anneau réticulé $\Gamma\mathcal{F}^\beta(A)$ des toutes les sections de $\mathcal{F}^\beta(A)$. Si l'on définit les morphismes de manière appropriée, $\mathcal{F}^\beta$ est un foncteur. Si A est l'anneau $C(X)$ des fonctions réelles continues définies sur un espace compact X, le faisceau $\mathcal{F}^\beta(A)$ n'est rien d'autre que le faisceau des germes des fonctions réelles continues.

Il y a des anneaux réticlés A d'une structure très riche, dont l'espaceβA est réduit à un seul point, par exemple les extension lexicographiques. Ce phénomène ne peut pas se produire si A est riche en facteurs directes; car les facteurs directs de A correspondent bijectivement aux ouverts fermés de βA. Dans ce sens nous considérons en détail les représentations par sections de plusieurs classes d'anneaux réticulés:

a) Les anneaux réticulés stoniens dans la section III.4 (un anneau réticulé est stonien si tout pseudo-complément dans le treillis des idéaux de A est un facteur direct; les anneaux de fonctions complets ou orthocomplets sont des exemples d'anneaux stoniens).

b) Les anneaux réticulés projetables dans la section III.5 (un anneau réticulé est projetable si le pseudo-complément de tout idéal principal est un facteur direct; les anneaux de fonctions σ-complets sont projetables).

c) Les anneaux quasi-réguliers dans la section III.9 (un anneau réticulé est quais-régulier si tout idéal principal est un facteur direct).

Les anneaux réticulés quasi-réguliers correspondent aux anneaux biréguliers dans la théorie des anneaux. Notre théorème de représentation III.9.8 correspond au théorème de représentation d'anneaux biréguliers de Bourbaki [7, p. 173] et de Dauns et Hofmann [11]. Les groupes hyper-archimédiens de Bigard [3] sond quasi-réguliers.

Déjà Isbell a donné deux autres classes d'anneaux réticulés pour lesquelles l'espace βA n'est pas trivial:

d) Si A est un groupe réticulé abélien ayant une unité forte, βA est homéomorphe à l'espace des idéaux maximaux de A, muni de la topologie de Zariski (voir section III.6).

e) Si A est un anneau de fonctions, l'espace des idéaux maximaux dominés est homéomorphe à un sous-espace ouvert de βA. (Un idéal maximal I de A est dit dominé s'il existe un élément d dans A n'appartenant pas à I, vérifiant $d^2 + I \geq d + I$. Voir section III.7.)

Nous donnons une généralisation du premier cas et étudions le faisceau $\mathcal{F}^\beta(A)$ dans les deux cas.

Les applications que nous donnons de cette théorie de représentation concernent surtout les anneaux de fonctions. Nous montrons que tout anneau de fonctions admet une extension stonienne minimale et une extension orthocomplète minimale; de plus, ces extensions sont unique dans un certain sens. Ainsi nous précisons des résultats de Veksler [40] et Bernau [2]. Nous généralisons aux idéaux dominés un certain nombre de résultats de Henriksen et Isbell [17] sur les idéaux supermodulaires des anneaux de fonctions. Nous montrons par exemple, que dans un anneau de fonctions, tout idéal engendré par un élément d vérifiant $d^2 \geq d \geq 0$ est un facteur direct. Enfin nous généralisons la notion d'anneau de fonctions archimédien. Nous dirons qu'un anneau de fonctions est quasi-archimédien si pour tout idéal $I \neq \{0\}$ et pour tout élément a, il existe $b \in I$ tel que $b \not\leq a$. Nous montrons que tout anneau de fonctions quasi-archimédien est un produit sous-direct d'un anneau réticulé archimédien B tel que $B^2 = \{0\}$ et d'un anneaux de fonction δ-semisimple. (Un anneau de fonctions est dit *δ-semisimple* si l'intersection des ses idéaux maximaux dominés est réduit à zéro.) Ce résultat permet de caractériser les anneaux de fonctions δ-semisimples comme des anneaux de fonctions n'admettant aucun idéal infinitésimal non nul (cf. III.8).

Pour inclure aussi les groupes réticulés non commutatifs dans cette théorie de représentation, nous introduisons la notion d'annéloïde réticulé. Un annéloïde réticulé est un groupe réticulé non nécessairement commutatif, noté additivement, muni d'une multiplication distributive par rapport à l'addition et vérifiant la règle habituelle d'isotonie. Cette notion ne comporte aucun intérèt en elle-même. Mais elle permet d'établir la théorie de représentation simultanément pour les groupes réticulés non commutatifs et les anneaux réticulés.

Beaucoup de propriétés des annéloïdes réticulés que nous utilisons, ne dépendent que du treillis des idéaux. C'est pour cette raison que nous avons anticipé dans un premier chapitre les raisonnements qui ne concernent que les treillis et en particulier les éléments irréductibles des treillis algébriques distributifs.

La terminologie en ce qui concerne les treillis est celle de Birkhoff [4], en ce concerne la topologie, celle de Bourbaki [6]; en particulier, un espace topologique compact est toujours séparé, sinon on parle d'espace quasi-compact.

Table des matières

Chapter I. ELEMENTS PREMIERS D'UN TREILLIS 12
I.1. Définitions et propriétés élémentaires 12
I.2. Espaces d'éléments premiers 14
I.3. Compacité 17
I.4. Eléments premiers et filtres premiers 19
I.5. Elément germinal associé à un élément premier 22
I.6. Treillis projetables et plats 24

Chapter II. L'ESPACE DE STONE-ČECH-ISBELL D'UN TREILLIS DISTRIBUTIF PSEUDO-COMPLEMENTE 27
II.1. c-r-voisinages et c-r-idéaux 27
II.2. L'espace de Stone-Čech-Isbell. 30
II.3. Morphismes et applications continues. 32
II.4. Propriétés de l'espace de Stone-Čech-Isbell. 35

Chapter III. REPRESENTATION DE GROUPES ET D'ANNEAUX RETICULES. APPLICATIONS 41
III.1. Annéloïdes réticulés 41
III.2. Faisceaux d'annéloïdes réticulés 46
III.3. Représentation sur l'espace d'Isbell 51
III.4. Représentation sur l'espace de Stone. Enveloppe stonienne et enveloppe orthocomplète d'un f-annéloïde 54
III.5. Représentation sur l'espace des idéaux irréductibles minimaux. Annéloïdes réticulés projetables. 57
III.6. Représentation sur l'espace des idéaux maximaux 59
III.7. Idéaux dominés d'un f-anneaux 60
III.8. f-anneaux quasi-archimédiens et δ-semisimples 64
III.9. Annéloïdes réticulés quasi-réguliers et hyper-archimédiens 66

Bibliography 71

CHAPTER I

ELEMENTS PREMIERS D'UN TREILLIS

Dans ce chapitre nous étudierons les éléments premiers d'un treillis.

La première section contient quelques définitions et préliminaires.

Dans la deuxième section nous étudions la topologie de Zariski sur des parties de l'ensemble des éléments premiers d'un treillis T et les relations entre cette topologie et la structure du treillis T. Cette section ne contient rien de nouveau; mais l'auteur ne connaît pas de référence qui fournirait les résultats dans le langage et la généralité voulus. La topologie de Zariski est couramment utilisée dans la théorie des anneaux (voir par exemple Jacobson [19], Bourbaki [7]). Dans la théorie des groupes réticulés elle a été étudiée surtout par F. Sik [31, 32], ainsi que par Henriksen and Isbell [17]. L'exposé de la topologie de Zariski le plus proche du notre semble dû à P. Samuel [29].

Dans la section 3 nous traitons la notion de compacité. La notion de *valeur* que nous utilisons est empruntée à la théorie de groupes réticulés (cf. [9], p. 26). La proposition 3.5 a été formulé par R. L. Blair [5] dans le cas du treillis des idéaux d'un anneaux. On la retrouve aussi presque en totalité dan [4], p. 128 et 189.

Dans la section 4, nous caractérisons les éléments premiers d'un treillis algébrique distributif complet, en particulier les éléments premiers minimaux. Les résultats de cette section peuvent être considéré comme des généralisations des propriétés de groupes réticulés (cf. Byrd [8], Conrad [9], p. 42–45).

La notion délément germinal associé à un élément premier dans la section 5 généralise la notion d'idéal germinal associé à un idéal irréductible d'un f-anneau [22]. Pour les idéaux supermodulaires maximaux d'un f-anneau, cette notion a été introduite par Henriksen et Isbell [17] qui a leur tour ont généralisé les idéaux des fonctions réelles continues s'annulant dans uns voisinage d'un point donné d'un espace topologique. Certains de nos résultats généralisent des propriétés du treillis des ℓ-sous-groupes convexes d'un groupe réticulé (cf. [9], p. 43–45).

La dernière section de ce chapitre est consacrée à trois classes particulières de treillis: les treillis de Stone, les treillis projetables et les treillis plats. Dans ces cas, l'ensemble des éléments premiers a une structure simple. Bigard [3] a étudié les groupes réticulés dont le treillis des ℓ-sous-groupes convexes appartient à une de ces trois classes.

I.1. Définitions et propriétés élémentaires

Soit T un treillis. Nous désignerons par $\vee$ et $\wedge$ les opérations *borne supérieure* et *borne inférieure* dans T. Si T admet un plus petit élément, nous le désignerons par 0; et si T admet un plus grand élément, nous le désignerons par 1.

I.1.1. - Un élément x de T est dit *premier* si $x \neq 1$ et si $t_1 \wedge t_2 \not\leq x$ pour tout couple t_1, t_2 déléments de T tels que $t_1 \not\leq x$ et $t_2 \not\leq x$. Si C est une chaîne non vide délément premiers d'un treillis complet, $x_0 = \bigwedge_{x \in C} x$ est aussi un élément premier: Utilisant l'axiome de Zorn, on en déduit que *tout élément premier d'un treillis complet majore au moins un élément premier minimal.*

I.1.2. - Un élément x d'un treillis T est dit *irréductible* si $x \neq 1$ et si $t_1 \wedge t_2 = x$ pour deux éléments t_1, T_2 de T entraîne $t_1 = x$ ou $t_2 = x$. Tour élément premier est irréductible. Inversement, *si T est un treillis distributif, tout élément irréductible est premier.* Un élément maximal d'un treillis est toujours irréductible. Donc, dans un treillis distributif, les élément maximaux sont premiers. (Si T possède un plus grand éleément 1, "maximal" signifie "maximal dans $T \setminus \{1\}$".)

I.1.3. - Soit T un treillis ayant un plus petit éément 0. Soit $t \in T$. Si l'iesemble des s dans T tels que $s \wedge t00$ admet un plus grand élément, on appelle cet élément *pseudo-complément* de T. On le note $t^{\perp}$. On dit que le treillis T est un *treillis pseudo-complémenté* si tout élément de T ad met un pseudo-complément. Nous utiliserons souvent le théorème de Glivenko (cf [4], p. 130; voir aussi Samuel [29], Frink [14], Varlet [38]):

Soit T un treillis pseudo-complémenté. Alors $t^{\perp} = t^{\perp\perp\perp}$ pour tout $t \in T$; l'application $t \mapsto t^{\perp\perp}$ est une fermeture dans T, dont les fermés sont exactement les pseudo-compléments. Les pseudo-compléments dans T forment und treillis de Boole $\mathcal{B}$, image homomorphe du treillis T. Le complément d'un élément a de $\mathcal{B}$ est $a^{\perp}$. Le treillis de Boole $\mathcal{B}$ est complet si T est complet.

Puisque $t \mapsto t^{\perp\perp}$ est une fermeture, la borne inférieure dans $\mathcal{B}$ d'une famille quelconque de pseudo-compléments coïncide avec la borne inférieure de cette famille dans T. Mais si a et b sont dans $\mathcal{B}$, $a \vee b$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{B}$. On désignera par $a \curlyvee b$ la borne supérieure de a et b dans $\mathcal{B}$. Remarquons que

$$a \curlyvee b = (a \vee b)^{\perp\perp}.$$

Par définition, un treillis pseudo-complémenté possède toujours un plus petit élément 0. Il possède aussi un plus grand élément, à savoir $1 = 0^{\perp}$.

I.1.4. - On appelle *treillis de Brouwer* un treillis T tel que, quels que soient t et c dans T, l'ensemble des s dans T tels que $t \wedge s \leq c$, possède un plus grand élément. Un treillis complet T est un treillis de Brouwer si, et seulement si, T est $\wedge$*-distributif général*, c'est à dire si, et seulement si, pour tout famille (t_μ) d'élements de T,

$$t \wedge (\bigvee_{\mu} t_\mu) = \bigvee_{\mu} (t \wedge t_\mu)$$

(cf. [4], p. 128). En particulier, un treillis de Brouwer est distributif et, s'il possède un plus petit élément, il est pseudo-complémenté.

I.1.5 EXEMPLE. (cf. [4], p. 216) - Soit X un espace topologique. L'ensemble $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X est un treillis de Brouwer complet. En particulier, $\mathcal{O}_X$ est un treillis distributif et pseudo-complémenté. Les pseudo-compléments dans $\mathcal{O}_X$ sond exactement les ouverts réguliers, c'est à dire les ouverts qui sont égal à l'intérieur de leur adhérence. Si U est un ouvert, le pseudo-complément $U^{\perp}$ est égal à $X \setminus \overline{U}$, où $\overline{U}$ désigne l'adhérence de U. Le théorème de Glivenko montre que les ouverts réguliers de X forment un treillis de Boole complet que l'on notera $\mathcal{R}_X$.

L'application $U \mapsto X \setminus U$ est un anti-isomorphisme du treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X sur le treillis des fermés de X. Si U est un ouvert régulier, $X \setminus U$ est un fermé régulier, c'est à dire que $X \setminus U$ est l'adhérence de son intérieur; inversement, tout fermé régulier de X est de la forme $X \setminus U$ avec $U \in \mathcal{R}_X$. Il s'ensuit que les fermés réguliers de X forment un treillis de Boole complet anti-isomorphe à $\mathcal{R}_X$.

I.2. Espaces d'éléments premiers

Soit T un treillis complet. Soit X une partie de l'ensemble des éléments premiers de T. Pour tout $t \in T$, soit

$$S_X(t) = \{x \in X \mid t \not\leq x\},$$

$$Z_X(t) = \{x \in X \mid t \leq x\} = X \setminus S_X(t).$$

S'il n'y a pas d'erreur possible, nous écrirons simplement $S/t)$ et $Z(t)$. Pour tout famille $(t_\mu)_{\mu \in I}$ d'éléments de T, dont la borne supérieure existe, on a:

(1) $$S(\bigvee_{\mu \in I} t_\mu) = \bigcup_{\mu \in I} S(t_\mu),$$

(2) $$Z(\bigvee_{\mu \in I} t_\mu) = \bigcap_{\mu \in I} Z(t_\mu).$$

So9ient t_1 et t_2 deux éléments de T. Un élément $x \in X$ appartient à $S(t_1 \wedge t_2)$ si, et seuelement si, $t_1 \wedge t_2 \not\leq x$; puisque x est premier,cela s'écrit aussi $t_1 \not\leq x$ et $t_2 \not\leq x$, c'est à dire que $x \in S(T_1)$ et $x \in S(t_2)$; donc:

(3) $$S(t_1 \wedge t_2) = S(t_1) \cap S(t_2),$$

(4) $$Z(t_1 \wedge t_2) = Z(t_1) \cup Z(t_2).$$

La relation (3) montre que les ensembles de la forme $S(t), t \in T$, forment une base d'ouverts d'une topologie sur T.

I.2.1 DEFINITION. - La topologie sur X, dont les ensembles de la forme $S_X(t), t \in T$, forment une base, est appelée *topologie de Zariski.*

Sur un ensemble X d'éléments premiers de T, nous ne considérerons jamais de topologie autre que la topologie de Zariski.

I.2.2 DEFINITION. - On appelle *espace d'éléments premiers* de T tout l'ensemble d'éléments premiers de T muni de la topolgie de Zariski.

Notation. - On désigne par ξT l'espace de tous les éléments premiers, par μT l'espace des éléments premiers maximaux de T et par πT l'espace des éléments premiers minimaux de T.

I.2.3 PROPRIETES. - Soit X un espace d'éléments premiers d'un treillis complet T.

(a) $t \mapsto S(t)$ est un homomorphisme surjectif du treillis T sur le treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X d'après (1) et (3).

(b)Une partie de X est fermée si, et seulement si, elle est de la forme $Z(t), t \in T$.

(c) Si Y est une partie de X, la topoplogie de Zariski sur Y coïncide avec la topologie induite sur Y par la topologie de Zariski sur X.

(d) X est un espace de Kolmogoroff ($= T_0$), c'est 'a dire que pour deux éléments distincts quelconques de X, il existe un ouvert contenant l'un de ces deux éléments, mais pas l'autre. (En effet, si x et y sont deux éléments distincts de X, on a par exemple $x \not\leq y$; il s'ensuit que l'ouvert $S(x)$ contient y, mais pas x.)

(e) X est un espace accessible ($= T_1$)si, et seulement sio, les éléments de X sont deux à deux non comparables. (Un espace topologique est dit acessible si, et seulement si, pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de X, il existe un ouvert contenant x amois pas y; cette propriété se démontre comme (d).)

(f) Pour que X soit un espace topologique séparé (T_2), il suffit que pour tout couple x_1, x_2 d'éléments premiers distinct de X, il existe t_1 et t_2 dans T tels que

$$t_1 \wedge t_2 = 0, t_1 \not\leq x_1, t_2 \not leq x_2.$$

Si $\bigwedge_{x \in X} x = 0$, cette condition est aussi nécessaire.

Soit X un espace d'éléments premiers d'un treillis complet T. D'après (2) et (4), $t \mapsto Z(t)$ est un anti-homomorphisme du treillis T sur le treillis des fermés de X. On a en particulier:

(5) $$t_1 \leq t_2 \text{ entraîne } Z(t_1) \supseteq Z(t_2).$$

Définissons inversement une application R du treillis $\mathfrak{P}(X)$ des parties de X dans T par:

$$R(Y) = \bigwedge_{y \in Y} y \text{ quel que soit } Y \subseteq X.$$

Cette application vérifie:

(6) $$Y_1 \subseteq Y_2 \text{ entraîne } R(Y_1) \geq R(Y_2).$$

On a de plus:

(7) $$t \leq RZ(t) \text{ quel que soit } t \in T,$$

(8) $$Y \subseteq ZR(Y) \text{ quel que soit } Y \subseteq X.$$

Les relations (5), (6), (7), (8) montrent que les applications $Z\colon T \to \mathfrak{P}(X)$ et $R\colon \mathfrak{P}(X) \to T$ constituenmt une correspondance de Galois entre T et $\mathfrak{P}(X)$.

La théorie générale des correspondances de Galois (cf. [4], p. 124) permet d'affirmer:

(9) $$RZR = R \text{ et } ZRZ = Z.$$

De plus, TZ et ZR sont des fermetures respectivelemtn dans T et $\mathfrak{P}(X)$. Notons $\overline{t} = RZ(t)$ et $\overline{Y} = ZR(Y)$ les fermés associés respectivement aux éléments t de T et aux parties Y de X. LEs applications R et Z induisent des anti-isomorphismes mutuellement réciproques entre le treillis complet $\overline{T} = \{\bar{t} \mid t \in T\}$ et le treillis complet des fermés de $\mathfrak{P}(X)$. Notons que les fermés de $\mathfrak{P}(X)$ sont exactemetn les parties fermées de X pour la topologie de Zariski d'après (9) et 2.3b. Puisque$F \mapsto X \setminus F$ est un anti-isomorphisme du treillis des fermés des X sur le treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X, $t \mapsto S(t)$ est un isomorphiosme du treillis $\overline{T}$ des fermés de T sur le treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X. Par conséquent, $\overline{T}$ est un treillis de Brouwer complet.

Appliquons ces raisonnements dans deux cas: Prenons d'abord $X = \xi T$ et supposons que tout élément de T soit la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers. Alors $T = \overline{T}$; donc:

I.2.4 PROPOSITION. - *Si tout élément d'un treillis complet T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers, alors T est un treillis de Brouwer.*

Dans le deuxième cas les hypothèses sont moins fortes. Soit $X = \xi T$ et supposons que $\bigwedge_{x \in \xi T} x = 0$. Dans ce cas on a $\overline{0} = RZ(0) = 0$. Montrons que T est pseudo-complémenté: Soit t un élément de T. Pour toput élément s de T tel que $s \wedge t = 0$, on a $\overline{s} \wedge \overline{t} = \overline{0} = 0$. On en déduit que $s \leq \overline{s} \leq t^{\perp}$, où $t^{\perp}$ désinge le pseudo-complément de $\overline{t}$ dand $\overline{T}$. Par conséquent, $t^{\perp}$ est qussi le pseudo-complément de t dans T, Nous avons:

I.2.5 PROPOSITION. - *Un treillis complet T dont le plus petit élément est la borne inférieure de la famille des éléments premiers est pseudo-complémenté.*

Soit X un espace d'éléments premiers d'un treillis complet T tel que $\bigwedge_{x \in X} x = 0$. D'après la proposition précédente, T est pseudo-complémenté. Les pseudo-compléments dans T forment un treillis de Boole complet $\mathcal{B}$ d'après le théoreme de Gliventko (1.3). Nous avons les propriétés suivantes:

I.2.6 PROPRIETES. - (a) $a \mapsto S(a)$ est un isomorphisme du treillis de Boole $\mathcal{B}$ sur le treillis de Boole $\mathcal{R}_X$ des ouverts réguliers de X.

(b) $a \mapsto Z(a)$ est un anti-isomorphisme de $\mathcal{B}$ sur le treillis de Boole des fermés réguliers de X.

(c) Pour tout $t \in T$, $S(t^{\perp}) \cup S(t^{\perp\perp})$ est partout dense dans X et $S(t^{\perp}) \cap S(t^{\perp\perp}) = \emptyset$.

(d) Pour tout $t \in T$, $t^{\perp} = RS(t)$; en particulier, tout pseudo-complément est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers appartenant á X.

(e) $U \mapsto R(U)^{\perp}$ est un isomorphisme de $\mathcal{R}_X$ sur $\mathcal{B}$.

(f) Pour tout $t \in T$, $Z(t^{\perp})$ est l'adhérence de $S(t)$ et $S(^{\perp})$ est l'intérieure de $Z(t)$.

(g) Pour tout $t \in T$ et tout $x \in X$, les propriétés suivantes sont équivalentes: (i) $Z(t)$ est un voisinage de x; (ii) $Z(t^{\perp\perp})$ est un voisinage de x; (iii) $x \in S(t^{\perp})$.

Démonstration. (a) Puisque l'application $t \mapsto S(t)$ est un isomorphisme de $\overline{T}$ sur $\mathcal{O}_X$, elle induit un isomorphisme du treillis de Boole $\mathcal{B}$ des pseudo-compléments de $\overline{T}$ sur le treillis de Boole $\mathcal{R}_X$ des pseudo-compléments de $\mathcal{O}_X$.

(b) est une conséquence immédiate de (a).

(c) D'après (a), $S(t^{\perp\perp}) = S(t^{\perp})^{\perp}$; et pour tout ouvert U d'un espace topologique , $U \cup U^{\perp}$ est partout dense et $U \cap U^{\perp} = \emptyset$.

(d) Si $t \not\leq x \in X$, alors $t^\perp \leq x$ puisque x est premier; donc $S(t) \subseteq Z(t^\perp)$, ce qui entraîne $RS(t) \geq RZ(t^\perp) = t^\perp$. Inversement, $RS(t) \leq x$ pour tout $x \in X$ tel que $t \not\leq x$; par suite,

$$RS(t) \wedge t \leq x \text{ pour tout } x \in X.$$

On en déduit que $RS(t) \wedge t = 0$ et par conséquent $RS(t) \leq t^\perp$.

(e) Soit U un ouvert régulier de X, D'après (a), il existe $a \in \mathcal{B}$ tel que $U = S(a)$; donc $R(U)^\perp = RS(a)^\perp = a^{\perp\perp} = a$.

(f) L'adhérence de $S(t)$ est $ZRS(t)$; d'après (d), $ZRS(t) = Z(t^\perp)$. L'intérieur de $Z(t)$ est $X \setminus ZR(X \setminus Z(t)) = SRS(t) = S(t^\perp)$.

(g) résulte de (f); car d'après (f), l'interieur de $Z(t)$ ainsi que de $Z(t^{\perp\perp})$ est égal à $S(t^\perp)$. □

I.3. Compacité

Soit T un treillis. Un élément k de T est dit *compact* si la condition suivante est verifiée: Tout famille d'éléments de T dont la borne supérieure existe et majore k, continient une famille finie dont la borne supérieure existe et majore k. Cette condition est équivalente à la condition suivante: Tout idéal de T, dont la borne supérieure existe et majore k, contient k.

Les éléments compact d'un treillis T forment un $\vee$-sous-demi-treillis K de T. Si T admet un plus pertit élément 0, cet élément est compact. Mais K n'est pas un treillis en général.

Soit k un élément compact de T. On appelle *valeur de* k tout élément maximal dans la famille des éements de T ne majorant pas k. Par $V(k)$ on désigne l'ensemble des valeurs de k. Un élément de T est dit *semi-maximal* s'il appartient à un ensemble $V(k)$.

Si T est un treillis complet, la famille des éléments de T ne majorant pas un élément compact k donné, est inductive. Par conséquent:

I.3.1 LEMME. - *Soit k un élément compact d'un treillis complet T. Alors tout élément de T ne majorant pas k est majoré par une valeur de k.*

Si v est une valeru de k, l'élément $v^* = v \vee k$ est le plus petit élément de la famille des majorants stricts de v. Donc v est irréductible. Dans un treillis distributif, tout élément semi-maximal est donc premier, et nous pouvons parler de l'espace des valeurs de k.

I.3.2 PROPOSITION. - *Soit k un élément compact d'un treillis complet distributif. Alors l'espace $V(k)$ des valeurs de k et l'espace $S(k)$ des éléments premiers ne contenant pas k sont quasi-compacts.*

Démonstration. Soit $X = V(k)$ ou $X = S(k)$. Soit $(U_\mu)_\mu$ un recouvrement ouvert de X. Tout ouvert U_μ est de la forme $S_X(t_\mu)$ pour un certain $t_\mu \in T$. Puisque

$$X = \bigcup_\mu U_\mu = \bigcup_\mu S_X(t_\mu) = S(\bigvee_\mu t_\mu),$$

lélément $\bigvee_\mu t_\mu$ n'est majoré par aucune valeur de de k. D'après le Lemme I.3.1, on a donc $k \leq \bigvee_\mu t_\mu$. Puisque k est compact, $(t_\mu)_\mu$ contient une sous-famille finie $t_1, \ldots, t_n$ telle que $k \leq t_1 \vee \cdots \vee t_n$. Par consequent,

$$X = S_X(t_1 \vee \cdots \vee t_n) = S(t_1) \cup \cdots \cup S_X(t_n),$$

c'est à dire que $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ est un recouvrement fini de X. □

Si le plus grand élément 1 d'un treillis complet distributif est compact, alors $V(1) = \mu T$ et $S(1) = \xi T$. D'après I.3.1 et I.3.2, nous avons donc:

I.3.3 PROPOSITION. - *Soit T un treillis complet distributif, dont le plus grand élément 1 est compact. Alors tout élément different de 1 est majoré par un élément maximal: L'espace μT des éléments maximaux et l'iespace ξT des éléments premiers sont quasi-compacts.*

Un treillis T est dit *algébrique* si tout élément est la borne supérieure d'une famille d'éléments compacts.

I.3.4 EXEMPLE. - Soit A une algèbre universelle et $\mathcal{I}(A)$ le treillis complet des relations de congruence dans A. Les éléments compacts de $\mathcal{I}(A)$ sont les congruences qui ont un nombre fini de générateurs; $\mathcal{I}(A)$ est un treillis algébrique (cf. [4], p. 189). Dans le treillis des idéaux d'un anneau, les éléments compacts sont les idéaux engndrés par un nombre fini d'éléments. Dans le treillis des idéaux d'un $\vee$-demi-treillis, les éléments compacts sont les idéauc principaux.

Dans un treillis algébrique, la distrubivité est équivalente à des propriétés qui sont, en général, plus fortes:

I.3.5 PROPOSITION. - *Pour un treillis algébrique complet, les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(a) T est distributif.
(b) Tout élément des T est la borne inférieure d'une famille déléments premiers.
(c) T est un treillis de Brouwer.
(d) T est $\wedge$-distributif général.

Démonstration. (a) $\Longrightarrow$ (b): Il suffit de montrer que dans un treillis algébrique complet, tout élément t est la borne inférieure d'une famille d'éléments semi-maximaux. Soit t' la borne inférieure de la familles de tous les éléments semi-maximaux majorant t. supposons que $t < t'$. Puisque T est algebrique, il existe un élément compact $k \leq t'$ tel que $k \not\leq t$. D'après I.3.1, il y a une valeur v de k tel que $t \leq v$. Il s'ensuit que v est un élément semi-maximal tel que $t \leq v$ et $v \not\leq t'$, ce qui est absurde.

(b) entraîne (c) d'après la proposition I.2.4.

(c) $\Longrightarrow$ (d): Sot $(t_\mu)_\mu$ une famille d'éléments de T et soit $t' = \bigvee_\mu (s \wedge t_\mu)$. On a toujours $t' \leq s \wedge (\bigvee_\mu t_\mu)$. Puisque $s \wedge t_\mu \leq t'$ et puisque T est une treillis de Brouwer, on a aussi $s \wedge (\bigvee_\mu t_\mu) \leq t'$.

Il est évident que(d) entraîne (a). □

Une partie H de T est appelée *base compacte* de T si tout élément de H est compact et si tout élément de T est la borne supérieure d'une famille d'éléments de H.

Soit H un base compact de T. Soir X un espacve d'éléments premiers de T; alors pour out $t \in T$, l'ouvert $S_X(t)$ est la réunion d'ouvwerts de la forme $S_X(h), h \in H$. Notons qu'un élément x de T est premier si et seulement si pour sdeux éléments quelconques h_1 et h_2 de T, $h_1 \not\leq x$ et $h_2 \not\leq x$ entraîne $h_1 \wedge h_2 \not\leq x$. En effet, si x est premier, sette condition est vérifiée. Supposons inversement que cette condition soir vérifiée. Soient t_1 et t_2 deux éléments de T tels que $t_1 \not\leq x$ et $t_2 \not\leq x$. Puisque H est une base compacte, el exisite H_1 et h_2 dans H tels que $h_1 \leq t_1, h_2 \leq t_2$ et $h_1 \not\leq x, h_2 \not\leq x$, d'où $h_1 \wedge h_2 \leq t_1 \wedge t_2$ et $h_1 \wedge h_2 \not\leq x$ et par suite $t_1 \wedge t_2 \not\leq x$.

Si $\mathcal{I}(A)$ est le treillis des congruences d'une algeèbre universelle A, les congruences principales forment une base compacte de $\mathcal{I}(A)$.

I.4. Eléments premiers et filtres premiers

Soit E un $\vee$-demi-treillis ayant un plus petit élément 0. On appelle *filtre* toute partie F de E vérifiant les propriétés suivantes:

(F_1) $0 \notin F$;

(F_2) F est filtrant inférieurement;

(F_3) Si $k \in F, k' \in E$ et $k \leq k'$, alors $k' \in F$.

Un filtre F de E est dit *premier*, s'il vérifie

(F_4) $E \setminus F$ est un $\vee$-sous-demi-treillis de E.

La famille des filtres dans E est inductive. Les filtres maximaux sont appelés *ultrafiltres.*

Soit T un treillis algébrique complet. L'ensemble K des des éléments compacts est un $\vee$-sous-demi-treillis de T. Pour tout filtre premier F de K, soit

$$\pi(F) = \bigvee_{k \in K \setminus F} k.$$

Pour tout élément x de T, soit

$$\varphi(x) = \{k \in K \mid k \not\leq x\}.$$

I.4.1 PROPOSITION. - *Pour tout filtre premier F de K, $\pi(F)$ est un élément premier de T, et pour tout élément premier x de T, $\varphi(x)$ est un filtre premier de K. De plus, φ et π sint des correspondances bijectives mutuellement réciproques entre l'ensemble des éléments premier de T et l'ensemble des filtres premiers de K.*

Démonstration. Soit x un élément premier de T. Evidemment, $\varphi(x)$ vérifie (F_1),(F_3) et (F_4). Ai k_1 et k_2 sont deux éléments compacts non majorés par x, $k_1 \wedge k_2$ n'est pas majoré par x, puisque x est premier. Puisque $k_1 \wedge k_2$ est la borne supérieure d'une famille dd'éléments compacts, il existe un élément compact $k \leq k_1 \wedge k_2$ et $k \not\leq x$. Par conséquent, (F_2) est aussi vérifié, et $\varphi(x)$ est un filtre premier de K.

Puisque x est la borne supérieure de la famille des éléments compacts k tels que $k \leq x$, on a bine $\pi\varphi(x) = x$.

Soit moaintenant F un filtere premier de K. L'élément $\pi(F)$ est la borne supérieure des éléments compacts non dans F. Si un élément compact k est majoré par $\pi(F)$, il est donc majoré par un élément compact n'appertenant opas à F, ce qui entraîne que k n'appartient pas à F. Par conséquent, $\varphi\pi(F) = F$. De plus, $\pi(F)$ est premier. En effet, soient t_1 et t_2 deux éléments de T non majorés par $\pi(F)$. 'Il existe k_1 et k_2 dabs $\varphi\pi(F) = F$ tels que $k_1 \leq t_1$ et $k_2 \leq t_2$. Puisque F est un filtre, il existe dans F un élément$k \leq k_1 \wedge k_2$. Puisque $k \not\leq \pi(F)$, on a aussi $t_1 \wedge t_2 \not\leq \pi(F)$. □

Il est évident que φ et π inversent l'ordre, c'est à dire que $x_1 \leq x_2$ pour deux éléments premiers de T entraîne $\varphi(x_1) \supseteq \varphi(x_2)$. On a donc:

COROLLAIRE. - *φ et π sont des correspondances bijectives mutuellement réciproques entre l'ensemble des éléments premiers minimaux de T et l'ensemble des filtres premiers maximaux de K.*

En général, on ne peut rien dire sur l'existence d'éléments premiers dans un treillis algégrique complet.Dans la propsosition I.3.5 nous avons vu que, dans un treillis algébrique complet distributif, tout élément est la borne inférieure d'une certaine famille d'éléments premiers. Maintenant nous allons considérer une autre classe de treillis algébriques qui possède "suffisamment" d'éléments premiers.

Soit E un treillis ayant un plus petit élément 0. Nous dirons que E est 0-*distributif* si, pour tout $t_1, t_2, t \in E$,

$$t_1 \wedge t = 0 \text{ et } t_2 \wedge t = 0 \text{ entraîne } (t_1 \vee t_2) \wedge t = 0.$$

Nous dirons que E est 0-*distributif général* si, pout tout $t \in E$ et pour tout famille $(t_\mu)_{\mu \in I}$ déléments de E tels que $t \wedge t_\mu = 0$ quel que soir $\mu \in I$,

$$t \wedge \bigvee_\mu t_\mu = 0,$$

pourvu que $\bigvee_\mu t_\mu$ existe.

I.4.2 LEMME. - *Soit E un treillis ayant un plus petit élément =. Si E est 0-distributif, tout ultrafiltre F de E est premier.*

Démonstration. Un élément k de E n'appartient pas à l'ultrafiltre F de E si, et seulement si, il existe k' dans F tel que $k \wedge k' = 0$. Si k_1 et k_2 sont deux éléments de $E \setminus F$, il existe donc k_1' et k_2' dans F tels que $k_1 \wedge k_2' = k_2 \wedge k_2' = 0$.Puisque E est 0-distributif, $(k_1 \vee k_2) \wedge (k_1' \wedge k_2') = 0$. Puisque $k_1' \wedge k_2'$ appartient à F, $k_1 \vee k_2$ n'appartient pas à F. Donc F est un filtre premier. □

I.4.3 DEFINITION. - Un treillis T est appelé *arithmétique*, si T est un treillis algébrique et si l'ensemble K des éléments compacts est un sopu-demi-treillis 0-distributif de T.

D'après I.4.2 et le corollaire de I.4.1 on a le théorème suivant:

I.4.4 THEOREME. - *Soit T un treillis arithmétique complet. Alors φ et π sont des correspondances bijectives mutuellement réciproques entre l'ensemble des ultrafiltres dans K et l'ensemble πT des éléments premiers minimaux de T.*

Ce théorème a une série de conséquences:

COROLLAIRE 1. - *Pour un treillis algébrique complet T, dont l'ensemble K des éléments compacts est un sous-treillis, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) T est pseudo-complémenté;
(b) T est $=$-distributif général;
(c) T est O-distributif;
(d) K est 0-distributif;
(e) 0 est la borne inférieure de la famille πT des éléments premiers minimaux.

Il est évident que (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d). D'après la proposition I.2.5, (e) $\Longrightarrow$ (a). L'implication (d) $\Longrightarrow$ (e) est une conséquence du théorème I.4.4; car pour tout élément compact k différent de 0, il existe un ultrafiltre F contenant k et on a $k \not\leq \pi(F)$. Par conséquent, la borne inférieure de la famille des éléments premiers minimaux est 0.

Maintenant nous allons supposer que T est un treillis arithmétique complet. D'après le corollaire 1, T est pseudo-complémenté.

COROLLAIRE 2. - *Un élémenmt premier x d'un treillis arithmétique complet T est premier minimal si, et seulement si, pour tout élément compact k de T, ou bien $k \leq x$ ou bien $k^\perp \leq x$.*

Démonstration. Supposons que x est premier minimal et k un élément compact. Si $k \not\leq x$, alors $k^\perp \leq x$ puisque x est premier. Si $k \leq x$, il existe $k' \in \varphi(x)$ tel que $k \wedge k' = 0$ puisque $\varphi(x)$ est un ultrafiltre. Donc $k' \leq k^\perp$ et $k' \not\leq x$. Donc $k^\perp \not\leq x$.

Supposons inversement que x est un élément premier de T tel que pour tout élément compact k, $k \not\leq x$ ou $k^\perp \not\leq x$. Montrons que le filtre premier $\varphi(x)$ est un ultrafiltre. En effet, si k est un élément compact xon dans $\varphi(x)$, alsor $k \leq x$ et par suite $k^\perp \not\leq x$. Il existe donc un élément compact k' tel que $k' \leq k^\perp$ et $k' \not\leq x$. Donc $k' \in \varphi(x)$ et $k \wedge k' = 0$. □

COROLLAIRE 3. - *Soit x un élément premier minimal d'un treillis arithmétique complet T. Pour tout élément compact k tel que $k \leq x$, on a aussi $k^{\perp\perp} \leq x$.*

En effet, $k \leq x$ entraîne $k^\perp \not\leq x$ d'après le corollaire 2. Donc $k^{\perp\perp} \leq x$, puisque x est premier.

COROLLAIRE 4. - *Soit T un treillis arithmétique complet. L'espace πT des éléments premiers minimaux est séparé; les ensembles $S_{\pi T}(k)$, k compact, sont ouverts et fermés et ils forment une base de la topologie de πT.*

Démonstration. Puisque T est algébrique et puisque K est un sous-treillis de T, les ensembles $S_{\pi T}(k)$, $k \in K$, forment une base de la topologie de πT. D'après le corollaire 2, $S_{\pi T}(k) = Z_{\pi T}(k^{\perp})$. Donc $S_{\pi T}(k)$ est aussi fermé pour tout élément compact k. Tout espace de Kolmogoroff ayant une base d'ensembles ouverts et fermés est séparé. □

EXAMPLE. - Soit E un treillis ayant un plus petit élément 0. Supposns que E est 0-distributif. Alors le treillis des idéaux de E est un treillis arithmétique complet.

I.5. Elément germinal associé à un élément premier

Soit T un treillis complet pseudo-complémenté.

I.5.1 DEFINITION. - Pour tout élément premier x de T. soit

$$\gamma(x) = \bigvee_{t^{\perp} \not\leq x} t;$$

on appelle $\gamma(x)$ *l'élément germinal associé à* x.

I.5.2 PROPRIETES. - Soit x un élément premier d'un treillis complet pseudo-complémenté T.

a) Puisque $t \leq t^{\perp\perp}$ et $t^{\perp} = (t^{\perp\perp})^{\perp}$, on a

$$\gamma(x) = \bigvee_{t^{\perp} \not\leq x} t^{\perp\perp}.$$

b) Puisque x est premier, $t^{\perp} \not\leq x$ entraîne $t^{\perp\perp} \leq x$, dong

$$\gamma(x) \leq x.$$

c) $\gamma(x)$ est la borne supérieure d'une famille de pseudo-compléments filtrante supérieuere emnt. En effet, si $t^{\perp} \not\leq x$ et $s^{\perp} \not\leq x$, alors $s^{\perp} \wedge t^{\perp} \not\leq x$; donc $s^{\perp\perp} \curlyvee t^{\perp\perp} = (s^{\perp} \wedge t^{\perp})^{\perp} \leq x$.

d) Pour tout élément compact k de T, les propriétés suivantes sont équivalentes:

$$\text{(i) } k \leq \gamma(x);\ \text{(ii) } k^{\perp})^{\perp} \leq \gamma(x);\ \text{(iii) } k^{\perp} \not\leq x.$$

En effet, puisque $\gamma(x)$ est la borne supérieure d'une famille filtrante de psuedo-compléments a tels que $a^{\perp} \not\leq x$, la relation $k \leq \gamma(x)$ entraîne l'existence d'un pseudo-complément a tel que $k \leq a$ et $a^{\perp} \not\leq x$. Il s'ensuit que $k^{\perp} \geq a^{\perp} \not\leq x$. Donc (i) entraîne (iii). D'après la définition de $\gamma(x)$, (iii) entraîne (ii). Finalement, (ii) entraîne (i) puisque $k \leq k^{\perp\perp}$.

e) *Si x est un élément premier d'un treillis algébrique complet pseudo-complémenté,*

$$\gamma(x) = \bigvee_{k^{\perp} \not\leq x} k^{\perp\perp} = \bigvee_{k \leq \gamma(x)} k^{\perp\perp} = \bigvee_{k \not\leq x} k^{\perp},$$

où la lettre k ne représente que des éléments compacts.

Les deux premières égalités sont claires d'après la définition de $\gamma(x)$ et d). Démontrons la dernière égalité: Soit k_1 compact et $k_1 \leq \gamma(x)$. Alors $k_1^{\perp} \not\leq x$ d'après d). Il existe donc un élément compact k tel que $k \leq k_1^{\perp}$ et $k \not\leq x$. On a $k_1 \leq k_1^{\perp\perp} \leq k^{\perp}$. Puisque $k \not\leq x$ on a aussi $k^{\perp\perp} \not\leq x$ et par suite $k^{\perp} \leq \gamma(x)$. Par conséquent, $\gamma(x) = \bigvee_{k_1 \leq \gamma(x)} k_1 \leq \bigvee_{k \not\leq x} k^{\perp} \leq \gamma(x)$.

I.5.3 PROPOSITION. - *Soit T un treillis complet et X un espace d'éléments premiers de T, dont la borne inférieure est* 0. *Pour tout $x \in X$, $\gamma(x)$ est la borne supérieure des éléments t de T tels que $Z_X(t)$ soit un voisinage de x.*

Démonstration. D'après I.2.6g, $Z_X(t)$ est un voisinage de x si, et seulement si, $t^\perp \not\leq x$. □

COROLLAIRE 1. - *Supposons que T et X vérifient les hypothèses de I.5.3 et que T soir algébrique. Alors pour tout $x \in X$, $\gamma(x)$ est la borne supérieure des éléments compacts k tels que $Z_X(k)$ soit un voisinage de x.*

COROLLAIRE 2. - *Supposons que T et X vérifient les hypothèses de I.5.3 et que X soit un espace séparé. Alors pour tout x dans X, x est le seul élément de X majorant $\gamma(x)$.*

En effet, si x et y sont deux éléments distuincts de X, il y a un voisinage fermé V de x ne contenant pas y. Il existe t dans T tel que $V = Z_X(t)$. On a $t \not\leq y$ et d'après la proposition, $t \leq \gamma(x)$. Par conséquent, $\gamma(x) \not\leq y$.

I.5.4 DEFINITION. - Soit m un élément maximal d'un treillis distributif T. Un élément t de T est appelé *m-primaire* si $x \leq m$ pour tout élément $x \neq 1$ de T tel que $t \leq x$.

I.5.5 LEMME. - *Soit m un élément maximal d'un treillis algébrique complet distributif. Alors $\gamma(m) \leq t$ pour tout élément m-primaire t.*

Démonstration. Tout élément t de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers (I.3.5). Si t est m-primaire, t est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers x tels que $x \leq m$. Or, si x est un élément premier tel que $x \leq m$, on a $\gamma(m) \leq x$; car si $t^{\perp\perp} \not\leq m$, on a aussi $t^\perp \not\leq x$, ce qui entraîne $t \leq x$. □

I.5.6 PROPOSITION. - *Soit T un treillis algébrique complet tel que* (a) 0 *est la borne inférieure de la famille des éléments maximaux de T,* (b) 1 est un élément compact, (c) l'espace μT des éléments maximaux est séparé. Alors pour tout élément maximal m de T, $\gamma(m)$ est le plus petit élément m-primaire de T et $\gamma(m) = \bigwedge\{p \in \pi T;\ p \leq m\}$.

Démonstration. D'après le corollaire 2 de I.5.3, $\gamma(m)$ est m-primaire. D'après le lemme I.5.4, $\gamma(m)$ est m-primaire minimum. En particulier, $\gamma(m) \leq x$ pour tout élément premier minimal x tel que $x \leq m$. D'autre part, $\gamma(m)$ est la borne inférieure d'une fa,ille d'éléments premiers. Puisque tout élément premier majorant $\gamma(m)$ est aussi m-primaire et puisque tout élément premier majore un élément premier minimal, on abine $\gamma(m) = \bigwedge\{p \in \pi T;\ p \leq m\}$. □

I.5.7 PROPOSITION. - *Soit x un élément premier d'un treillis arithmétique complet. Alors $\gamma(x) = \bigwedge\{p \in \pi T;\ p \leq x\}$.*

Démonstration. Soit p un élément premier minimal majoré par x. Si $t^\perp \not\leq x$, alors $t^\perp \not\leq p$. Par conséquent, $\gamma(x) \leq p$. Il s'ensuit que $\gamma(x) \leq \bigwedge\{p \in \pi T;\ p \leq x\}$. Inversement, soit k un élément compact non majoré par $\gamma(x)$. Pour tout élément compact k' tel que $k' \not\leq x$, on a $k \wedge k' > 0$. Il existe donc un ultrafiltre F de K contenant $\varphi(x)$ et k. L'él'ement premier minimal $\pi(F)$ ne majore pas k et on a $\pi(F) \leq x$. Par conséquent, $\gamma(x) = \bigwedge\{p \in \pi T;\ p \leq x\}$. □

COROLLAIRE 1. - *Pour tout élément premier minimal p d'un treillis arithmétique complet, $p = \gamma(p)$.*

COROLLAIRE 2. - *Pour tout élément premier minimal d'un treillis arithmétique complet, $\gamma(x)$ est premier si, et seulement si, x majore un seul élément premier minimal.*

I.6. Treillis projetables et plats

Soit T un treillis distributif pseudo-complémenté. Rappelons que pour tout élément a de T, les propriét'es suivantes sont équivalentes:

(a) a admet un complément.
(b) $a \vee a^\perp = 1$.
(c) $a = a^{\perp\perp}$ et $a^{\perp\perp} \vee a^\perp = 1$.

Si a vérifie l'une de ces proriétés, on dit que a est un élément *central.* Les élément centraux forment un treillis de Boole $\mathcal{D}$, sous-treillis de Boole du treillis de Boole $\mathcal{B}$ des pseudo-compléments.

On appelle *treillis de Stone* tout treillis distributif pseudo-complémenté T tel que $\mathcal{D} = \mathcal{B}$. On peut donner les charactérisations suivantes d'un treillis de Stone:

I.6.1 PROPOSITION. (Grätzer et Schmidt [16], Frink [14]) - *Pour un treillis distributif pseudo-complémenté T, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) T est un treillis de Stone.
(b) $a^\perp \vee b^\perp = (a \wedge b)^\perp$ quels que soient a, b dans T.
(c) $\mathcal{B}$ est un sous-treillis de T.
(d) Tout idéal premier de T contient un unique idéal premier minimal.
(e) Pour tout $t \in T$, l'ensemble $\{s; t \wedge s = 0\}$ est un facteur direct de T.

Rappelons qu'un treillis algébrique complet distributif est pseudo-complémenté (cf. I.3.5).

I.6.2 DEFINITION. - Un treillis algébrique complet distributif est appelé *projetable* si $k^\perp \vee k^{\perp\perp} = 1$ pour tout élément compact k de T.

I.6.3 PROPOSITION. - *Soir T un treillis algébrique complet distributif projetable: Soit K l'ensemble des éléments compacts de T. On a les propriétés suivantes:*

a) Pour tout $k_1, k_2 \in K$, il existe $\overline{k_1} \in T$ tel que

$$\overline{k_1} \wedge k_2 = 0 \text{ et } k_1 = \overline{k_1} \vee (k_1 \wedge k_2)$$

b) Pour tout $k_1, k_2 \in K$, on a $k_1^{\perp} \vee k_2^{\perp} = (k_1 \wedge k_2)^{\perp}$.
c) T est arithmétique.
d) Tout élément premier de T majore un unique élément premier minimal.
e) Tout élément germinal de T est premier.
f) Les ensembles de la forme $S_{\pi T}(k), k \in K$, forment une base de l'espace πT des éléments premiers minimaux et ils sont tous compacts.

Démonstration. (a) Soient $k_1, k_2 \in K$. Posons $\overline{k_1} = k_1 \wedge (k_1 \wedge k_2)^{\perp}$. Alors $\overline{k_1} \wedge k_2 = 0$ et

$$\overline{k_1} \vee (k_1 \wedge k_2) = (k_1 \wedge (k_1 \wedge k_2)^{\perp}) \vee (k_1 \wedge k_2) = k_1.$$

(b) On vérifie facilement que $k_1^{\perp} \vee k_2^{\perp}$ est un complément de $k_1^{\perp\perp} \wedge k_2^{\perp\perp} = (k_1 \wedge k_2)^{\perp\perp}$. Donc $k_1^{\perp} \vee k_2^{\perp} = (k_1 \wedge k_2)^{\perp}$.

(c) Il suffit de montrer que les ékléments compacts forment un $\wedge$-sous-demi-treillis de T. Soient k_1 et k_2 deux éléments compacts et supposons que $(t_\mu)_{\mu \in I}$ soit une famille filtrant supérieurement d'éléments de T tels que $k_1 \wedge k_2 \leq \bigvee_\mu t_\mu$. Choississons $\overline{k_1}$ comme dans (a). Alors

$$k_1 = \overline{k_1} \vee (k_1 \wedge k_2) \leq \bigvee_\mu (\overline{k_1} \vee t_\mu).$$

Puisque k_1 est compact, on en déduit pour au moins un $\mu \in I$,

$$k_1 \wedge k_2 \leq (\overline{k_1} \vee t_\mu) \wedge k_2 = (\overline{k_1} \wedge k_2) \vee (t_\mu \wedge k_2) \leq t_\mu.$$

Donc $k_1 \wedge k_2$ est compact.

(d) Supposons qque x est un élément premier de T tel qu'il existe deux éléments premiers minimaux distincts p_1 et p_2 majorés par x. Alors on peut trouver un élément compact k vérifiant $k \leq p_1$ et $k \not\leq p_2$. On en déduit $k^{\perp\perp} \leq p_1$ et $k^{\perp} \leq p_2$, d'où $k^{\perp\perp} \vee k^{\perp} \leq x$, ce qui est impossible dans un treillis projetable.

(e) Compte tenu de I.5.7, la propriété (e) est une conséquence de (d).

(f) Cette proprété sera démontré dans le chapite II.4.7. □

Définissons maintenant une classe de treillis projetables qui a des propriétés particulièrement intéressantes:

I.6.4 DEFINITION. - Un treillis algébrique complet distributif T est appelé *plat* si tout élément compact de T est central, c'est à dire si $k \vee k^{\perp} = 1$ pour tout élément compact k de T.

Si T est un treillis algébrique complet distributif plat, T est projetable et on a $k = k^{\perp\perp}$ pour tout élément compact k de T. Donnons quelque charactérisations de treillis plats:

I.6.5 THEOREME. - *Pour un treillis algébrique complet distributif T, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) T est plat.
(b) $\gamma(x) = x$ pour tout élément premier x de T.
(c) T est arithmétique et tout élément premier de T est maximal.
(d) T est arithmétique et tout élément premier de T est premier minimal.
(e) T est arithmétique, 0 est la borne inférieure de la famille des éléments maximaux de T et les ensembles de la forme $S_{\mu T}(k)$, k compact, forment une base d'ouverts fermés de l'espace μT des éléments maximaux de T.

Démonstration. (a) $\Longrightarrow$ (b): Soix x un élément premier. Soit k un élément compact majoré par x. Puisque $k \vee k^{\perp} = 1$, on a $k^{\perp} \nleq x$ et par suite $k \leq \gamma(x)$. Par conséquent, $x = \gamma(x)$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Soit k un élément compact de T. Pour tout élément premier x tel que $k \leq x$, on a $k \leq \gamma(x)$, donc $k^{\perp} \nleq x$ d'après I.5.2d. Par conséquent, $k \vee k^{\perp}$ n'est majoré par aucun élément premier, ce qui entraîne $k \vee k^{\perp} = 1$.

(a) et (b) $\Longrightarrow$ (c): Puisqu'un treillis plat est projetable, il est aussi arithmétique d'après I.6.3. Soient x et y deux éléments premiers tels que $x \leq y$. On a donc $\gamma(y) \leq x$. Mais d'après (b), $\gamma(y) = y$; donc $x = y$. Cela entraîne (c) puisque tout élément de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers.

Il est clair que (d) et (c) sont équivalentes.

(a) et (c) $\Longrightarrow$ (e): Puiqu'un treillis plat est projetable, les ensembles $S_{\pi T}(k)$, k compact, forment une base d'ouverts compacts de πT (cf. I.6.3). De plus, dans tout treillis algébrique complet distributif, 0 est la borne inférieure de la famille des éléments premiers minimaux. D'après (c), $\pi T = \mu T$. On a donc démontré (e).

(e) $\Longrightarrow$ (c): Soit m un élément maximal de T. Si k est un élément compact tel que $k \leq m$, alors $Z_{\mu T}(k) = \mu T \setminus S_{\mu T}(k)$ est un voisinage de m; donc $k \leq \gamma(m)$ d'après I.5.3. Il s'ensuit que $m = \gamma(m)$. Par conséquent, tout élément maximal de T est premier minimal. Puisque 0 est la borne inférieure de la famille des éléments maximaux de T, μT est une partie partout dense de πT. Pour tout élément compact k, $S_{\mu T}(k)$ est une partie partout dense de $S_{\pi T}(k)$. Puisque πT est est un espace séparé et $S_{\mu T}(k)$ compact, $S_{\mu T}(k)$ est une partie fermé de πT. Donc $S_{\mu T}(k) = S_{\pi T}(k)$. Puisque tout élément premier minimal appartient à au moins un ensemble de la forme $S_{\pi T}(k)$, k compact, on en déduit $\mu T = \pi T$. $\square$

CHAPTER II

L'ESPACE DE STONE-ČECH-ISBELL D'UN TREILLIS DISTRIBUTIF PSEUDO-COMPLEMENTE

J.R. Isbell [18] a associé à tout groupe réticulé commutatif G un espace topologique compact βG et il a démontré que certains homomorphismes de groupes réticulés $f\colon G \to H$ induisent des applications continues $\beta f\colon \beta H \to \beta G$ de manière que β soit un foncteur contravariant. Bigard a remarqué que la construction de βG n'utilise que les propriétés du treillis des idéaux de G et il a suggéré de généraliser les raisonnemants d'Isbell aux treillis distribitifs pseudo-complémentés.

Nous associerons à tout treillis distributif pseudo-complementé T un espace topologique compact βT. Avec une définition convenable des morphismes, β sera un foncteur: la construction de βT est une abstraction d'une certaine construction du compactifié de Stone-Čech d'un espace topologique. Le treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts d'un espace topologique X est en effet distributif et pseudo-complémenté, et nous verrons que $\beta\mathcal{O}_X$ n'est rien d'autre que le compactifié de Stone-Čech de X. Plus généralement: Si T est un treillis distributif complet, dont tout élément est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers, alors βT n'est rien d'autre que le compactifié de Stone-Čech-Isbell.

II.1. c-r-voisinages et c-r-idéaux

Dans cette section, T désignera toujours un treillis pseudo-complémenté distributif. Nous utiliserons les notations de I.1.3. En particulier, $\vee$ and $\wedge$ désigneront les operations de treillis dans T; le pseudo-complément d'un élément t de T sera noté $t^{\perp}$. On désigne par $\mathcal{B}$ le treillis de Boole des pseudo-compléments dans T.

II.1.1 DEFINITION. - Soient a et b deux élélements de T. Nous dirons que b est un r-voisinage de a, et nous écrirons $a \prec b$, si $a^{\perp} \vee b = 1$.

II.1.2 EXEMPLE. - Soit $\mathcal{O}_X$ le treillis des ouverts d'un espace topologique X. Soient $U, V \in \mathcal{O}_X$. Alors V est un r-voisinage de U si, et seulement si, $\overline{U} \subseteq V$.

Démontrons quelque propriétés de la relation $\prec$:
Puisque $0^{\perp} \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$ et $1^{\perp} \vee 1 = 1$, on a:

(P1) $$0 \prec 0 \ \text{ et } \ 1 \prec 1.$$

Si $a^{\perp} \vee b = 1$, alors $a = a \wedge (a^{\perp} \vee b) = (a \wedge a^{\perp}) \vee (a \wedge b) = a \wedge b$; donc:

(P2) $$a \prec b \ \text{ entraîne } \ a \leq b.$$

Si $a^\perp \vee b = 1$, alors $(b^\perp)^\perp \vee a^\perp = 1$; donc:

(P3) $$a \prec b \text{ entraîne } b^\perp \prec a^\perp.$$

Si $a^\perp \vee b = 1$, alors $(a^{\perp\perp})^\perp \vee b = 1$; donc:

(P4) $$a \prec b \text{ entraîne } a^{\perp\perp} \prec b.$$

Si $a_1 \leq a \prec b \leq b_1$, alors $a_1^\perp \geq a^\perp$ et $a^\perp \vee b = 1$, donc $a_1^\perp \vee b_1 = 1$:

(P5) $$a_1 \leq a \prec b \leq b_1 \text{ entraîne } a_1 \prec b_1.$$

Si $a^\perp \vee b = 1$ et $a_1^\perp \vee b_1 = 1$, alors $a^\perp \vee b \vee b_1 = 1 = a_1^\perp \vee b \vee b_1$, ce qui entraîne $(a^\perp \wedge a_1^\perp) \vee (b \vee b_1) = 1$ puisque T est distributif. Puisque $a^\perp \wedge a_1^\perp = (a \vee a_1)^\perp$, nous avons donc:

(P6) $$a \prec b \text{ et } a_1 \prec b_1 \text{ entraînent } a \vee a_1 \prec b \vee b_1.$$

Si $a^\perp \vee b = 1$ et $a^\perp \vee b_1 = 1$, alors $a^\perp \vee (b \wedge b_1) = 1$. Donc $a \prec b$ et $a \prec b_1$ entraînent $a \prec b \wedge b_1$. On en déduit:

(P7) $$a \prec b \text{ et } a_1 \prec b_1 \text{ entraînent } a \wedge a_1 \prec b \wedge b_1.$$

II.1.3 DEFINITION. - Soit Q l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1. Soient a et b deux éléments de T. On appèlle *chaîne normale entre* a et b toute famille $(c_r)_{r\in Q}$ d'éléments de T telle que $c_0 = a$ et $c_1 = b$ et telle que $c_r \prec c_s$ chaque fois que $r < s$. On dit que b est un *c-r-voisinage* de a, et on écrit $a \prec\!\!\prec b$, s'il existe au moins une chaîne normale entre a et b. Dans cette définition on peut évidemment remplacer Q par n'importe quel ensemble ordonné o-isomorphe à Q.

II.1.4 EXEMPLE. - Une famille $(U_r)_{r\in Q}$ d'ouverts d'un espace topologique X est une chaîne normale dans $\mathcal{O}_X$ si, et seulement si, $\overline{U}_r \subseteq U_s$ chaque fois que $r < s$.

Démontrons quelque propriétés de la relation $\prec\!\!\prec$:
La famille $(a_r)_{r\in Q}$ avec $a_r = 0$ (resp. $a_r = 1$) pour tout $r \in Q$ est une chaîne normale d'après (P1). Par conséquent:

(P′1) $$0 \prec\!\!\prec 0 \text{ et } 1 \prec\!\!\prec 1.$$

Si b est un c-r-voisinage de a, alors b est un r-voisinage de a. Donc (P2) entraîne:

(P′2) $$a \prec\!\!\prec b \text{ entraîne } a \leq b.$$

Si $(c_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre a et b, la famille $(c_r^\perp)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre $b^\perp$ et $a^\perp$ d'après (P3); donc:

(P′3) $$a \prec\!\!\prec b \text{ entraîne } b^\perp \prec\!\!\prec a^\perp.$$

De même, la propriété (P4) permet de montrer:

(P′4) $$a \prec\!\!\prec b \text{ entraîne } a^{\perp\perp} \prec\!\!\prec b.$$

Si $a_1 \leq a$ et $b \leq b_1$ et si $(c_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre a et b, la famille $(d_r)_{r\in Q}$ définie par $d_0 = a_0$, $d_1 = c_1$, $d_r = c_r$ pour tout $r \neq 0, 1$, est une chaîne normale entre a_1 et b_1 d'après (P5). Nous avons donc:

(P′5) $$a_1 \leq a \prec\!\!\prec b \leq b_1 \text{ entraîne } a_1 \prec\!\!\prec b_1.$$

Si $(c_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre a et b et si $(d_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre a_1 et b_1, alors $(c_r \vee d_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre $a \vee a_1$ et $b \vee b_1$ et $(c_r \wedge d_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre $a \wedge a_1$ et $b \wedge b_1$ d'après (P6) et (P7). Donc:

(P′6) $\quad a \prec\!\!\prec b$ et $a_1 \prec\!\!\prec b_1$ entraînent $a \vee a_1 \prec\!\!\prec b \vee b_1$.

(P′7) $\quad a \prec\!\!\prec b$ et $a_1 \prec\!\!\prec b_1$ entraînent $a \wedge a_1 \prec\!\!\prec b \wedge b_1$.

La propriété suivante sera très importante: Si $(c_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre a et b, la famille $(c_r)_{r\in Q, r\leq\frac{1}{2}}$ est une chaîne normale entre a et $c_{\frac{1}{2}}$ et $(c_r)_{r\in Q, r\geq\frac{1}{2}}$ est une chaîne normale entre $c_{\frac{1}{2}}$ et b. Donc:

(P′8) $\quad$ Si $a \prec\!\!\prec b$, il existe c tel que $a \prec\!\!\prec c \prec\!\!\prec b$.

II.1.5 DEFINITION. - Un idéal $\mathfrak{x}$ du treillis T est appelé *c-r-idéal* si tout élément a de $\mathfrak{x}$ admet un c-r-voisinage b appartenant à $\mathfrak{x}$.

Soit $\mathcal{I}(T)$ le treillis de tous les idéaux de T. D'après [4, p. 114], $\mathcal{I}(T)$ est un treillis distributif. Soit $\mathcal{C}(T)$ l'ensemble des c-r-idèaux de T.

II.1.6 LEMME. - Si $\mathfrak{x}$ est la borne supérieure das $\mathcal{I}(T)$ d'une famille $(\mathfrak{x}_\mu)_{\mu\in M}$ de c-r-idéaux, $\mathfrak{x}$ est aussi un c-r-idéal.

Démonstration. Sot a un élément de $\mathfrak{x}$. Il y a un nombre fini d'indices $\mu_1, \dots, \mu_n \in M$ et des éléments $a_i \in \mathfrak{x}_{\mu_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ tels que $a = a_1 \vee \dots \vee a_n$. Tout a_i admet un c-r-voisinage b_i dans $\mathfrak{x}_{\mu_i}$. D'après (P'6), $b = b_1 \vee \dots \vee b_n$ est un c-r-voisinage de a. De plus, b appartient à $\mathfrak{x}$. Donc $\mathfrak{x}$ est un c-r-idéal. □

D'après le lemme II.1.6, $\mathcal{C}(T)$ est un $\vee$-sous-demi-treillis complet de $\mathcal{I}(T)$. Puisque $\{0\}$ est un c-r-idéal, $\mathcal{C}(T)$ est donc un treillis complet. Tout idéal $\mathfrak{y}$ de T contient un plus grand c-r-idéal que nou désignerons par $k(\mathfrak{y})$. Si $\mathfrak{y}$ est l'idéal principal engendré par un élément a de T, c'est à dire si

$$\mathfrak{y} = \{t \in T \mid t \leq a\},$$

on notera simplement $k(a)$ au lieu de $k(\mathfrak{y})$. On peut donner une caractérisation simple de $k(\mathfrak{y})$:

II.1.7 LEMME. - Pour tout idéal $\mathfrak{y}$ de T, $k(\mathfrak{y})$ est l'ensemble des éléments a de T qui admettent un c-r-voisinage $b \in \mathfrak{y}$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{z}$ l'ensemble des éléments a de T qui admettent un c-r-voisinage $b \in \mathfrak{y}$. Evidemment, $k(\mathfrak{y}) \subseteq \mathfrak{z}$. D'autre part, $\mathfrak{z}$ est un c-r-idéal. En effet, si $a \prec\!\!\prec b \in \mathfrak{y}$ et $a_1 \leq a$, alors $a_1 \prec\!\!\prec b$ d'après (P'5); donc $\mathfrak{z}$ est héréditaire. Si $a \prec\!\!\prec b \in \mathfrak{y}$ et $a_1 \prec\!\!\prec b_1 \in \mathfrak{y}$, alors $a \vee a_1 \prec\!\!\prec b \vee b_1 \in \mathfrak{y}$ d'après (P'6); donc $\mathfrak{z}$ est un idéal de T. L'idéal $\mathfrak{z}$ est un c-r-idéal; car si $a \in \mathfrak{z}$, il existe $b \in \mathfrak{y}$ tel que $a \prec\!\!\prec b$; il existe donc un c tel que $a \prec\!\!\prec c \prec\!\!\prec b$, et on a $c \in \mathfrak{z}$. Puisque $\mathfrak{z}$ est un c-r-idéal contenu dans $\mathfrak{y}$, on a aussi $\mathfrak{z} \subseteq k(\mathfrak{y})$. □

COROLLAIRE. - Si b est un élément quelconque de T, le c-r-idéal $k(b)$ est l'ensemble des éléments a de T dont b est un c-r-voisinage.

L'intersection d'une famille quelconque de c-r-idéaux de T n'est pas nécessairement un c-r-idéal. Mais si $\mathfrak{x}_1$ et $\mathfrak{x}_2$ sont deux c-r-idéaux, $\mathfrak{x}_1 \cap \mathfrak{x}_2$ est aussi un c-r-idéal. En effet, tout élément a de $\mathfrak{x}_1 \cap \mathfrak{x}_2$ admet un c-r-voisinage $b_1 \in \mathfrak{x}_1$ et un c-r-voisinage $b_2 \in \mathfrak{x}_2$; l'élément $b = b_1 \wedge b_2$ appartient à $\mathfrak{x}_1 \cap \mathfrak{x}_2$ et est un c-r-voisinage de a d'après (P'7). Par conséquenmt, $\mathcal{C}(T)$ est un sous-treillis de $\mathcal{I}(T)$; en particulier, $\mathcal{C}(T)$ est distributif. Puisque $a \prec\!\!\prec 1$ pour tout $a \in T$, on a en effet $T \in \mathcal{C}(T)$. De plus, T est un élément compact de $\mathcal{C}(T)$, puisque tout idéal principal est compact. Ainsi nous avons démontré:

II.1.8 PROPOSITION. - L'ensemble $\mathcal{C}(T)$ des c-r-idéaux de T est un treillis distributif complet dont le plus grand élément est compact.

D'après I.3.3, tout c-r-idéal propre de T est contenu dans un c-r-idéal maximal de T. Dans la section 2 nous aurons besoin de la caractérisation suivante des c-r-idéaux maximaux:

II.1.9 LEMME. - Pour un c-r-idéal $\mathfrak{x}$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) $\mathfrak{x}$ est un c-r-idéal maximal.
(b) Il existe un idéal premier $\mathfrak{y}$ de T tel que $\mathfrak{x} = k(\mathfrak{y})$.
(c) $a \prec\!\!\prec b$ entraîne $a \in \mathfrak{x}$ ou $b^\perp \in \mathfrak{x}$ quels que soient $a, b \in T$.

Démonstration. (a) entraîne (b), puisque tout c-r-idéal maximal $\mathfrak{x}$ est contenu dans au moins un idéal maximal $\mathfrak{y}$ de T, ce qui entraîne $\mathfrak{x} = k(\mathfrak{y})$.

(b) $\implies$ (c): Soit $\mathfrak{x} = k(\mathfrak{y})$ pour un idéal premier $\mathfrak{y}$ de T et supposons que $a \prec\!\!\prec b$. Il existe c tel que $a \prec\!\!\prec c \prec\!\!\prec b$. Puisque $\mathfrak{y}$ est un idéal premier, on a $c \in \mathfrak{y}$ ou $c^\perp \in \mathfrak{y}$. Si $c \in \mathfrak{y}$, on a $a \in k(\mathfrak{y})$. Si $c^\perp \in \mathfrak{y}$, on a $b^\perp \in k(\mathfrak{y})$ puisque $c^\perp \prec\!\!\prec b^\perp$ d'après (P'3).

(c) $\implies$ (a): Supposons que $\mathfrak{x}$ vérifie la condition (c) et que $\mathfrak{x}_1$ soit un c-r-idéal contenant $\mathfrak{x}$ strictement. Il y a alors un élément a n'appartenant pas à $\mathfrak{x}$, qui admet un c-r-voisinage $b \in \mathfrak{x}_1$. D'après (c), $b^\perp$ appartient à $\mathfrak{x}$ et par suite à $\mathfrak{x}_1$. Donc $c = b \vee b^\perp \in \mathfrak{x}_1$. Or, $c \in \mathfrak{x}_1$ entraîne $c^{\perp\perp} \in \mathfrak{x}_1$ d'après (P'4). Puisqe $c^{\perp\perp} = 1$, on a donc $\mathfrak{x}_1 = T$. □

Tout c-r-idéal permier verifie la prpriété (c) du lemme précédemt. Par conséquent, tout c-r-idéal premier est maximal.

Si T est un treillis distributif avex 0, l'intersection des idéaux premiers de T est réduite à $\{0\}$ d'après I.3.5. Le lemme précédent admet donc la conséquence suivante:

COROLLAIRE. - L'intersection des c-r-idéaux maximaux de T est réduite à $\{0\}$.

II.2. L'espace de Stone-Čech-Isbell.

Sot T un treillis distributif pseudo-complémenté. Nous utiliserons les mêmes notations que dans la section précédente.

D'après la proposition III.1.7, le treillis des c-r-idéaux de T est distributif. Les éléments maximaux de ce treillis sont donc premiers. On peut donc considérer l'espace des c-r-idéaux maximaux de T, c'est à dire l'ensemble des c-r-idéaux maximaux muni de la topologie de Zariski comme dans la section I.2.

II.2.1 DEFINITION. - L'espace des c-r-idéaux maximaux d'un treillis distributif pseudo-complémenté T est appelé *espace de Stone-Čech-Isbell* de T; on le note βT.

Donnons une autre définition de la topologie sur βT: pour tout élément a de T, désignons par $S_\beta(k(a))$ l'ensemble des c-r-idéaux maximaux ne contenant pas le c-r-idéal $k(a)$ et par $Z_\beta(a)$ l'ensemble des c-r-idéaux maximaux $\mathfrak{x}$ tels que $a \in \mathfrak{x}$. On a $Z_\beta(a) = Z_\beta(a^{\perp\perp})$ pour tout a dans T; car $a \in \mathfrak{x}$ entraîne $a^{\perp\perp} \in \mathfrak{x}$ pour tout c-r-idéal $\mathfrak{x}$.

II.2.2 LEMME. - Pour tout $a \in \mathcal{B}$, $S_\beta(k(a)) = Z_\beta(a^\perp)$. Les ensembles $Z_\beta(a)$, $a \in T$, forment une base de la topologie de βT.

Démonstration. Soit $\mathfrak{x} \in \beta T$. Si $a^\perp \in \mathfrak{x}$, il y a un $c \in \mathfrak{x}$ tel que $a^\perp \prec\!\!\prec c$. Puisque $c^\perp \prec\!\!\prec a^{\perp\perp}$, on a $c^\perp \in k(a^{\perp\perp}$.On en tire que $k(a^{\perp\perp}) \nsubseteq \mathfrak{x}$, puisque $c^\perp \in \mathfrak{x}$. Inversement, si $k(a^{\perp\perp}) \subseteq \mathfrak{x}$, il existe $c \in \mathfrak{x}$ tel que $c \prec\!\!\prec a^{\perp\perp}$; donc $a^\perp \in \mathfrak{x}$ d'après II.1.9. Ainsi nous avons démontré que $S_\beta(k(a^{\perp\perp})) = Z_\beta(a^\perp)$. Si $\mathfrak{z}$ est un c-r-idéal quelconque de T, alors $\mathfrak{z} = \bigcup\{k(a); a \in \mathcal{B} \cap \mathfrak{z}\}$. Donc $S_\beta(\mathfrak{z}) = \bigcup_{a\in\mathcal{B}\cap\mathfrak{z}} S_\beta(k(a))$. Donc tout ouvert de βTest une réunion d'une famille d'ouverts de la forme $S_\beta(k(a)), a \in \mathcal{B}$. Puisque $S_\beta(k(a)) \cap S_\beta(k(b)) = S_\beta(k(a) \cap k(b)) = S_\beta(k(a \wedge b))$, les ensembles de la forme $S_\beta(k(a))$, $a \in \mathcal{B}$, forment une base de la topologie de Zariski sur βT. □

Démontrons maintenant le théorème prinipal de ce chapitre:

II.2.3 THEOREME. - L'espace de Stone-Čech-Isbell βT d'un treillis distributif pseudo-complémenté T est compact.

Démonstration. D'après les propositions II.1.8 et I.3.3, βT est quasi-compact. Montrons que βT est sésparé. Soient $\mathfrak{x}_1$ et $\mathfrak{x}_2$ deux c-r-idéaux maximaux distincts. Soit a un élément de $\mathfrak{x}_2$ n'appartentant pas à $\mathfrak{x}_1$. Il existe des éléments b, c, d dans $\mathfrak{x}_2$ tels que $a \prec\!\!\prec b \prec\!\!\prec c \prec\!\!\prec d$. Puique $b \wedge c^\perp = 0$, on a $k(b) \cap k(c^\perp) = \{0\}$; de plus, $k(b) \nsubseteq \mathfrak{x}_1$ puisque $a \in k(b)$ et $a \notin \mathfrak{x}_1$; en outre $k(c^\perp) \nsubseteq \mathfrak{x}_2$ puisque $d^\perp \in k(c^\perp)$ et $d^\perp \notin \mathfrak{x}_2$. Le treillis des c-r-idéaux de T vérifie donc les hypothèses de I.2.3f. □

Nous aurons besoin du lemme suivant:

II.2.4 LEMME. - Soient H et K deux parties compactes disjointes de βT. Il existe c dans T et un c-r-voisinage b de c tel que $H \subseteq Z_\beta(b)$ et $K \subseteq Z_\beta(c^\perp)$.

Démonstration. Tout $\mathfrak{x} \in H$ admet un voisinage ne rencontrant pas K, de la forme $Z_\beta(a_\mathfrak{x})$, $a_\mathfrak{x} \in T$ (cf. lemme II.2.2). Pour tout $\mathfrak{x} \in H$ soient $b_\mathfrak{x}$ et $c_\mathfrak{x}$ deux éléments de $\mathfrak{x}$ tels que $a_\mathfrak{x} \prec\!\!\prec c_\mathfrak{x} \prec\!\!\prec b_\mathfrak{x}$; évidemment $Z(b_\mathfrak{x})$ est aussi un voisinage de $\mathfrak{x}$ ne rencontrant pas K. puisque H est compact, il y a un nombre fini $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ d'éléments de H tels que $H \subseteq Z_\beta(b_{\mathfrak{x}_1}) \cup \cdots \cup Z_\beta(b_{\mathfrak{x}_n})$. Soient $b = b_{\mathfrak{x}_1} \wedge \cdots \wedge b_{\mathfrak{x}_n}$ et $c = c_{\mathfrak{x}_1} \wedge \cdots \wedge c_{\mathfrak{x}_n}$. Alors $c \prec\!\!\prec b$ d'après (P'7) et $H \subseteq Z_\beta(b)$. Puisque $a_{\mathfrak{x}_i} \prec\!\!\prec c_{\mathfrak{x}_i}$ et $a_{\mathfrak{x}_i} \notin \mathfrak{x}$ pour tout $\mathfrak{x} \in K$, $c_{\mathfrak{x}_i}^\perp$ appartient à $\mathfrak{x}$ pour tout $\mathfrak{x} \in K$ quel que soient $i = 1, \ldots, n$. On en déduit $K \subseteq Z_\beta(c^\perp)$. □

Un élément a de T vérifie $a \prec\!\!\prec a$ si, et seulement si, $a \vee a^\perp = 1$, c'est à dire si, et seulement si, a est central. Rappelons que l'ensemble $\mathcal{D}$ des éléments centraux de T est un sous-treillis de Boole de $\mathcal{B}$ (cf. sec. I.6).

Si $a \prec\!\!\prec a$, tout c-r-idéal maximal contient a ou $a^\perp$ d'après **??**; puisque aucun c-r-idéal propre ne contient à la fois a et $a^\perp$, l'espace de Stone-Čech-Isbell βT et la réunion de deux ouverts disjoints $Z_\beta(a)$ et $Z_\beta(a^\perp)e$; il s'ensuit que $Z_\beta(a)$ et $Z_\beta(a^\perp)$ sont aussi fermés. Réciproquement, nous démontrerons que toute partie à la fois ouverte et fermée de βT est de cette forme; plus précisément:

II.2.5 PROPOSITION. - $a \mapsto Z_\beta(a^\perp)$ est un isomorphisme du treillis de Boole $\mathcal{D}$ des éléments a de T vérifiant $a \prec\!\!\prec a$ sur le treills de Boole des parties à la fois ouvertes et fermées de βT.

Démonstration. Il suffit de montrer que $a \mapsto Z_\beta(a^\perp)$ est (i) strictement croissant et (ii) surjectif.

(i) Soient a et b deux éléments de $\mathcal{D}$ tels que $a < b$. On a alors $a^\perp > b^\perp$ et il est clair que $Z_\beta(a^\perp) \subseteq Z_\beta(b^\perp)$. Il existe un idéal premier $\mathfrak{y}$ de T contenant $b^\perp$ et ne contenant $a^\perp$. D'après le lemme II.1.9, $\mathfrak{x} = k(\mathfrak{y})$ est un c-r-idéal maximal. Il contient $b^\perp$ puique $b^\perp \in \mathcal{D}$, mais il ne contient pas $a^\perp$. Par conséquent, $Z_\beta(a^\perp) \neq Z_\beta(b^\perp)$.

(ii) Prenons une partie ouverte et fermée H de βT. D'après le lemme II.2.4, il existe $c \in T$ et un c-r-voisinage b de c tels que $H \subseteq Z_\beta(b)$ et $\beta T \setminus H \subseteq Z_\beta(c^\perp)$. Il s'ensuit que $b \wedge c^\perp$ est contenu dans tout c-r-idéal maximal. Donc $b \wedge c^\perp = 0$, c'est à dire que $b \leq c^{\perp\perp}$. Puisque $c \prec\!\!\prec b$, on a aussi $c^{\perp\perp} \leq b$ d'après (P'4) et (P'2). Par conséquent, $b = c^{\perp\perp}$. Puisque b est un c-r-voisinage de c, $b \vee c^\perp = b \vee b^\perp = 1$. Si l'on pose $a = b^\perp$, on a donc $H = Z_\beta(a^\perp)$ et $a \in \mathcal{D}$. □

II.3. Morphismes et applications continues.

Soient T et T' deux treillis distributifs pseudo-complémentés.

II.3.1 DEFINITION. - Une application $f\colon T \to T'$ est appelée *morphisme* (de treillis dstributifs pseudo-complémentés) si les propriétés suivantes sont vérifiées:

$rm(M1)$ $\qquad f(1) = 1.$

(M2) $\qquad f(a) \wedge f(a^\perp) = 0 \;$ quel que soit $\; a \in T.$

(M3) $\qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \;$ quels que soient $\; a, b \in T.$

L'application composée de deux morphismes est aussi un morphisme. Par conséquent, les treillis distributifs pseudo-complémentés et les morphismes au sens défini ci-dessus forment une catégorie.

II.3.2 EXEMPLE. - Soient X et Y deux espaces topologiques et $\varphi\colon X \to Y$ une application continue. Définissons une application $\mathcal{O}_\varphi\colon \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ par $\mathcal{O}_f(U) = \varphi^{-1}(U)$ pour tout ouvert U de Y. Alors $\mathcal{O}_\varphi$ est un morphisme au sens défini ci-dessus. On vérifie facilement que $\mathcal{O}$ est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des treillis distributifs pseudocomplémentés.

Soit $f\colon T \to T'$ un morphisme de treillis distributifs pseudo-complémentés. Démontrons queslque propriétés: Si l'on pose $a = 0$ dans (M2), on obtient en utilsant (M1):
$0 = f(0) \wedge f(o^{\perp}) = f(0) \wedge f(1) = f(0) \wedge 1 = f(0)$; donc:

(M4) $$f(0) = 0.$$

Si $a^{\perp} \vee b = 1$, alors $f(a^{\perp}) \vee f(b) = f(1) = 1$ d'après (M1) et (M3). D'après (M2), $f(a^{\perp}) \leq f(a)^{\perp}$, donc $f(a)^{\perp} \wedge f(b) = 1$. Ainsi nous avons:

$$a \prec b \text{ entraîne } f(a) \prec f(b) \text{ quels que soient } a, b \in T. \tag{M5}$$

Si $(c_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale dans T, $(f(c_r))_{r\in Q}$ est une chaîne normale dans T' d'après (M5). Donc:

(M6) $$a \prec\!\!\prec b \text{ entraîne } f(a) \prec\!\!\prec f(b) \text{ quels que soient } a, b \in T.$$

Remarquons qu'un morphisme au sens défini ci-dessus n'est pas en général un homomorphisme de treillis.

Nous allons montrer que tout morphisme $f\colon T \to T'$ induit une application continue $\beta f\colon \beta T' \to \beta T$.

Soit $\mathfrak{x}$ un c-r-idéal maximal de T'. En vertu de (M3), l'image réciproque $f^{-1}(\mathfrak{x})$ est un idéal de T. Soit $\beta f(\mathfrak{x})$ le plus grand c-r-idéal de T contenu dans $f^{-1}(\mathfrak{x})$. Daprès II.1.7, $\beta f(\mathfrak{x})$ est l'ensemble des éléments a de T qui admettent un c-r-voisinage b tel que $f(b) \in \mathfrak{x}$.

II.3.3 LEMME. - $\beta f(\mathfrak{x})$ est un c-r-idéal maximal de T.

Démonstration. Soient a et b deux éléments de T tels que $a \prec\!\!\prec b$. Choisissons c et d tels que $a \prec\!\!\prec c \prec\!\!\prec d \prec\!\!\prec b$. D'aprèd (M6), $f(c) \prec\!\!\prec f(d)$. Puisque $\mathfrak{x}$ est un c-r-idéal maximal, $f(c) \in \mathfrak{x}$ ou $f(d)^{\perp} \in \mathfrak{x}$ d'après II.1.9. Si $f(c) \in \mathfrak{x}$, alors $a \in \beta f(\mathfrak{x})$. Si $f(d)^{\perp} \in \mathfrak{x}$, alors $b^{\perp} \in \beta f(\mathfrak{x})$; car $f(d^{\perp}) \leq f(d)^{\perp}$ d'après (M2) et $b^{\perp} \prec\!\!\prec d^{\perp}$. D'après II.1.9, $\beta f(\mathfrak{x})$ est donc un c-r-idéal maximal. □

Ainsi nous avons une application bien définie $\beta f\colon \beta T' \to \beta T$. Montrons qu'elle est continue: Soit $\mathfrak{x} \in \beta T'$ et soit $U \subseteq \beta T$ un voisinage de $\beta f(\mathfrak{x})$. D'après II.2.2, on peut supposer que $U = Z_{\beta}(a)$ pour un certain élément a de T. En particulier, a appartient à $\beta f(\mathfrak{x})$. Soit b un c-r-voisinage de a appartenant aussi à $\beta f(\mathfrak{x})$. L'élément a appartient à $\beta f(\mathfrak{y})$ pour tout $\mathfrak{y} \in \beta T'$ tel que $f(b) \in \mathfrak{y}$. Donc l'image réciproque $(\beta f)^{-1}(U)$ contient l'ensemble $Z_{\beta}(f(b))$ qui est un voisinage de $\mathfrak{x}$ dans $\beta T'$.

Montrons que β est un foncteur contravariant de la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés dans la catégorie des espaces topologiques compacts: Soient $f\colon T \to T'$ et $g\colon T' \to T''$ deux morphismes de treillis distributifs pseudo-complémentés. Soit $\mathfrak{x}$ un c-r-idéal maximal de T''. Alors $\beta g(\mathfrak{x})$ est le plus grand c-r-idéal de T' contenu dans $g^{-1}(\mathfrak{x})$. Donc $f^{-1}(\beta g(\mathfrak{x})) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(\mathfrak{x}))$. Or, $(\beta f \circ \beta g)(\mathfrak{x})$ est le plus grand c-r-idéal contenu dans $g^{-1}(f^{-1}(\mathfrak{x}))$. Donc $(\beta g \circ \beta f)(\mathfrak{x}) \subseteq \beta(f \circ g)(\mathfrak{x})$. Puisqu'il s'agit de c-r-idéaux maximaux dans les deux cas, on a nécessairement égalité. Par conséquent, $\beta f \circ \beta g = \beta(g \circ f)$.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

II.3.4 THEOREME. - β est un foncteur contravariant de la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés dans la catégorie des espaces topologiques compacts.

Le foncteur β sera appelé *foncteur de Stone-Čech-Isbell*.

Dans ce qui soit, soit $f\colon T \to T'$ un morphisme de treillis distributifs pseudo-complémentés.

II.3.5 PROPOSITION. - L'application $\beta f\colon \beta T' \to \beta T$ est surjective si, et seulement si, $f(a) \neq 1$ pour tout éléments a de T qui admet un c-r-voisinage $b \neq 1$.

Démonstration. Supposons que $f(a) \neq 1$ pour tout élément a qui admet un c-r-voisinage $b \neq 1$. Si $\mathfrak{x}$ un c-r-idéal maximal de T. L'image $f(\mathfrak{x})$ est filtrant suérieurement et ne contient pas 1 en vertu de l'hypothèse. De plus, tout élément de $f(\mathfrak{x})$ admet un c-r-voisinge appartenant aussi à $f(\mathfrak{x})$ d'après (M6). Par conséquent, $f(\mathfrak{x})$ est contenu dans un c-r-idéal maximal $\mathfrak{z}$ de T'. Puisque $\mathfrak{x} \subseteq f^{-1}(\mathfrak{z})$, on a $\mathfrak{x} = f^{-1}(\mathfrak{z})$. Donc βf est surjective.

Supposons inversement que βf soit surjective.Soit a un élément de T qui admet un c-r-voisinage $b \neq 1$. Soit $\mathfrak{y}$ un idéal maximal de T contenant b. Alors $a \in k(\mathfrak{y})$ et $k(\mathfrak{y})$ est un c-r-idéal maximal d'après II.1.9. Soit $\mathfrak{x}$ un c-r-idéal maximal de T' tel que $k(\mathfrak{y}) = \beta f(\mathfrak{x})$. Alors $a \in \beta f(\mathfrak{x}) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{x})$ et pas suite $f(a) \in \mathfrak{x}$. Donc $f(a) \neq 1$. $\square$

COROLLAIRE 1. - Si $f(a) \neq 1$ pour tout pseudo-complément a de T différent de 1, alors βf est surjetif.

COROLLAIRE 2. - Si f est injectif, βf est surjectif.

II.3.6 PROPOSITION. - Pour que $\beta f\colon \beta T' \to \beta T$ soit injective, il suffit que pour tout couple a', b' d'éléments de T' tels que $a' \prec\!\!\prec b'$, il existe $a, b \in T$ tels que $a \prec\!\!\prec b$ et $f(a) = a', f(b) = b'$.

Soient $\mathfrak{x}_1$ et $\mathfrak{x}_2$ deux c-r-idéaux maximaux de T' distincts. Soit a' un élément de $\mathfrak{x}_1$ non contenu dans $\mathfrak{x}_2$; soit b' un c-r-voisinage de a' dans $\mathfrak{x}_1$. D'après l'hypothèse, il existe a et b dans T tels que $a \prec\!\!\prec b$ et $f(a) = a', f(b) = b'$. L'élément a appartient à $\beta f(\mathfrak{x}_1)$, mais pas à $\beta f(\mathfrak{x}_2)$. Donc $\beta f(\mathfrak{x}_1) \neq \beta f(\mathfrak{x}_2)$.

COROLLAIRE . - βf est injetive si f est surjective et si la condition (I) suivante est vérifiée:

(I) Pour tout $a, b \in T$, $f(a)^{\perp} \vee f(b) = 1$ entraîne $a^{\perp} \vee b = 1$.

En effet, soient a' et b' deux éléments de T' tels que $a' \prec b'$. Puisque f est surjective, il existe $a, b \in T$ tels que $f(a) = a', f(b) = b'$. Donc $1 = (a')^{\perp} \vee b' = f(a)^{\perp} \vee f(b)$ ce qui entraîne $a^{\perp} \vee b = 1$ d'après la condition (I); donc $a \prec b$. On en déduit que si $(c'_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale dans T', il existe une chaîne normale $(c_r)_{r \in Q}$ in T telle que $f(c_r) = c'_r$ pour tout $r \in Q$. Cela entraîne que la condition suffisante de la proposition II.3.6 est vérifiée.

II.3.7 EXEMPLE. - Soit T un treillis distributif pseudo-complémenté et soit u un élément de T. Soit $T' = \{t \in T; t \leq u\}$. Alors T' est aussi un treillis distributif pseudo-complémenté. L'application $g\colon T \to T'$ défini par $g(t) = t \wedge u$ quelque soit $t \in T$, est un morphisme surjectif. L' application $\beta g\colon \beta T' \to \beta T$ est surjective si, et seulement si, u n'admet aucun c-r-voisinage différent de 1, comme le montre la proposition II.3.5. En particulier, si $u^{\perp\perp} = 1$, βg est surjective. Si la propriété (I') suivante est vérifiée:

$$(\mathrm{I}') \qquad \text{pour tout } \; a, b \in T, \; a^{\perp} \vee b \geq u \; \text{ entraîne } \; a^{\perp} \vee b = 1,$$

alors βg est injective d'après le corollaire de II.3.6. De plus, $u^{\perp\perp} \vee 0 \geq u$ entraîne $u^{\perp\perp} = u^{\perp\perp} \vee 0 = 1$ lorsque (I') est vérifiée. Donc, si (I') est vérifiée, $\beta g\colon \beta T' \to \beta T$ est un homéomorphisme.

II.3.8 EXEMPLE. - Soit z un élément d'un treillis de Brouwer complet T. Soit $T' = \{t \in t; z \leq t\}$. T' est aussi un treillis de Brouwer. L'application $h\colon T \to T'$ définie par $h(t) = t \vee z$ est un morphisme surjectif. D'après II.3.5, $\beta h\colon \beta T' \to \beta T$ est surjectif si, et seulemet si, z n'est c-r-voisinage d'aucun élément a différent de 0.

II.4. Propriétés de l'espace de Stone-Čech-Isbell.

Soit $\mathcal{B}$ un treillis de Boole. Tout treillis de Boole est distributif et pseudo-complémenté. Tout idéal de $\mathcal{B}$ est un c-r-idéal. Par conséquent, l'espace $\beta\mathcal{B}$ des c-r-idéaux maximaux coïncide avex l'espace de Stone des idéaux maximaux de $\mathcal{B}$.

Considérons maintenant un treillis distributif pseudo-complémenté T. Désignons par σT l'éspace de Stone des idéaux maximaux du treillis de Boole $\mathcal{B}$ des pseudo-compléments dans T.

II.4.1 PROPOSITION. - L'application $t \mapsto q(t) = t^{\perp\perp}$ est un morphisme de T sur $\mathcal{B}$. Elle induit une application continue $\beta q\colon \sigma T \to \beta T$. Cette application est surjective; elle est un homéomorphisme si, et seulement si, T est un treillis de Stone.

Démonstration. Il est clair que l'application $q\colon T \to \mathcal{B}$ est un morphisme (cf. le théorème de Glivenko I.1.3). La restriction de q sur $\mathcal{B}$ est bijective. D'après le corollaire 1 de II.3.5, l'application βq est donc surjective.

Soit $\mathfrak{x}$ un c-r-idéal de T. D'après (P'4), $\mathfrak{x} \cap \mathcal{B}$ est un idéal du treillis de Boole $\mathcal{B}$. Par conséquent, $\mathfrak{x} \cap \mathcal{B}$ est contenu dans au moins un idéal maximal de $\mathcal{B}$. Si $\mathfrak{y}$ est un idéal maximal de de $\mathcal{B}$ cotenant $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} \cap \mathcal{B}$, où $\mathfrak{x}$ est un c-r-idéal maximal de T, alors $\beta q(\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}$. Par conséquent, βq est est injective si, et seulement si, pour tout c-r-idéal maximal $\mathfrak{x}$ de T, $\mathfrak{x} \cap \mathcal{B}$ est contenu dans exactement un idéal maximal de de $\mathcal{B}$. Tout idéal propre d'un treillis de Boole étant l'intersection d'une famille d'idéaux maximaux, cette dernière condition signifie que $\mathfrak{x} \cap \mathcal{B}$ est un idéal maximal de $\mathcal{B}$ pour tout c-r-idéal maximal $\mathfrak{x}$ de T.

Si T est un treillis de Stone, $a \prec\!\!\prec a$ pour tout $a \in \mathcal{B}$; par conséquent, $a \in \mathfrak{x}$ ou $a^{\perp} \in \mathfrak{x}$ pour tout c-r-idéal maximal $\mathfrak{x}$ de T, ce qui entraîne que $\mathfrak{x} \cap \mathcal{B}$ est un idéal maximal de $\mathcal{B}$ quel que soit $\mathfrak{x} \in \beta T$. Donc βq est injective.

Inversement, si $\mathfrak{x} \cap \mathcal{B}$ est un iéal maximal de $\mathcal{B}$ pour tout c-r-idéal maximal $\mathfrak{x}$ de T, alors quel que soit $a \in \mathcal{B}$, $a \in \mathfrak{x}$ ou $a^{\perp} \in \mathfrak{x}$ pour tout $\mathfrak{x} \in \beta T$; donc βT est la réunion de deux ouverts dsjoints $Z_\beta(a)$ et $Z_\beta(a^\perp)$ quel que soit $a \in \mathcal{B}$. D'après II.2.5, cela entraîne que $\mathcal{D} = \mathcal{B}$, c'est à dire que T est un treillis de Stone. $\square$

Soit T un treillis distributif e pseudo-complémenté. Si x est un élément premier de T, l'idéal principal $\{t \in T; t \leq x\}$ est un idéal premier. Par conséquent, le plus grand c-r-idéal $k(x)$ majoré par x est un c-r-idéal maximal d'après II.1.9.

II.4.2 PROPOSITION. - Soit X un espace d'éléments premiers d'un treillis distributif pseudo-complémenté T. L'application $x \mapsto k(x)$ de X dans βT est continue. Si $\bigwedge_{x \in X} x = 0$, l'image $k(X)$ est une partie partout dense de βT.

Démonstration. Soir $x \in X$ et soit U un voisinage de $k(x)$ dans βT. On peut supposer que $U = Z_\beta(a)$ pour un certain élément a de T. Soit b un c-r-voisinage de a, contenu dans $k(x)$. L'ensemble $S_X(b^\perp)$ des éléments $y \in X$ tels que $b^\perp \not\leq y$, est un ouvert de X. Puisque b appartient à $k(x)$, on a $b^\perp \not\leq x$, c'est à dire que $S_X(b^\perp)$ est un voisinage de x. De plus, $S_X(b^\perp)$ est contenu dans $k^{-1}(U)$; car $b \leq y$ pour tout $y \in S_X(b^\perp)$ et par suite $a \in k(y)$ pour tout $y \in S_X(b^\perp)$. – La deuxième assertion est évidente. $\square$

Maintenent nous sommes prêtes à démontrer la liaison entre le compactifé de Stone-Čech d'un espace topologique X et l'espace de Stone-Čech-Isbell d'un treillis distributif pseud-comlémenté T.

Soit X un espace topologique et $\mathcal{O}_X$ le treillis des ouverts des X. Pour tout $x \in X$, soir $u(x)$ le plus grand ouvert de X ne contenant pas x. Alors $u(x)$ est un élément premier du treillis $\mathcal{O}_X$. Soit $u(X)$ l'espace des éléments premiers de $\mathcal{O}_X$ de la forme $u(x)$, $x \in X$. La topologie sur $u(X)$ étant la topologie de Zariski, tout ouvert V de $u(X)$ est de la forme suivante: Il y a un ouvert U de X tel que V est l'ensemble des $u(x)$ tels que $U \not\subseteq u(x)$, c'est à dire que $V = u(U)$. Par conséquent, $x \mapsto u(x)$ est une application continue de X sur $u(X)$.

D'après II.4.2, nous avons une application continue k de $u(X)$ dans l'espace de Stone-Čech-Isbell $\beta\mathcal{O}_X$. L'image $ku(X))$ est partout dense dans $\beta\mathcal{O}_X$, puisque $\bigcap_{x \in X} u(x) = \emptyset$. Posons $\kappa = k \circ u$.

II.4.3 THEOREME. - Soit φ: $X \to K$ une application continue d'un espace topologique X dans un espace topologique compact K. Alors il existe une unique application continue $\overline{\varphi}$: $\beta\mathcal{O}_X \to K$ tel que $\varphi = \overline{\varphi} \circ \kappa$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \beta\mathcal{O}_X \arrow[d, "\overline{\varphi}"] \\
 & K
\end{tikzcd}$$

En d'autres termes, $\beta\mathcal{O}_X$ est un compactifié de Stone-Čech de X.

Démonstration. L'unicité de $\overline{\varphi}$ est une conséquenmce immédiate du fait que $\kappa(X)$ est partout dense dans $\beta\mathcal{O}_X$. Il suffit donc de démontrer l'existence de $\overline{\varphi}$.

Soit $\mathfrak{x}$ un c-r-idéal maximal de $\mathcal{O}_X$. Soit $\Phi(\mathfrak{x})$ l'ensemble des ouverts U de K tels que $\varphi^{-1}(U) \in \mathfrak{x}$. Alors $\Phi(\mathfrak{x})$ est un idéal d'ouverts de K. Puisque $K \notin \Phi(\mathfrak{x})$ et puisque K est compact, $\Phi(\mathfrak{x})$ n'est pas un recouvrement de K. Il existe donc $x \in K$ tel que x n'appartienne à aucun des ouverts $U \in \Phi(\mathfrak{x})$. Soit y un élément de K différent de x. Puisque K est un espace normal, il y a un voisinage ouvert U de x, qui admet un c-r-voisinage V tel que $y \notin \overline{V}$. Il s'ensuit que $\mathcal{O}_\varphi(V) = \varphi^{-1}(V)$ est un c-r-voisinage de $\mathcal{O}_\varphi(U) = \varphi^{-1}(U)$ tel que $\varphi^{-1}(U) \notin \mathfrak{x}$. Puisque $\mathfrak{x}$ est un c-r-idéal maximal, on a $\varphi^{-1}(V)^\perp \in \mathfrak{x}$ d'après II.1.9; donc $\varphi^{-1}(V)^\perp \in \mathfrak{x}$. Par conséquent, x appartient à un ouvert $V^\perp \in \Phi(\mathfrak{x})$. Ainsi nous avons démontré qu'il y a un seul point x dans K tel que $x \notin \bigcup_{U\in\Phi(\mathfrak{x})} U$. Posons $\overline{\varphi}(\mathfrak{x}) = x$.

Ainsi nous avons défini une application $\overline{\varphi}\colon \beta\mathcal{O}_X \to K$. Notons que $\overline{\varphi} \circ \kappa = \varphi$; car si $x \in X$, alors $x \notin u(x)$, donc $x \notin V$ pour tout $V \in k \circ u(x) = \kappa(x)$; par conséquent, $\varphi(x) \notin U$ pour tout ouvert U de K tel que $U \in \Phi(\kappa(x))$, c'est à dire que $\varphi(x) = \overline{\varphi}(\kappa(x))$.

$\overline{\varphi}$ est continue: Prenons $\mathfrak{x} \in \beta\mathcal{O}_X$. Soit V un voisinage de $\overline{\varphi}(\mathfrak{x})$. Soient U et U_1 des voisinages de $\overline{\varphi}(\mathfrak{x})$ tels que $U_1 \lll U \lll V$. Comme ci-dessus on montre que $\varphi^{-1}(U^\perp) \in \mathfrak{x}$. L'ouvert $W = Z_\beta(\varphi^{-1}(U^\perp))$ est un voisinage de $\mathfrak{x}$. Si $\varphi^{-1}(U^\perp) \in \mathfrak{y}$, alors $\overline{\varphi}(\mathfrak{y}) \notin U^\perp$ d'après la définition de $\overline{\varphi}$; donc $\overline{\varphi}(W) \subseteq K \setminus U^\perp \subseteq V$. Ainsi nous avons démontré la continuité de $\overline{\varphi}$. □

$\mathcal{O}$ est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés; β est un foncteur de la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés dans la catégorie des espaces compacts. Par conséquent, le foncteur composé $\overline{\beta} = \beta\mathcal{O}$ est im foncteur (covariant) de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des espaces compacts. Le théorème II.4.3 montre que $\overline{\beta}$ est une reflection.

La proposition suivante donne un autre lien entre l'espace de Stone-Čech-Isbell et le compactifié de Stone-Čech.

II.4.4 PROPOSITION. - Soit T un treillis distributif pseudo-complémenté complet qui admet un espace X d'éléments premiers vérifiant les deux conditions suivantes:

(i) $\bigwedge_{x\in X} x = 0$.

(ii) Pour tout élément $t \neq 1$ de T, il existe $x \in X$ tel que $t \leq x$.

Alors l'application $x \mapsto k(x)$ de X dans βX est une compactification de Stone-Čech de X.

Démonstration. L'application $a \mapsto S_X(a)$ est un morphisme de T dans $\mathcal{O}_X$. Elle induit une application continue $\varphi = \beta S_X$ de $\beta\mathcal{O}_X$ dans βT. En vertu de (i) et I.2.6a, $a \mapsto S_X(a)$ est une bijection entre les pseudo-compléments de T et les ouverts réguliers de X. D'après le corollaire 1 de II.3.5, φ est donc surjective. S_X est surjective et d'après l'hypothèse (ii),

$$S_X(a)^\perp \vee S_X(b) = S_X(a^\perp \vee b) = 1 \text{ entraîne } a^\perp \vee b = 1.$$

D'après le corollaire de II.3.6, φ est donc aussi injective. En utilisant les définitions des applications u, κ, φ on démontre facilement que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "u"'] & \beta\mathcal{O}_X \arrow[dl, "\varphi"] \\ \beta T & \end{tikzcd}$$

□

En vertu de I.3.5, l'espace ξT de tous les éléments premiers d'un treillis algébrique distributif complet T vérifie les hypothèses (i) et (ii) de la proposition précédente. On a donc:

COROLLAIRE 1. - Si T est un treillis algébrique distributif complet, l'application $x \mapsto k(x)$ de l'espace ξT de tous les éléments premiers de T dans l'espace compact βT est une compactification de Stone-Čech.

Ce corollaire montre que βT est dans un sens le meilleur espace compact que l'on puisse associer à T.

Si T est un treillis algébrique distributif complet plat, tout élément premier de T est maximal d'apr'es I.6.5. On a donc:

COROLLAIRE 2. - Si T est un treillis algébrique distributif complet plat, βT est un compactifié de Stone-Čech de l'espace μT des éléments maximaux de T.

D'après I.3.5, les hypothèses de II.4.4 sont aussi vérifiées si X est l'espace des éléments maximaux d'un treillis distributif complet μ-simi-simple dont le plus grand élément est compact. Donc:

COROLLAIRE 3. - Soit T un treillis distributif complet μ-semi-simple, dont le plus grand élément est compact. Alors $x \mapsto k(x)$ est une compactification de Stone-Čech de μT.

Considérons maintenant un treillis algébrique distributif complet T.

II.4.5 DEFINITION. - Pour un c-r-idéal maximal $\mathfrak{x}$ de T soit

$$\gamma(\mathfrak{x}) = \bigvee_{a \in \mathfrak{x}} a;$$

$\gamma(\mathfrak{x})$ est appellé *élément absolument germinal* associé à $\mathfrak{x}$.

II.4.6 PROPRIETES. - Soit $\mathfrak{x}$ und c-r-idéal maximal d'un treillis algébrique distributif complet T.

(a) Si $\gamma(\mathfrak{x}) < 1$, il existe un élément premier x de T tel que $\mathfrak{x} = k(x)$.

(b) Si x est un élément premier de T tel que $\gamma(\mathfrak{x}) \leq x$, alors $\gamma(\mathfrak{x}) \leq p$ pour tout élément premier p tel que $p \leq x$.

(c) $\gamma(\mathfrak{x})$ est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers minimaux.

(d) Si le plus grand élément 1 de T est compact, $\gamma(\mathfrak{x}) < 1$ et il existe un élément maximal x de T tel que $\mathfrak{x} = k(x)$. Si cet élément est x est unique, $\gamma(\mathfrak{x})$ est le plus petit élément x-primaire de T et $\gamma(\mathfrak{x}) = \gamma(x)$, l'idéal germinal associé à x.

Démonstration. (a) Tout élément de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers. Si $\mathfrak{x} < 1$, il existe un élément premier $x < 1$ majorant $\gamma(\mathfrak{x})$. Il s'ensuit que $\mathfrak{x} \subseteq k(x)$: puisque $\mathfrak{x}$ et $k(\mathfrak{x})$ sont des c-r-idéaux maximaux, on a donc $\mathfrak{x} = k(x)$.

(b) Supposons que $\gamma(\mathfrak{x}) \leq x$, où x est un élément premier. Soit k un élément compact de T tel que $k \leq \gamma(\mathfrak{x})$. Alors $k \in \mathfrak{x}$. Il ya donc un c-r-voisinage b de k, appartenant à $\mathfrak{x}$. Puisque $k^{\perp} \vee b = 1$, et $b \leq x$, on a nécessairement $k^{\perp} \not\leq p$ pour tout élément $p \leq x$. Si p est de plus premier, on en tire $k \leq p$. Ceci étant vrai pour tout élément compact $k \leq \gamma(\mathfrak{x})$, on a aussi $\gamma(\mathfrak{x}) \leq p$.

(c) est une conséquence immédiate de (b), puisque tout élément de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers.

(d) Supposons qu 1 soit un élément compact. Puisque $\mathfrak{x}$ est un idéal propre de T, il ne contient pas 1 et par suite $\gamma(\mathfrak{x}) < 1$. D'après I.3.3, il y a un élément maximal $x \geq \gamma(\mathfrak{x})$; donc $\mathfrak{x} = k(x)$. Si cet élément maximal x est unique, alors $\gamma(\mathfrak{x})$ est x-primaire. D'après (b) et (c), $\mathfrak{x}$ est la borne inférieure de la famille des éléments premiers minimaux majorés par x. □

II.4.7 PROPOSITION. - Soit T un treillis algébrique distributif complet projetable. Alors $x \mapsto k(x)$ est un homéo morphisme de l'espace πT des éléments premiers minimaux de T sur uns sous-espace ouvert de βT. Pour tout $p \in \pi T$, $p = \gamma k(p)$. Pour tout élément compact c de T, $k(S_{\pi T}(c)) = Z_{\beta T}(c^{\perp})$. Les ensembles de la forme $S_{\pi T}(c)$, c compact, forment une base de la topologie de πT et ils sont compacts.

Démonstration. Puisque T est projetable, on a $c^{\perp} \vee c^{\perp\perp} = 1$ donc $c^{\perp\perp} \prec\!\!\prec c^{\perp\perp}$ pour tout élément compact c de T. Soit p un élément premier minimal de T. Si c est un élément compact tel que $c \leq p$, alors $c^{\perp\perp} \leq p$ d'après le corollaire 3 de I.4.4. Donc $c^{\perp\perp} \in k(p)$. Par conséquent $p \in \gamma k(p)$. Ceci montre aussi que $p \mapsto k(p)$ est une application injective de T dans βT.

Soit c un élément compact de T. On a $k(S_{\pi T}(c)) = Z_{\beta}(c^{\perp})$. En effet, si $c \not\leq p \in \pi T$, alors $c^{\perp} \leq p$ et par suite $c^{\perp} \in k(p)$ puisque $c^{\perp} \prec\!\!\prec c^{\perp}$. Soit réciproquement $\mathfrak{x}$ un c-r-idéal maximal contenant $c^{\perp}$. Alors c n'appartient pas à $\mathfrak{x}$. Il s'ensuit que $c \not\leq \gamma(\mathfrak{x})$. D'après II.4.6c, il existe un élément premier minimal p tel que $\gamma(\mathfrak{x}) \leq p$ et $c \not\leq p$. Donc $\mathfrak{x} = k(p)$ et $p \in S_{\pi T}(c)$.

Puisque les ensembles de la forme $S_{\pi T}(c)$, c compact, forment une base de la topologie de πT et puisque $Z_{\beta T}(c^{\perp})$ est une partie ouverte de βT, l'application $p \mapsto k(p)$ est ouverte. Puisque cette application est continue d'après II.4.2 et injective, πT est homéomorphe à son image. D'après la proposition II.2.5, $Z_{\beta}(c^{\perp})$ est compact. Donc $S_{piT}(c)$ est aussi compact. D'après le corollaire 4 de I.4.4, les ensembles de la forme $S_{\pi T}(c)$, c compact, forment une base de la topologie de πT. □

Utilisant I.6.5, on obtient pour les treillis plats la proposition suivante:

COROLLAIRE. - Soit T un treillis algébrique distributif complet plat. Alors $x \mapsto k(x)$ est un homéomorphisme de l'espace μT des éléments maximaux de T sur un sous-espace ouvert de βT. Pour tout $x \in \mu T$, $x = \gamma k(x)$. Les ensembles de la forme $S_{\mu T}(c)$, c compact, sont compacts et ils forment une base de la topologie de μT.

CHAPTER III

REPRESENTATION DE GROUPES ET D'ANNEAUX RETICULES. APPLICATIONS

III.1. Annéloïdes réticulés

Dans cette section, nous définissons la notion d'annéloïde réticulé qui généralise les notions de groupe réticulé et d'anneau réticulé. Nous démontrons quelque propriétés d'annéloïdes réticulés, utilisant les propriétés correspondantes des groupes et anneaux réticulés que l'on trouve par exemple dans L. Fuchs [15] et P. Conrad [9].

Rappelons qu'un *groupe réticulé* est un groupe A muni d'une structure de $\vee$-demi-treillis telle que pour tout a, b, c dans A,

$$(a \vee b) + c = (a + c) \vee (b + c) \quad \text{et} \quad c + (a \vee b) = (c + a) \vee (c + b).$$

(Nous noterons la loi de groupe additivement bien que nous ne supposons pas que le groupe soit commutatif.) Dans un groupe réticulé A, on définit

$$a \wedge b = -(-a \vee -b) \quad \text{quelque soient } a, b \in A;$$

par rapport à $\vee$ et $\wedge$, A est un treillis et on a pour tout a, b, c dans A,

$$(a \wedge b) + c = (a + c) \wedge (b + c) \quad \text{et} \quad c + (a \wedge b) = (c + a) \wedge (c + b).$$

Pour tout élément a d'un groupe réticulé A, on note

$$a^+ = a \vee 0\ ,\ a^- = -a \vee 0\ ,\ |a| = a \vee -a\ ,$$

et on a

$$a = a^+ - a^-\ ,\ |a| = a^+ + a^-\ .$$

On désigne par A^+ l'ensemble des éléments de A tels que $a \geq 0$; ces éléments sont appelés *positifs*. Deux éléments a et b sont dits *orthogonaux* si $|a| \wedge |b| = 0$, et deux parties M et N des A sont dites *orthogonales* si tout élément de M et orthogonal à tout élément de N.

III.1.1 DEFINITION. - On appelle *annéloïde réticulé* tout groupe réticulé A muni d'une multiplication $(a, b) \mapsto ab$, qui est distributif par rapport à l'addition et telle que

(A1) $$a, b \in A^+ \text{ entraîne } ab \in A^+.$$

Un *annéloïde totalement ordonné* est un annéloïde réticulé dont l'ordre est total.

Rappelons qu'un *anneau réticulé* est un annéloïde réticulé dont l'addition est commutatif et dont la multiplcation est assiciative.

Un groupe réticulé A peut être considéré comme un annéloïde réticulé en définissant la multiplication par

$$ab = 0 \text{ quels que soient } a, b \text{ dans } A.$$

Un tel annéloïde sera appelé *zéro annéloïde*. En général, nous ne ferons pas de distinction entre groupe réticulé et zéro annéloïde réticulé. Pour un annéloïde quelconque A, nous désignerons par A_0 le groupe réticulé additif sous-jacent.

Rappelons qu'une classe d'algèbres universelles (de même type) est appelée une *variété* si elle est stable pour la formation de produits, de sous-algèbres et d'algèbres quotient. D'après un théorème de Birkhoff [4, p. 153], une classe d'algèbres universelles est une variété si, et seulement si, elle peut être définie par des identités. Les groupes réticulés et les anneaux réticulés respectivement forment des variétés. Puisque l'axiome (A1) équivaut à

(A1′) $$(a \vee 0)(b \vee 0) \wedge 0 = 0 \text{ quels que soient } a, b \in A,$$

les annéloïdes réticulés forment aussi une variété. Nous utilisons les notions de produit d'annéloïdes réticulés, de sous- annéloïde réticulé, d'annéloïde réticulé quotient, d'homomorphisme et d'isomorphisme d'annéloïdes réticulés conformément aux notions générales correspondantes de la théorie des algèbres universelles.

On sait que le noyau d'un homomorphisme de groupes réticulés est un sous-groupe distingué sous-treillis convexe. Inversement, si i est un sous-groupe distingué sous-treillis convexe d'un groupe réticulé A, le groupe quotient A/i possède une unique structure de groupe réticulé telle que l'application canonique de A sur A/i soit un homomorphisme de groupes réticulés.

III.1.2 DEFINITION. - Une partie i d'un annéloïde réticulé A est appelée *idéal*, si i est un sous-groupe distigué du groupe additif A, si i est un sous-treillis convexe du treillis A et si pour tout $a \in A$ et tout $c \in i$, ac et ca appartiennent aussi à i.

On vérifie facilement que $0a = a0 = 0$ pour tout élément a d'un annéloïde réticulé A. Il s'ensuit que le noyau de tout homomorphisme d'annéloïdes réticulés est un idéal. Inversement, si i est un idéal d'un annéloïde réticulé A, le groupe réticulé quotient A/i devient un annéloïde réticulé si l'on définit une multiplication sur A/i par $(a+i)(b+i) = ab + i$. Ainsi nous avons:

III.1.3 PROPOSITION. - *Soit A un annéloïde réticulé. Le noyau de tout homomorphisme de A est un idéal de A. Réciproquement, si i est un idéal de A, le groupe réticulé quotient A/i possède une unique structure d'annéloïde réticulé telle que l'application canonique de A sur A/i devienne un homomorphisme.*

III.1.4 PROPRIETE. - *L'ensemble $\mathcal{I}(A)$ des idéaux d'un annéloïde réticulé A est un treillis algébrique distributif, sous-treillis complet du treillis $\mathcal{I}(A_0)$ des idéaux du groupe réticulé A_0 sous-jacent de A.*

En effet, puisque l'intersection et la somme d'une famille d'idéaux de A est encore un idéal de A, $\mathcal{I}(A)$ est un sous-treillis algébrique de $\mathcal{I}(A_0)$. Puisque $\mathcal{I}(A_0)$ est distributif, il en est de même de $\mathcal{I}(A)$.

III.1.5. - Pour toute partie M de A, soit $\langle M\rangle$ l'idéal de A engendré par M. On note $\langle a\rangle$ au lieu de $\langle\{a\}\rangle$. On a:

(1.5a) $$\langle a\rangle = \langle |a|\rangle,$$

(1.5b) $$\langle a\rangle + \langle b\rangle = \langle |a| + |b|\rangle$$

quels que soient a, b dans A, car ces mêmes égalités sont vraies pour les idéaux d'un groupe réticulé. Donc tout idéal engendré par un nombre fini fini d'éléments est principal et les éléments compact du treillis $\mathcal{I}(A)$ sont les idéaux principaux.

III.1.6. - Un idéal x d'un annéloïde réticulé A est dit *irréductible* si x est un élément irréductible du treillis $\mathcal{I}(A)$. Puisque $\mathcal{I}(A)$ est distributif, tout élément irréductible de $\mathcal{I}(A)$ est premier. Un annéloïde réticulé A est dit irréductible, si l'idéal $\{0\}$ est irréductible.

On dit qu'un idéal x est une *valeur* d'un élément a de A, si x est une valeur de $\langle a\rangle$ dans le treillis algébrique $\mathcal{I}(A)$, c'est à dire que x est maximal dans la famille des idéaux de A ne contenant pas a. Remarquons que toute valeur est un idéal irréductible.

III.1.7 PROPRIETE. - *Le treillis $\mathcal{I}(A)$ des idéaux d'un annéloïde réticulé A est un treillis de Brouwer $\cap$-distributif général. Tout idéal de A est l'intersection d'une famille d'idéaux irrédictibles.*

Compte tenu de I.3.5, cette propriété est une conséquence de III.1.4.

Tout treillis de Brouwer est pseudo-complémenté. Donc $\mathcal{I}(A)$ est pseudo-complémenté. On désigne par $i^{\perp}$ le pseudo-complément d'un idéal quelconque i de A. Si M est une partie de A, on note $M^{\perp}$ au lieu de $\langle M\rangle^{\perp}$, et si a est un élément de A, on note $a^{\perp}$ au lieu de $\langle a\rangle^{\perp}$.

III.1.8 DEFINITION. - Pour toute partie M d'un annéloïde réticulé A, $M^{\perp}$ est appelé la *polaire* de M, et $M^{\perp\perp}$ la *bipolaire*. Deux éléments a et b de A sont dits *disjoints* si $a \in b^{\perp}$, et deux parties M et N de A sont dits disjointes si $N \subseteq M^{\perp}$.

D'après le théorème de Glivenko I.1.3, nous avons:

III.1.9 PROPOSITION. - *Soit A un annéloïde réticulé. Pour tout partie M de A, on a $M^{\perp\perp\perp} = M^{\perp}$, et $i \mapsto i^{\perp\perp}$ est une fermeture dans $\mathcal{I}(A)$. Les polaires forment un treillis de Boole complet $\mathcal{B}(A)$, image homomorphe du treillis $\mathcal{I}(A)$.*

La borne inférieure dans $\mathcal{B}(A)$ est l'intersection. Nous désignerons par $p \curlyvee q$ la borne supérieure dans $\mathcal{B}(A)$ de deux polaires p et q. On a:

(1.9a) $$p \curlyvee q = (p+q)^{\perp\perp}.$$

D'apres III.1.5 nous avons:

(1.9b) $$a^{\perp} = |a|^{\perp}\ ,\ a^{\perp\perp} = |a|^{\perp\perp},$$

(1.9a) $$a^{\perp\perp} \curlyvee b^{\perp\perp} = (|a| + |b|)^{\perp\perp} = (|a| \vee |b|)^{\perp\perp}.$$

quelque soient a, b dans A.

Un annéloïde réticulé A est la *somme directe* de deux idéaux i et j si $i+j=A$ et si $i \cap j=\{0\}$. On appelle *facteur direct* de A tout idéal i pour lequel il existe un idéal j tel que A est la somme directe de i et j. Puisque le treillis des idéaux de A est distributif et pseudo-complémenté, on a:

III.1.10 PROPOSITION. - *Soit A un annéloïde réticulé. Pour un idéal i de A les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) $i+i^{\perp}=A$;
(b) $i=i^{\perp\perp}$ et $i+i^{\perp}=A$;
(c) A est la somme directe de i et $i\perp$;
(d) i est un facteur directe de A;
(e) i admet un comlément dans le treillis $\mathcal{I}(A)$.

Les facteurs directs de A forment un treillis de Boole $\mathcal{D}(A)$, sous-treillis de $\mathcal{I}(A)$ et sous-treillis de Boole de $\mathcal{B}(A)$.

III.1.11 DEFINITION. - On appelle *f-annéloïde* tout annéloïde réticulé A vérifiant les conditions suivantes:

(A2) $a \wedge b=0$ et $c \geq 0$ entraîne $a \wedge(c+b-c)=0$;
(A3) $a \wedge b=0$ et $c \geq 0$ entraîne $a \wedge bc=a \wedge cb=0$.

Puisqu'un groupe réticulé est dit *représentable* s'il vérifie (A2) et puiqu'un anneau réticulé vérifiant (A3) est appelé *f-anneau*, la notion de f-annéloïde est la généralisation logique des notions de groupe réticulé représentable et de f-anneau. Les propriétés (A2) et (A3) sont équivalentes aux propriétés (A2') et (A3') suivantes:

(A2') $a^{+} \wedge(c^{+}+a^{-}-c^{+})=0$ quels que soient a, c dans A;
(A3') $a^{+} \wedge c^{+}a^{-}=a^{+} \wedge a^{-}c^{+}=0$ quels que soient a, c dans A.

Par conséquent, les f-annéloïdes forment une variété d'annéloïdes réticulés. Tout annéloïde totalement ordonné est un f-annéloïde. Nous verrons que la variété des f-annéloïdes est engendré par les annéloïdes totalement ordonnés.

Soit M une partie non vide d'un annéloïde réticulé A. La polaire $M^{\perp}$ est contenu dans l'orthogonal M' de M. Car si b est un élément de M et a un élément de A tel que $|a| \wedge|b|>0$, alors $|a| \wedge|b|$ est un élément non nul appartenant à $\langle M\rangle \cap\langle a\rangle$; donc a n'appartient pas à $M^{\perp}$. On peut caractériser les f-annéloïdes de la manière suivante:

III.1.12 PROPOSITION. - *Un annéloïde réticulé A est un f-annéloïde si, et seulement si, l'orthogonal de toute partie M de A est un idéal.*

Démonstration. Soit A un f-annéloïde. Pour tout élément a de A, l'orthogonal a' est un idéal d'après (A2) et (A3). Puisque l'orthogonal M' de M est l'intersection des a' $(a \in M)$, M' est aussi un idéal. Inversement, si A est un annéloïde réticulé tel que l'orthogonal de tout élément a de A est un idéal, les propriétés (A2) et (A3) sont vérifiées. $\square$

Ainsi, dans un f-annéloïde A, la polaire $M^{\perp}$ d'une partie quelconque M de A coïncide avec l'orthogonal M' de M.

III.1.13 PROPOSITION. - *Un idéal x d'un f-annéloïde A est irréductible si, et seulement si, A/x est totalement ordonné.*

Démonstration. Si A/x est totalement ordonné, les idéaux de A/x forment une chaîne. Donc x ne peut pas être représenté comme l'intersection de deux idéaux le contenant proprement. Soit inversement x irréductible. L'annéloïde réticulé quotient A/x est un f-annéloïde. Pour tout élément $\overline{a}$ de A/x, l'orthogonal et le biorthogonal de $\overline{a}$ sont deux idéaux de A/x, dont l'intersection est réduite à zéro. Donc $\overline{a}$ ou son orthogonal est zéro quel que soit $\overline{a}$ dans A/x, ce qui entraîne que A/x est totalement ordonné. □

Corollaire 1. - *Tout idéal d'un f-annéloïde contenant un idéal irréductible est lui-même irréductible.*

Corollaire 2. - *Pour un annéloïde réticulé A, les propriétés suivantes sont équvalentes:*

a) A est un f-annéloïde.
b) A/x est totalement ordonné pour tout idéal irréductible x de A.
c) A est produit sous-directe d'annéloïdes totalement ordonnés.

III.1.14 PROPOSITION. - *Le treillis $\mathcal{I}(A)$ des idéaux d'un f-annéloïde est arithmétique.*

Démonstration. D'après III.1.5, les éléments compacts de $\mathcal{I}(A)$ sont les idéaux principaux. Montrons que l'intersection de deux idéaux principaux $\langle a\rangle$ et $\langle b\rangle$ est encore principal. Remarquons d'abord que $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle |a| \wedge |b|\rangle$ dans tout annéloïde totalement ordonné. Si f est un homomorphisme surjectif d'un annéloïde réticulé A, on a $f(\langle a\rangle) = \langle f(a)\rangle$. Par conséquent, la formule $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle |a| \wedge |b|\rangle$ est valable modulo tout idéal x tel que A/x soit totalement ordonné. Puisque tout idéal est une intersection d'idéaux irréductibles et puisque, dans un f-annéloïde, A/x est totalement ordonné pour tout idéal irréductible x, on a dans un f-annéloíde A, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle |a| \wedge |b|\rangle$, ce qui montre que l'intersection de deux idéaux principaux est principal. □

D'après cette dernière proposition, on peut appliquer les résultats de I.4 à des f-annéloïdes.

Soit A un annéloïde réticulé et X un ensemble d'idéaux irréductibles de A. Puisque tout idéal irréductible est un élément premier du treillis des idéaux de A, on peut munir X d'une topologie comme dans I.2, et nous parlerons de l'espace topologique X d'idéaux irréductibles. Nous désignerons par πA (resp. μA) l'espace des idéaux irréductibles minimaux (resp. maximaux) de A. Nous dirons que A est μ-semi-simple, si l'intersection des idéaux maximaux de A est réduite à zéro.

III.1.15 PROPOSITION. - *Tout espace d'idéaux irréductibles deux à deux non comparables d'un f-annéloïde est séparé.*

Démonstration. Soient x_1 et x_2 deux idéaux irréductibles non comparables d'un f-annéloïde A. Il existe des éléments positifs a_1 et a_2 tels que $a_1 \in x_1$, $a_2 \in x_2$ et $a_1 \notin x_2$, $a_2 \notin x_1$. Soient

$$\overline{a}_1 = a_1 - (a_1 \wedge a_2) \ , \ \overline{a}_2 = a_2 - (a_1 \wedge a_2).$$

Alors $\overline{a}_1 \wedge \overline{a}_2 = 0$ et $\overline{a}_1 \in x_1$, $\overline{a}_2 \in x_2$ et $\overline{a}_1 \notin x_2$, $\overline{a}_2 \notin x_1$. Puisque A est un f-annéloïde, on a:

$$\langle \overline{a}_1 \rangle \cap \langle \overline{a}_2 \rangle = \{0\} \ , \ \langle \overline{a}_1 \rangle \nsubseteq x_2 \ , \ \langle \overline{a}_2 \rangle \nsubseteq x_1.$$

Par conséquent, tout espace X d'idéaux irréductibles deux à deux non comparables est séparé d'après I.2.3f. □

III.2. Faisceaux d'annéloïdes réticulés

En vue des applications, la définition classique de la notion de faisceau nous semble la plus appropriée à nos fins. Nous donnons d'abord cette définition. Evidemment, les faisceaux d'annéloïdes réticiulés ont des propriétés analogues aux propriétés des faisceaux d'anneaux (cf. [13]).

III.2.1 DEFINITION. - Soient X et E deux espaces topologiques et η un homéomorphisme local de E sur X. Soit $E \nabla E$ le sous-espace de l'espace produit $E \times E$, constitué des couples (s,t) tels que $\eta(s) = \eta(t)$. Supposons que pour tout x dans X, la *fibre* $E_x = \eta^{-1}(x)$ porte une structure d'annéloïde réticulé telle que les applications

$$(s,t) \mapsto s + t \ , \ (s,t) \mapsto st \ , \ (s,t) \mapsto s \vee t$$

de $E \nabla E$ dasn E soient continues. Alors le triple $\mathcal{F} = (E, \eta, X)$ est appelé *faisceau d'annéloïdes réticulés sur* X. Si chaque fibre E_x est un groupe réticulé (respectivement un anneau réticulé, un groupe réticulé représentable, un f-anneau, un anneau totalement ordonné, ...) on parle de faisceau de groupes réticulés (respectivement d'anneaux réticulés, de groupes réticulés représentables, de f-anneaux, ...). Un faisceau $\mathcal{F} = (E, \eta, X)$ est dit *séparé*, si E est un espace topologiques séparé.

Si $\mathcal{F} = (E, \eta, X)$ est un faisceau d'annéloïdes réticulés, l'application $t \mapsto -t$ est un homéomorphisme de E sur E, comme dans les faisceaux d'anneaux. Puisque $s \wedge t = -(-s \vee -t)$, on en déduit que $(s,t) \mapsto s \wedge t$ est une application continue de $E \nabla E$ dans E.

III.2.2 DEFINITION. - Soient $\mathcal{F} = (E, \eta, X)$ et $\mathcal{G} = (F, \zeta, Y)$ deux faisceaux d'annéloïdes réticulés. Un *morphisme* de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est un couple $\Phi = (\varphi, \varphi')$où $\varphi \colon X \to UY$ est un application continue et $\varphi' \colon X \nabla F \to E$ une application continue telle que, pour tout $x \in X$, $t \mapsto \varphi'(x,t)$ soit un homomorphisme d'annéloïdes réticulés de $F_{\varphi(x)}$ dans E_x. (Ici $X \nabla F$ désigne le sous-espace de l'espace produit $X \times F$, formé par les couples (x,t) tels que $\varphi(x) = \zeta(t)$.)

Si $\Phi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un moprphisme et si $\Psi = (\psi, \psi')$ est un morphisme de $\mathcal{G}$ dans un faisceaux d'annéloïdes réticulés $\mathcal{H} = (H, \xi, Z)$, on d'efinit $\Psi\Phi = (\chi, \chi')$ par

$$\chi = \psi \circ \varphi \ , \ \chi'(x,t) = \varphi'(x, \psi'(\varphi(x), t))$$

pour tout couple $(x,t) \in X \times H$ tel que $\psi \circ \varphi(x) = \xi(t)$. Alors $\Psi\Phi$ est un morphisme du faisceau $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{H}$. Ainsi nous avons défini une composition de morphismes. Les faisceaux d'annéloïdes réticulés et les morphismes forment une catégorie.

III.2.3. - Soit $\mathcal{F} = (E, \eta, X)$ un faisceau d'annéloïdes réticulés. On appelle *section* de $\mathcal{F}$ toute application continue $\sigma\colon X \to E$ telle que $\eta \circ \sigma = \mathrm{id}_X$ et on désigne par $\Gamma(\mathcal{F})$ l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$.

L'application $x \mapsto 0_x$ où 0_x désigne l'élément zéro de E_x, est une section de $\mathcal{F}$ notée 0. Si deux sections coïncident en un point x de X, elles coïncident même dans un voisinage de x. Il s'ensuit que le *support* de toute section σ, c'est à dire

$$\operatorname{supp} \sigma = \{x \in X; \sigma(x) \neq 0\},$$

est une partie fermée de X. On désigne par $\Gamma_k(\mathcal{F})$ l'ensemble des sections à supports quasi-compacts de $\mathcal{F}$.

Soient $\sigma, \tau \in \Gamma(\mathcal{F})$. Si $*$ désigne l'une des opérations $+, \cdot, \wedge, \vee$, l'application $\sigma * \tau$ de X dans E définie par

$$\sigma * \tau(x) = \sigma(x) * \tau(x) \text{ pour tout } x \in X,$$

est aussi une section de $\mathcal{F}$. Muni des opération $+, \cdot, \wedge, \vee$, $\Gamma(\mathcal{F})$ est un annéloïde réticulé, isomorphe à un sous-annéloïde réticulé du produit des E_x, $x \in X$. Si toutes les fibres E_x sont respectivement des groupes réticulés, des anneaux réticulés, des f-anneaux, des groupes réticulés représentables, des f-annéloïdes, il en est de même de $\Gamma(\mathcal{F})$. On vérifie facilement que, $\Gamma_k(\mathcal{F})$ est un idéal de $\Gamma(\mathcal{F})$.

III.2.4 DEFINITION. - Soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X\rangle$ un faisceau d'annéloïdes réticulés. Soit Y un sous-espace de X, soit $E' = \eta^{-1}(Y)$ et $\eta' = \eta | E'$. Alors $\mathcal{F}|Y = \langle E', \eta', Y\rangle$ est un faisceau d'annéloïdes réticulés, appelé *faisceau sur Y induit par $\mathcal{F}$*. Si $Z \subseteq Y \subseteq X$, il y a un homomorphisme canonique

$$f_Z^Y \colon \Gamma(\mathcal{F}|Y) \to \Gamma(\mathcal{F}|Z)$$

défini par $f_Z^Y(\sigma) = \sigma|Z$ pour tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{F}|Y)$. Si Z est réduit à un seul point x, alors f_x^Y est un homomorphisme de $\Gamma(\mathcal{F}|Y)$ dans E_x. Si $Y = X$ et $Z = \{x\}$, cet homomorphisme de $\Gamma(\mathcal{F})$ dans E_x sera noté simplement f_x.

On dit que le faisceau $\mathcal{F}$ possède la *propriété d'extension*, si $f_x\colon \Gamma(\mathcal{F}) \to E_x$ est surjectif pour tout $x \in X$, c'est à dire si, pour tout $t \in E$, il existe $\sigma \in \Gamma(\mathcal{F})$ tel que $\sigma(\eta(t)) = t$.

Soit (Y_μ) une partition de X. Soit f l'homomorphisme de $\Gamma(\mathcal{F})$ dans $\prod_\mu \Gamma(\mathcal{F}|Y_\mu)$ défini par $\mathrm{pr}_\mu \circ f = f_{Y_\mu}^X$. Cet homomorphisme est injectif. Supposons de plus que les Y_μ sont à la fois ouverts et fermés. Si (σ_μ) est une famille de sections telle que $\sigma_\mu \in \Gamma(\mathcal{F}|Y_\mu)$ quel que soir μ, on peut définir une section σ de $\mathcal{F}$ par

$$\sigma(x) = \sigma_\mu(x) \text{ si } x \in Y_\mu,$$

et on a $f_{Y_\mu}^X(\sigma) = \sigma_\mu$ quel que soit μ. Par conséquent, f est aussi surjectif. Nous avons démontré:

III.2.5 PROPOSITION. - *Soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X\rangle$ un faisceau d'annéloïdes réticulés et (Y_μ) une partition de X en ensembles à la fois ouverts et fermés, Alors $\Gamma(\mathcal{F})$ est isomorphe à $\prod_\mu \Gamma(\mathcal{F}|Y_\mu)$.*

Soit Y une partie à la fois ouverte et fermée de X. D'après III.2.5, $\Gamma(\mathcal{F})$ est isomorphe au produit direct de $\Gamma(\mathcal{F}|Y)$ et de $\Gamma(\mathcal{F}|(X \setminus Y))$. Si l'on identifie $\Gamma(\mathcal{F})$ à ce produit direct, on voit que l'on peut considérer $\Gamma(\mathcal{F}|Y)$ comme sous-annéloïde réticulé de $\Gamma(\mathcal{F})$.

Il est clair qu'une proposition analogue à la proposition III.2.5 est valable pour $\Gamma_k(\mathcal{F})$.

III.2.6 DEFINITION. - Soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ un faisceau d'annéloïdes réticulés et B un sous-annéloïde de $\Gamma(\mathcal{F})$. On dit que B vérifie la *propriété faible de Stone-Weiserstraß* si

1) pour tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{F})$ et tout $x \in X$, il existe $\tau \in B$ tel que $\sigma(x) = \tau(x)$;
2) pour tout $\sigma \in B^+$ et pour tout voisinage U d'un élément quelconque $x \in X$, il existe $\tau \in B$ tel que $\tau(x) \geq \sigma(x)$ et $\operatorname{supp}(\sigma) \subseteq U$.

III.2.7 DEFINITION. - Un élément u d'un annéloïde réticulé A est appelé *unité formelle* si $u \geq 0$ et si u n'est contenu dans aucun idéal propre de A.

Un élément unité est évidemment une unité formelle. Si $\Gamma(\mathcal{F})$ posséde une unité formelle, la propriété faible de Stone-Weiserstraß prend une forme plus simple:

III.2.8 LEMME. - *Si $\Gamma(\mathcal{F})$ posséde une unité formelle u, la condition 2) de la propriété faible de Stone-Weiserstraß peut être remplacée par:*

2') Pour tout $x \in X$ et tout voisinage U de x, il existe $\tau \in B$ tel que $\tau(x) \geq u(x)$ et $\operatorname{supp} \tau \subseteq U$.

Démonstration. Il est clair que 2) est en général plus fort que 2'). Supposons que $\Gamma(\mathcal{F})$ contienne une unité formelle u et que B vérifie 1) et 2'). Soient $\sigma \in B^+$, $x \in X$ et U un voisinage de x. Puisque l'idéal de $\Gamma(\mathcal{F})$ engendré par u est $\Gamma(\mathcal{F})$ tout entier, σ est majoré par une section $\sigma_1 + \cdots + \sigma_n$, où chaque σ_i est un produit fini de sections $\sigma_{ij} \in \Gamma(\mathcal{F})$, $j = 1, \ldots, m_i$, dont au moins une est égal à u. Pour tout σ_{ij} différente de u, choisissons $\tau_{ij} \in B$ tel que $\tau_{ij}(x) \geq u(x)$ et $\operatorname{supp} \tau_{ij} \subseteq U$ selon 2'). Soient τ_i les sections produit obtenues en remplacant σ_{ij} par τ_{ij}; soit $\tau = \tau_1 + \cdots + \tau_n$. Alors $\tau(x) \geq \sigma(x)$ et $\operatorname{supp} \tau \subseteq U$. $\square$

Le lemme III.2.8 montre que la propriété faible de Stone-Weierstraß est plus faible que la propriété de Stone-Weierstraß pour les anneaux abtraits de Dauns et Hofmann [12, p. 152]. Mais pour les annéloïdes réticulés elle a la même conséquence:

III.2.9 PROPOSITION. - *Soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ un faisceau d'annéloïdes réticulés. Soit B un sous-annéloïde réticulé de $\Gamma(\mathcal{F})$ vérifiant la propriété faible de Stone-Weiserstraß. Alors B contient $\Gamma_k(\mathcal{F})$.*

Démonstration. Si σ est une section à support quasi-compact de $\mathcal{F}$, $\sigma^+ = \sigma \vee 0$ et $\sigma^- = -\sigma \vee 0$ sont aussi des sections à supports quasi-compacts et $\sigma = \sigma^- \sigma^-$. Il suffit donc de montrer que tout $\sigma \in \Gamma_k(\mathcal{F})^+$ appartient à B, si B vérifie la propriété faible de Stone-Weiserstraß.

Soit donc σ une section positif de $\mathcal{F}$ à support quasi-compact K. Pour tout $x \in K$ il existe $\sigma_x \in B$ tel que $\sigma_x(x) = \sigma(x)$ d'après 1). Les sections σ_x et σ coïncident sur un certain voisinage U_x de x. D'après 2), il existe $\tau_x \in B$ tel que $\tau_x(x) \geq \sigma_x(x)$ et $\operatorname{supp} \tau_x \subseteq U_x$. Evidemment on peut choisir $\tau_x \geq 0$. Soit $\tau'_x = \tau_x \wedge \sigma_x \in B$. Alors $0 \leq \tau'_x \leq \sigma$. Il existe un voisinage U'_x de x tel que τ'_x et σ coïncident sur U'_x. Puisque K est quasi-compact, il y a un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ dans K tel que $K \subseteq U'_{x_1} \cup \cdots \cup U'_{x_n}$. Soit

$$\tau = \tau'_{x_1} \vee \cdots \vee \tau'_{x_n} \in B.$$

Alors $0 \leq \tau \leq \sigma$; et si x appartient à K, alors $x \in U'_{x_i}$ pour un i, donc $\tau(x) \geq \tau'_{x_i}(x) = \sigma(x)$. Par conséquent, $\tau = \sigma$ et σ appartient à B. □

COROLLAIRE. - *Soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ un faisceau d'annéloïdes réticulés sur un espace quasi-compact X. Alors tout sous-annéloïde réticulé de $\Gamma(\mathcal{F})$, vérifiant la propriété de Stone-Weiserstraß, est égal à $\Gamma(\mathcal{F})$.*

Donnons maintenant une méthode générale pour construire des représenrtations d'annéloïdes réticulés par des sections dans des faisceaux.

III.2.10 CONSTRUCTION CANONIQUE. - Soit A un annéloïde réticulé et X un espace topologique. Associons à tout élément x de X un idéal $i(x)$ de A de facon que, quel que soit $a \in A$, l'ensemble des des $x \in X$ tels que $a \in i(x)$ est une partie ouverte de X.

(i) Formons la réunion disjointe E des annéloïdes réticulés quotient $E_x = A/i(x)$, $x \in X$.

(ii) Définissons $\eta \colon E \to X$ par $\eta(t) = x$ pour tout $t \in E_x$.

(iii) Pour tout élément a de A et tout $x \in X$, soit $\widehat{a}(x)$ l'image de a dans E_x par l'application canonique $A \to E_x$. Ainsi $\widehat{a}$ est une application de X dasn E. Pour toute partie B de A, soit $\widehat{B} = \{\widehat{a}; a \in B\}$.

(iv) Munissons E de la topologie la plus fine rendant continues toutes les applications $\widehat{a} \colon X \to E$, $a \in A$.

On a alors les propriétés suivantes:

(a) Les ensembles de la forme $\widehat{a}(U)$ forment une base de la topologie de E, si U parcourt les ouverts de X et a les éléments de A.

(b) Le triple $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ est un faisceau d'annéloïdes réticulés.

(c) $\widehat{a}$ est un sous-annéloïde réticulé de $\Gamma(\mathcal{F})$. L'application $a \mapsto \widehat{a}$ est un homomorphisme; A est isomorphe à $\widehat{A}$ si, et seulement si, $\bigcap_{x \in X} i(x) = 0$.

(d) $\mathcal{F}$ possède la propriété d'extension.

(e) Le faisceau $\mathcal{F}$ est séparé si, et seulement si, X est séparé et si le support de toute section $\widehat{a}$, $a \in A$, est ouvert.

(f) Si A satisfait la propriété (S-W) suivante:
Pour tout $a \in A^+$ et tout voisinage U d'un élément quelconque x de X, il existe $b \in A$ tel que $\widehat{b}(x) \geq \widehat{a}(x)$ et $\operatorname{supp} \widehat{b} \subseteq U$;
alors $\widehat{A}$ vérifie la propriété faible de Stone-Weiserstraß et par conséquent $\Gamma_k(\mathcal{F}) \subseteq \widehat{A}$.

Démonstration. (a) Les ensembles de la forme $\widehat{a}(U)$, $a \in A$, U ouvert, forment une base d'une topologie $\mathcal{T}$ sur E. En effet, $\emptyset = \widehat{a}(\emptyset)$ est de cette forme; l'intersection de $\widehat{a}(U)$ et $\widehat{b}(V)$, où U et V sont ouverts, est égal à l'ensemble des $t \in E$ tels que $t = \widehat{a}(x) = \widehat{b}(x)$ pour un $x \in U \cap V$; or, $\widehat{a}(x) = \widehat{b}(x)$ est équivalent à $a - b \in i(x)$, d'après l'hypothèse, l'ensemble W des $x \in X$ tels que $a - b \in i(x)$ est opuvert; donc $\widehat{a}(U) \cap \widehat{b}(V) = \widehat{a}(W')$, où W' est l'ensemble ouvert $U \cap V \cap W$.

La topologie $\mathcal{T}$ rend continue toutes les applications $\widehat{a}\colon X \to E$. Elle est donc moins fine que la topologie $\mathcal{T}'$ la moins fine ayuant cette propriété. Inversement, $\mathcal{T}'$ est moins fine que $\mathcal{T}$; car si U est un $\mathcal{T}'$-voisinage ouvert de $t = \widehat{a}(x) \in E$, alors $V = \widehat{a}^{-1}(U)$ est un voisinage ouvert de x dans X; il s'ensuit que $\widehat{a}(U)$ est un $\mathcal{T}$-voisinage de t contenu dans U.

(b) Il est clair que $\eta\colon E \to X$ est un homéomorphsime local. Soit $*$ l'une des opérations $+, \cdot, \vee$. L'application $(s,t) \mapsto s * t$ de $E \nabla E$ dans E est continuue. Car si $s = \widehat{a}(x)$ et $t = \widehat{b}(x)$ et si U est un voisinage de $s * t = \widehat{(a * b)}(x)$, on peut supposer que $U = \widehat{(a * b)}(V)$ pour un voisinage ouvert V de x; les couples $(\widehat{a}(v), \widehat{b}(v)), v \in V$, forment un voisinmage de (s,t) dans $E \nabla E$ tel que $\widehat{a}(v) * \widehat{b}(v) \in U$ pour tout $v \in V$. Par conséquent, $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X \rangle$ est un faisceau.

(c) et (d) sont évidents.

(e) Supposons d'abord que X soit séparé et que le support de toute section $\widehat{a}$, $a \in A$, soit ouvert. Soient s et t deux éléments distincts de E. Soient a et b deux éléments de A tels que $\widehat{a}(\eta(s)) = s$ et $\widehat{b}(\eta(t)) = t$. Si $\eta(s) \neq \eta(t)$, il y a des voisinages disjoints U et V respectivement de $\eta(s)$ et $\eta(t)$. On en déduit que $\widehat{a}(U)$ et $\widehat{b}(V)$ sont des voisinages disjoints respectivement de s et t. Supposons maintenant que $\eta(s) = \eta(t) = x$. Soit U le support de $\widehat{a - b}$, qui est ouvert d'après l'hypothèse; alors $\widehat{a}(U)$ et $\widehat{b}(U)$ sont des voisinages disjoints de s et t respectivement.

Supposons maintenant que $\mathcal{F}$ soit séparé. Alors X est évidemment séparé. Soit $a \in A$ et $x \in \operatorname{supp} \widehat{a}$. L'élément $\widehat{a}(x)$ de E possède un voisinage U ne rencontrant pas un certain voisinage de 0_x. Il existe donc un voisinage V de x tel que $\widehat{a}(v) \neq 0_v$ pour tout $v \in V$. Donc V est contenu dans le support de $\widehat{a}$, et par conséquent le support de $\widehat{a}$ est ouvert.

(f) D'après la construction du faisceau $\mathcal{F}$, tout élément t de E est de la forme $\widehat{a}(x)$ avec $\widehat{a} \in \widehat{A}$. Donc la condition 1) de la propriété faible de Stone-Weierstraß est verifiée. La condition (S-W) donne la condition 2). On peut donc appliquer III.2.9. □

Remarque 1. - Si Q admet une unité formelle u, la propriété (S-W) s'écrit:

(S-W') Pour tout voisinage$U$ d'un élément quelconque x de X, il existe $b \in A$ tel que $\widehat{b}(x) \geq \widehat{u}(x)$ et $\operatorname{supp} \widehat{b} \subseteq U$.

Cette remarque indique bien à quel point on peut affaiblir dans le cas des annéloïdes réticulés la propriété de Stone-Weierstraß de Dauns et Hofmann [12, p.152].

Remarque 2. - Si A est respectivement un groupe réticulé, un anneau réticulé, un f-annéloïde, un gropupe réticulé représentable, un f-anneau, il en est de même de toutes les fibres $E_x = A/i(x)$ du faisceau construit dans III.2.10.

III.3. Représentation sur l'espace d'Isbell

Soit A un annéloïde réticulé. Rappelons que le treillis $\mathcal{I}(A)$ des idéaux de A est un treillis distributif algébrique complet pseudo-complémenté (cf III.1.7).[1]

III.3.1 DEFINITION. - L'espace de Stone-Čech-Isbell associé au treillis $\mathcal{I}(A)$ comme dans la section II.2 est appelé *espace d'Isbell* de A: on le note βA.

Rappelons que βA est l'espace des c-r-idéaux maximaux de $\mathcal{I}(A)$ et que les ensembles $Z_\beta(i) = \{\mathfrak{x} \in \beta A; i \in \mathfrak{x}\}$ forment une base de la topologie de βA lorsque i parcourt $\mathcal{I}(A)$. D'après le théorème II.2.5, l'espace d'Isbell βA est compact.

D'après III.1.10, les facteurs directs de A forment un sous-treillis des Boole $\mathcal{D}$ du treillis de Boole $\mathcal{B}(A)$ des polaires de A. D'après II.1.7, $p \mapsto Z_\beta(p^\perp)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}$ sur le treillis de Boole des parties à la fois ouvertes et fermées de βA.

Spot x un idéal irréductible d'un annéloïde réticulé A. D'après II.1.7, les idéaux qui ont un c-r-voisinage dans x forment un c-r-idéal maximal $k(x)$. D'aprés le corollaire 1 de la proposition II.4.4, l'application $x \mapsto k(x)$ de l'espace ξA de tous les idéaux irréductibles de A dans βA est une compactification de Stone-Čech; en particulier, cette application est continue et son image est dense. Ainsi nous avons:

III.3.2 THEOREME. - *Soit A un annéloïde réticulé et ξA l'espace des idéaux irréductibles de A (muni de la topologie de Zariski). Alors $x \to k(x)\colon \xi A \to \beta A$ est une com[actofascation de Stone-Čech. Les facteurs directs de A correspondent bijectivement aux parties à al fois ouvertes et fermées de βA.*

Ce théorème a les sonséquences suivantes:

COROLLAIRE 1. - *βA est connexe si, et seulement si, A n'admet pas de facteur direct non trivial.*

COROLLAIRE 2. - *Si βA est fini, A est la somme directe d'un nombre fini d'annéloïdes réticulés dont l'espace d'Isbell est réduit à un seul point.*

Supposons que $x+y \neq A$ quels que soient les idéaux irréductibles de A. Alors l'ensemble ξA des idéaux irréductibles de A est filtrant supérieurement. Il s'ensuit que l'intersection de deux parties fermées non vides de ξA n'est jamais vide. Donc le compactifié de Stone-Čech de ξA est réduit à un seule point. Nous avons:

III.3.3 PROPOSITION. - *Soit A un annéloïde réticulé tel que $x + y \neq A$ quels que soient les idéaux irréductibles x, y de A. Alors βA est réduit à un seul point.*

Cette proposition montre que l'espace d'Isbell d'un groupe réticulé d'un structure très complexe peut être réduit à un seul point. Exemples: a) Extensions lexicographiques (pour la définition voir [9, p. 50]); b) groupes réticulés ayant une unité formelle et un seul idéal maximal; c) Byrd [8] a donné un exemple d'un groupe réticulé archimédien vérifiant les hypothèses de la proposition sans être totalement ordonné; d) groupes totalement ordonnés.

[1] Les résultats de cette section ont été améliorés dans "Lecture Notes in Mathematics **248**.

Soit A un annéloïde réticulé. Pour tout c-r-idéal maximal $\mathfrak{x} \in \beta A$ soit $\gamma(\mathfrak{x})$ la somme des idéaux appartentant a $\mathfrak{x}$; $\gamma(\mathfrak{x})$ est appelé *idéal absolument germinal* asocié à $\mathfrak{x}$. D'après II.4.6c, $\gamma(\mathfrak{x})$ est l'intersection d'une famille d'idéaux irréductibles minimaux. Si $\gamma(\mathfrak{x})$ est primaire, il est primaire minimal. En effet, si x est un iéal irréductible maximal contenant $\gamma(\mathfrak{x})$, alors $\gamma(\mathfrak{x})$ est contenu dans tout idéal irréductible minimal $p \subseteq x$. Un élément a de A appartient à $\gamma(\mathfrak{x})$ si, et seulement si, $a^{\perp\perp} \in \mathfrak{x}$; puisque l'ensemble $Z_\beta(a^{\perp\perp})$ des $\mathfrak{x} \in \beta A$ tels que $a^{\perp\perp} \in \mathfrak{x}$ est une partie ouverte de βA, l'ensemble des $\mathfrak{x} \in \beta A$ tels que $a \in \gamma(\mathfrak{x})$ est aussi ouvert. Par conséquent, on peut construire un faisceau sur βA comme dans III.2.10. Nous désignerons ce faisceau par $\mathcal{F}^\beta(A) = \langle E^\beta, \eta^\beta, \beta A\rangle$. Les fibres de $\mathcal{F}^\beta$ sont les annéloïdes réticulés quotient $A/\gamma(\mathfrak{x})$ et $\mathcal{F}^\beta$ vérifie les propriétés (a)-(c) de III.2.10.

Comme dans III.2.10, nous avons un homomorphisme $a \mapsto \widehat{a}$ de A sur un sous-annéloïde réticulé $\widehat{A}$ de $\Gamma(\mathcal{F}^\beta(A))$. Cet homomorphisme est injectif, puisque l'intersection des $\gamma(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{x} \in \beta A$, est réduit á zéro. En effet si $a \in \gamma(\mathfrak{x})$ pour tout $\mathfrak{x} \in \beta A$, alors a appartient à tout idéal irréductible, puisque tout idéal irréductible x contient $\gamma(h(x))$; donc $a = 0$. D'après la proposition III.2.9, le lemme suivant montre que $\widehat{A} = \Gamma(\mathcal{F}^\beta(A))$.

III.3.4 LEMME. - *$\widehat{A}$ vérifie la propriété faible de Stone-Weiserstraß.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la propriété (S-W) de III.2.10f est vérifiée. Soit donc a un élément positif de A, soit $\mathfrak{x}_0 \in \beta A$ et soit U un voisinage de $\mathfrak{x}_0$. On peut supposer que U est égal à l'ensemble $Z_\beta(p)$ des $\mathfrak{x} \in \beta A$ contenant une certaine polaire p. Soient q_1 et q_2 des polaires appartenant à $\mathfrak{x}_0$ tels que $p \prec\!\!\prec q_1 \prec\!\!\prec q_2$. Puisque $q_2 + q_1^\perp = A$, il existe c dans q_2 et b dans $q_1^\perp$ tels que $b + c = a$. L'élément c apartenant à $\gamma(\mathfrak{x}_0)$, on a $\widehat{a}(\mathfrak{x}_0) = \widehat{b}(\mathfrak{x}_0)$. Montrons que le support de $\widehat{b}$ est contenu dans U: Le support de $\widehat{b}$ est l'ensemble des $\mathfrak{x} \in \beta A$ telsque $b^{\perp\perp} \notin \mathfrak{x}$. Puisque $b \in q_1^\perp$, on a $q_1 \subseteq b^\perp$ et par suite $p \prec\!\!\prec b^\perp$. Or, tout c-r-idéal maximal $\mathfrak{x}$ contient p ou $b^{\perp\perp}$ d'après II.1.9; donc $b^{\perp\perp} \notin \mathfrak{x}$ entraîne $p \in \mathfrak{x}$. Par conséquent, le support de b est contenu dans l'ensemble $U = Z_\beta(p)$ des $\mathfrak{x}$ tels que $p \in \mathfrak{x}$. $\square$

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant qui peut être considéré comme le résultat central de ce mémoir:

III.3.5 THEOREME. - *Tout annéloïde réticulé A est isomorphe à l'annéloïde réticulé de toutes les sections du faisceau $\mathcal{F}^\beta(A)$ d'annéloïdes réticulés sur l'espace d'Isbell βA.*

COROLLAIRE. - *Tout anneau réticulé A (resp. tout groupe réticulé) peut être représenté comme l'anneau réticulé (resp. groupe réticulé) de toutes les sections d'un faisceau d'anneaux réticulés (resp. de groupes réticulés) sur l'espace d'Isbell βA.*

Maintenant nous allons définir une certaine catégorie d'annéloïdes réticulés telle que tout homomorphisme $f\colon A \to B$ apartenant à cette catégorie induise une application continue $\beta f\colon \beta B \to \beta A$ et un morphisme de faisceau $\mathcal{F}^\beta(f)\colon \mathcal{F}^\beta(B) \to \mathcal{F}^\beta(A)$.

III.3.6 DEFINITION. - Soient A et B deux annéloïdes réticulés. Un homomorphisme $f\colon A \to B$ est dit *conforme* s'il vérifie les deux propriétés suivantes:

C1) $$\langle f(A) \rangle = B;$$

(C2) Pour des idéaux i et j de A, $i \cap j = \{0\} \implies \langle f(i) \rangle \cap \langle f(j) \rangle = \{0\}$.

III.3.7 LEMME. - *Soient A et B deux f-annéloïdes. Un homorphisme $f\colon A \to B$ est conforme si, et seulement si, (C1) est vérifiée.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'un homomorphisme $f\colon A \to B$ vérifie (C2) pourvu que A et B soient des f-annéloïdes. Soient donc i et j deux idéaux de A tels que $i \cap j = \{0\}$. Pour tout $a \in i$ et tout $b \in j$, on a $|a| \wedge |b| = 0$, donc $|f(a)| \wedge |f(b)| = 0$. Par conséquent, $f(i)$ et $f(j)$ sont orthogonaux. A l'aide de III.1.12, on en déduit que $\langle f(i) \rangle \cap \langle f(j) \rangle = \{0\}$. □

Soient $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ deux homomorphismes conformes d'annéloïdes réticulés. Puisque $g(\langle f(A) \rangle) \subseteq \langle g(f(A)) \rangle$, on a $C = \langle g(B) \rangle \subseteq \langle g(f(A)) \rangle$. Si i et j sont deux idéaux de A tels que $i \cap j = \{0\}$, alors $\langle f(i) \rangle \cap \langle f(j) \rangle = \{0\}$ et par suite $\langle g(\langle f(i) \rangle) \rangle \cap \langle g(\langle f(j) \rangle) \rangle = \{0\}$, donc $\langle g \circ f(i) \rangle \cap \langle g \circ f(j) \rangle = \{0\}$.

Ainsi nous avons démontré que l'application composée de deux homomorphismes conformes est encore un homomorphisme conforme. Les annéloïdes réticulés et leurs homorphismes conformes forment donc une catégorie que nous désignerons par $\mathcal{A}$. Définissons un foncteur $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ dans la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés.

Pour tout annéloïde réticulé A, soit $\mathcal{I}(A)$ le treillis des idéaux de A, qui est distrributif et pseudo-complémenté d'après III.1.7. Soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme conforme. Pour tout idéal i de A, soit
$$\mathcal{I}(f)(i) = \langle f(i) \rangle.$$
Alors $\mathcal{I}(f)$ est une application de $\mathcal{I}(A)$ dans $\mathcal{I}(B)$. Cette application est un morphisme au sens de II.3.1. En effet. les axiomes (M1) et (M2) sont des conséquences de (C1) et (C2). L'axiome (M3) est vérifié puisque $\langle f(i) \rangle + \langle f(j) \rangle = \langle f(i+j) \rangle$ quels que soient les idéaux i et j de A. Si $g\colon B \to C$ est un autre homomorphisme conforme et si i est un idéal de A, alors
$$(\mathcal{I}(g) \circ \mathcal{I}(f))(i) = \langle g(\langle f(i) \rangle) \rangle \supseteq \langle g(f(i)) \rangle = \mathcal{I}(g \circ f)(i);$$
d'autre part $g(\langle f(i) \rangle \subseteq \langle g(f(i)) \rangle$, donc $(\mathcal{I}(g) \circ \mathcal{I}(f))(i) = \mathcal{I}(g \circ f)(i)$. Par conséquent, $\mathcal{I}(g) \circ \mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(g \circ f)$. Nous avons:

III.3.8 LEMME. - *$\mathcal{I}$ est un foncteur de la catégorie $\mathcal{A}$ dans la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés.*

....

....

....

III.3.9 THEOREME. - *Soit $\mathcal{A}$ la catégorie des annéloïdes réticulés et de leurs homomorphismes conformes. Alors $\mathcal{F}^\beta$ est un foncteur contravariant des $\mathcal{A}$ dans la catégorie des faisceaux d'annéloïdes réticulés à base compacte tel que le foncteur composé $\Gamma\mathcal{F}^\beta$ soit équivalent au foncteur identique sur $\mathcal{A}$.*

III.4. Représentation sur l'espace de Stone. Enveloppe stonienne et enveloppe orthocomplète d'un f-annéloïde

Soit A un annéloïde réticulé. Les polaire de A forment un treillis de Boole $\mathcal{B}(A)$ (cf. III.1.9). Nous désignerons par σA l'espace de Stone des idéaux maximaux de $\mathcal{B}(A)$. Nous allons construire un faisceau $\mathcal{F}^\sigma(A)$ sur σA qui permet de représenter A comme annéloïde rétculé de sections. En général, A n'est pas isomorphe à l'annéloïde réticulé $\Gamma(\mathcal{F}^\sigma(A))$ de toutes les sections der $\mathcal{F}^\sigma(A)$. Finalement, nous donneront une construction de l'orthocomplété d'un f-annéloïde.

III.4.1 PROPOSITION. - *Soit A un annéloïde réticulé. Soit $\mathcal{B}(A)$ le treillis de Boole des polaires de A et soit σA l'espace des Stone des idéaux maximaux de $\mathcal{B}(A)$. Pour tout $\mathfrak{x} \in \sigma A$, soit $\gamma(\mathfrak{x})$ la somme des polaires p appartenant à $\mathfrak{x}$. Comme dans III.2.10 on peut construire le faisceau $\mathcal{F}^\sigma(A) = \langle E^\sigma, \eta^\sigma, \sigma A\rangle$ sur σA. Ce faisceau est séparé et A est isomorphe au sous-annéloïde réticulé $\widehat{A}$ de $\Gamma\mathfrak{F}^\sigma(A)$. Si A est un f-annéloïde, $\mathcal{F}^\sigma(A)$ est un faisceau d'annéloïdes totalement ordonnés.*

Démonstration. ...

...

... □

COROLLAIRE. - *Un groupe réticulé représentable A (resp. tout f-anneau) peut être représenté comme groupe réticulé (resp. f-anneau) de sections d'un faisceau séparé de groupes totalement ordonnés (resp. d'anneaux totalement ordonnés) sur l'espace de Stone σA.*

Pour tout annéloïde réticulé A la proposition II.4.1 fournit une application continue surjective $q\colon \sigma A \to \beta A$.

III.4.2 DEFINITION. - Un annéloïde réticulé A est dit *stonien* si toute polaire est un facteur direct de A.

Un annéloïde réticulé A est stonien si, et seulement si, le treillis des idéaux de A est un treillis de Stone (cf. I.6.1). Donnons quelque caractérisations:

III.4.3 PROPOSITION. - *Pour un annéloïde réticulé A, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) A est stonien;
(b) $q\colon \sigma A \to \beta A$ est un homéomorphisme;
(c) Les faisceaux $\mathcal{F}^\sigma$ et $\mathcal{F}^\beta$ sont naturellement isomorphes;
(d) $a \mapsto \widehat{a}$ est un isomorphisme de A sur $\Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)$.

Démonstration. ...

...

...

$\square$

...

...

...

III.4.4 DEFINITION. - Une extension B d'un f-annéloïde A est appelé *enveloppe stonienne* de A si B est une extension stonienne minimale de A.

Soit B une extension d'un f-annéloïde A. Pour toute polaire p de B, soit $f(p) = p \cap A$. Alors f est un homomorphisme surjectif du treillis de Boole $\mathcal{B}(B)$ des polaires de B sur $\mathcal{B}(A)$. Cet homomorphisme induit une application continue injective $\overline{f}\colon \sigma A \to \sigma B$. Nous identifierons σA avec son image dans σB. Si f est un isomorphisme, nous écrirons $\mathcal{B}(B) \cong \mathcal{B}(A)$; dans ce cas $\overline{f}$ est un homéomorphisme et nous écrirons $\sigma B \cong \sigma A$.

Voici le théorème principal:

III.4.5 THEOREME. - *Soit A un f-annéloïde. Alors $\Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)$ est une enveloppe stonienne de A telle que $\mathcal{B}(\Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)) \cong \mathcal{B}(A)$.*

Le théorẽme III.4.5 sera démontré en plusieurs étapes....

...

...

Ainsi nous avons démontré que $\Gamma = \Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)$ est une envelope stonienne de A. Les deux lemmes suivants montront que $\mathcal{B}(\Gamma) \cong \mathcal{B}(A)$.

III.4.6 LEMME. (Bigard [3]) - *Soit B une extension d'un f-annéloïde A telle que pour toute polaire p de B, $p \cap A \neq \{0\}$. Alors $\mathcal{B}(A) \cong \mathcal{B}(A)$.*

Rappelons que A est dit *o-dense* dans une extension B si, et seulement si, pour tout élément $b > 0$ de B, il existe un élément a dans A vérifiant $0 < a \leq b$.

III.4.7 LEMME. - *Tout f-annéloïde A est o-dense dans $\Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)$.*

...

...

...

En général, l'enveloppe stonienne n'est pas unique à un A-isomorphisme près. Mais on a le théorème de minimalité et unicité suivant:

III.4.8 PROPOSITION. - *Soit B une enveloppe stonienne d'un f-annéloïde A. Alors il y a un A-homomorphisme surjectif de B sur $\Gamma\mathcal{F}^\sigma(A)$. Cet A-homomorphisme est un isomorphisme si, et seulement si, $\mathcal{B}(A) \cong \mathcal{B}(A)$.*

...

...

...

III.4.9 PROPOSITION. - *Soit B une enveloppe stonienne d'un f-annéloïde A. Alors B contient une unique enveloppe stonienne C de A, et C est isomorph à* $\Gamma\mathcal{F}^{\sigma}(A)$.

...

...

...

Veksler [40] a énoncé des résultats sur les extensions stoniennes utilisant d'autres méthodes. Il nous semble cépendant que le théorème d'unicité de Veksler n'est pas correct.

Dans la dernière partie des cette section nous considérons la notion d'enveloppe orthocomplète d'un f-annéloïde.

III.4.10 DEFINITION. - Soit A un f-annéloïde. On dit que A est *projetable* si le treillis des idéaux de A est projetable, c'est à dire si toute polaire principale $a^{\perp}$ de A est un facteur direct. On dit que A est *latéralement complet* si toute famille (a_{μ}) d'éléments deux á deux orthogonaux de A admet une borne supérieure. A est appelé *orthocomplet* si A est projetable et lateralement complet. Tout extension orthocomplète minimale de A est appelée *enveloppe orthocomplète* de A.

...

...

...

Soit A un f-annéloïde. Soit $\mathcal{W}$ la famille des ouverts partout denses de l'espace de Stone σA. Pour tout $U \in \mathcal{W}$, soit $\Gamma^U = \Gamma(\mathcal{F}^{\sigma}(A)|_U)$ le f-annéloïde des sections définies sur U du faisceau $\mathcal{F}^{\sigma}(A)$. Si U et V sont deux membres de $\mathcal{W}$ tels que $V \subseteq U$, soit f_V^U l'homomorphisme de Γ^U das Γ^V défini par $F_V^U(\tau) = \tau|_V$ pour tout $\tau \in \Gamma^U$. Puisque le faisceau $\mathcal{F}^{\sigma}(A)$ est séparé, les homomorphismes f_V^U sont injectifs. Si U, V, W sont des membres de $\mathcal{W}$ tels $W \subseteq V \subseteq U$, alors $f_W^U = f_W^V \circ f_V^U$. Puisque la famille $\mathcal{W}$ est stable pour l'intersection, on a un système inductive $\{f_V^U; V \subseteq U, V \in \mathcal{W}, U \in \mathcal{W}\}$. Soit $\Omega(A)$ la limite inductive de ce système.

...

...

...

III.4.11 THEOREME. - *Le f-annéloïde $\Omega(A)$ défini ci-dessus est une enveloppe orthocomplète du f-annéloïde A. Tout élément de $\Omega^+(A)$ est la borne supérieure d'une famille d'éléments deux à deux orthogonaux de l'enveloppe stonienne Γ de A, et A est o-dense dans $\Omega(A)$.*

...

...

...

III.4.12 PROPOSITION. - *Soit B une extension orthocomplète d'un f-annélïde A telle que $\mathcal{B}(A) \cong \mathcal{B}(B)$. Alors B contient une unique enveloppe orthocomplète D de A, et D est A-isomorphs a $\Omega(A)$.*

...

...

...

III.5. Représentation sur l'espace des idéaux irréductibles minimaux. Annéloïdes réticulés projetables.

Dans cette section, nous donnerons d'abord une construction assez générale d'une représentation d'un annéloïde réticulé A par des sections d'un faisceau sur un espace d'idéaux irréductibles de A. Nous appliquerons cette construction pour l'espace πA des idéaux irréductibles minimaux de A. Cette représentation sera particulièrement intéressante dans le cas d'un annéloïde réticulé projetable.

III.5.1. - Soit X un espace d'idéaux irréductibles d'un annéloïde réticulé A. Supposons que l'intersection des idéaux $x \in X$ soit réduite à zéro. A tout idéal irréductible $x \in X$ on associe *l'idéal germinal* $\gamma(x)$, qui est la somme des polaires principales $a^\perp$ avex $a \notin x$ (cf. section I.5). Soient $x \in X$ et $a \in \gamma(x)$.D'après la proposition I.5.3, l'ensemble des $y \in X$ tels que $a \in \gamma(y)$ est un voisinage de x. Il s'ensuit que l'ensemble des x tels que $a \in \gamma(x)$ est ouvert. Par conséquent, nous pouvons appliquer la construction canonique III.2.10 et construire un faisceau $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X\rangle$ d'annéloïdes réticulés sur X; la fibre E_x de $\mathcal{F}$ est justement $A/\gamma(x)$. Comme dans III.2.10, on a un homomorphisme $a \mapsto \widehat{a}$ de A dans l'annéloïde réticulé $\Gamma(\mathcal{F})$ des sections de $\mathcal{F}$. Cet homomorphisme est injectif, puisque $\bigcap_{x\in X}\gamma(x) \subseteq \bigcap_{x\in X} x = \{0\}$.

On peut choisir pour X l'espace πA de tous les idéaux irréductible minimaux de A. On désigne par $\mathcal{F}^\pi(A) = \langle E^\pi, \eta^\pi, \pi A\rangle$ le faisceau correspondant. On peut aussi considérer l'espace ξA de tous les idéaux irréductibles de A et le faisceaux $\mathcal{F}^\xi(A) = \langle E^\xi, \eta^\xi, \xi A\rangle$ correspondant. On a:

III.5.2 PROPOSITION. - *Tout annéloïde réticulé A peut ête représenté comme un annéloïde réticulé de sections du faisceau $\mathcal{F}^\pi(A)$ (respectivement $\mathcal{F}^\xi(A)$) d'annéloïdes réticulés sur l'espace πA de idéaux irréductibles minimaux de A (respectivement sur l'espace ξA des idéaux irréductibles de A).*

...

...

...

III.5.3 PROPOSITION. - *Tout f-annéloïde A peut être représenté par un f-annéloïde de sectioons dans un faisceau séparé $\mathcal{F}^\pi(A)$ d'annéloïdes totalement ordonnés sur l'espace πA des idéaux irréductibles minimaux de A, qui possède une base d'ouverts fermés.*

COROLLAIRE. - *Tout groupe réticulé représentable (resp. tout f-anneau) peut être représenté par un groupe réticulé (resp. par un f-anneau) de sections dans un faisceau séparé de groupes (resp. d'anneaux) totalement ordonnés.*

Le deuxiême cas, où nous appliquons les raisonnements ci-dessus est le cas des annéloïdes réticulés projetables.

III.5.4 DEFINITION. - Un annéloïde réticulé A est dit *projetable* si le treillis des idéaux de A est projetable, c'est à dire si toute polaire principale $a^{\perp}$ de A est un facteur direct de A.

La proposition III.1.10 fournitd'autres caractérisations des annéloïes réticulés projetables. D'après la proposition I.6.3, nous avons:

III.5.5 PROPOSITION. - *Soit A un annéloïde réticulé projetable. Alors le treillis des idéaux des A est arithmétique; tout idéal germinal de A est irréductible; pour tout élément a de A, l'ensemble $S_{\pi A}(a)$ des $x \in \pi A$ tels que $a \notin x$, est compact et ouvert dans πA; en particulier, πA est localement compact.*

...

...

...

Ainsi nous avons démontré la première partie du théorème suivant:

III.5.6 THEOREME. - *Soit A un annéloïde réticulé projetable. Alors $\mathcal{F}^{\pi}(A) = \langle E^{\pi}, \eta^{\pi}, \pi A\rangle$ est un faisceau séparé d' annéloïdes réticulés irréductibles sur l'espace πA des idéaux irréductibles minimaux de A, qui posséde une base d'ouverts compacts; et $a \mapsto \widehat{a}$ est un isomorphisme de A sur l'annéloïde réticulé $\Gamma_k(\mathcal{F}^{\pi}(A))$ des sections à supports compacts de $\mathcal{F}^{\pi}(A)$.*

Inversement, soit $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X\rangle$ un faisceau séparé d'annéloïdes réticulés irréductibles (non nuls) sur l'espace X ayant une base d'ouverts compacts. Alors $\Gamma_k(\mathcal{F})$ est un annéloïde réticulé projetable tel que le faisceau $\mathcal{F}^{\pi}(\Gamma_k(\mathcal{F}))$ est isomorphe à $\mathcal{F}$.

...

...

...

Le théorème entraîne immédiatemant:

COROLLAIRE. - *Un f-annéloïde (resp. un groupe réticulé représentable, un f-anneau) est projetable si, et seulement si, il peut être représenté par l'annéloïde de toutes les sections à supports compacts d'un faisceau séparé d'annéloïdes (resp. de groupes, d'anneaux) totalement ordonnés sur un espace topologique ayant une base d'ouverts compacts.*

III.6. Représentation sur l'espace des idéaux maximaux

Soit A un annéloïde réticulé. On désigne par μA l'espace des idéaux maximaux de A. Supposons que A soit *μ-semisimple*, c'est à dire que l'intersection des idéaux maximaux de A est $\{0\}$. Désignons par $\mathcal{F}^\mu(A) = \langle E^\mu, \eta^\mu, \mu A\rangle$ le faisceau construit sur μA suivant III.5.1. L'annéloïde réticulé A est isomorphe à un annéloïde réticulé de sections de $\mathcal{F}^\mu(A)$.

Rappelons qu'un élément u de A est appelé unité formelle si $u \geq 0$ et si u n'est contenu dans aucun idéal propre de A. Nos dirons que A est *quasi-local* si A possède une unité formelle et un seul idéal maximal. L'espace d'Isbell d'un annéloïde réticulé quasi-local est réduit à un seul point.

III.6.1 THEOREME. - A./ *Soit A un annéloïde réticulé μ-semisimple ayant une unité formelle u. Supposons que l'espace μA des idéaux maximaux de A soit séparé. Alors μA et l'espace d'Isbell βA sont homéomorphes. Pour tout idéal maximal x de A, l'idéal germinal $\gamma(x)$ est x-primaire minimum. Les faisceaux $\mathcal{F}^\mu(A)$ et $\mathcal{F}^\beta(A)$ sont identiques. A est isomorphe à l'annéloïde réticulé de toutes les sections de $\mathcal{F}^\mu(A)$. De plus, $\mathcal{F}^\mu(A)$ possède les propriétés suivantes:*

(a) *Tout fibre $E^\mu_x = A/\gamma(x)$ de $\mathcal{F}^\mu(A)$ est quasi-local.*

(b) *Désignons par $m(x)$ l'unique idéal maximal de $A/\gamma(x)$. Le sous-espace $M = \bigcup_{x\in\mu A} m(x)$ de E^μ est fermé et n'a pas de point intérieur sauf les points $O_x, x \in \mu A$.*

(c) *$\mathcal{F}^\mu(A)$ possède la propriété d'extension.*

(d) *Si x et y sont deux idéaux maximaux distincts de A, il existe une section $\sigma \in \Gamma\mathcal{F}^\mu(A)$ telle que $\sigma(x) \notin m(x)$ et $\sigma(y) = 0_y$.*

(e) *Le support de toute section de $\mathcal{F}^\mu(A)$ posède des points intérieurs.*

B./ *Soit inversement $\mathcal{F} = \langle E, \eta, X\rangle$ un faisceau d'annéloïdes réticulés sur un espace compact X vérifiant* (a), (b), (c), (d), (e). *Alors $\Gamma(\mathcal{F})$ est un annéloïde réticulé μ-semisimple ayant une unité formelle, et le faisceau $\mathcal{F}^\mu(\Gamma(\mathcal{F}))$ est isomorphe à $\mathcal{F}$.*

...

...

,,,

Remarque 1. - Si l'espace X dans III.6.1B possède une base d'ouverts fermés, les conditions (c) et (d) sont automatiquement vérifés.

Remarque 2. - Un groupes réticulé représentable A est μ-semisimple et possède une unité formelle si, et seulement si, A est un groupe réticulé archimédien ayant un élément archimédien. (Rappelons qu'un élément u d'un groupe réticulé A ets appelé *élément archimédien* si, pour tout $a \in A$, il existe un entier n tel que $a \leq na$.) Ainsi le théorème III.6.1 donne une caractérisation des groupes réticulés archimédiens ayant un élément archimédien par des faisceaux.

Pour les f-annéloïdes ayant une unité formelle, nous démontrerons un théorème de représentation analogue sans l'hypothèse de μ-semi-simplicité. L'homéomorphie de μA

et βA a été démontré par Isbell [18] dans le cas d'un groups réticulé commutatif. La même démonstration reste valable dans le cas plus général.

III.6.2 THEOREME. - A./ *Soit A un f-annéloïde ayant une unité formelle u. Alors $k\colon \mu A \to \beta A$ est un homéomorphisme. Pour tout idéal maximal x de A, l'idéal germinal $\gamma(x)$ est x-primaire minimum et $\gamma(x) = \gamma(k(x))$. Le faisceau $\mathcal{F}^\beta(A) = \langle E^\beta, \eta^\beta, \beta A\rangle$ vérifie les propriétés* (a), (c), (d) *de III.6.1 et la propriété* (b'):

(b') $M = \bigcup_{x\in\beta A} m(x)$ est une partie fermée de $\mathcal{F}^\beta$.

B./ *Soit inversement $\mathcal{F}$ un faisceau de f-annéloïdes sur un espace compact X vérifiant les propriétés* (a), (b'), (c), (d). *Alors $\Gamma(\mathcal{F})$ est un f-annéloïde ayant une unité formelle et les faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\beta(\Gamma(\mathcal{F}))$ sont isomorphes.*

...

...

...

A l'aide du théorème III.3.2, on obtient:

COROLLAIRE. - *Si un f-annéloïde A posède une unité formelle, il y a une correspondance bijective entre les facteurs direct de A et les parties à la fois ouvertes et fermées de μA. Si de plus μA est fini, A est la somme directe d'un nombre fini de f-annéloïdes quasi-locaux.*

III.7. Idéaux dominés d'un f-anneaux

Dans cette section, A désigne toujours un f-anneau. Isbell [18] a introduit la notion d'élément dominé:

III.7.1 DEFINITION. - Un élément d d'un f-anneau A est appelé *élément dominant* si d est une unité formelle de A telle que $d^2 \geq d$. Un idéal j de A est dit *dominé par d* si d est un élément dominant de A modulo j. On dit que A *possède localement des éléments dominants* si l'intersection des idéaux dominés de A est réduit à zéro.

Si i est un idéal d'un f'anneau A et si i contient un idéal j de A, dominé par d, alors i est aussi dominé par d sauf si $i = A$.

Si d domine un idéal j de A, toute valeur de d contenant j est un idéal maximal de A, dominé par d. En particulier, tout idéal dominé est contenu dans un idéal maximal dominé. Nous désignerons par δA l'espace des idéaux maximaux dominés de A.

...

...

...

III.7.2 THEOREME. (D.G. Johnson [20, p. 190]- *Un f-anneau sous-directement irréductible est totalement ordonné et ou bien simple ou bien à coeur nilpotent.*

COROLLAIRE 1. - *Si un f-anneau totalement ordonné A contient un élément d vérifiant $d^2 \geq d > 0$, alors d est un élément dominant de A.*

En effet, d possède un valeur x: A/x est sous-directement irréductible et le coeur de A n'est pas nilpotent. Donc A/x est simple et x est un idéal maximal de A.

Rappelons qu'un élément u d'un f-anneau A est appelé *unité faible* si $u \wedge a > 0$ pour tout élément strictement positif a de A. Une unité faible est aussi caractérisée par la propriété d'ête un élément positif de A n'appartenant à aucun idéal irréductible minimal de A.

COROLLAIRE 2. - *Si un f-anneau A contient une unité faible d telle que $d^2 \geq d$, alors d est un élément dominant de A.*

...

...

...

Suivant Henriksen and Isbell [17], nous dirons qu'un f-anneau A est *infinitésimal* si $a^2 < |a|$ quel que soit $a \neq 0$. Nous allons montrer qu'un f-anneau est infinitésimal si, et seulement si, $\delta A = \emptyset$:

III.7.3 PROPOSITION. - *Un f-anneau est infinitésimal si, et seulement si, il n'admet pas d'idéal dominé.*

...

...

...

III.7.4 LEMME. (Isbell [18]) - *Soit x un idéal d'un f-anneau A, dominé par un élément $d > 0$. Soit $p = ((4d^2 - d)^+)^\perp$ et $q = ((2d^2 - d)^+)^\perp$. Alors q est un c-r–voisinage de p, contenu dans x, et p est dominé par $4d$.*

...

...

...

Le théorème suivant est dû à Isbell [18]. On remarquera cependant que le théorème d'Isbell contient une lacune due à la définition inadéquate de la notion d'idéal x-primaire (cf. I.5.4).

III.7.5 THEOREME. (Isbell [18]) - *Soit A un f-anneaux. Alors $x \mapsto k(x)$ est un homéomorphisme de l'espace δA des idéaux maximaux dominés de A sur un sous-espace ouvert de l'espace d'Isbell βA. Pour tout $x \in \delta A$, l'idéal germinal $\gamma(x)$ est dominé et le plus petit idéal x-primaire de A; l'idéal absolument germinal $\gamma k(x)$ est égal à $\gamma(x)$.*

...

...

...

A partir de maintenant nous identifierons δA avec son image dans βA. Considérons le faisceau $\mathcal{F}^\beta(A)$ de III.3.5. Identifions les éléments a de A avec les sections correspondantes $\widehat{a}$ de $\mathcal{F}^\beta(A)$. Pour tout $x \in \delta A$, la fibre de $\mathcal{F}^\beta(A)$ sur x est le f-anneau quotient $E_x^\beta = A/\gamma(x)$ qui est quasi-local et possède un élément dominant d'après le théorème III.7.4. Pour tout $\mathfrak{x} \in \beta A \setminus \delta A$, la fibre $E_x^\beta = A/\gamma(x)$ est un f-anneau infinitésimal. En effet, si $A/\gamma(\mathfrak{x})$ n'était pas infinitésimal, $\gamma(\mathfrak{x})$ serait contenu dans un idéal maximal dominé x d'après la proposition III.7.3, et on aurait $\mathfrak{x} = k(x)$. Ainsi nous pouvons préciser le théorème III.3.5:

COROLLAIRE. - *Tout f-anneau A peut être représenté comme le f-anneau de toutes les sections d'un faisceau de base βA, dont les fibres sont infinitésimaux ou des f-anneaux quasi-locaux ayant localement des éléments dominants.*

La proposition suivante généralise le théorème 5.5 de Henriksen et Isbell [17]:

III.7.6 PROPOSITION. - *Tout f-anneau A possède des idéaux j_1, j_2 tels que $j_1 \cap j_2 = 0$ et tels que $A_1 = A/j_1$ soit infinitésimal et que $A_2 = A/j_2$ admette localement des éléments dominants. j_2 est unique: c'est l'intersection des idéaux dominés de A.*

...

...

...

Avant de démontrer la deuxième partie de la proposition III.7.6, démontrons un résultat généralisant la deuxième partie du théorème 5.9 de [17]:

III.7.7 PROPOSITION. - *Dans un f-anneau A, l'intersection des idéaux dominés de A est égal à l'intersection des idéaux germinaux associés aux idéaux maximaux dominés de A.*

...

...

...

COROLLAIRE. - *Un f-anneau A possède localement des éléments dominants si, et seulement si, l'intersection des idéaux germinaux associés aux idéaux dominés est réduite à zéro.*

...

...

...

Rappelons que d'après III.3.2, $p \mapsto Z_\beta(p^\perp)$ est une bijection entre les facteurs directs p de A et les ouverts fermés de l'espace d'Isbell βA. La bijection réciproque peut être donnée de la manière suivante: Si U est une partie ouverte et fermée de βA, l'ensemble $\Gamma^U = \Gamma(\mathcal{F}^\beta(A)|_U)$ des sections de $\mathcal{F}^\beta(A)$ à supports dans U est un facteur direct de A.

III.7.8 PROPOSITION. - *Soit A un f-anneau. Alors $U \mapsto \Gamma^U$ définit une bijection entre les parties ouvertes compactes de δA et les facteurs directs de A, ayant un élément dominant.*

...

...

...

COROLLAIRE 1. - *δA est compact, si, et seulement si, A est la somme directe d'un f-anneau infinitésimal et d'un f-anneau ayant un élément dominant.*

Ce corollaire est une conséquence des propositions III.7.7 et III.7.8.

COROLLAIRE 2. - *Si δA est fini, A est la somme directe d'an f-anneau infinitésimal et d'un nombre fini de f-anneaux quasi-locaux ayant un élément dominant.*

Un idéal j d'un f-anneau A est dit *idempotent*, si $j = \langle j^2 \rangle$, c'est à dire si l'idéal engendré par les éléments de la forme ab, a et b appartenant à j, est égal à j.

III.7.9 PROPOSITION. - *Tout idéal principal idempotent d'un f-anneau A est un facteur direct de A, ayant un élément dominant.*

...

...

...

COROLLAIRE 1. - *Tout idéal principal idempotent de A est engendré par un élément d vérifiant $d^2 \geq d \geq 0$; et tout idéal principal de A engendré par un tel élément d est un facteur direct de A.*

...

...

...

COROLLAIRE 2. - *Les facterus directs d'un f-anneau ayant un élément dominant sont exactement les idéaux principaux idempotents.*

...

...

...

COROLLAIRE 3. - *Tout idéal principal de A, engendré par un élément idempotent, est un facteur direct de A.*

III.8. f-anneaux quasi-archimédiens et δ-semisimples

Dans cette section, A désigne toujours un f-anneau et on note $M = A^+ \cup \mathbb{N}$, où $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.

Rappelons qu'un groupes réticulé A est dit archimédien si, quels que soient $a, b \in A^+$, $na \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ entraîne $a = 0$. Ainsi un groupe réticulé est archimédien si, et seulement si, aucun idéal non nul de A n'admet de majorant.

III.8.1 DEFINITION. - Un f-anneaux A est dit *quasi-archimédien* si aucun idéal non nul de A n'admet de majorant.

Tout f-anneau archimédien est quasi-archimédien. Inversement, tout zéro f-anneau quasi-archimédien est archimédien.

III.8.2 LEMME. - *A est quasi-archimédien si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée: Quels que soient $a, b \in A^+$, $mam' \leq b$ pour tout $m, m' \in M$ entraîne $a = 0$.*

...

...

...

III.8.3 LEMME. - *Si p est une polaire d'un f-aneau quasi-archimédien A, le f-anneau quotient A/p est aussi quasi-archimédien.*

...

...

...

III.8.4 DEFINITION. - Un f-anneau A est appelé *δ-semi-simple* si l'intersection des idéaux maximaux dominés de A est réduit à zéro.

Henriksen et Isbell [17] ont appelé S-semi-simple les f-anneaux que nous appelons δ-semi-simple.

III.8.5 LEMME. - *Tout f-anneau δ-smi-simple A possède la propriété suivante: Quels que soient $a, b \in A^+$,*

$$sa \leq b \text{ pour tout } s \in A^+ \text{ entraîne } a = 0$$

et

$$as \leq b \text{ pour tout } s \in A^+ \text{ entraîne } a = 0 \quad ;$$

en particulier, A est quasi-archimédien.

...

...

...

III.8.6 THEOREME. - *Un f-anneau A est quasi-archimédien si, et seulemen si, A est un produit sous-direct d'un zéro f-anneau archimédien et d'un f-anneau δ-semi-simple.*

...

...

...

COROLLAIRE 1. - *Pour un f-anneau A, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *A est quasi-archimédien et n'a pas d'élément nilpotent non nul.*

(b) *A est δ-semi-simple.*

(c) *Quels que soient $a, b \in A^+$, $sa \leq b$ pour tout $s \in A^+$ entraîne $a = 0$.*

(d) *Quels que soient $a, b \in A^+$, $as \leq b$ pour tout $s \in A^+$ entraîne $a = 0$.*

(e) *Quels que soient $a, b \in A^+$, $sas' \leq b$ pour tout $s, s' \in A^+$ entraîne $a = 0$.*

COROLLAIRE 2. - *Pour un f-anneau A, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *A est quasi-archimédien.*

(b) *Quels que soient $a, b \in A^+$, $as \leq b$ pour tout $s \in M$ entraîne $a = 0$, c'est à dire que A n'admet pas d'idéal à gauche majoré.*

(c) *Quels que soient $a, b \in A^+$, $sa \leq b$ pour tout $s \in M$ entraîne $a = 0$, c'est à dire que A n'admet pas d'idéal à droite majoré.*

COROLLAIRE 3. (Henriksen et Isbell [17, 3.11]; D. G. Johnson [21, 2.2] - *Un f-anneau archimédien est un produit sous-direct d'un zéro f-anneau archimédien et d'un f-anneau δ-semi-simple archimédien.*

Šatalova [30] a démontré le lemme suivant:

III.8.7 LEMME. - *Soit j un idéal d'un f-anneau A. L'application $x \mapsto j \cap x$ donne une correspondance bijective entre les idéaux maximaux dominés de A ne contenant pas j et les idéaux maximaux dominés de j.*

Les idéaux maximaux dominés de A ne contenant pas j forment une partie ouverte de δA. On véridfie facilement que $x \mapsto j \cap x$ est un homéomorphisme de ce sous-espace ouvert de δA sur δj; donc:

COROLLAIRE. - *Si j est un idéal d'un f-anneaux A, δj est homéomorphe à un sous-espace ouvert de δA.*

...

...

...

III.8.8 PROPOSITION. - *Tout f-anneau A possède un plus grand idéal infinitésimal $S(A)$, et $S(A)$ est l'intersection des idéaux maximaux dominés de A. On a $S(A/S(A)) = 0$, et si j est un idéal de A, $S(j) = j \cap S(A)$.*

On peut déduire de cette proposition une autre caractérisation des f-anneaux δ-semi-simples:

COROLLAIRE. - *Un f-anneau est δ-semisimple si, et seulement si, il n'admet aucun idéal infinitésimal non nul.*

...

...

...

III.9. Annéloïdes réticulés quasi-réguliers et hyper-archimédiens

Cette section traite des problèmes concernant une classe d'annéloïdes réticulés correspondant à la classe des anneaux biréguliers dans la théorie des anneaux.

III.9.1 DEFINITION. - Un annéloïde réticulé A est appelé *quasi-régulier* si tout idéal principal de A est un facteur direct, c'est à dire si le treillis $\mathcal{I}(A)$ des idéaux de A est plat.

On vérifie facilement qu'une somme directe d'annéloïdes réticulés quasi-réguliers est quasi-régulier et que toute image homomorphe d'un annéloïde réticulé quasi-régulier est quasi quasi-régulier. Le théorème I.6.5 fournit plusieurs caractérisations:

III.9.2 PROPOSITION. - *Pour un annéloïde réticulé A, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) A est quasi-régulier.
(b) Pour tout idéal irréductible x de A, $\gamma(x) = x$.
(c) $\mathcal{I}(A)$ est un treillis arithmétique et tout idéal irréductible de A est maximal.
(d) $\mathcal{I}(A)$ est arithmétique, A est μ-semi-simple et les ensembles $S_{\mu A}(a), a \in A$, forment une base d'ouverts compacts de μA.

...

...

...

COROLLAIRE. - *Pour un f-annéloïde A, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) A est quasi-régulier.
(b) $\gamma(x) = x$ pour tout idéal irréductible x de A.
(c') Tout idéal irréductible de A est maximal.
(c") Toute image homomorphe totalement ordonné de A est simple.
(d') A est μ-semi-simple et les ensembles $S_{\mu A}(a), a \in A$, forment une base d'ouverts compacts de l'espace μA.
(e) Tout idéal propre de A est une intersection d'idéaux maximaux.

Remarquons que L. Lesieur a démontré ([26, théorème 10]) qu'un anneau commutatif unitaire est régulier (au sens de von Neumann) si, et seulement si, il vérifie (e).

Rappelons qu'un annéloïde réticulé A est dit *simple* si A n'est pas réduit a zéro et si A n'admet aucun idéal propre non nul. Si A est un annéloïde réticulé simple, l'idéal engendré pas A^2 est égal à A ou $A^2 = 0$. Dans le deuxième cas, le groupe réticulé sous-jacent de A est simple.

Un annéloïde réticulé quasi-régulier est projetable. Nous pouvons donc appliquer théorème III.5.6 et représenter A comme l'annéloïde réticulé des sections à supports compacts du faisceau $\mathcal{F}^\pi(A)$. Puisque les idéaux irréductibles de A sont tous maximaux, $\mathcal{F}^\pi(A) = \mathcal{F}^\mu(A)$ et les fibres de $\mathcal{F}^\pi(A)$ soint simples.

...

...

...

III.9.3 THEOREME. - *Soit A un annéloïde réticulé quasi-régulier. Alors $\mathcal{F}^\mu(A)$ est un faisceau séparé d'annéloïdes réticulés simples sur l'espace μA des idéaux maximaux de A, qui possède une base d'ouverts compacts; et $a \mapsto \widehat{a}$ est un isomorphisme de A sur l'annéloïde réticulé $\Gamma_k(\mathcal{F}^\mu(A))$ des sections à supports compacts de $\mathcal{F}^\mu(A)$.*

Inversement, soit $\mathcal{F}$ un faisceau séparé d' annéloïdes réticulés simples sur un espace X ayant une base d'ouverts compacts. Alors $\Gamma_k(\mathcal{F})$ est un annéloïde réticulé quasi-régulier tel que le faisceau $\mathcal{F}^\mu(\Gamma_k(\mathcal{F}))$ soit isomorphe à $\mathcal{F}$.

Toute f-annéloïde simple est totalement ordonné. Donc:

COROLLAIRE. - *Un f-annéloïde (resp. un f-anneau) est quasi-régulier si, et seulement si, il est isomorphe au f-annéloïde (resp. au f-anneau) de toutes les sections à supports compacts d'un faisceau séparé d'annéloïdes (resp. d'anneaux) totalement ordopnnés simples sur un espace topologique ayant une base d'ouverts compacts.*

Soit S un annéloïde réticulé simple. Pour tout espace topologique X ayant une base d'ouverts compacts, soit $\mathcal{L}(X, S)$ l'annéloïde réticulé des fonctions localement constantes à supports compacts $f : X \to S$. On peut considérer $\mathcal{L}(X, S)$ comme l'annéloïde réticulé des sections à supports compacts du faisceau trivial $\langle X \times S, pr_1, X\rangle$. Donc $\mathcal{L}(X, S)$ est quasi-régulier. Donnons une condition suffisante pour qu'un annéloïde réticulé quasi-régulier soit de la forme $\mathcal{L}(X, S)$:

III.9.4 PROPOSITION. - *Soit A un annéloïde réticulé quasi-régulier. Supposons que A contienne un sous-annéloïde réticulé simple S tel que, pour tout idéal irréductible x, l'application canonique de A sur A/x induise un isomorphisme de S sur A/x. Alors μA est compact et A est isomorphe à $\mathcal{L}(\mu A, S)$.*

...

...

...

A partir de maintenant nous ne considérerons que des f-anneaux quasi-réguliers.

III.9.5 PROPOSITION. - *Un f-anneau quasi-régulier A est la somme directe d'un zéro f-anneau quasi-régulier et d'un f-anneau quasi-régulier δ-semi-simple.*

...

...

...

Puisqu'un f-anneau δ-semi-simple n'a pas d'élément nilpotent non nul, la proposition précédente entraîne:

COROLLAIRE. - *Un f-anneau quasi-régulier est δ-semi-simple si, et seulement si, il ne possède aucun élément nilpotent non nul.*

...

...

...

III.9.6 PROPOSITION. - *Pour un f-anneau A, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) A est un f-anneau quasi-régulier sans élément nilpotent non nul.
(b) Tout idéal principal de A est idempotent.
(c) Tout idéal de A est idempotent.
(d) Tout idéal principal de A est engendré par un élément d vérifiant $d^2 \geq d \geq 0$.
(e) Tout idéal de A est l'intersection d'une famille d'idéaux maximaux dominés.

...

...

...

COROLLAIRE. - *Si tout idéal d'un f-anneau A est engendré par un élément idempotent, alrs A est qusi-régulier et n'a pas d'élément nilpotent non nul.*

...

...

...

III.9.7 PROPOSITION. - *Un f-anneau A est hyper-archimédien si, et seulement si, toute image homomorphe totalement ordonné de A est archimédienne.*

En effet, un groupe réticulé commutatif est hyper-archimédien si, et seulement si, toute image homomorphe totalement ordonnée de A est archimédienne.

Un anneau totalement ordonné archimédien est ou bien isomorphe à un sous anneau du corps totalement ordonné $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou bien un zéro anneau dont le groupe additif est isomorphe à un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ (cf. [15, p. 126]). Un anneau (resp. un groupe) totalement ordonné isomorphe à un sous-anneau (resp. un sous-groupe additif) de $\mathbb{R}$ sera appelé *anneau réel* (resp. *groupe réel*). Le théorème III.9.3 donne une équivalence entre f-anneaux (resp. groupes réticulés) hyper-archimédiens et une certaine classe de faisceaux:

III.9.8 THEOREME. - *Soit A un f-anneau hyper-archimédien sans élément nilpotent non nul (resp. un groupe réticulé hyper-archimédien). Alors $\mathcal{F}^\mu(A)$ est un faisceau séparé d'anneaux réels (resp. de groupes réels) sur l'espace μA, qui possède un base d'ouverts compacts; et $a \mapsto \widehat{a}$ est un isomorphisme de A sur $\Gamma_k(\mathcal{F}^\mu(A))$.*

Inversement, soit $\mathcal{F}$ un faisceau séparé d'anneaux réels (de groupes réels) sur un espace topologique X ayant une base d'ouverts compacts, alors $\Gamma_k(\mathcal{F})$ est un f-anneau hyper-archimédien sans élément nilpotent non nul (resp. un groupe réticulé hyper-archimédien) tel que les faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\mu(\Gamma_k(\mathcal{F}))$ soient isomorphes.

...

...

...

III.9.9 LEMME. - *Soit X un espace topologique localement compact. Soit G un sous-groupe réticulé additif de l'anneau $\mathcal{C}_k(X)$ des fonctions réelles continues à supports compacts, définies sur X, tel que pour tout $x \in X$, il existe $f \in G$ vérifiant $f(x) \neq 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) G est hyper-archimédien.
(b) Pour tout $f \in G$, $N_f = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ est ouvert.
(c) Pour tout $0 < f \in G$, il existe $0 < r \in \mathbb{R}$ tel que $r < f(x)$ pour tout x vérifiant $f(x) \neq 0$.

...

...

...

III.9.10 THEOREME. - *Pour qu'un f-anneau A sans élément nilpotent non nul soit hyper-archimédien, il faut et il suffit que A puisse être représenté par un f-anneau $\widetilde{A}$ de fonctions réelles continues à supports compacts, définies sur un espace topologique X ayant une base d'ouverts compacts, tels que $N_f = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ soit ouvert pour tout $f \in \widetilde{A}$.*

...

...

...

Soit R un anneau réel. Nous appelons f-*algèbre* sur R tout f-anneau A qui est aussi une algèbre sur R tel que $ra > 0$ quels que soient $0 < r \in R$ et $0 < a \in A$.

III.9.11 THEOREME. - *Soit A une f-algèbre sur un anneau réel R. Pour que A soit isomorphe à $\mathcal{L}_k(X, R)$, où X désigne un espace topologique ayant une base d'ouverts compacts, il faut et il suffit que toute image homomorphe totalement ordonné de A soit isomorphe à R.*

...

...

...

COROLLAIRE 1. - *Toute f-algèbe sur $\mathbb{R}$ hyper-archimédienne est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{L}_k(X, \mathbb{R})$ des fonctions réelles localement constantes, définies sur un espace topologique X ayant une base d'ouverts compacts.*

En effet, si A est une f-algèbre sur $\mathbb{R}$ hyper-archimédienne, A/x est isomorpha à $\mathbb{R}$ quel que soit $x \in \mu A$.

COROLLAIRE 2. - *Un f-anneau A est isomorphe à l'anneau réticulé $\mathcal{C}_k(X, \mathbb{Z})$ des fonctions continues à supports compacts, définies sur un espaces topologique X ayant une base d'ouverts compacts, à valeur dans $\mathbb{Z}$ si, et seulement si, tout élément positif de A est une somme d'éléments idempotents.*

...

...

...

III.9.12 THEOREME. - *Soit A un groupe réticulé hyper-archimédien ayant un élément archimédien u. Alors A peut être représenté par un sous-groupe réticulé additif $\widetilde{A}$ de $\mathcal{C}_k(\mu A)$, qui contient la fonction constante 1 et qui est tel que $N_f = \{x \in \mu A; f(x) = 0\}$ soit ouvert pour tout $f \in \widetilde{A}$.*

...

...

...

III.9.13 THEOREME. (Bigard [3, p. 33]) - *Soit A un espace vectoriel réticulé sur $\mathbb{R}$ hyper-archimédien ayant un élément archimédien u. Alors A est isomorphe à $\mathcal{L}_k(\mu A, \mathbb{R})$.*

Ce théorème peut être démontré facilement à l'aide de III.9.4.

Remarque. - Les théorèmes III.9.12 et III.9.13 restent valables si l'on remplace l'hypothèse de l'existence d'un élément archimédien par l'hypothèse 'μA paracompact'. Car si μA est paracompact, il y a un recouvrement de μA par des ensembles ouverts compacts deux à deux disjoints et, par suite, A est la somme directe de sous-groupes (resp. de sous-espaces vectoriels) réticulés hyper-archimédiens ayant un élément archimédien.

Bibliography

[1] BERNAU, S. J.: Unique representation of archimedean lattice groups and normal archimedean lattice rings. Proc. London Math. Soc. (3), **15**, 599–631 (1965).

[2] BERNAU, S. J.: Orthocompletion of lattice groups. Proc. London Math. Soc. (3), **16**, 107–130 (1966).

[3] BIGARD, A.: Contribution à la théorie des groupes réticulés. Thèse Fac. Sci. Paris (1969).

[4] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 3rd edition (1967).

[5] BLAIR, R. L.: Ideal lattices and the structure of rings. Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 136–153 (1963).

[6] BOURBAKI, N.: Topologie générale. Chap. 1, 4^e édition, Hermann, Paris (1965).

[7] BOURBAKI, N.: Algèbre commutative. Chap. 1-2, Hermann, Paris (1961).

[8] BYRD, R. D.: Lattice ordered groups. Thèse, Tulane University (1966).

[9] CONRAD, P. F.: Introduction à la théorie des groupes réticulés. I.H.P. Paris (1967).

[10] DAUNS, J.: Representation of L-groups and F-rings. Pac. J. Math., **31**, 629–654 (1969).

[11] DAUNS, J., et K. H. HOFMANN: The representation of biregular rings by section. Math. Zeitschrift **91**, 103–123 (1966).

[12] DAUNS, J., et K. H. HOFMANN: Representation of rings by sections. Mem. Amer. Math. Soc. **83** (1968).

[13] DOWKER, C. H.: Lectures on sheaf theory. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1957).

[14] FRINK, O.: Pseudo-complements in semilattices. Duke Math. J.**29**, 505–514 (1962).

[15] FUCHS, L.: Partially ordered algebraic systems. Pergamon Press, Oxford (1963).

[16] GRÄTZER, G. and E. T: SCHMIDT: On a problem of M. H. Stone. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **8**, 455–260 (1957).

[17] HENRIKSEN, M. and J. R. ISBELL: Lattice-ordered rings and function rings. Pac. J. Math. **12**, 533–565 (1962).

[18] ISBELL, J. R.: A structure space for certain lattice ordered groups and rings. J. London Math. Soc. **40**, 63–71 (1965).

[19] JACOBSON, N.: Structure of rings. Amer. Math. Coll. Publ. Vol. XXXVII, New York (1956).

[20] JOHNSON, D. G.: A structure theory for a class of lattice ordered rings. Acta math. **104**, 163–215 (1960).

[21] —: On a representation theory for a class of archimedean lattice-ordered rings. Proc. London Math. Soc. (3) **12**, 207–225 (1962).

[22] KEIMEL, K.: Représentation d'anneaux réticulés dans des faisceaux. C. R: Acad. Sci. Paris **266**, 124–127 (1968).

[23] —: Anneaux réticulés quasi-réguliers et hyper-archimédiens. C. R: Acad. Sci. Paris **266**, 524–525 (1968).

[24] —: Darstellung von Halbgruppen und universellen Algebren durch Schnitte in Garben; bireguläre Halbgruppen. Math. Nachrichten **45**, 81–96 (1970).

[25] KIST, J. E.: Representation of archimedean function rings. Illinois J. Math. **7**, 269–278 (1963).

[26] LESIEUR, L.: Divers aspects de la théorie des idéaux d'un anneau commutatif. Enseignement Math. (2) **13**, 75–85 (1967).

[27] PAPERT, D: A representation theory for lattice groups. Proc. London Math. Soc. (3) **2**, 100–120 (1962).

[28] PIERCE, R.S.: Modules over comutative rings. Mem. Amer. Math. Soc. **70** (1967).

[29] SAMUEL, P.: Ultrafilters and compactifications of uniform spaces. Trans. Amer. MAth. Soc. **64**, 100–132 (1948).
[30] ŠATALOVA, M.A.: ℓ_A et ℓ_I-anneaux (en russe). Sibirsk Mat. Ž. **7**, 1383–1399 (1966).
[31] ŠIK, F.: Estrutura et realisaciones de grupos reticulados I, II. Mem. Fac. Cie. Univ. La Habana **1**, ser. Mat., fasc. 2-3. 11–29 (1964).
[32] ŠIK, F.: Struktur und Realisierungen von Verbandsgruppen III, IV. Mem. Fac. Cie. Univ. La Habana **1**, ser. Mat., fasc. 4. 1–20 (1966): fasc. 7, 19–44 (1968).
[33] SUBRAMANIAN, H.: Integer valued continuous functions, Bull. Soc. math. France **97**, 275–283 (1969).
[34] TELEMAN, S.: La représentation des anneaux réguliers par des faisceaux. Rev. Roum. Math. Pures Appl. **14**, 703–717 (1969).
[35] TELEMAN, S.: La représentation des annneaux Tauberiens par des faisceaux. Rev. Roum. Math. Pures Appl. **14**, 249–264 (1969).
[36] TELEMAN, S.: Représentation par faisceaux des modules sur les anneaux harmoniques. C. R¿ Acad. Sc. Paris **269**, 753–756 (1969).
[37] TELEMAN, S.: La représentation des algèbres de von Neumann finies par faisceaux. Rev. Roum. Math. Pures Appl. **15**, 143–152 (1969).
[38] VARLET, J.: Contribution à l'étude des treillis pseudo-complémentés et des treillis de Stone. Mem. Soc. Roy. Liège **8**, 1–71 (1963).
[39] VARLET, J.: On the characterization of Stone lattices. Acta Math. Szeged. **27**, 81–84 (1966).
[40] VEKSLER, A. I.: Lattice orders in algebras and rings. Soviet Math. Dokl. **6**, 1201–1204 (1965).
[41] VULIKH, B. Z.: Introduction to the theory of partially ordered spaces. Groningen (1967).
[42] KIST, J.: Compact spaces of prime ideals. Math. Zeitschrift **111**, 151–158 (1969).
[43] MULVEY, Ch.: Représentation de produits sous-directs d'anneaux par espaces annélés. C. R. Acad. Sci. Paris **270**, 564–567 (1970).