Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

June 5, 2007

8th Exercise Sheet Linear Algebra II for MCS
Summer Term 2007

(E8.1) [Cauchy-Schwarz]

(Exercise 2.1.4 on page 60 of the notes)
Let $(V, \langle . , . \rangle)$ be a euclidean or unitary vector space. Show that equality holds in the Cauchy-Schwarz inequality, i.e., $| \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle | = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$, if, and only if, $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$ are linearly dependent.

(E8.2) [Triangle inequality]

(Exercise 2.1.5 on page 60 of the notes)
Let $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ be pairwise distinct vectors in a euclidean or unitary vector space $(V, \langle . , . \rangle)$, and write $\mathbf{a} := \mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{b} := \mathbf{w} - \mathbf{v}$. Show that equality holds in the triangle inequality

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \text{ or, equivalently } \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|,$$

if, and only if, $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are *positive real* scalar multiples of each other (geometrically: $\mathbf{v} = \mathbf{u} + s(\mathbf{w} - \mathbf{u})$ for some $s \in (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$).

(E8.3) [Orthonormal bases]

Determine an orthonormal basis of $\mathbb{C}^3$ w.r.t. the standard scalar product of $\mathbb{C}^3$ which contains the vector

$$\frac{1}{2}(1 + i, 0, 1 - i).$$

(E8.4) [Isometries]

(Exercise 2.1.6 on page 61 of the notes) Show that for any linear map $\rho : V \to V$ from a euclidean or unitary vector space $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ into itself the following are equivalent:

(i) $\rho(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ and ρ preserves distances: $d(\rho(\mathbf{v}), \rho(\mathbf{w})) = d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ for all $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(ii) ρ preserves norms: $\|\rho(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ for all $\mathbf{v} \in V$.

(iii) ρ preserves scalar products: $\langle \rho(\mathbf{v}), \rho(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ for all $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(E8.5) [Diagonalisation of hermitian matrices]

Let $A = A^+ \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ be a hermitian matrix.

(i) Show that all eigenvalues λ of A are real.

(ii) Show that for any eigenvalue λ, $\ker(A - \lambda E) = \ker(A - \lambda E)^2$ and conclude that A is diagonalisable.

Die OWO steht an. Die Fachschaft und die Studienberatung suchen für das kommende Wintersemester OWO Tutoren und studentische Mentoren.

Bei Interesse einfach melden bei:

- *Markus Helmerich (Raum 424):* helmerich@mathematik.tu-darmstadt.de oder
- *Artus und Pavol (Raum 345):* owo-orga@mathebau.de

Etwas mehr Info. Im Wintersemester erwartet der Fachbereich Mathematik der TU wieder ca. 150 Studienanfänger. Dabei stehen unsere neuen "Kleinen" vor einer besonders grossen Herausforderung: Sie sind die erste Generation des neuen Bachelors. Wir alle hatten in unserer OWO und danach viele Vorteile dadurch, dass erfahrene Studenten uns erklären konnten, "wo der Hase langläuft". Das wird ab dem nächsten Wintersemester nicht mehr so einfach. Denn erfahrene Bachelor-Studenten gibt es noch nicht.
Umso wichtiger ist es, dass viele von uns sich die Zeit nehmen, die Studienordnung des Bachelors zu lernen und für die nächste Generation im Mathebau eine ausgezeichnete OWO auf die Beine stellen.
Auch über die OWO hinaus wollen wir aber die Erstis so gut es geht unterstützen. Offene Türen, Ohren und Augen sind im Mathebau nichts neues. Dazu kommt mit dem Wintersemester das studentische Mentorensystem.
Dabei übernimmt ein Student höheren Semesters die Mentorenschaft für eine kleine Gruppe von Studienanfängern, ist für diese als Ansprechpartner da, trifft sich regelmässig mit ihnen etc.
Wer das Glück hatte, ein ähnliches Verhältnis mit seinen OWO-Eltern aufzubauen, weiss, dass ein solches System funktionieren und den Erstis eine grosse Hilfe sein kann. Die studentischen Mentoren werden dabei von der Studienberatung betreut und geschult und arbeiten eng mit den professoralen Mentoren zusammen. Das kostet Zeit, wird vom Fachbereich aber auch bezahlt. Selbstverständlich klappt das aber nur dann, wenn sich genügend Leute finden, die sich als deutsch- oder englischsprachiger OWO-Tutor und Mentor (idealerweise gleich beides Hand in Hand) anbieten.
Wenn Du jetzt Lust bekommen hast, die OWO-liche Elternliebe weiterzugeben und/oder Dir vorstellen könntest, Mentor für eine Gruppe hilfsbedürftiger Erstis zu sein, dann erklären Dir Markus Helmerich (Raum 424) und die OWO-Orga (Artus und Pavol : owo-orga@mathebau.de) gern alles Weitere.