Primzahlen, Teilersummen und die Riemannsche Vermutung

Jan Hendrik Bruinier*

10. Januar 2001, 21. März 2001

Zusammenfassung

Wir betrachten die Arbeiten von Robin und Lagarias zum Wachstum der Teilersummenfunktion. Diese enthalten eine überraschend einfache Formulierung der Riemannschen Vermutung. Wir erläutern wichtige grundlegende Ideen, insbesondere den Zusammenhang zwischen der Lage der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und der Primzahlfunktion $\pi(x)$.

1 Einführung

Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ ist eine der prominentesten Funktionen der analytischen Zahlentheorie. Wir verwenden s als Standardvariable in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ und schreiben wie üblich σ für den Realteil von s und t für den Imaginärteil. Man definiert $\zeta(s)$ für $\sigma > 1$ durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Die unendliche Reihe konvergiert normal (wie man leicht durch Vergleich mit dem Integral $\int_1^\infty x^{-\sigma}\,dx$ zeigt) und stellt daher eine analytische, d.h. komplex differenzierbare, Funktion dar.

Aus der Tatsache, daß sich jede natürliche Zahl in (bis auf Reihenfolge der Faktoren) eindeutiger Weise als Produkt von Primzahlen darstellen läßt, kann man leicht die sogenannte Eulerproduktentwicklung folgern:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}. \tag{1}$$

Dabei erstreckt sich das Produkt über alle Primzahlen p. Es konvergiert für $\sigma > 1$. Diese Identität stellt eine Beziehung zwischen der Theorie der Primzahlen und der Riemannschen Zetafunktion her, welche von fundamentaler Bedeutung ist.

*Jan Hendrik Bruinier, University of Wisconsin-Madison, Department of Mathematics, 480 Lincoln Drive, Van Vleck Hall, Madison, WI 53706, USA, E-mail: bruinier@math.wisc.edu

Man kann zeigen, daß $\zeta(s)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ besitzt, die bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$ sogar analytisch ist. Weiterhin genügt $\zeta(s)$ einer Funktionalgleichung unter $s \mapsto 1 - s$, es liegt also eine Symmetrie bei Spieglung an der sogenannten *kritischen Geraden* $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma = 1/2\}$ vor.

Von besonderem Interesse sind die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion. Die Konvergenz des Eulerprodukts (1) impliziert, daß $\zeta(s)$ im Gebiet $\sigma > 1$ nirgends verschwindet. Mit Hilfe der Funktionalgleichung folgert man hieraus, daß im Gebiet $\sigma < 0$ lediglich die "trivialen" Nullstellen bei $s = -2, -4, \dots$ vorliegen.

Alle anderen (die "nichttrivialen") Nullstellen müssen nun im sogenannten kritischen Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$ liegen. Wir wollen die Menge dieser Nullstellen (mit Multiplizitäten) im folgenden mit Z bezeichnen. Riemann erkannte, daß ihre Lage wichtige Information über die Verteilung der Primzahlen kodiert. Er kam zu der folgenden

Vermutung (RV). *Alle nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ liegen auf der kritischen Geraden $G = \{s \in \mathbb{C};\ \sigma = 1/2\}$.*

Numerische Rechnungen stützen diese Vermutung. So gibt es zum Beispiel 5 Nullstellen, deren Imaginärteil zwischen 0 und 35 liegt. Sie lauten

$$\begin{aligned}
&1/2{+}i \cdot 14.134725\dots,\\
&1/2{+}i \cdot 21.022040\dots,\\
&1/2{+}i \cdot 25.010856\dots,\\
&1/2{+}i \cdot 30.424878\dots,\\
&1/2{+}i \cdot 32.935057\dots.
\end{aligned}$$

Mit den heutigen Computern kann man natürlich viel weiter rechnen. In der Tat prüfte man nach, daß die ersten $1,5$ Milliarden Nullstellen auf der kritischen Geraden G liegen. Hardy zeigte bereits 1914, daß sich unendlich viele Nullstellen auf G befinden; nach Resultaten von Selberg, Levinson und Conrey sogar mindestens $2/5$ aller Nullstellen aus Z. Ein weiterer Grund, an die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung zu glauben, besteht darin, daß die analoge Aussage für Zetafunktionen von algebraischen Varietäten über endlichen Körpern richtig ist. Dies wurde von Hasse (1933) für elliptische Kurven gezeigt und von Weil 1942 für Kurven beliebigen Geschlechts. Deligne konnte schließlich den Fall allgemeiner Varietäten über endlichen Körpern behandeln (siehe [Pa], [Ro]). Für umfassende Darstellungen dieser Argumente und weitergehende Betrachtungen sei auf die Monographien [Ed], [Iv], [Pa] und [Ri] verwiesen.

Die Riemannsche Vermutung ist eines der zentralen und härtesten Probleme der heutigen Zahlentheorie mit Auswirkungen auf diverse andere Gebiete.[1] Sie ist eines der "Millionen-Dollar-Probleme" des Clay-Instituts für Mathematik (http://www.claymath.org). Um so überraschender ist es, daß sie sich auf vollkommen elementare Weise formulieren läßt. Lagarias entdeckte kürzlich (2000), daß sie zum folgenden Problem äquivalent ist:

[1] Ein Beispiel aus der Kryptographie: Aus der Richtigkeit der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung würde folgen, daß der deterministische Primzahltest von Miller stets in polynomialer Zeit arbeitet [Wa].

Vermutung (TV). *Für alle natürlichen Zahlen n gilt die Ungleichung*

$$\sigma(n) \leq h(n) + e^{h(n)} \log(h(n)).$$

Dabei bezeichnet $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ *die Summe aller positiven Teiler von* n *und* $h(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ *die* n*-te harmonische Zahl.*

Das Kürzel "TV" steht hierbei für "Teilersummen-Vermutung". In der folgenden Tabelle stellen wir die linke und rechte Seite der Ungleichung für $n \leq 12$ gegenüber.

n	$\sigma(n)$	$h(n) + e^{h(n)} \log(h(n))$
1	1	1
2	3	3.31716854 ...
3	4	5.62453152 ...
4	7	7.97798290 ...
5	6	10.38226769 ...
6	12	12.83417872 ...
7	8	15.32927365 ...
8	15	17.86331817 ...
9	13	20.43258568 ...
10	18	23.03386680 ...
11	12	25.66440756 ...
12	28	28.32183725 ...

Es ist übrigens kein Zufall, daß die Differenz der rechten und der mittleren Spalte besonders klein ausfällt für $n = 1, 2, 6, 12$. Darauf werden wir später eingehen. Weitere "knappe" n-Werte sind:

n	$\sigma(n)$	$h(n) + e^{h(n)} \log(h(n))$
60	168	170.977 ...
120	360	366.063 ...
360	1 170	1 204.810 ...
720 720	3 249 792	3 393 620.629 ...

Man sollte eher nicht erwarten, daß die Teilersummen-Vermutung eine Möglichkeit für einen Beweis der Riemannschen Vermutung eröffnet. Vielmehr sollte man sie als besonders elementare und überraschende Formulierung auffassen. Im folgenden wollen wir die grundlegenden Ideen zum Beweis der Äquivalenz von RV und TV erklären. Lagarias zeigt, daß TV für große n zu einer ähnlichen Ungleichung TV' äquivalent ist, die von Robin (1984) untersucht wurde. Insbesondere zeigte Robin die Äquivalenz von TV' zur Riemannschen Vermutung. Dabei werden ausgefeilte Techniken der analytischen Zahlentheorie verwendet, die wir hier lediglich plausibel machen wollen. Eine wichtige Rolle spielt hier die sogenannte "explizite Formel", die eine Beziehung zwischen der Primzahlverteilungsfunktion $\psi(x)$ und den Nullstellen von $\zeta(s)$ herstellt. Dies wollen wir genauer untersuchen, bevor wir uns der Abschätzung von $\sigma(n)$ zuwenden.

2 Wie viele Primzahlen gibt es?

Wie bereits erwähnt, stellt die Eulerproduktentwicklung (1) eine Beziehung zwischen der Theorie der Primzahlen und den analytischen Eigenschaften von $\zeta(s)$ her. Wir wollen für dieses Prinzip ein einfaches Beispiel geben.

Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, mit anderen Worten: $\zeta(s)$ hat eine Singularität bei $s = 1$. Dies impliziert, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Das folgende Argument dafür geht auf Euler zurück.

Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$. Dann könnte man mit (1) die Riemannsche Zetafunktion als endliches Produkt schreiben:

$$\zeta(s) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - p_i^{-s}}.$$

Insbesondere wäre $\zeta(s)$ analytisch für $s \in \mathbb{C} - \{0\}$, im Widerspruch zur $\zeta(1) = \infty$.

Nachdem wir nun wissen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, wollen wir einen Schritt weiter gehen. Wir fragen uns nun, wieviele Primzahlen es gibt, die kleiner oder gleich einer vorgegebenen Größe x sind. Dazu führen wir die Primzahlverteilungsfunktion

$$\pi(x) = \#\{p \text{ prim}; \, p \leq x\}$$

ein. Gauss (1792) und Legendre (1798) vermuteten bereits, daß $\pi(x)$ durch den Integrallogarithmus

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$$

so gut approximiert wird, daß der relative Fehler für $x \to \infty$ gegen Null geht, also

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x).^2 \tag{2}$$

Die folgende Tabelle veranschaulicht die Güte der Approximation:

x	$\pi(x)$	$[\mathrm{Li}(x)]$	$\mathrm{Li}(x)/\pi(x) - 1$
10	4	5	.28
10^2	25	29	.16
10^3	168	176	.051
10^4	1 229	1 245	.013
10^5	9 592	9 628	$.38 \cdot 10^{-2}$
10^8	5 761 455	5 762 209	$.13 \cdot 10^{-3}$
10^{10}	455 052 511	455 055 615	$.68 \cdot 10^{-5}$
10^{12}	37 607 912 018	37 607 950 281	$.10 \cdot 10^{-5}$

[2] Wie üblich schreiben wir $f(x) \sim g(x)$, falls $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$. Man beachte, daß $\mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Tschebyscheff konnte Mitte des 19. Jahrhunderts mit elementaren Methoden zeigen, daß es Konstanten $0 < C < 1 < C'$ gibt (die man explizit berechnen kann), so daß für große x die Ungleichung

$$C\,\mathrm{Li}(x) < \pi(x) < C'\,\mathrm{Li}(x) \tag{3}$$

gilt. Die asymptotische Aussage (2) wurde schließlich von J. Hadamard und C. de la Vallée-Poussin im Jahre 1896 bewiesen und ist heute als Primzahlsatz bekannt. Ein entscheidender Schritt im Beweis besteht darin zu zeigen, daß die Riemannsche Zetafunktion auf der vertikalen Geraden $\sigma = 1$ keine Nullstellen hat.[3]

Der Zusammenhang zwischen der Menge Z der nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ und dem asymptotischen Verhalten von $\pi(x)$ wird anhand der sogenannten *expliziten Formel* besonders deutlich. Um diese darzustellen benötigen wir die Mangoldtsche Funktion

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p), & \text{falls } n = p^\nu \ (p \text{ prim}), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und ihre summatorische Funktion

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n).$$

Die Mangoldtsche Funktion tritt in der logarithmischen Ableitung von $\zeta(s)$ auf. Für $\sigma > 1$ gilt

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}. \tag{4}$$

Anstelle des asymptotischen Verhaltens von $\pi(x)$ kann man genausogut das asymptotische Verhalten von $\psi(x)$ studieren, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 1. *Sei $\alpha \ge 1/2$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(x^\alpha \log x\right), \text{[4]} \tag{5}$$

$$\psi(x) = x + O\left(x^\alpha \log^2 x\right). \tag{6}$$

Der Beweis ist eine Übung in partieller Summation und Integration.

Wir geben nun eine Variante der expliziten Formel an, die für uns besonders nützlich ist: Wenn $x > 1$ (und keine Primzahlpotenz[5]) und $T > 0$, so gilt

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho \in Z \\ |\Im(\rho)| \le T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}) + O\left(x(\log T)^2/T + x(\log x)/T + u(x,T)\right). \tag{7}$$

[3]Tatsächlich kann man zeigen, daß die Aussage $\zeta(1 + it) \neq 0$ für $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ zum Primzahlsatz (2) äquivalent ist.

[4]Wir schreiben $f(x) = g(x) + O(r(x))$, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß $|f(x) - g(x)| < C|r(x)|$ für große x.

[5]Falls $x = p^\nu$ eine Primzahlpotenz ist, so muß man auf der rechten Seite einen Term $\frac{1}{2}\log(p)$ hinzufügen.

Dabei ist $u(x,T) = O(\log x)$, und für festes x gilt sogar $u(x,T) = O((\log T)/T)$ (siehe [Pa] §3.8). Im Grenzfall $T \to \infty$ erhalten wir

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho \in Z} \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}). \tag{8}$$

Aus den obigen Formeln wird der Zusammenhang zwischen $\psi(x)$ und Z sofort plausibel. Wir präzisieren dies im nächsten Satz.

Satz 2. *Sei $\alpha \geq 1/2$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i) $\pi(x)$ genügt der Asymptotik

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(x^\alpha \log x\right).$$

ii) Für die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion gilt

$$Z \subset \{s \in \mathbb{C}; \quad \sigma \leq \alpha\}.$$

Beweis. (Eine detailliertere Darstellung findet man in [Pa] §5.8.) Aufgrund von Lemma 1 genügt es, die Äquivalenz von (ii) und der Asymptotik (6) für $\psi(x)$ nachzuweisen.

Angenommen (ii) ist wahr. Wir setzen $T = x^{1-\alpha}$ in (7) und erhalten

$$|\psi(x) - x| \leq x^\alpha \sum_{\substack{\rho \in Z \\ |\Im(\rho)| \leq x^{1-\alpha}}} |\rho|^{-1} + O\left(x^\alpha (\log x)^2\right). \tag{9}$$

Den ersten Term auf der rechten Seite kann man mit Hilfe der logarithmischen Ableitung der Hadamardschen Produktformel für $\zeta(s)$ abschätzen. Man findet

$$\sum_{\substack{\rho \in Z \\ |\Im(\rho)| \leq T}} |\rho|^{-1} = O((\log T)^2).$$

Setzen wir dies in (9) ein, so erhalten wir

$$|\psi(x) - x| = O\left(x^\alpha (\log x)^2\right)$$

und damit (i).

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion. Aus (4) ergibt sich mit partieller Summation für $\sigma > 1$:

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) \left(n^{-s} - (n+1)^{-s}\right). \end{aligned}$$

Wir schreiben $\psi(x) = x + r(x)$, wobei $r(x) = O(x^\alpha (\log x)^2)$. Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(n^{-s} - (n+1)^{-s}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \left(n^{-s} - (n+1)^{-s}\right) \\ &= \zeta(s) + \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \left(n^{-s} - (n+1)^{-s}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Wegen $n^{-s} - (n+1)^{-s} = s\int_n^{n+1} x^{-s-1}dx$, gilt $|n^{-s} - (n+1)^{-s}| \le |s|n^{-\sigma-1}$. Folglich konvergiert die Reihe in (10) normal auf $\sigma > \alpha$. Bis auf einen Pol bei $s = 1$ ist die rechte Seite somit analytisch für $\sigma > \alpha$. Dies impliziert $Z \subset \{s;\ \sigma \le \alpha\}$. $\square$

Da nach Hardy unendlich viele Nullstellen auf der kritischen Geraden G liegen, folgt aus Satz 2, daß $O(x^{1/2}\log x)$ im wesentlichen der bestmögliche Fehlerterm im Primzahlsatz ist. Tatsächlich zeigte Littlewood, daß $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ mindestens in der Größenordnung von $\mathrm{Li}(x^{1/2} \log\log\log x)$ um Null oszilliert [Li].

Die Riemannsche Vermutung ist also äquivalent zu der bestmöglichen Approximation $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{1/2}\log x)$ der Primzahlfunktion $\pi(x)$. Man kann explizite O-Konstanten angeben. Nach Schoenfeld [Sch] ist RV zum Beispiel gleichbedeutend mit

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log x, \qquad \text{für } x \ge 2657.$$

Es sei hier betont, daß die Aussage (ii) in Satz 2 gegenwärtig für kein $\alpha < 1$ bewiesen ist. Dementsprechend hat man gegenwärtig den Primzahlsatz lediglich mit einer schwachen Restgliedabschätzung zur Verfügung. Man weiß, daß

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x/\log^2 x) \tag{11}$$

oder äquivalent $\psi(x) = x + O(x/\log x)$. (Dies ist nicht das schärfste bekannte Resultat, genügt jedoch für unsere Zwecke.)

3 Teilersummen

Wir wenden uns nun dem Studium der Teilersummen $\sigma(n)$ und der Vermutung TV zu.

Zunächst stellen wir fest, daß $\sigma(n)$ multiplikativ ist: Für teilerfremde natürliche Zahlen m und n gilt $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$. Besonders einfach ist die Teilersumme einer Primzahlpotenz p^r zu bestimmen. Diese ist eine geometrische Summe:

$$\sigma(p^r) = 1 + p + \cdots + p^r = \frac{1 - p^{r+1}}{1 - p}.$$

Damit kann man $\sigma(n)$ ausrechnen, wenn man die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ von n kennt. Wir erhalten

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - p_i^{r_i+1}}{1 - p_i}.$$

Mit dieser Formel finden wir eine erste obere Schranke für die Teilersumme. Offenbar ist

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - p_i^{-r_i - 1}}{1 - p_i^{-1}} < \prod_{p|n} \frac{1}{1 - p^{-1}}, \tag{12}$$

wobei sich das letzte Produkt über alle Primteiler von n erstreckt. Man kann folgern, daß für alle $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\sigma(n) = O_\varepsilon(n^{1+\varepsilon}) \tag{13}$$

gilt. Die Summe der Teiler von n wächst also nur minimal schneller als n selbst. Man beachte, daß auf der anderen Seite die triviale (und scharfe) Ungleichung $\sigma(n) \geq n + 1$ besteht.

Eine wesentliche Verbesserung stellt das nächste Resultat dar.

Satz 3. *Für den Limes superior gilt*

$$\overline{\lim} \frac{\sigma(n)}{n \log\log n} = e^\gamma.$$

Dabei bezeichnet $\gamma = \lim_{n\to\infty}(h(n) - \log n) = 0.577216\ldots$ *die Euler-Mascheronische Konstante.*

Wir wollen den Beweis hier darstellen, da darin einige grundlegende Ideen deutlich werden. Er beruht auf der folgenden asymptotischen Formel von Mertens (1874):

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - p^{-1}} \sim e^\gamma \log x. \tag{14}$$

Dabei erstreckt sich das Produkt auf der linken Seite über alle Primzahlen p, die kleiner oder gleich x sind. Da $\zeta(1) = \infty$ ist, divergiert das Produkt für $x \to \infty$. Mertens' Resultat beschreibt die "Geschwindigkeit" der Divergenz. Es ist nicht überraschend, daß im Beweis von (14) genauere Information über die Primzahlfunktion $\pi(x)$ eingeht. Tatsächlich wird die Tschebyscheff-Ungleichung (3) benötigt.

Beweis von Satz 3. (Siehe auch [HW].) Wir setzen $f(n) = \frac{\sigma(n)}{e^\gamma n \log\log n}$ und zeigen zunächst $\overline{\lim} f(n) \leq 1$. Wir schreiben $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ für die Primfaktorzerlegung von n und benutzen die Formel (12). Trivialerweise könnten wir die rechte Seite abschätzen durch

$$\prod_{p \leq n} \frac{1}{1 - p^{-1}}$$

und anschließend das obige Resultat von Mertens benutzen. Damit erhielten wir jedoch lediglich $\overline{\lim} \frac{\sigma(n)}{e^\gamma n \log n} \leq 1$, eine zu schwache Aussage. Um zum gewünschten Ergebnis zu gelangen, beobachten wir, daß die großen Primteiler von n zu *kleinen* Faktoren im Produkt auf der rechten Seite von (12) führen. Außerdem kann n nur wenige große Primteiler besitzen, da deren Produkt offenbar durch n beschränkt ist.

Um diese Überlegung zu präzisieren, betrachten wir zunächst alle Primteiler von n separat, welche größer als $\log n$ sind. Für ihre Anzahl t gilt $(\log n)^t < n$ und daher $t < \frac{\log n}{\log\log n}$. Weiterhin haben wir für $p > \log n$:

$$\frac{1}{1-p^{-1}} < \frac{1}{1-(\log n)^{-1}}.$$

Wir erhalten die Abschätzung

$$\prod_{\substack{p|n \\ p>\log n}} \frac{1}{1-p^{-1}} \leq \left(1-\frac{1}{\log n}\right)^{-\frac{\log n}{\log\log n}}.$$

Somit ist

$$\prod_{p|n} \frac{1}{1-p^{-1}} \leq \left(1-\frac{1}{\log n}\right)^{-\frac{\log n}{\log\log n}} \prod_{p\leq \log n} \frac{1}{1-p^{-1}},$$

$$f(n) \leq \frac{e^{-\gamma}}{\log\log n}\left(1-\frac{1}{\log n}\right)^{-\frac{\log n}{\log\log n}} \prod_{p\leq \log n} \frac{1}{1-p^{-1}}.$$

Folglich gilt $f(n) \leq F(\log n)$ mit

$$F(x) = \frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{x}{\log x}} \prod_{p\leq x} \frac{1}{1-p^{-1}}.$$

Aufgrund von Mertens' Formel haben wir

$$F(x) \sim \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{x}{\log x}} = 1 + O(1/\log x) \sim 1.$$

Dies impliziert die obere Schranke für den Limes superior.

Um eine untere Schranke für $\overline{\lim} f(n)$ zu erhalten geben wir eine Folge $n_1, n_2, \ldots$ an mit $\underline{\lim} f(n_j) \geq 1$. Wir setzen für $j \in \mathbb{N}$:

$$n_j = \prod_{p\leq e^j} p^j.$$

Aufgrund der Tschebyscheff-Ungleichung gilt

$$\log n_j = \sum_{p\leq e^j} j\log p \leq j\psi(e^j) \leq Cje^j$$

mit einer Konstanten $C > 1$. Somit ist $\log\log n_j \leq C' + j + \log j$ mit einer anderen Konstanten $C' > 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} f(n_j) &= \frac{e^{-\gamma}}{\log\log n_j} \prod_{p\leq e^j} \frac{1-p^{-j-1}}{1-p^{-1}} \\ &\geq \frac{e^{-\gamma}}{\zeta(j+1)(C'+j+\log j)} \prod_{p\leq e^j} \frac{1}{1-p^{-1}} =: G(j). \end{aligned}$$

Mit Mertens' Formel finden wir

$$\frac{e^{-\gamma}}{j+\log j}\prod_{p\le e^j}\frac{1}{1-p^{-1}}\sim 1, \qquad j\to\infty.$$

Wegen $\zeta(j+1)\to 1$ für $j\to\infty$, gilt $G(j)\sim 1$. Damit ist Satz 3 bewiesen. $\square$

Numerische Rechnungen legen die Vermutung nahe, daß für große n (genauer für $n\ge 5041$) tatsächlich die Ungleichung

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log\log n \tag{15}$$

gilt. G. Robin erzielte in dieser Richtung unter anderem das folgende schöne Resultat [Ro].

Satz 4 (Robin). *Die Riemannsche Vermutung (RV) ist genau dann wahr, wenn für alle $n\ge 5041$ die Ungleichung (15) gilt.*

Korollar 5 (Lagarias). *Die Riemannsche Vermutung ist zur Teilersummen-Vermutung äquivalent.*

Beweis des Korollars. Durch Vergleich der n-ten harmonischen Summe $h(n)$ mit dem Integral $\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}$ erhält man die elementare Ungleichung

$$\gamma+\log n \le h(n) \le \gamma+\log n+\log(1+1/n) \tag{16}$$

(siehe z.B. [HW] §22.5). Angenommen RV ist wahr. Dann folgt mit (16) und Robins Resultat $\sigma(n) < e^{h(n)}\log h(n)$ für alle $n\ge 5041$, also insbesondere TV. Für $n\le 5040$ prüft man TV schnell mit dem Computer nach.

Wenn RV falsch ist, dann zeigt Robin genauer, daß es unendlich viele n gibt, für die (15) nicht gilt. Er gibt präzise an, wie stark die Ungleichung verletzt sein muß ([Ro] §4, Proposition). Kombiniert man dies mit (16) so erhält man, daß auch die Ungleichung in TV für unendlich viele n verletzt ist (siehe [La]). $\square$

Wir wollen nun einige wesentliche Ideen im Beweis von Satz 4 erläutern, dabei aber lediglich die Inklusion "RV$\Rightarrow$(15)" betrachten.

Zunächst einmal möchte man die Ungleichung (15) nicht für alle n studieren, sondern nur für solche, bei denen $f(n)=\frac{\sigma(n)}{e^{\gamma}n\log\log n}$ besonders groß ist. Im Beweis von Satz 3 sahen wir bereits, daß dies für die Zahlen $n_j=\prod_{p\le e^j}p^j$ der Fall ist. Bessere Ergebnisse erhält man, wenn man anstelle der n_j die sogenannten *kolossal reichhaltigen Zahlen*[6] betrachtet.

Eine natürliche Zahl n heißt kolossal reichhaltig, wenn es ein $\varepsilon>0$ gibt, so daß

$$\sigma(m)/m^{1+\varepsilon}\le\sigma(n)/n^{1+\varepsilon} \qquad \text{für alle } m\in\mathbb{N}.$$

Aufgrund der elementaren Abschätzung (13) ist klar, daß die Funktion $\sigma(m)/m^{1+\varepsilon}$ in $\mathbb{N}$ für vorgegebenes $\varepsilon>0$ nur endlich viele Maxima annimmt. Diese Maxima sind gerade die (zu ε assoziierten) kolossal reichhaltigen Zahlen. In [EN] wird gezeigt, daß $\sigma(m)/m^{1+\varepsilon}$

[6] In der englischsprachigen Literatur "colossally abundant numbers".

höchstens vier Maxima besitzt, im generischen Fall sogar lediglich eines. Dieses Resultat beruht auf einem Prinzip der diophantischen Approximation.

Die Primfaktorzerlegung der zu ε assoziierten kolossal reichhaltigen Zahlen läßt sich auf einfache Weise bestimmen. Wir geben hier lediglich eine schwache Form des Resultats aus [EN] an. Dazu betrachten wir die Funktion

$$g(u) = \frac{\log(1 + 1/u)}{\log(u)}$$

auf dem offenen Intervall $(1, \infty)$. Sie ist streng monoton fallend und $\lim_{u \to 1} g(u) = \infty$ sowie $\lim_{u \to \infty} g(u) = 0$. Wir bezeichnen mit $h : (0, \infty) \to (1, \infty)$, $v \mapsto h_v$ die Umkehrfunktion von g. Offenbar ist $\lim_{v \to 0} h_v = \infty$ und $\lim_{v \to \infty} h_v = 1$.

Es sei N_ε eine zu $\varepsilon > 0$ assoziierte kolossal reichhaltige Zahl und p eine Primzahl. Dann gilt

$$p | N_\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad p \leq h_\varepsilon, \tag{17}$$

$$p^2 | N_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad p < \sqrt{2 h_\varepsilon}. \tag{18}$$

Damit erhalten wir insbesondere, daß es unendlich viele kolossal reichhaltige Zahlen gibt. In der folgenden Tabelle geben wir die ersten elf dieser Zahlen an. Eine größere Tabelle findet man in [EN].

n	Primfaktorzerlegung	$\sigma(n)$	$\sigma(n)/n$
1	1	1	1
2	2	3	1.5
6	$2 \cdot 3$	12	2
12	$2^2 \cdot 3$	28	$2.333\ldots$
60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	168	2.8
120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	360	3
360	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	1 170	3.25
2 520	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	9 360	$3.714\ldots$
5 040	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	19 344	$3.838\ldots$
55 440	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	232 128	$4.187\ldots$
720 720	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	3 249 792	$4.509\ldots$

Übrigens zeigten Alaoglu und Erdös bereits, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender kolossal reichhaltiger Zahlen eine Primzahl oder das Produkt zweier Primzahlen ist. Sie vermuteten, daß nur die erste Möglichkeit auftritt. Diese Vermutung ist bis heute unbewiesen [AE].

Für unsere Zwecke ist das folgende Lemma entscheidend:

Lemma 6. *Es seien N und N' zwei aufeinanderfolgende kolossal reichhaltige Zahlen ≥ 3. Dann gilt für alle n zwischen N und N':*

$$f(n) \leq \max(f(N), f(N')).$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Riemannsche Vermutung gilt und daraus die Gültigkeit von (15) für große n folgern. Aufgrund von Lemma 6 können wir uns auf das Studium großer kolossal reichhaltiger Zahlen beschränken.

Es sei ein kleines $\varepsilon > 0$ gegeben und N_ε eine zu ε assoziierte kolossal reichhaltige Zahl. Mit Hilfe der Formel für $\sigma(n)$ und (17), (18) können wir $f(N_\varepsilon)$ nach oben beschränken:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(N_\varepsilon)}{N_\varepsilon} &\leq \prod_{(2h_\varepsilon)^{1/2} \leq p \leq h_\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \times \prod_{p < 2(h_\varepsilon)^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) \\
&= \prod_{(2h_\varepsilon)^{1/2} < p \leq h_\varepsilon} (1 - p^{-2}) \times \prod_{p \leq h_\varepsilon} \frac{1}{1 - p^{-1}}, \\
f(N_\varepsilon) &\leq \frac{e^{-\gamma}}{\log\log N_\varepsilon} \prod_{(2h_\varepsilon)^{1/2} < p \leq h_\varepsilon} (1 - p^{-2}) \times \prod_{p \leq h_\varepsilon} \frac{1}{1 - p^{-1}}.
\end{aligned}$$

Wir schätzen sämtliche Größen auf der rechten Seite in Termen von h_ε ab (siehe [Ro] §3 Prop. 2). Dazu benötigen wir die Tschebyscheff-Funktion

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log(p).$$

Man beachte, daß $\theta(x)$ in etwa wie $\psi(x)$ wächst. Wie man leicht nachprüft gilt $\theta(x) = \psi(x) + O(\sqrt{x} \log x)$. (Somit könnten wir in Lemma 1 die Funktion ψ durch θ ersetzen und den Primzahlsatz mit Hilfe von $\theta(x)$ formulieren.)

1. Aus der Kenntnis der Primfaktorzerlegung von N_ε (eine einfache Verschärfung von (17) und (18)) und dem Primzahlsatz mit schwachem Restglied (11) erhält man

$$\log\log N_\varepsilon = (\log \theta(h_\varepsilon)) \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h_\varepsilon} \log h_\varepsilon} + O\left(\frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon} \log^2 h_\varepsilon}\right)\right).$$

2. Ebenfalls aus (11) folgert man $\sum_{p \geq x} p^{-2} = \frac{1}{x \log x} + O(\frac{1}{x \log^2 x})$. Dies impliziert

$$\prod_{(2h_\varepsilon)^{1/2} < p \leq h_\varepsilon} (1 - p^{-2}) = \exp\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{h_\varepsilon} \log h_\varepsilon} + O\left(\frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon} \log^2 h_\varepsilon}\right)\right).$$

3. Bisher haben wir RV noch gar nicht benutzt. Der springende Punkt ist jedoch die Abschätzung des Produktes $\prod_{p \leq h_\varepsilon} \frac{1}{1-p^{-1}}$ nach oben. Dies kann uns nicht weiter überraschen. Schließlich spielte dieses Produkt bereits im Beweis von Satz 3 die entscheidende Rolle. Dort benutzten wir die asymptotische Formel von Mertens, die ihrerseits auf der Tschebyscheffabschätzung von $\pi(x)$ beruht. Es ist plausibel, daß eine genauere Kenntnis der Primzahlverteilungsfunktion eine bessere Abschätzung des Produktes ermöglicht.

Unter Annahme der Riemannschen Vermutung haben wir mit Satz 2 eine sehr genaue Beschreibung von $\pi(x)$ zur Verfügung. Nicolas und Robin konnten unter dieser Voraussetzung die Ungleichung

$$\prod_{p \leq h_\varepsilon} \frac{1}{1 - p^{-1}} \leq e^\gamma (\log \theta(h_\varepsilon)) \exp\left(\frac{2 + c}{\sqrt{h_\varepsilon} \log h_\varepsilon} + O\left(\frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon} \log^2 h_\varepsilon}\right)\right)$$

beweisen. Hierbei ist $c = \sum_{\rho \in Z} |\rho|^{-2} = \gamma + 2 - \log 4\pi = 0.04619\ldots$ ([Ed] p. 67). (Tatsächlich geht die Riemannsche Vermutung über eine Variante der expliziten Formel im Beweis auch direkt ein.)

Wir kombinieren die obigen drei Abschätzungen und finden

$$f(N_\varepsilon) \leq \exp\left(\frac{2 + c - 2\sqrt{2}}{\sqrt{h_\varepsilon}\log h_\varepsilon} + O\left(\frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon}\log^2 h_\varepsilon}\right)\right).$$

Wenn $N_\varepsilon \to \infty$, geht auch $h_\varepsilon \to \infty$. Folglich gilt die Ungleichung (15) für große kolossal reichhaltige Zahlen N_ε. Wegen Lemma 6 gilt sie damit für alle großen natürlichen Zahlen n. Wenn man in der obigen Argumentation alle O-Konstanten explizit angibt, so kann man zeigen, daß (15) tatsächlich für $n \geq 5041$ gilt. Dies ist allerdings durchaus ein nichttriviales Problem, wie man beim Studium von [Ro] feststellt. Für die kolossal reichhaltige Zahl $n = 5040$ ist (15) übrigens verletzt, wie auch für einige andere kleinere n.

Literatur

[AE] *L. Alaoglu and P. Erdös*, On Highly Composite and Similar Numbers, Trans. Amer. Math. Soc. **56** (1944), 448–469.

[Ed] *H. M. Edwards*, Riemann's Zeta Funktion, Academic Press (1974).

[EN] *P. Erdös and J. L. Nicolas*, Répartition des nombres superabondants, Bull. Soc. Math. Fr. **103** (1975), 65–90.

[FB] *E. Freitag und R. Busam*, Funktionentheorie, Springer-Verlag (1995).

[HW] *G. H. Hardy and E. M. Wright*, An introduction to the theory of numbers, Oxford University Press (1979).

[Iv] *A. Ivić*, The Riemann zeta function, J. Wiley, New York (1985).

[La] *J. C. Lagarias*, An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis, preprint (2000), arXiv:math.NT/0008177.

[Li] *J. E. Littlewood*, Sur la distribution des nombres premiers, C. R. Acad. Sci. Paris **158** (1914), 869–872.

[Pa] *S. J. Patterson*, An introduction to the theory of the Riemann Zeta-function, Cambridge University Press (1988).

[Ri] *P. Ribenboim*, The little book of big primes, Springer-Verlag (1991).

[Ro] *G. Robin*, Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann, J. Math. pures et appl. **63** (1984), 187–213.

[Roq] *R. Roquette*, Zur Geschichte der Zahlentheorie in den dreißiger Jahren. Die Entsteheung der Riemannschen Vermutung für Kurven, und ihr Beweis im elliptischen Fall, Math. Semesterber. **45** (1998), 1–38.

[Sch] *L. Schoenfeld*, Sharper Bounds for the Chebyshev Funktions $\theta(x)$ and $\psi(x)$ II, Math. of Comp. **30** (1975), 337–360.

[Wa] *S. Wagon*, Primality testing, Math. Intelligencer **8** (1986), 58–61.