Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Achim Blumensath
Nicole Nowak
Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2008/2009

Probeklausur Lineare Algebra I

Sie können während der Klausur beliebige schriftliche Unterlagen verwenden. **Elektronische Geräte wie Taschenrechner und Mobiltelefone sind nicht erlaubt.** Es wird erwartet, daß alle Lösungen begründet und alle Zwischenschritte angegeben werden. Der Hauptteil der Punkte wird für Lösungswege vergeben, nicht für Endresultate.

(T13.1) (8 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Bitte Kästchen ankreuzen. Eine Begründung ist nicht erforderlich.)

(i) Sei E ein System von m linearen Gleichungen in n Unbekannten. Angenommen, E hat mindestens eine Lösung. Dann ist $\dim(S(E))$

$\square \leqslant n - m$	$\square \leqslant m - n$
$\square = n - m$	$\square = m - n$
$\square \geqslant n - m$	$\square \geqslant m - n$

(ii) Ist U ein Unterraum von V, so ist $V \setminus U$

- $\square$ immer ein Unterraum;
- $\square$ manchmal ein Unterraum;
- $\square$ nie ein Unterraum.

(iii) Zu jedem Unterraum U von V gibt es Endomorphismen $\varphi : V \to V$ mit

- $\square$ $\ker(\varphi) = U$
- $\square$ $\text{image}(\varphi) = U$
- $\square$ $V = \text{image}(\varphi) \oplus U$

(iv) Sei A eine Matrix, welche die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ repräsentiert. Dann ist der Rang von A

- $\square = \dim(\ker(\varphi))$
- $\square = \dim(\text{image}(\varphi))$
- $\square \leqslant \dim(V)$
- $\square \leqslant \dim(W)$

(T13.2) (6 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

(i) Mit welchen der folgenden Vektoren können wir das Paar $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ erweitern?

$$(0, 0, 1)\,, \quad (0, 1, 1)\,, \quad (0, 1, 0)\,.$$

(ii) Welche Vektoren der Basis $B = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ können gegen den Vektor $(1, 2, 1)$ ausgetauscht werden, so daß wir wieder eine Basis von $\mathbb{R}^3$ erhalten?

(T13.3) (6 Punkte)

Wir betrachten folgendes lineare Gleichungssystem mit Variablen x, y und z und einem Parameter $k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, für welche k das Systeme keine Lösung, eine eindeutige Lösung bzw. mehr als eine Lösung in $\mathbb{R}^3$ besitzt.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & kz & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & 1 \\ kx & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

(T13.4) (6 Punkte)

Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{F}_2$.

(i) Bestimmen Sie den Rang von A und B.

(ii) Berechnen Sie, falls möglich, die Inversen von A und B.

(T13.5) (8 Punkte)

Sei φ die lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^4$ mit

$$\varphi(1,0,0) = (1,-3,2,4)\,, \quad \varphi(0,1,0) = (5,-3,0,2)\,, \quad \varphi(0,0,1) = (-2,0,1,1)\,.$$

(i) Finden Sie die Matrixdarstellung A_φ von φ (bzgl. der Standardbasis).

(ii) Berechnen Sie den Kern von φ.

(iii) Bestimmen Sie die Dimensionen von $\ker(\varphi)$ und $\mathrm{image}(\varphi)$.

(iv) Finden Sie Basen von $\ker(\varphi)$ und $\mathrm{image}(\varphi)$.

(T13.6) (6 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit

$$\varphi(1,2,0) = (0,1,-1)\,, \quad \varphi(0,-1,1) = (1,1,0)\,, \quad \varphi(0,1,1) = (-1,0,1)\,.$$

Berechnen Sie $[\![\varphi]\!]_B^B$ für die Basis $B = ((1,2,0),(0,-1,1),(0,1,1))$.

(T13.7) (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde diskutiert, daß es zu jeder linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ einen Isomorphismus

$$V/\ker(\varphi) \simeq \mathrm{image}(\varphi)$$

gibt.

(i) Erklären Sie diese Aussage und die darin auftauchenden Begriffe in eigenen Worten. Es kann hilfreich sein, zunächst den zugrundeliegenden Isomorphismus (in Worten) zu beschreiben.

(ii) Was folgt daraus für die Dimensionen von V, $\ker(\varphi)$ und $\mathrm{image}(\varphi)$?