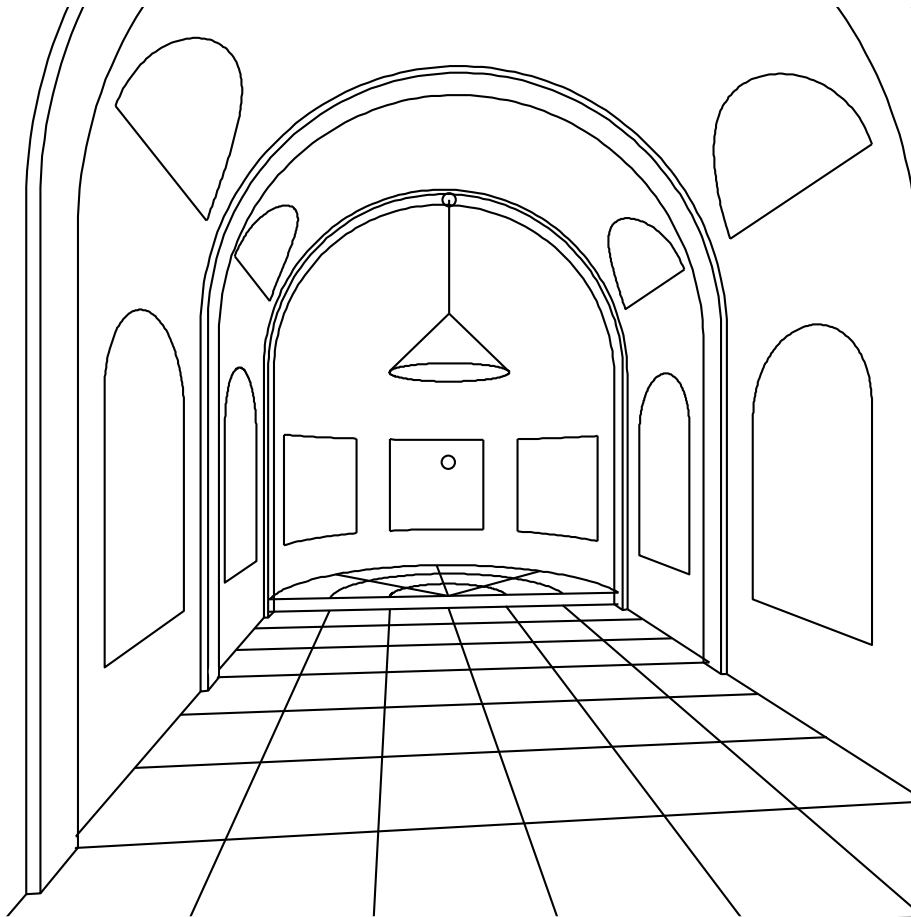


# Darstellende Geometrie

für Architekten



**Erich Hartmann**

Fachbereich Mathematik  
Technische Universität Darmstadt  
SS 05





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1	Abbildungsverfahren . . . . .	5
1.1.1	a) Parallelprojektion . . . . .	6
1.1.2	b) Zentralprojektion . . . . .	7
1.2	Lernziele der Vorlesung . . . . .	8
1.3	Literatur . . . . .	8
1.4	Grundbegriffe . . . . .	9
1.4.1	Bezeichnungen . . . . .	9
1.4.2	Symbole . . . . .	9
1.5	Eigenschaften von Projektionen . . . . .	10
1.5.1	Parallelprojektion . . . . .	10
1.5.2	Zentralprojektion . . . . .	10
1.6	Grundriss, Aufriss, Risskante, Ordner . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Axonometrie</b>	<b>13</b>
2.1	Konstruktion eines Bildpunktes . . . . .	13
2.2	Spezielle Axonometrien . . . . .	16
2.2.1	Vogel- und Kavalierperspektive . . . . .	16
2.2.2	Ingenieur-Axonometrie . . . . .	17
2.3	Einschneideverfahren . . . . .	18
2.4	Bemerkungen zur senkrechten Axonometrie . . . . .	20
2.5	Schatten in der Axonometrie . . . . .	20
2.5.1	Schatten bei parallelem Licht . . . . .	20
2.5.2	Schatten bei zentralem Licht . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Zwei- und Mehrtafelprojektion, Dachausmittelung</b>	<b>23</b>
3.1	Zweitafelprojektion von Punkten . . . . .	23
3.2	Zweitafelprojektion von Geraden . . . . .	24
3.3	Zweitafelprojektion einer Ebene . . . . .	29
3.4	Weitere Risse (Umprojektionen) . . . . .	32
3.5	Grundaufgaben . . . . .	35
3.5.1	Schnittpunkt (Durchstoßpunkt) Gerade-Ebene . . . . .	35
3.5.2	Wahre Länge einer Strecke . . . . .	37
3.5.3	Wahre Gestalt einer ebenen Figur . . . . .	39
3.5.4	Lot auf eine Ebene . . . . .	40
3.6	Einschneideverfahren bei senkrechter Axonometrie . . . . .	41
3.7	Dachausmittelung . . . . .	46

<b>4</b>	<b>Projektion von Kurven und Flächen</b>	<b>49</b>
4.1	Kreis und Ellipse	49
4.2	Normalriss eines Kreises	52
4.3	Parallelprojektion einer Ellipse	53
4.4	Kreis und Ellipse in der Axonometrie	56
4.5	Zylinder und Kegel	58
4.6	Abwickelbare Flächen	60
4.6.1	Abwicklung eines Drehzylinders	60
4.6.2	Abwicklung eines Drehkegels	61
4.7	Schraublinien und Schraubflächen	62
4.8	Rotationsflächen	65
4.9	Regelflächen	67
4.10	Rohrflächen	68
4.11	Durchdringungen	70
4.11.1	Beispiel 1: Gerade $g$ – Kugel $\Phi$	70
4.11.2	Beispiel 2: Gerade $g$ – Kegel $\Phi$	71
4.12	Durchdringungskurve zweier Flächen	71
4.12.1	Beispiel 1: Hilfsebenen	72
4.12.2	Beispiel 2: Hilfskugeln	73
<b>5</b>	<b>Zentralprojektion und Rekonstruktion</b>	<b>79</b>
5.1	Zentralprojektion	79
5.1.1	Definitionen zur Zentralprojektion	79
5.1.2	Spurpunkt, Fluchtpunkt, Spurgrade, Fluchtgerade	82
5.1.3	Konstruktion perspektiver Bilder bei senkrechter Bildtafel	83
5.2	Hilfskonstruktionen	89
5.2.1	Wahrer Mittelpunkt einer Strecke	89
5.2.2	Distanzpunkte	90
5.2.3	Fluchtpunkte nicht horizontaler Geraden	93
5.2.4	Nicht erreichbare Fluchtpunkte	94
5.3	Spiegelung an einer Ebene	97
5.4	Schattenkonstruktionen	100
5.4.1	Schatten bei Parallelbeleuchtung	100
5.4.2	Schatten bei Zentralbeleuchtung	101
5.5	Perspektive bei geneigter Bildtafel	107
5.6	Rekonstruktionen	112
5.6.1	Rekonstruktion bei Standardanordnung und senkrechter Bildtafel	112
5.6.2	Bestimmung der äußeren Orientierung	116
5.6.3	Rekonstruktion aus Photographien	118
5.7	Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel	124
5.7.1	Bestimmung der wahren Länge einer Strecke in Achsenrichtung	125
5.7.2	Entzerrung mit Hilfe des Doppelverhältnisses	129
5.8	Abbildung von Kurven	132
5.9	Abbildung von Kreisen	134
5.10	Abbildung von Flächen	141
5.11	Zum Schluss: Drei Aufgaben	147

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Aufgabe der *Darstellenden Geometrie* besteht darin, räumliche Objekte in einer Zeichenebene darzustellen. Dabei spielen zwei konkurrierende Gesichtspunkte eine wesentlichen Rolle. Will man *Maßgenauigkeit* erreichen, so ist dies meistens nur unter Verlust von *Anschaulichkeit* möglich. Z.B. lassen die beiden folgenden Bilder eines Hauses leicht auf Länge, Breite und Höhe schließen; sie sind aber nicht sehr anschaulich.

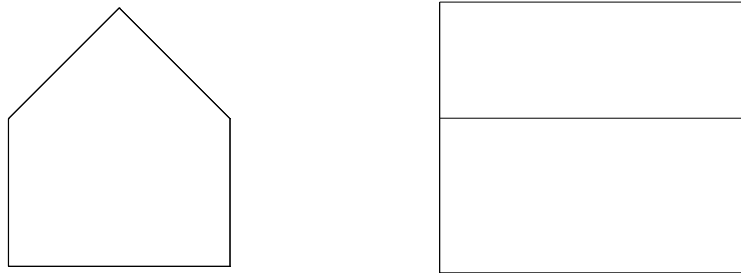


Abbildung 1.1: Haus in Seitenansicht

Dagegen bringen die nächsten beiden Bilder den räumlichen Eindruck mehr zur Geltung. Genaue Abmessungen lassen sich aber (insbesondere aus dem rechten Bild) nur schwer ablesen.

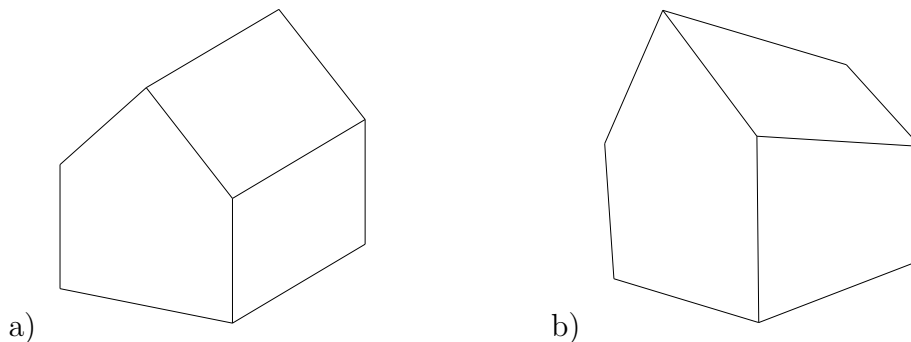


Abbildung 1.2: Haus in a) senkrechter Parallel- und b) Zentralprojektion

### 1.1 Abbildungsverfahren

In der Darstellenden Geometrie bedient man sich im wesentlichen zweier Abbildungsverfahren. Dabei werden Punkte und Kurven eines Objektes mit Hilfe von Strahlen (Geraden) auf eine Bildtafel (Ebene) projiziert:

### 1.1.1 a) Parallelprojektion

Die Abbildungsstrahlen sind **parallel**, wie z.B. beim Sonnenlicht. Dabei unterscheidet man noch die beiden Fälle:

- a1) Die Strahlen stehen **senkrecht** zur Bildtafel (*senkrechte Parallelprojektion*).
- a2) Die Strahlen stehen **nicht senkrecht** zur Bildtafel (*schiefe Parallelprojektion*).

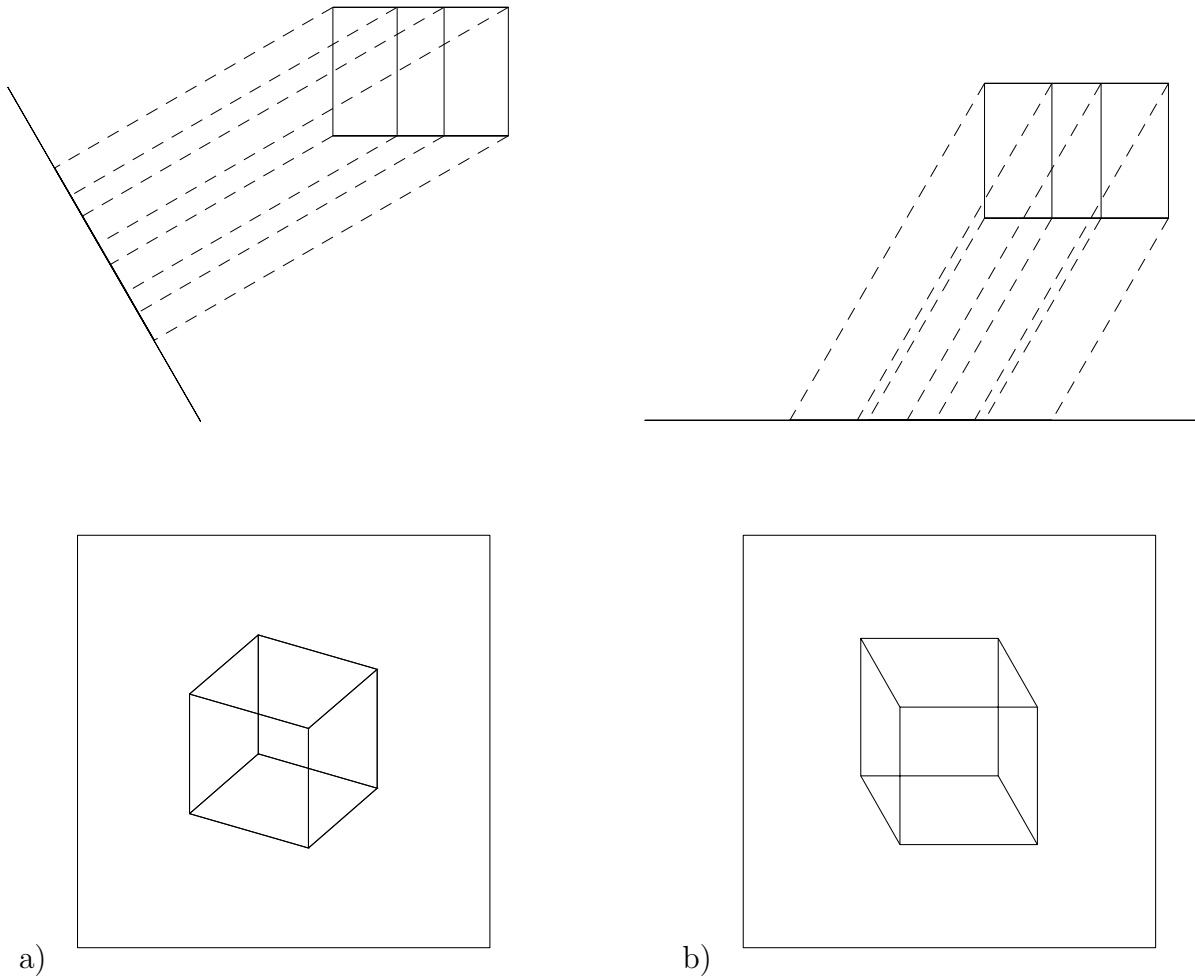


Abbildung 1.3: Quader in a) senkrechter und b) schiefer Parallelprojektion

#### **Bemerkung:**

Parallelprojektionen werden gerne von Ingenieuren verwendet wegen ihrer Verhältnistreue. Der Spezialfall **Vogelperspektive** ist eine schiefe Parallelprojektion (siehe Absch. 2.2.1), die insbesondere zur Veranschaulichung von Stadtplänen verwendet wird. Sie lässt sich relativ einfach von Hand herstellen.

Wir werden hier im Wesentlichen sog. **axonometrische** Bilder (schiefe/senkrechte Parallelprojektionen) mit Hilfe des *Einschneideverfahrens* herstellen.

### 1.1.2 b) Zentralprojektion

Alle Abbildungsstrahlen gehen durch einen Punkt, *Projektionszentrum* oder *Augpunkt* genannt.

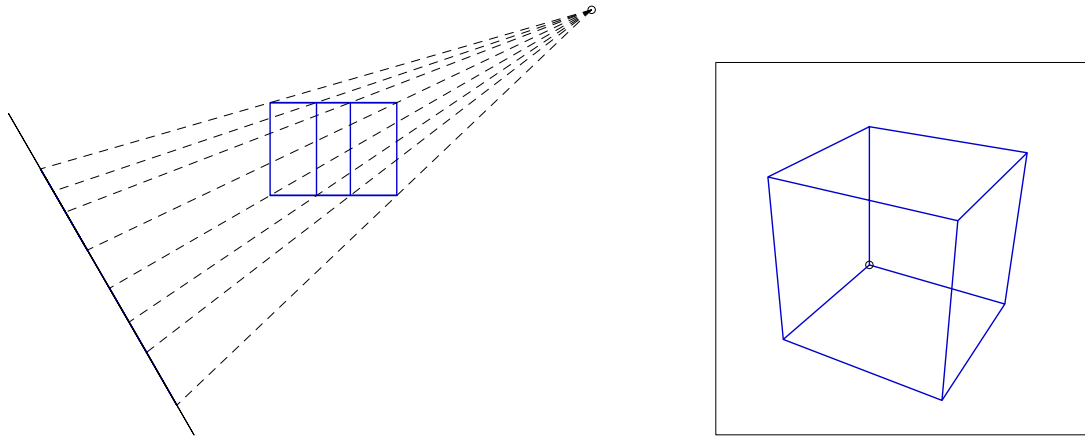


Abbildung 1.4: Quader in Zentralprojektion

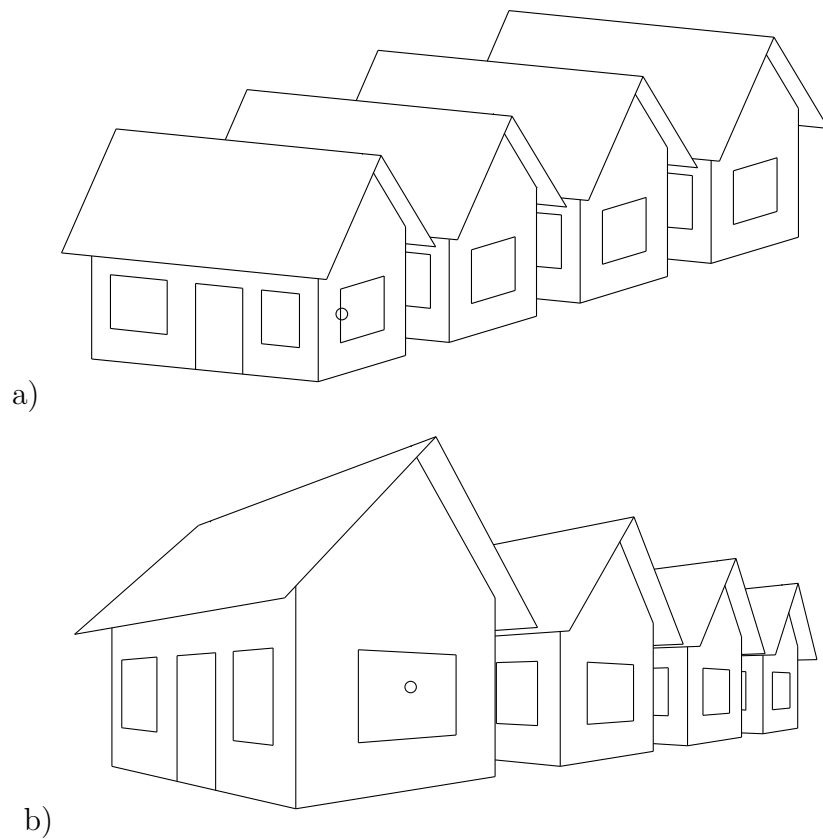


Abbildung 1.5: Häuser in a) Parallelprojektion b) Zentralprojektion

**Merke:**

Bei Parallelprojektion sind die Bilder paralleler Geraden i.a. wieder parallel.

Bei Zentralprojektion schneiden sich die Bilder paralleler Geraden i.a. in einem Punkt, dem *Fluchtpunkt* des Parallelbüschels.

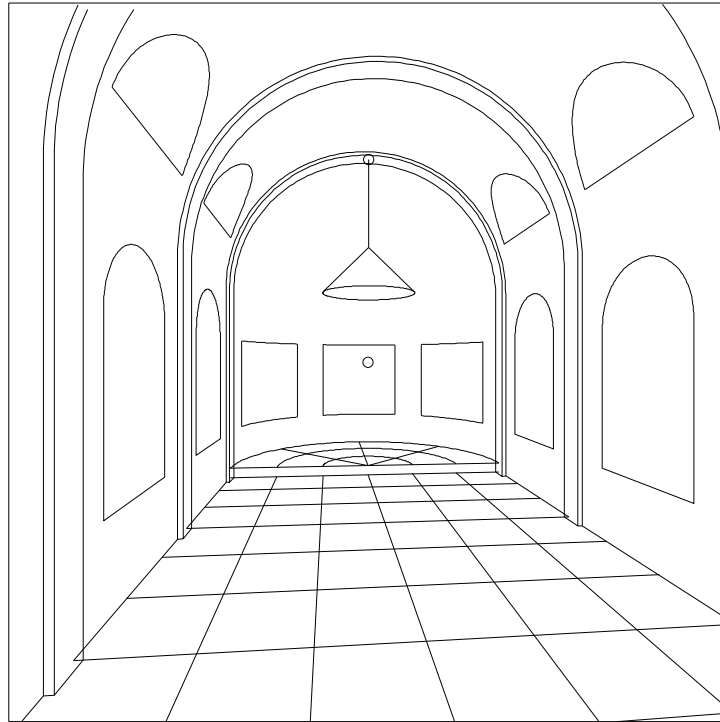


Abbildung 1.6: Festsaal in Zentralprojektion

## 1.2 Lernziele der Vorlesung

Ziel der Vorlesung ist **nicht** das Erstellen komplexer Zeichnungen, hierzu verwendet man Computer. **Statt dessen** sollen die folgenden **Fähigkeiten** erlangt werden:

- von einem 3D-Objekt schnell eine *Skizze anfertigen*,
- vorgefertigte Zeichnungen *lesen*,
- in vorgefertigte Zeichnungen oder Photos *Ergänzungen einfügen*,
- aus vorgefertigten Zeichnungen oder Photos *wahre Längen und Winkel* oder ganze Grund- und Aufrisse bestimmen.

## 1.3 Literatur

Das **Skript** zur Vorlesung ist nicht als Lehrbuch zum Selbststudium gedacht, sondern als Arbeitsblätter. Wesentliche Konstruktionen werden in der Vorlesung erarbeitet und in das Skript eingezeichnet. Da das Skript in der Klausur als einziges Hilfsmittel zugelassen ist, ist es ratsam, regelmäßig an der Vorlesung teilzunehmen und das Skript dort zu vervollständigen.

Wichtige Konstruktionen werden stichwortartig beschrieben und durch Einrahmungen optisch hervorgehoben. Als weiterführende Literatur für Vorlesung und Praxis geben wir an:

- a) Leopold: *Geometrische Grundlagen der Architekturdarstellung*, Kohlhammer-Verlag, Köln
- b) Fucke, Kirch, Nickel: *Darstellende Geometrie*, Fachbuchverlag Leipzig,
- c) Graf, Barner: *Darstellende Geometrie*, (nur noch in Bibliotheken zu finden).

Im Folgenden werden **Hinweise** auf entsprechende Textstellen gegeben (z.B.: s. LEO, S. xx, s. FKN, S. yy).



## 1.4 Grundbegriffe

Wir verwenden hier die folgenden Bezeichnungen und Symbole.

### 1.4.1 Bezeichnungen

Punkte: Große lateinische Buchstaben  $P, A, B, C, \dots$ ,  
 Geraden, Kurven: kleine lateinische Buchstaben  $a, b, c, \dots$ ,  
 Ebenen: kleine griechische Buchstaben  $\varepsilon, \pi, \dots$ ,  
 Winkel: kleine griechische Buchstaben  $\alpha, \beta, \delta, \varphi, \dots$

### 1.4.2 Symbole

$PQ$ : Gerade durch die Punkte  $P, Q$ ,  $\overline{PQ}$ : Strecke mit den Endpunkten  $P, Q$ ,  
 $|PQ|$ : Länge der Strecke  $PQ$ .  
 $g \parallel h$ : Gerade  $g$  parallel zu Gerade  $h$ ,  $\nparallel$ : nicht parallel,  
 $\sphericalangle(a, b)$ : Winkel mit den Schenkeln  $a$  und  $b$ ,  
 $g \perp h$ : Gerade  $g$  ist senkrecht (orthogonal) zu Gerade  $h$ .

Wir fassen Geraden, Kurven, Ebenen, Flächen, ... als Punkt*mengen* auf und benutzen die für Mengen üblichen Symbole:

$P \in \varepsilon$ : Punkt  $P$  liegt in der Ebene  $\varepsilon$ ,  $P \notin \varepsilon$ : Punkt  $P$  liegt nicht in der Ebene  $\varepsilon$ ,  
 $g \subset \varepsilon$ : Gerade  $g$  ist in der Ebene  $\varepsilon$  enthalten,  
 $g \cap \varepsilon$ : Schnitt der Geraden  $g$  mit der Ebene  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ : Schnitt zweier Ebenen,  
 Zwei sich **nicht** schneidende Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, heißen *windschief*.

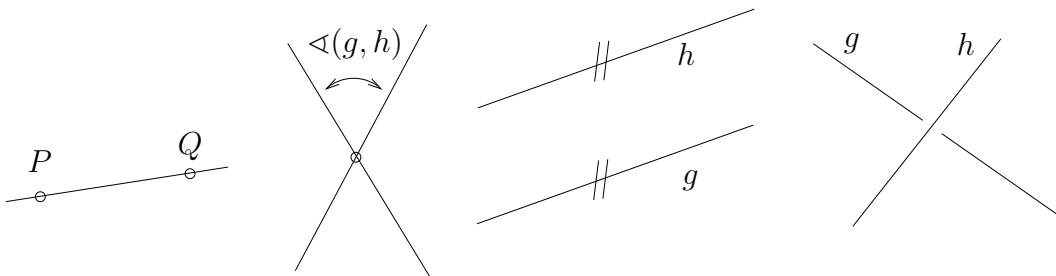


Abbildung 1.7: Gerade sowie schneidende, parallele, windschiefe Geraden

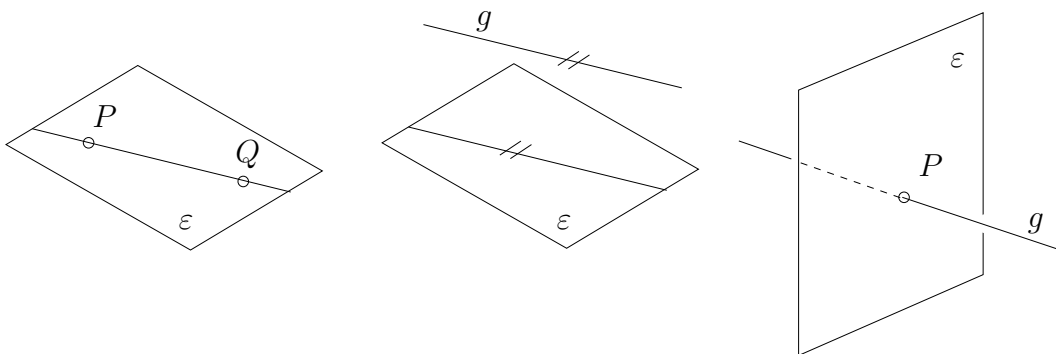


Abbildung 1.8: Gerade enthalten in, parallel und senkrecht zu einer Ebene

**Vereinbarung:**

Verdeckte (*unsichtbare*) Kanten oder Kurven werden gestrichelt, abgesetzt oder weggelassen.

## 1.5 Eigenschaften von Projektionen

Projektionen sind i.a.:

- *punkttreu*, d.h. jeder Punkt  $P$  wird auf genau einen Punkt  $P'$  abgebildet.
- *geradentreu*, d.h. eine Gerade  $g$  wird auf eine Gerade  $g'$  abgebildet. Fällt  $g$  mit einem Projektionsstrahl zusammen, so wird  $g'$  zu einem Punkt; in diesem Fall heißt  $g$  *projizierend*.
- *inzidenzerhaltend*, d.h. aus  $P \in g$  folgt  $P' \in g'$ .

Im Folgenden sind einige Besonderheiten von Parallel- bzw. Zentralprojektionen zusammengestellt.

### 1.5.1 Parallelprojektion

(P1) Die Bilder paralleler Geraden sind i.a. wieder parallel. (Ausnahmen: projizierende Geraden.)

(P2) Parallele Geradenstücke werden im gleichen Verhältnis verzerrt.

(P3) Ebene Figuren erscheinen im Bild unverzerrt, wenn sie parallel zur Bildtafel liegen.

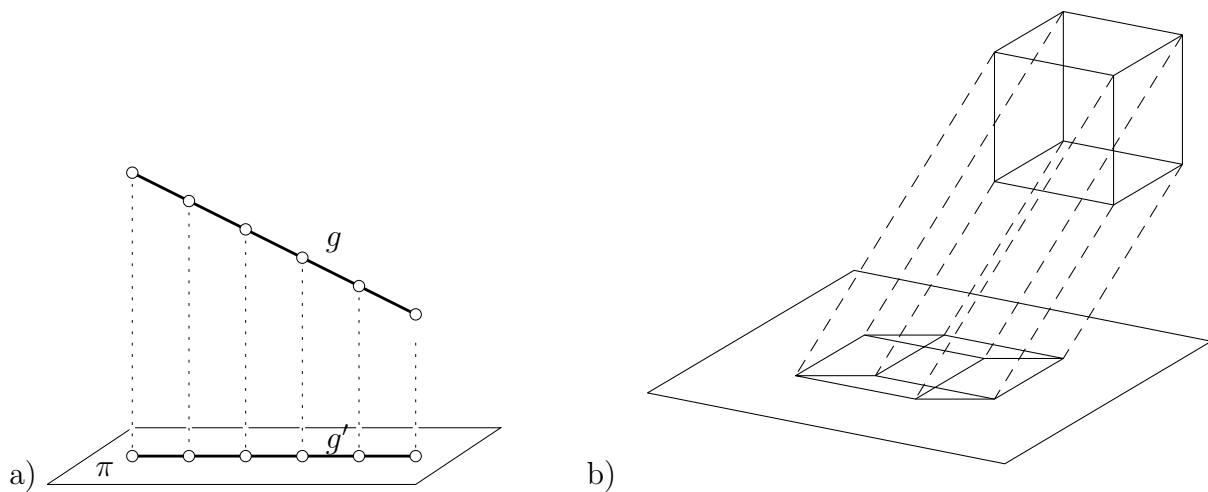


Abbildung 1.9: a) Teilverhältnistreue der Parallelprojektion b) In Vogelperspektive bleiben Deckel und Boden des Quaders unverzerrt, während die vier vertikalen Kanten im gleichen Maß verzerrt sind.

### 1.5.2 Zentralprojektion

Die Eigenschaften (P1) – (P3) gelten bei Zentralprojektion **nicht**. (Vergleiche die Beispiele in Figur 1.2.) Aber es gilt:

- (Z) Die Bilder paralleler Geraden schneiden sich i.a. in einem Punkt, dem *Fluchtpunkt* des zugehörigen Parallelbüschels (Menge der zu einer festen Gerade parallelen Geraden). Ausnahme: Die Bilder von parallelen Geraden, die in einer Ebene parallel zur Bildtafel liegen, bleiben parallel.

Weiterhin: Alle Geraden einer Ebene durch das Zentrum  $Z$  (*projizierende Ebene*) werden in eine Gerade abgebildet.

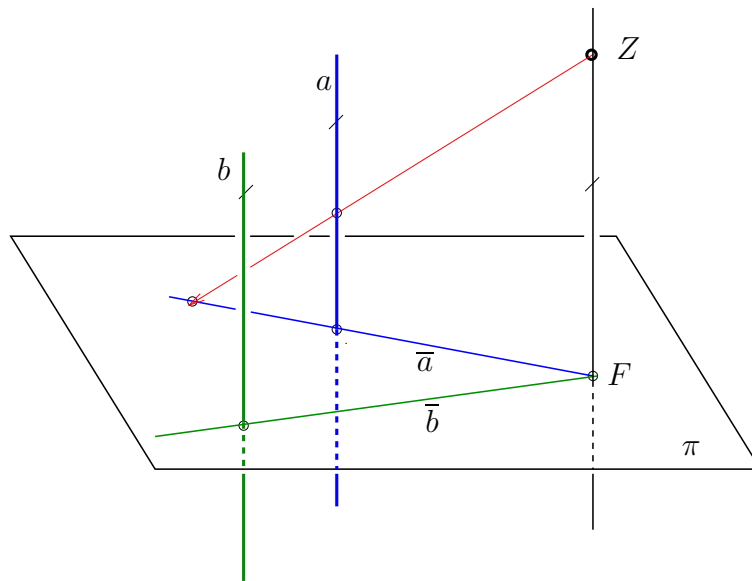


Abbildung 1.10: Fluchtpunkt bei Zentralprojektion

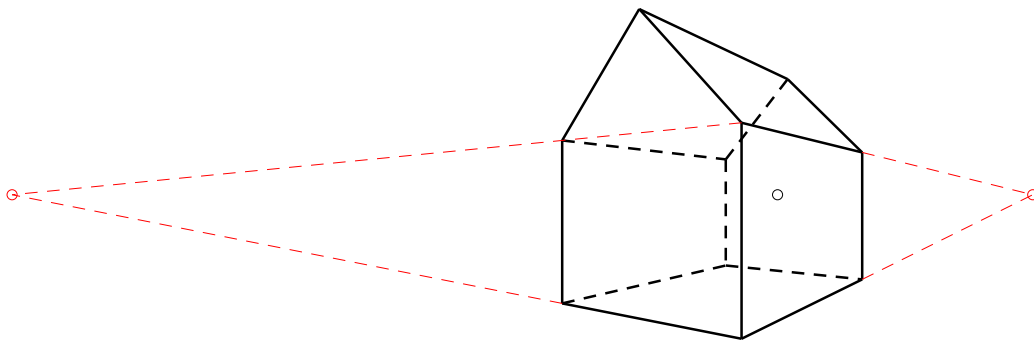


Abbildung 1.11: Fluchtpunkte bei Zentralprojektion eines Hauses

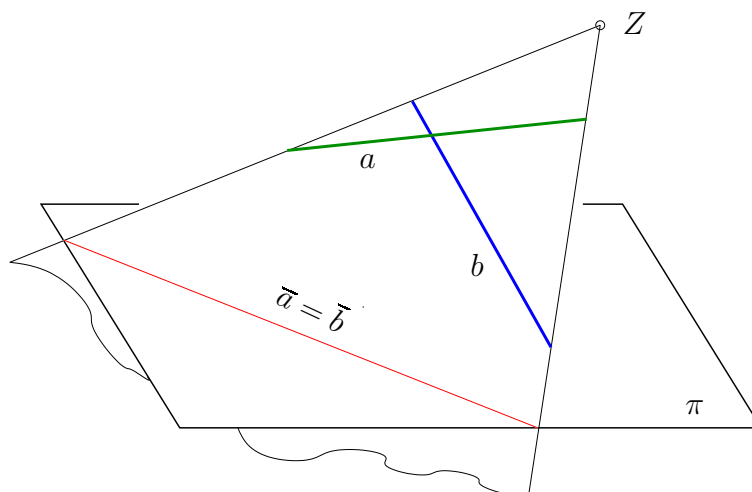


Abbildung 1.12: Projizierende Ebene bei Zentralprojektion

## 1.6 Grundriss, Aufriss, Risskante, Ordner

Im nächsten Kapitel benötigen wir die Begriffe “Grundriss” und “Aufriss”; wir werden sie im Kapitel 3, Zweitafelprojektion noch näher studieren.

Es seien  $\pi_1, \pi_2$  zwei auf einander senkrecht stehende Ebenen und  $P$  ein Punkt.  $\pi_1$  sei horizontal und heißt *Grundrissebene* (oder *-tafel*),  $\pi_2$  *Aufrissebene* (oder *-tafel*). Die Schnittgerade  $k_{12} := \pi_1 \cap \pi_2$  nennt man *Risskante*. Projiziert man  $P$  **senkrecht** auf die Ebene  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$ , so erhält man den *Grundriss*  $P'$  bzw. den *Aufriss*  $P''$  von  $P$ . Um Operationen oder Konstruktionen, bei denen  $P$  eine Rolle spielt, in **einer** Zeichenebene darstellen zu können, klappt man die Aufrisstafel  $\pi_2$  um die Risskante  $k_{12}$  in die Grundrisstafel  $\pi_1$ . **Nach** dieser Umklappung liegen  $P'$  und  $P''$  auf einer Senkrechten zur Risskante. Ein *Ordner* verbindet  $P'$  und  $P''$ , er steht senkrecht zu  $k_{12}$ .

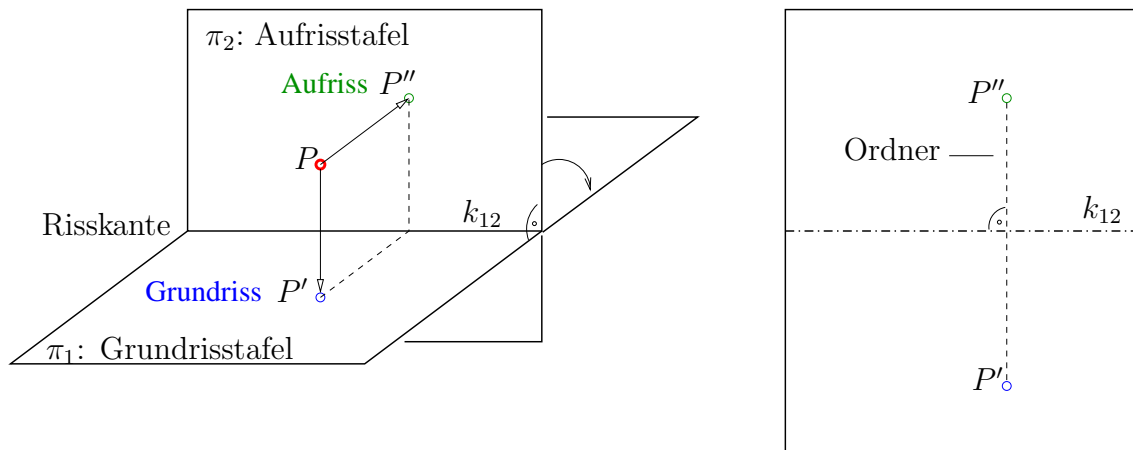


Abbildung 1.13: Grundriss und Aufriss eines Punktes

### Merke:

Grundriss  $P'$  und Aufriss  $P''$  eines Punktes liegen auf demselben Ordner!

Ein Punkt  $P$  ist durch seinen Grund- und Aufriss eindeutig bestimmt.

Zur eindeutigen Beschreibung eines Objektes sind also mindestens **zwei** senkrechte Parallelprojektionen notwendig.

Im Folgenden sind Grund- und Aufrisse einiger Objekte gegeben, die den gleichen Grundriss besitzen.

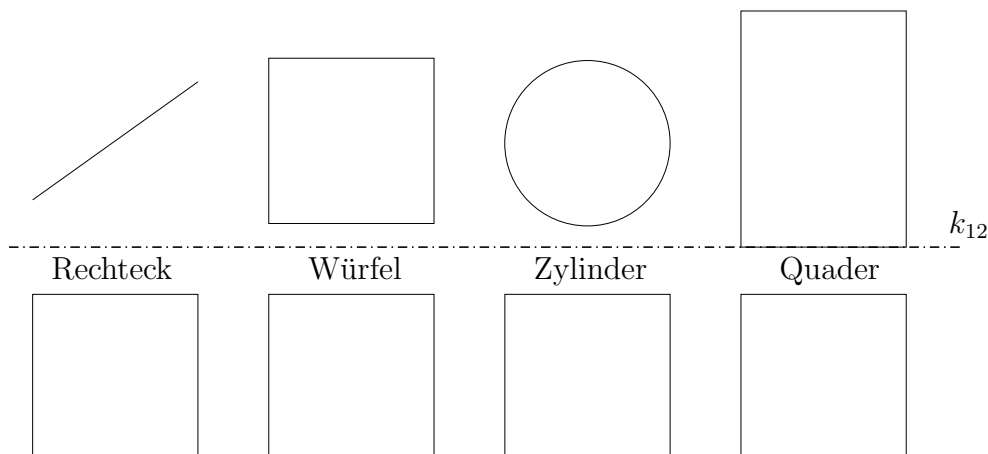


Abbildung 1.14: Verschiedene Objekte mit dem gleichen Grundriss

# Kapitel 2

## Axonometrie

### 2.1 Konstruktion eines Bildpunktes

(s. LEO S.67)

Die Axonometrie dient dem Erstellen anschaulicher Bilder. Sie basiert auf der folgenden **Idee**:

Man führt im Raum ein geeignetes Koordinatensystem ein und beschreibt wesentliche Punkte des Objektes, das abgebildet werden soll, durch Koordinaten bezüglich des Koordinatensystems. Üblicherweise benutzt man ein **rechtwinkliges** Koordinatensystem  $(O; x, y, z)$ , bei dem die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achsen ein **Rechtssystem** bilden, d.h. blickt man in negativer  $z$ -Richtung auf die  $x$ - $y$ -Ebene, so haben die  $x$ - und  $y$ -Achsen die "übliche" Orientierung.

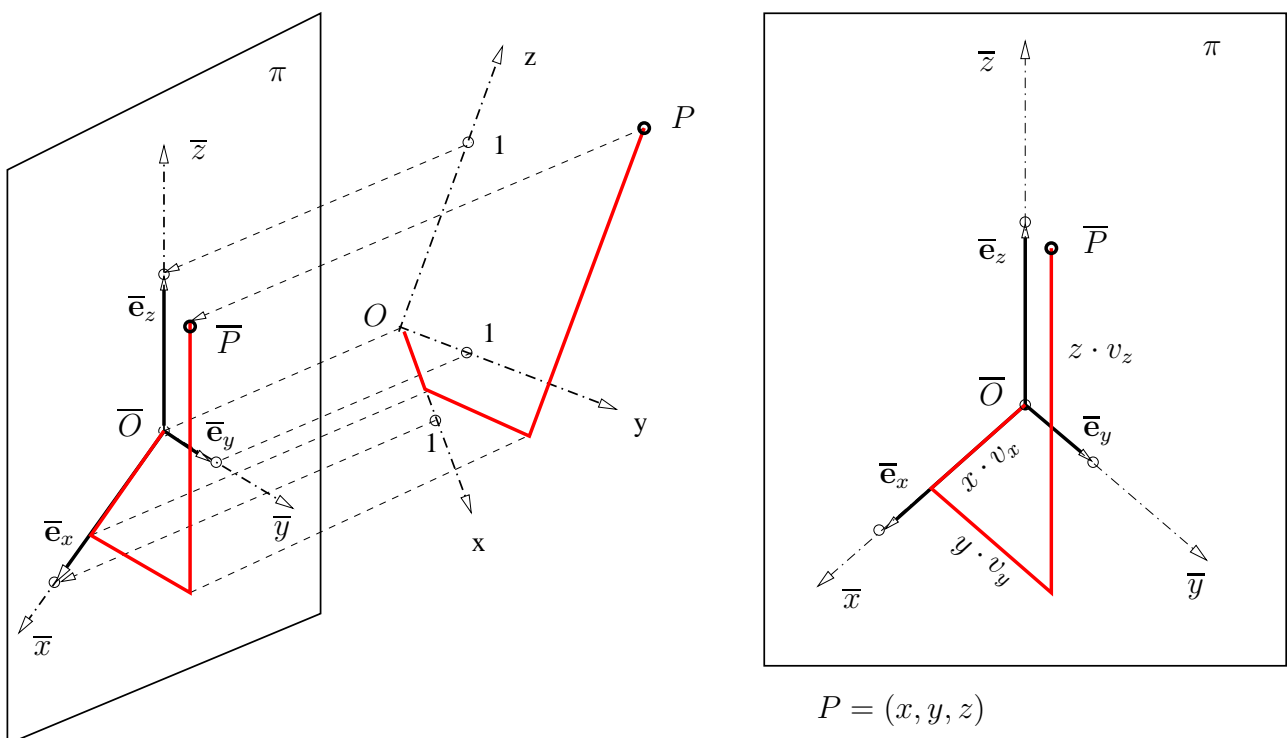


Abbildung 2.1: Axonometrie: Bilder der Koordinatenachsen und Konstruktion eines Bildpunktes

Man projiziert jetzt die Koordinatenachsen zusammen mit ihren Basisvektoren  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ . Die Bilder der Basisvektoren seien  $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ . Durch die Projektion werden i.a. alle drei Maßstäbe der Achsen verzerrt wiedergegeben. Die **Verzerrungsverhältnisse**  $|\bar{e}_x| : 1, |\bar{e}_y| : 1, |\bar{e}_z| : 1$  werden mit  $v_x, v_y, v_z$  bezeichnet.

**Konstruktion eines Bild-Punktes:** Gegeben  $(x, y, z)$

- Gehe (in der Biltafel von  $\bar{O}$  aus)
1. um  $x \cdot v_x$  in  $\bar{e}_x$ -Richtung und dann
  2. um  $y \cdot v_y$  in  $\bar{e}_y$ -Richtung und dann
  3. um  $z \cdot v_z$  in  $\bar{e}_z$ -Richtung.

(Die Reihenfolge kann beliebig vertauscht werden.)

Beim Zeichnen der Projektionen mehrerer Punkte sollte man vorhandene Parallelitäten (wie z.B. bei einem Quader) ausnutzen. (Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über !)

Ist die Projektionsrichtung **senkrecht** zur Bildtafel, so spricht man von *senkrechter Axonometrie*. Im anderen Fall von *schiefer Axonometrie*.

In der Praxis projiziert man nicht mühsam das Koordinatensystem, sondern wählt irgendeinen Punkt  $\bar{O}$  als Bild des Koordinatenursprungs  $O$  und drei von  $\bar{O}$  in verschiedene Richtungen verlaufende Vektoren  $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ . Die Grundlage hierfür ist der **Satz von Pohlke**:

*Drei in verschiedenen Richtungen von einem Punkt  $\bar{O}$  ausgehende Strecken können, bis auf Ähnlichkeit, als die Parallelprojektion eines Koordinatendreiecks eines senkrechten, rechtsorientierten Koordinatensystems aufgefasst werden.*

Um ein anschauliches Bild eines Gegenstandes zu erhalten, muss man allerdings die Vektoren  $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$  "geeignet" wählen. Dies wollen wir uns an dem Beispiel des Einheitswürfels klar machen (Abb. 2.2):

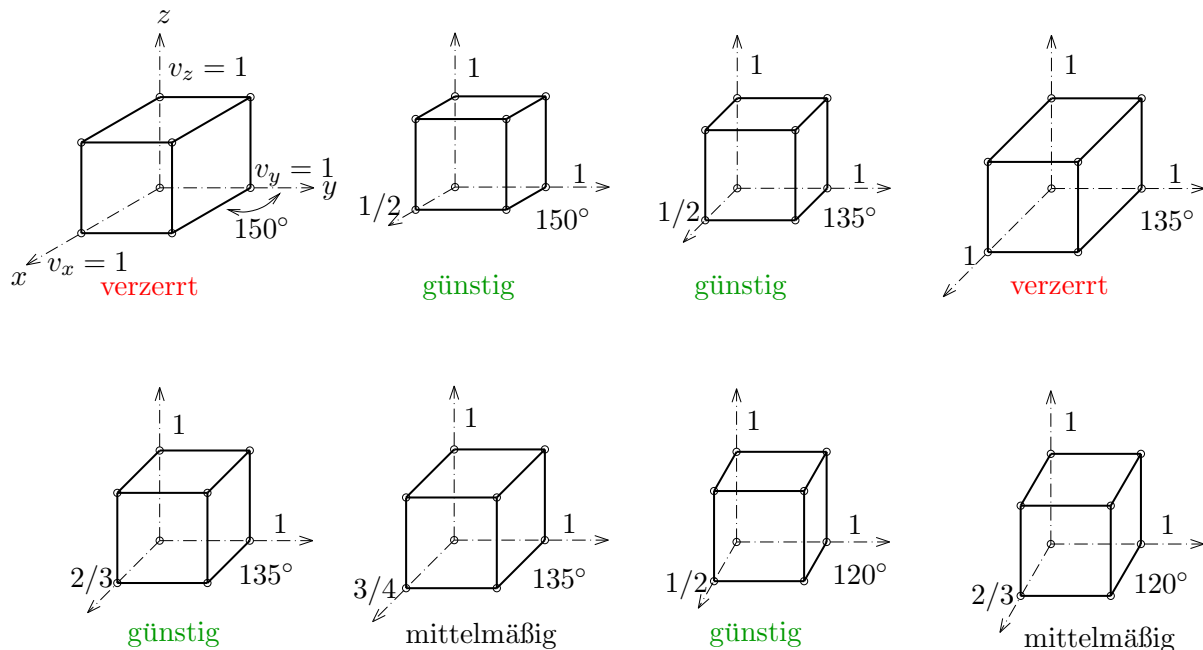


Abbildung 2.2: Verschiedene Axonometrien eines Würfels

Man unterscheidet

- isometrische Axonometrie:** alle Verzerrungen sind **gleich**,
- dimetrische Axonometrie:** zwei Verzerrungen sind **gleich**,
- trimetrische Axonometrie:** alle Verzerrungen sind **verschieden**

Die **Sichtbarkeit** folgt aus der Anordnung der Achsen im Bild und der Tatsache, dass das Koordinatensystem ein Rechtssystem ist.

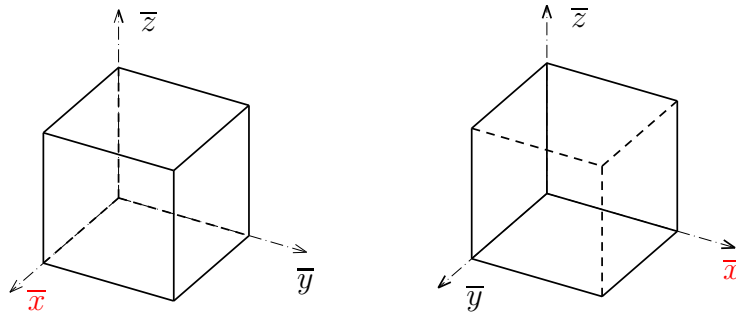


Abbildung 2.3: Sichtbarkeit und Achsenorientierung

**Beispiel 2.1** Stelle axonometrische Bilder eines Hauses her (Abb. 2.4).

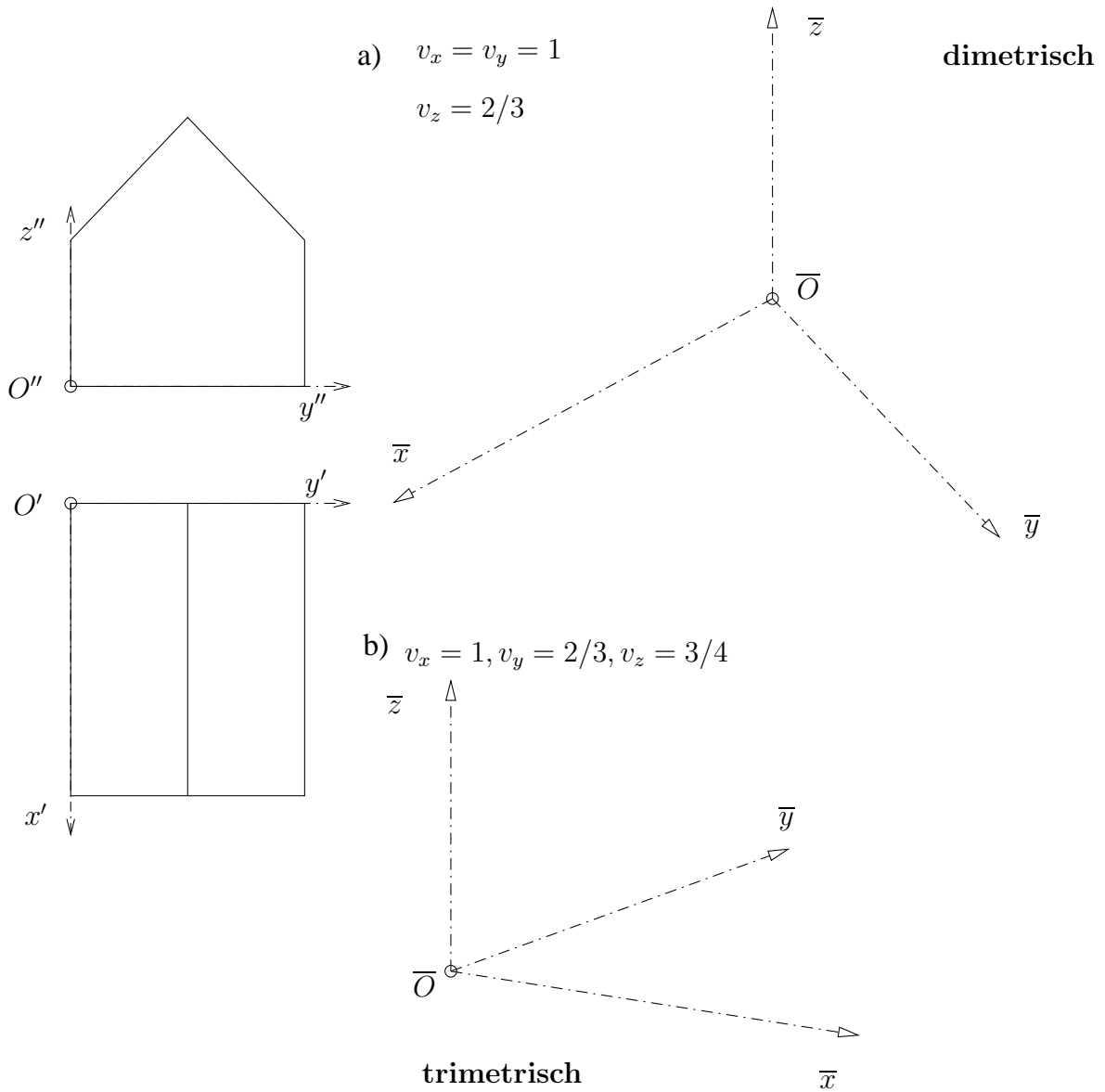


Abbildung 2.4: Axonometrien eines Hauses

## 2.2 Spezielle Axonometrien

### 2.2.1 Vogel– und Kavalierperspektive

(s. LEO S.70,71)

Die Herstellung eines axonometrischen Bildes eines Gegenstandes ist besonders einfach, wenn Verzerrungsverhältnisse **1** sind. Deshalb treffen wir die folgende **Vereinbarung**:

Eine Koordinatenebene sei parallel zur Bildtafel  $\pi$ .

In diesem Fall können nicht nur zwei Koordinaten unverzerrt übernommen werden, sondern jede Objektfigur parallel zu der ausgewählten Koordinatenebene hat ein kongruentes Bild.

Man unterscheidet:

- (1) **Kavalierperspektive**: Die Bildtafel ist parallel zur x-z- oder y-z-Ebene.
- (2) **Vogelperspektive**: Die Bildtafel ist parallel zur x-y-Ebene.

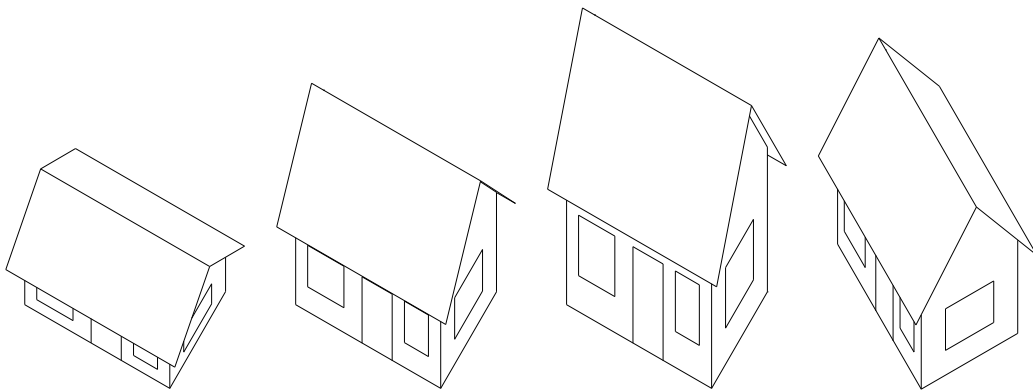


Abbildung 2.5: Vogelperspektiven eines Hauses

**Aufgabe 2.1** Zeichne von dem durch Grund– und Aufriss gegebenen Haus (Abb. 2.6) ein “günstiges” Bild  
 a) in Kavalierperspektive    b) in Vogelperspektive.

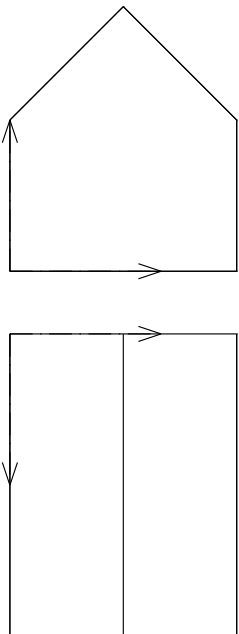


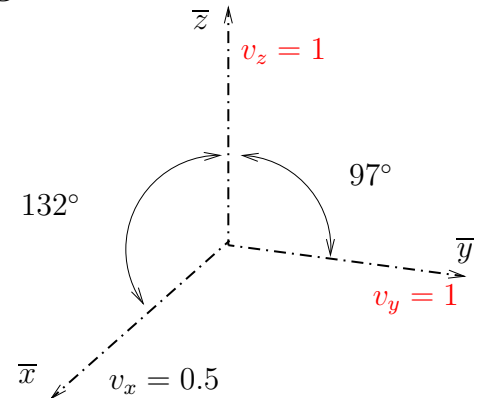
Abbildung 2.6: Kavalier– und Vogelperspektive eines Hauses



### 2.2.2 Ingenieur–Axonometrie

Bei der Ingenieur–Axonometrie trifft man folgende **Vereinbarung**:

1. Die Verzerrungen sind  $v_x = 0.5$ ,  $v_y = v_z = 1$  (dimetrische Axonometrie) .
2. In der Projektion ist der Winkel zwischen der z–Achse und der x–Achse  $132^\circ$ , Winkel zwischen der z–Achse und der y–Achse  $97^\circ$ . (siehe Geodreieck !)



Die **Vorteile** der Ingenieur–Axonometrie sind:

- Das axonometrische Bild ist nahezu eine um den Faktor 1.06 skalierte **senkrechte** Parallelprojektion.
- Die hierzu notwendigen Winkel von  $7^\circ$  und  $42^\circ$  sind auf vielen Geodreiecken markiert.
- Der Umriss einer Kugel ist ein Kreis.

**Aufgabe 2.2** Zeichne von dem durch Grund– und Aufriss gegebenen Turm (Abb. 2.7) ein axonometrisches Bild in Ingenieur–Axonometrie.

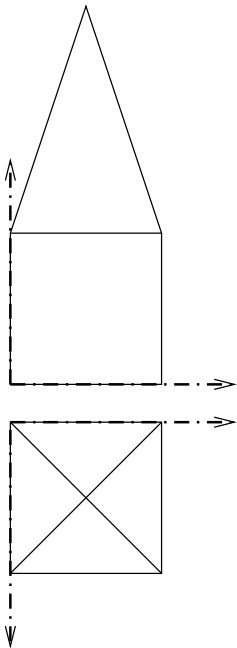


Abbildung 2.7: Aufgabe: Ingenieur–Axonometrie eines Turmes

#### Bemerkung:

Falls es geeignet erscheint, kann man auch die Winkel und Verzerrungen vertauschen:

- a)  $v_x = 1$ ,  $v_y = 0.5$ ,
- b) Winkel zwischen z–Achse und x–Achse:  $97^\circ$  und Winkel zwischen z–Achse und y–Achse:  $132^\circ$ .

## 2.3 Einschneideverfahren

(s. LEO S.75)

Das Antragen der einzelnen Punkte ist bei komplexen Objekten mühsam. Hier hilft das **Einschneideverfahren**:

**Vorgabe:** Objekt in zwei orthogonalen, zugeordneten Projektionen (Rissen).

**Einschneideverfahren:**

1. Man legt die beiden Risse "beliebig" in die Zeichenebene  $\pi$  und
2. wählt zwei verschiedene *Einschneiderichtungen*  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ .
3. Durch die Risse  $P', P''$  eines Punktes  $P$  werden je ein Strahl  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  in  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ -Richtung gezogen.
4.  $\mathbf{p}_1 \cap \mathbf{p}_2 = \bar{P}$  ist das axonometrische Bild von  $P$ .

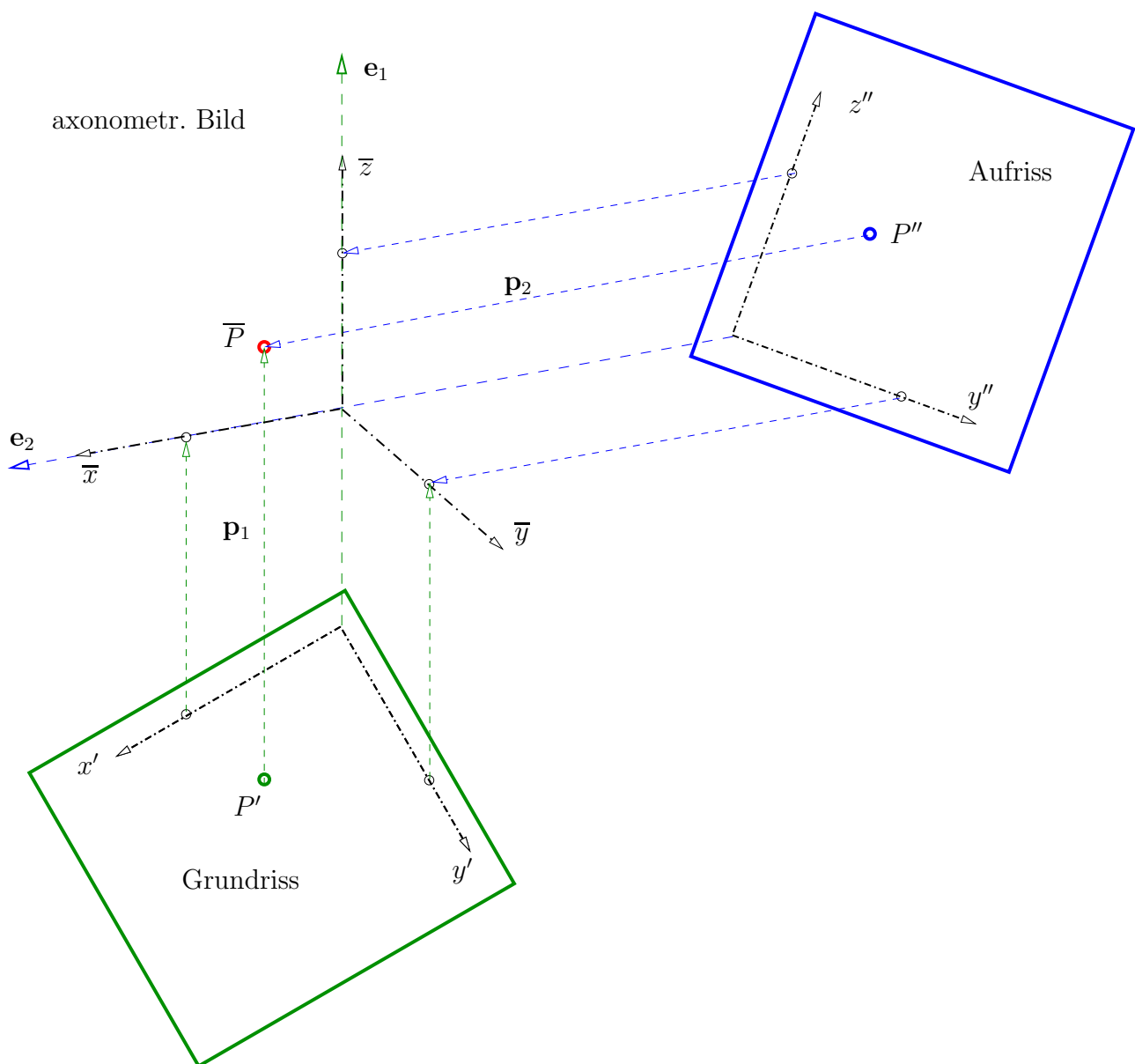


Abbildung 2.8: Einschneideverfahren

**Aufgabe 2.3** Stelle ein axonometrisches Bild eines Hauses mit Hilfe des Einschneideverfahrens her (Abb. 2.9).

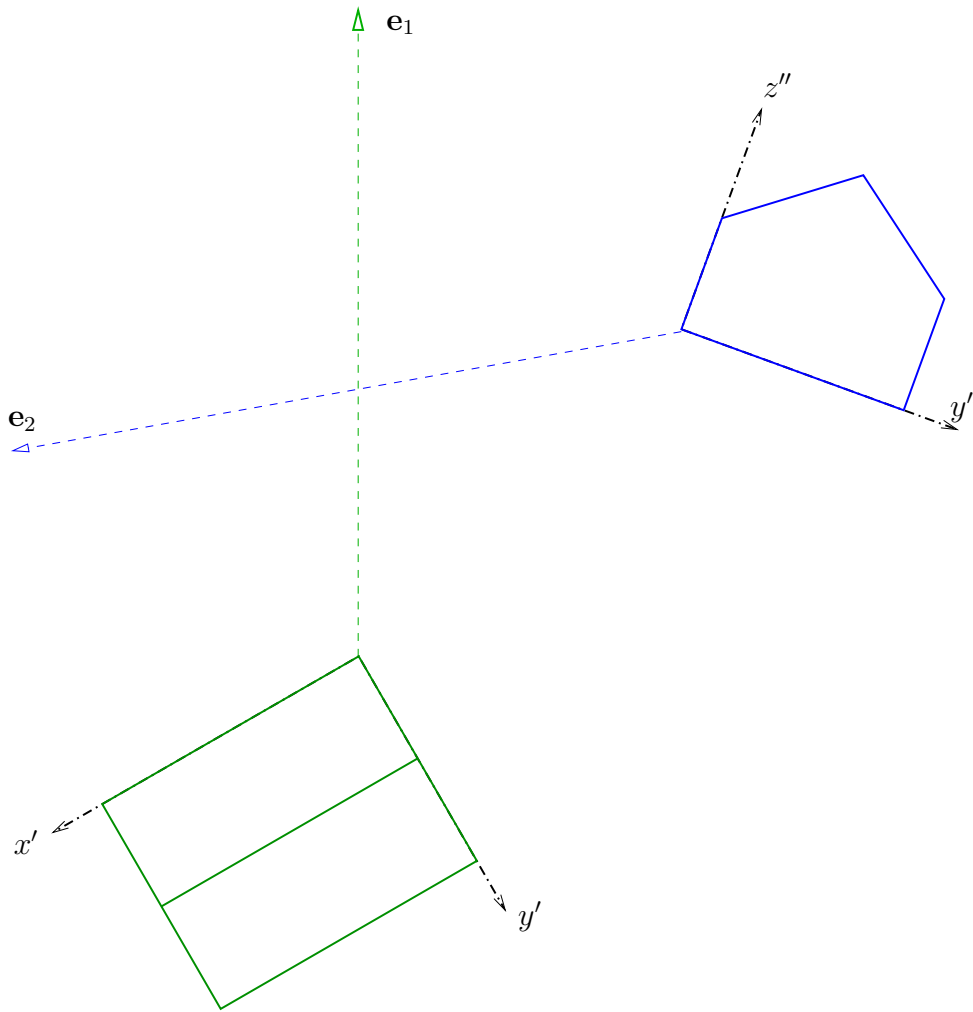


Abbildung 2.9: Einschneideverfahren: Haus

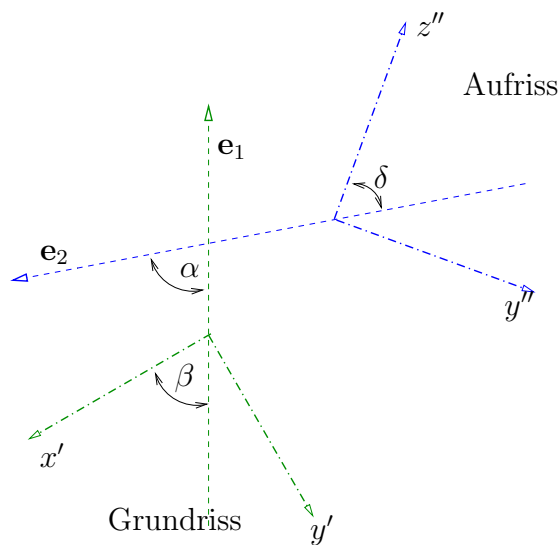


Abbildung 2.10: "Gute" Bilder bei:  $\alpha = 50^\circ \dots 90^\circ$ ,  $\beta = 5^\circ \dots \alpha$ ,  $\delta \approx \beta$

## 2.4 Bemerkungen zur senkrechten Axonometrie

Senkrecht axonometrische Bilder haben eine deutlich bessere Bildwirkung als “beliebige” schiefe axonometrische Bilder. Allerdings muss dafür etwas mehr Vorarbeit geleistet werden. Es können zwar immer noch die Bilder der Achsen frei vorgegeben werden, aber

- a) die **Verkürzungen** für die axonometrische Konstruktion und
  - b) die **Lagen** der Grund- und Aufrisse für das Einschneidungsverfahren
- können nicht mehr beliebig gewählt werden (s. Abschnitt 3.6).

Weitere **Vorteile** der senkrechten Axonometrie sind:

- 1) Umrise von Kugeln sind Kreise,
- 2) Bilder von Kreisen, die zu Koordinatenebenen parallel sind, lassen sich relativ leicht konstruieren (s. Aufgabe 4.5).

## 2.5 Schatten in der Axonometrie

Um den räumlichen Eindruck eines axonometrischen Bildes noch zu verstärken, wollen wir für einfache Fälle Schatten konstruieren.

Wir setzen im axonometrischen Bild den Schattenwurf einer senkrechten Kante bei **parallelem/zentralem** Licht voraus, womit die Lichtrichtung eindeutig festgelegt ist. Um nicht schon Durchstoßpunkte konstruieren zu müssen, betrachten wir hier nur Fälle mit Schatten auf **senkrechten** und/oder **waagrechten** Ebenen.

**Idee:** Um den Schatten  $\tilde{P}$  eines Punktes  $P$  auf der *Grundriss*-Ebene zu finden, schneidet man den Lichtstrahl  $l$  durch  $P$  mit dem Grundriss  $l'$  des Lichtstrahls durch den Grundriss  $P'$  von  $P$ . Bei **parallelem** Licht sind alle Lichtstrahlen parallel, bei **zentralem** Licht gehen alle Lichtstrahlen durch einen Punkt !

### 2.5.1 Schatten bei parallelem Licht

(s. LEO S.172)

**Aufgabe 2.4** Gegeben ist ein axonometrisches Bild eines Hauses und Lichtrichtung  $l$  durch den Schattenwurf einer senkrechten Kante. Zeichne den Schatten in das axonometrische Bild (Abb. 2.11).

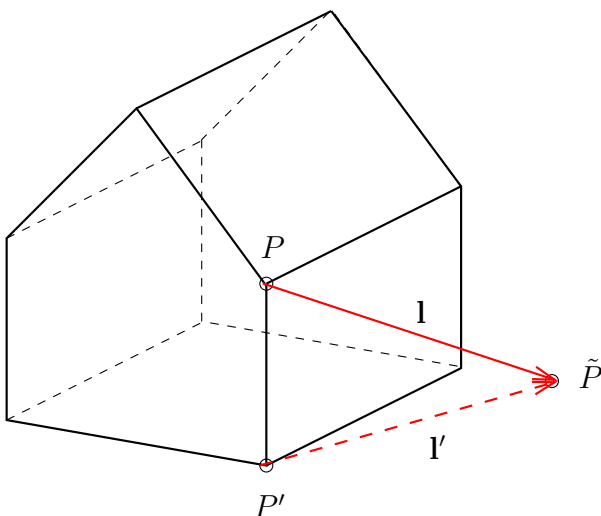


Abbildung 2.11: Schatten eines Hauses bei parallelem Licht

**Aufgabe 2.5** Gegeben ist ein axonometrisches Bild (Kavalierperspektive) zweier Quader und Lichtrichtung  $\mathbf{l}$  durch den Schattenwurf einer Kante (Abb. 2.12). Zeichne den Schatten.

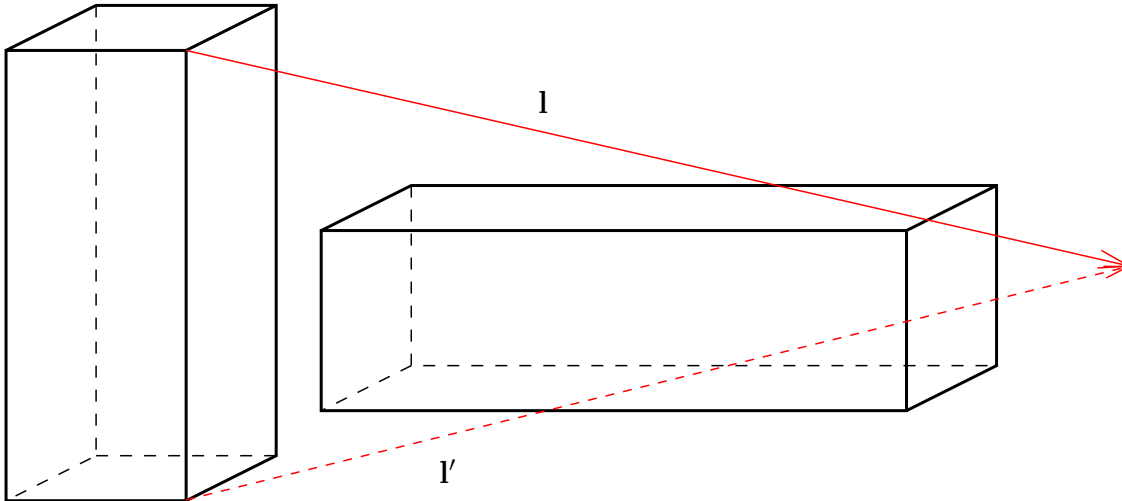


Abbildung 2.12: Schatten zweier Quader bei parallelem Licht

### 2.5.2 Schatten bei zentralem Licht

(s. LEO S.181)

Nun setzen wir Licht voraus, das von einem Punkt (Lampe) ausgeht. Die Lichtquelle ist durch die Position der Lampe und deren Fußpunkt (Grundriss der Lampe in der Standebene des Objektes) eindeutig bestimmt. Die Konstruktion verläuft analog zu der bei parallelem Licht (s. Fig. 2.13).

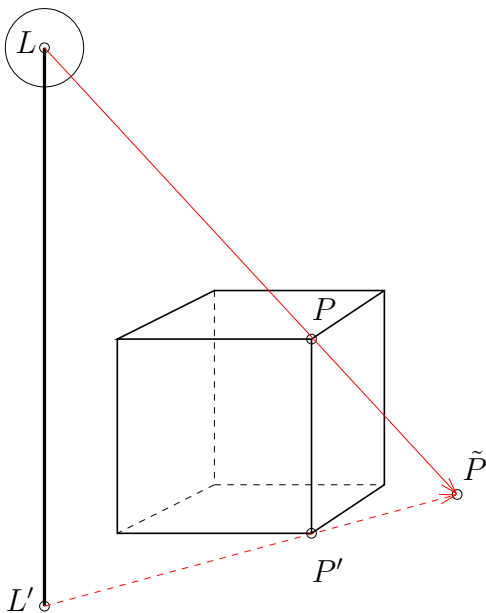


Abbildung 2.13: Schatten eines Quaders bei zentralem Licht

**Aufgabe 2.6** Gegeben ist ein axonometrisches Bild eines Hauses und die Lichtquelle  $L$  mit ihrem Grundriss. Zeichne den Schatten in das axonometrische Bild (Abb. 2.14).

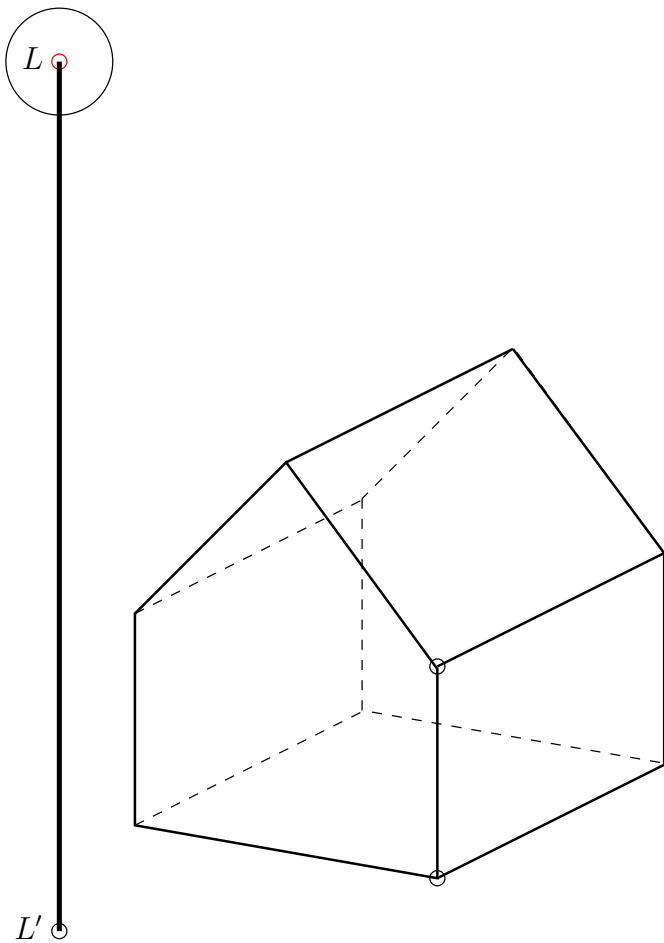


Abbildung 2.14: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht

**Bemerkung:**

Bei komplizierteren Fällen konstruiert man den Schatten zuerst in Grund- und Aufriss.

# Kapitel 3

## Zwei- und Mehrtafelprojektion, Dachausmittlung

### 3.1 Zweitafelprojektion von Punkten

(s. LEO S.82)

Wir erinnern zunächst an die in Abschnitt 1.6 erklärten Begriffe **Grundriss**, **Aufriss**, **Risskante**, **Ordner**. Die nächste Zeichnung zeigt einige Sonderlagen von Punkten:

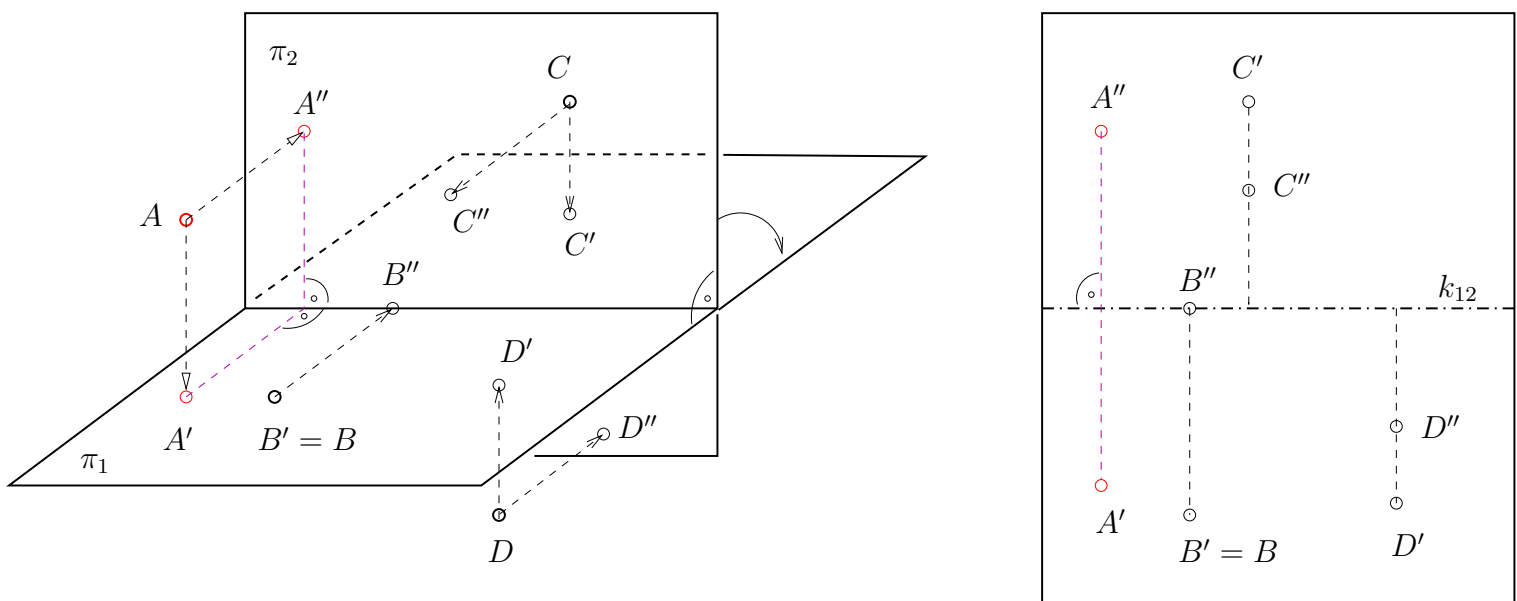


Abbildung 3.1: Zweitafelprojektion von Punkten

**Beachte:** Der Aufriss eines Punktes liegt nicht immer oberhalb der Risskante (s. Abb. 3.1). Analog muss der Grundriss eines Punktes nicht immer unterhalb der Risskante liegen !

### 3.2 Zweitafelprojektion von Geraden

(s. LEO S.83,89)

Die Projektion einer Gerade ist i.a. wieder eine Gerade:

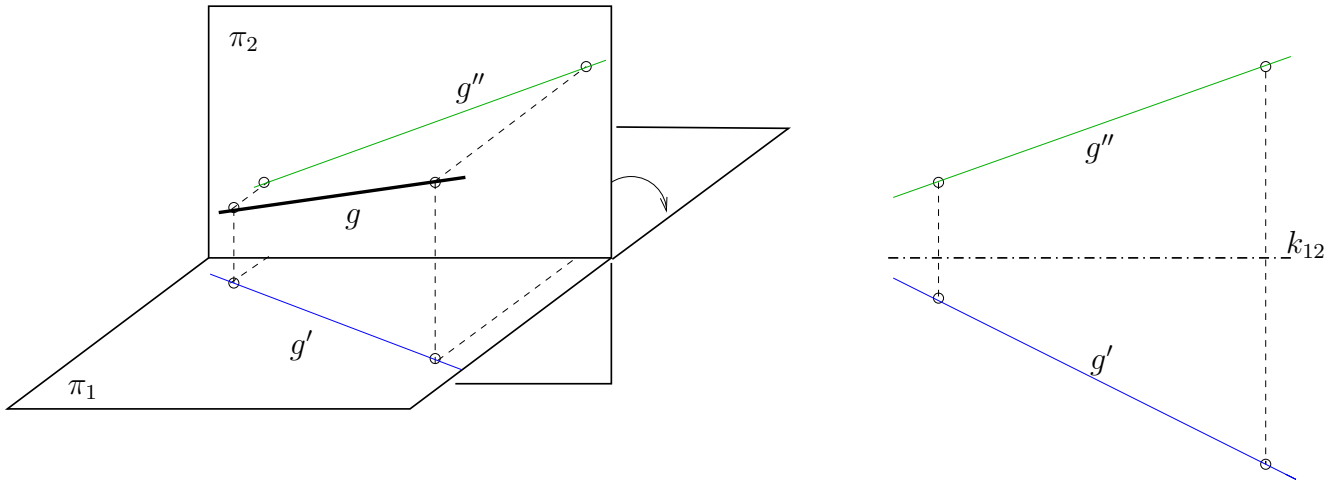


Abbildung 3.2: Zweitafelprojektion einer Gerade

Es gibt einige Sonderlagen für Geraden:

- (a) Eine zu  $\pi_1$  parallele Gerade heißt **Höhenlinie**, eine zu  $\pi_2$  parallele **Frontlinie**. Eine **Hauptgerade** ist eine Höhenlinie oder eine Frontlinie. Eine für Maßaufgaben wichtige Eigenschaft von Hauptgeraden ist:

Der Grundriss einer Höhenlinie ist unverzerrt. Der Aufriss einer Frontlinie ist unverzerrt.

- (b) Eine zu  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$  senkrechte Gerade heißt **Erst-** bzw. **Zweitprojizierende**.
- (c) Eine Gerade, deren Grund- und Aufriss ein Ordner ist, heißt eine **gelehnte** Gerade.

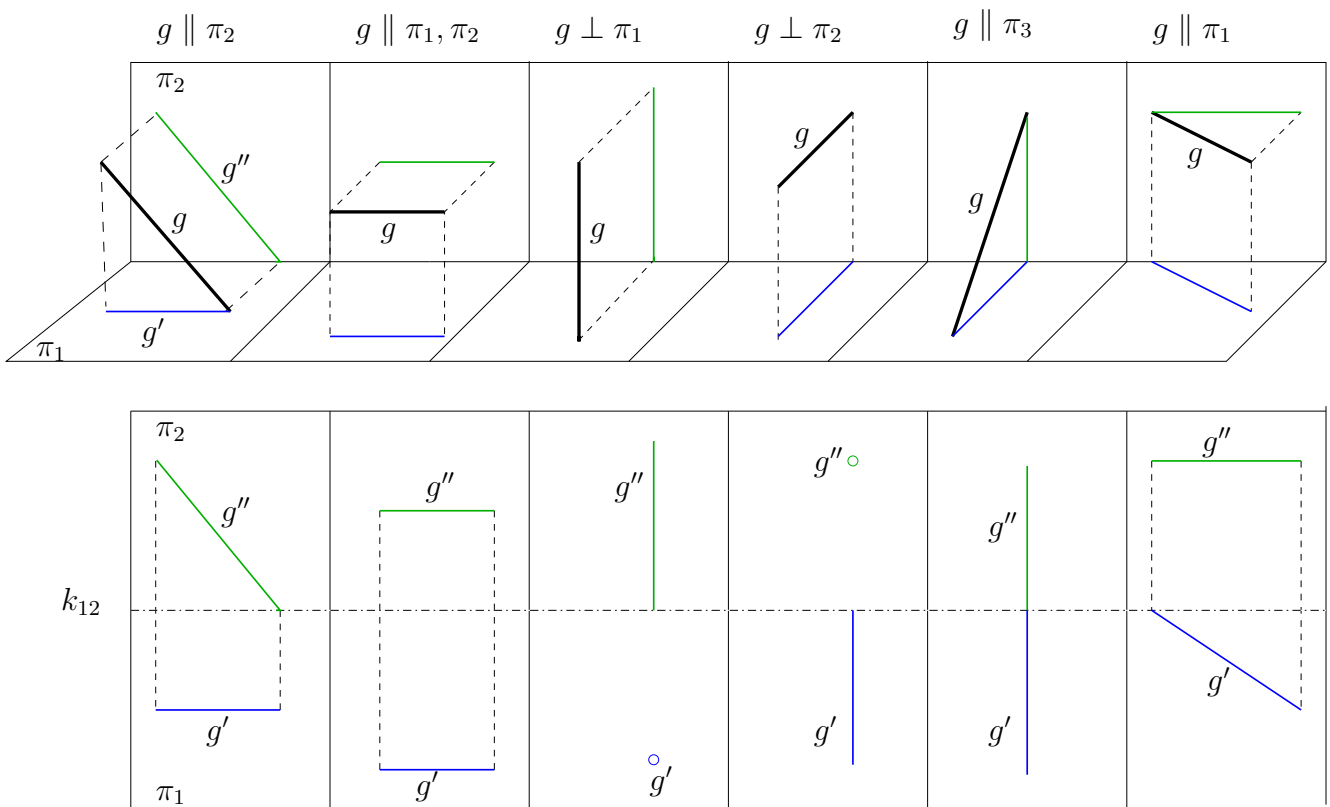


Abbildung 3.3: Sonderlagen von Geraden



Die Durchstoßpunkte einer Geraden  $g$  mit den Risstafeln nennt man **Spurpunkte** von  $g$ .

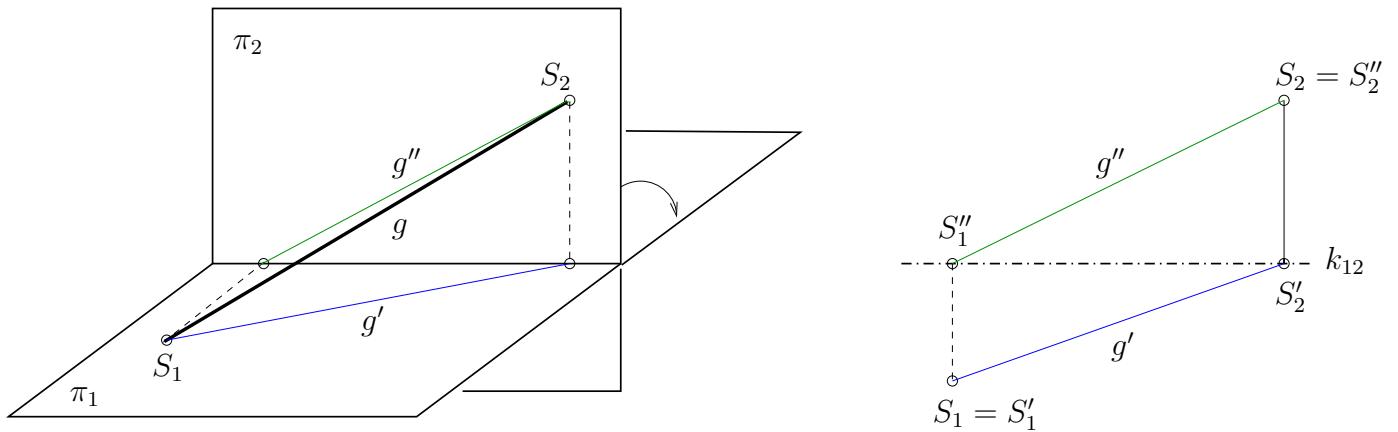


Abbildung 3.4: Spurpunkte einer Gerade

Die Risse paralleler Geraden sind parallel:

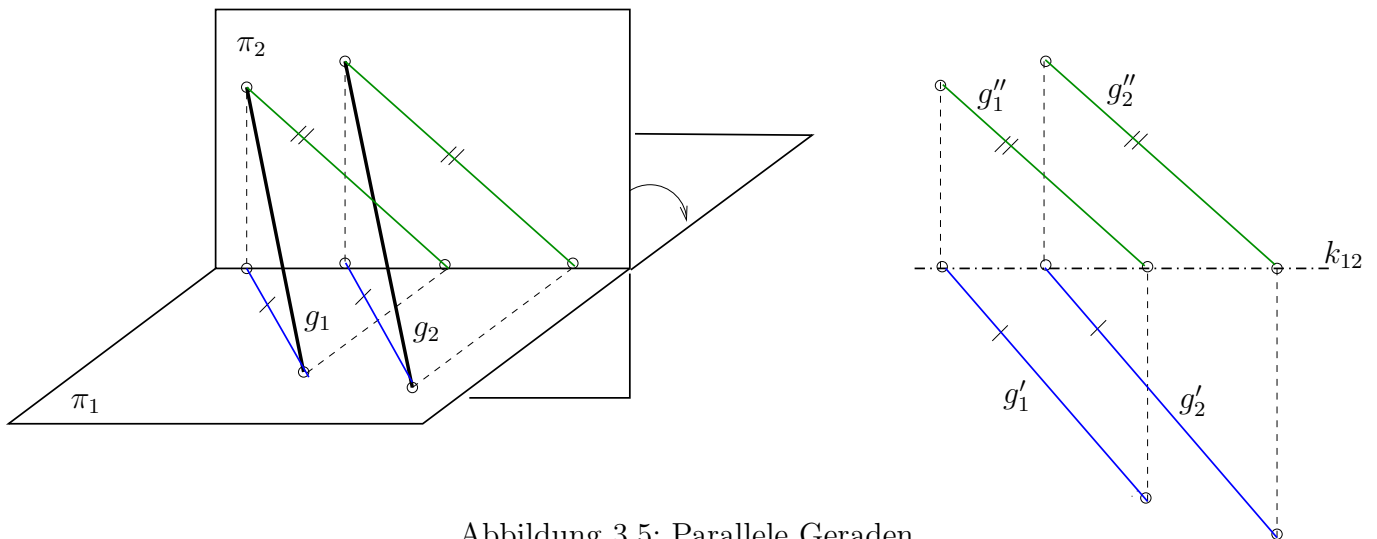


Abbildung 3.5: Parallele Geraden

Zwei Geraden  $g_1, g_2$  haben einen Schnittpunkt, wenn  $g'_1 \cap g'_2, g''_1 \cap g''_2$  auf demselben Ordner liegen. Zwei nicht parallele Geraden, die keinen Schnittpunkt haben, heißen **windschief**.

*Schneiden* sich zwei Geraden  $g_1, g_2$  in einem Punkt  $S$ , so müssen  $S'$  (in  $\pi_1$ ) und  $S''$  (in  $\pi_2$ ) auf einem Ordner liegen. Nur dann ist  $S', S''$  das Bildpunktpaar eines beiden Geraden gemeinsamen Punktes (s. Abb. 3.6).

Sind zwei Geraden  $g_1, g_2$  zueinander *windschief*, dann liegt der Schnittpunkt  $S'$  von  $g'_1$  und  $g'_2$  im Grundriss mit dem Schnittpunkt  $T''$  (von  $g''_1$  und  $g''_2$ ) im Aufriss nicht auf einem Ordner (s. Abb. 3.7).

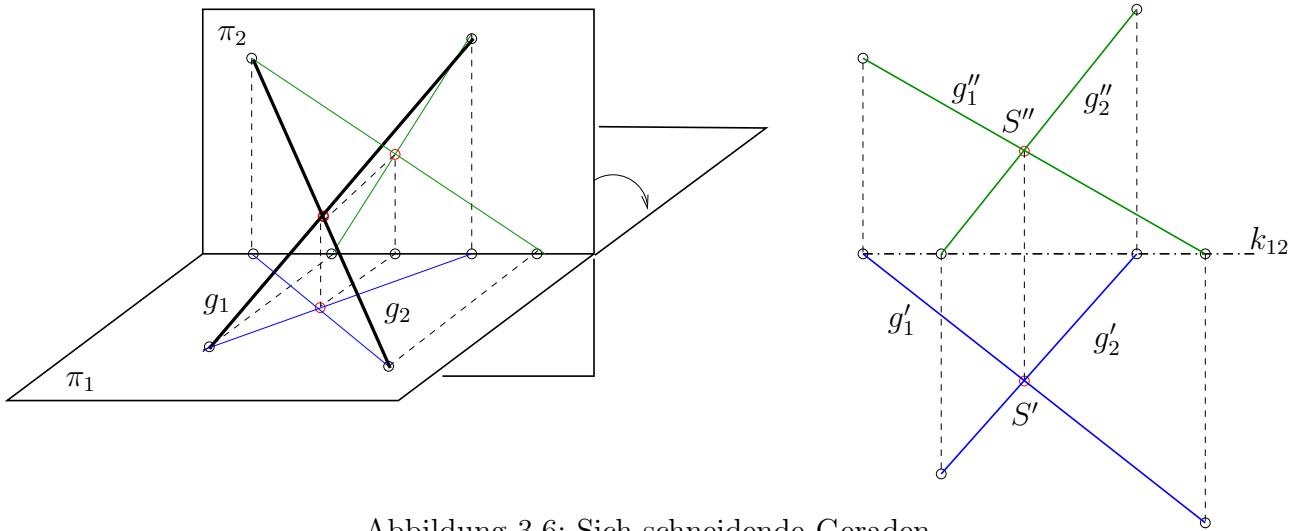


Abbildung 3.6: Sich schneidende Geraden

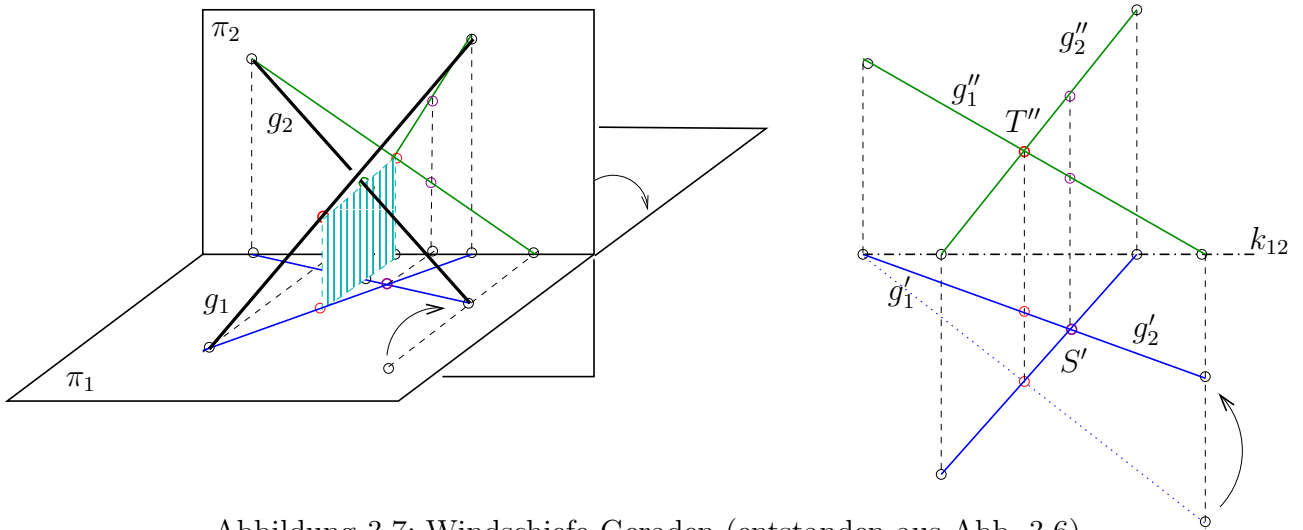


Abbildung 3.7: Windschiefe Geraden (entstanden aus Abb. 3.6)

**Aufgabe 3.1** Liegen die vier in Grund- und Aufriss gegebenen Punkte (Abb. 3.8) in einer Ebene?

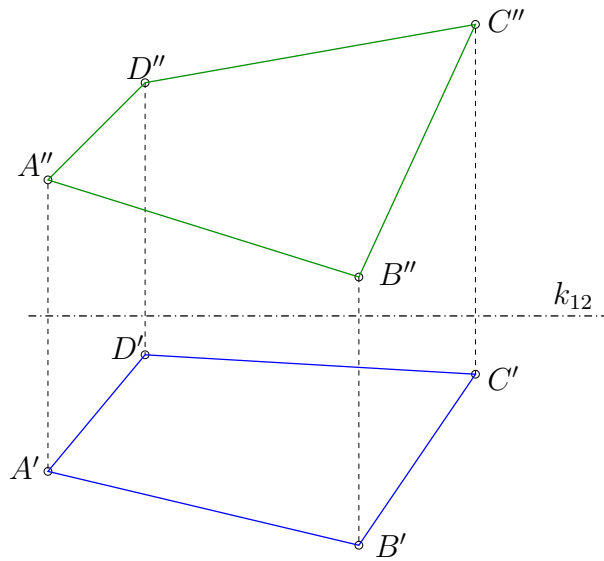


Abbildung 3.8: Ist das Viereck eben?

**Aufgabe 3.2** Durch die Grund- und Aufrisse der Geraden  $a, b, c, d$  ist ein Prisma gegeben (Abb. 3.9). Bestimme die Schnittfigur des Prismas mit der Grundrisstafel  $\pi_1$ .

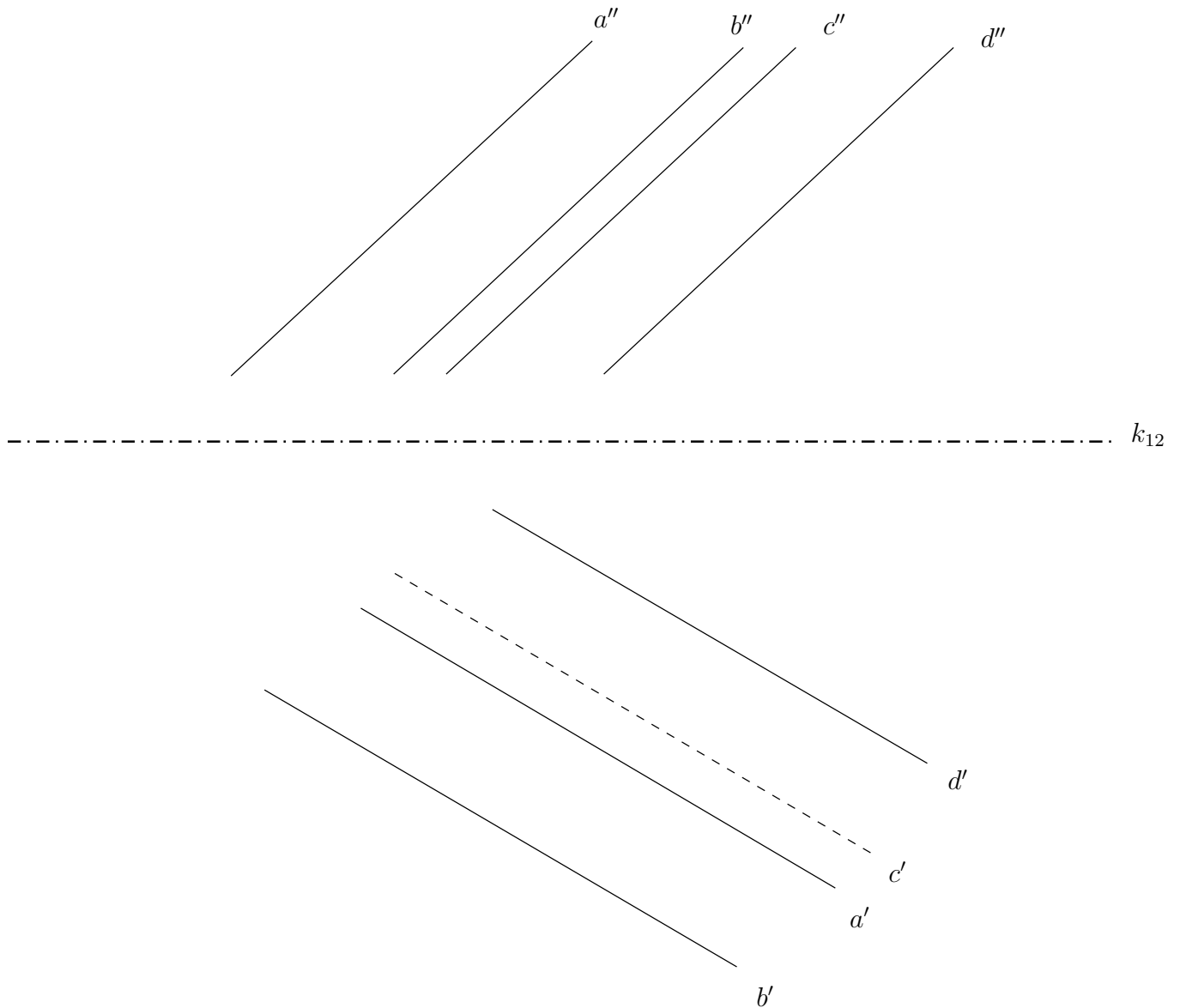


Abbildung 3.9: Grundriss-Spur eines Balkens

Bei sich schneidenden Geraden interessiert oft die wahre Größe des Schnittwinkels. Da ebene Figuren unverzerrt abgebildet werden, wenn sie parallel zur Bildtafel sind, gilt:

Der Schnittwinkel zweier Geraden erscheint in der Risstafel  $\pi_i$  unverzerrt, wenn beide Geraden parallel zu  $\pi_i$  sind.

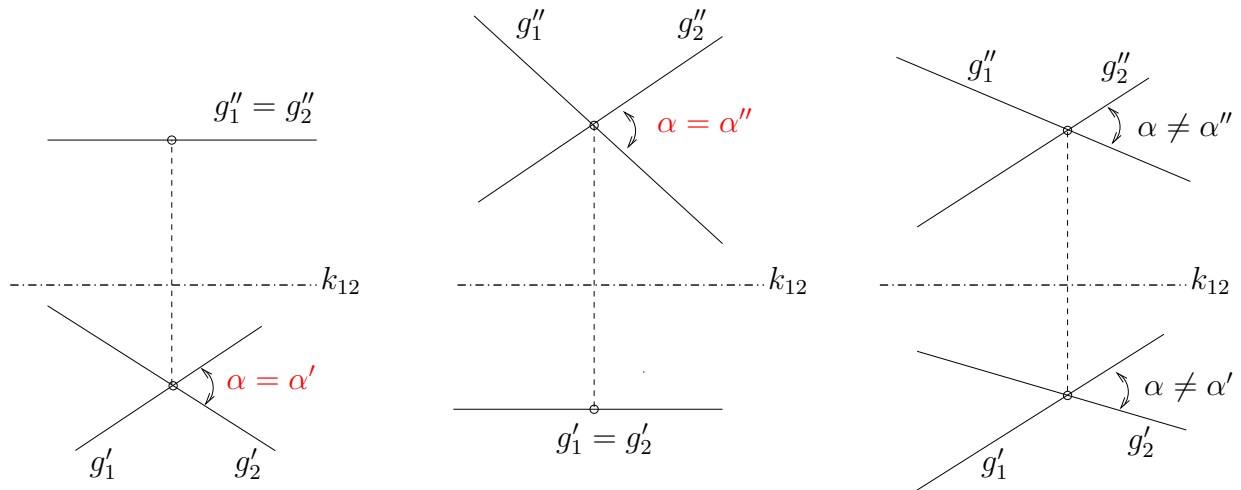


Abbildung 3.10: Winkel schneidender Geraden

Für den rechten Winkel kann die Voraussetzung abgeschwächt werden:

Ein **rechter Winkel** wird in der Risstafel  $\pi_i$  als rechter Winkel abgebildet, wenn (wenigstens) **ein** Schenkel parallel zu  $\pi_i$  ist.

**Aufgabe 3.3** Wo erscheinen in den folgenden Rissen eines Hauses (Abb. 3.11) Winkel in wahrer Größe?

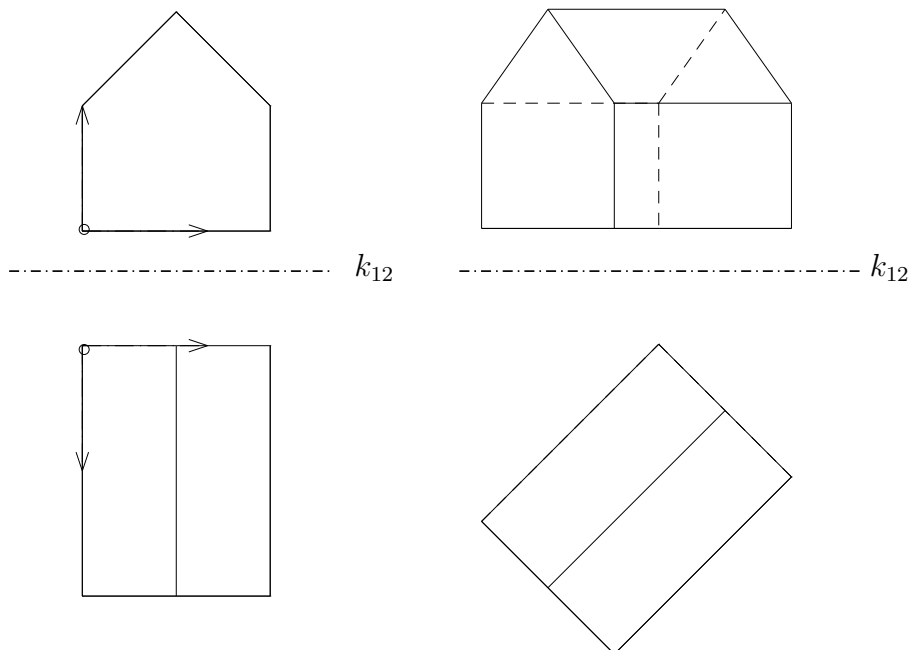


Abbildung 3.11: Wahre Winkel?

### 3.3 Zweitafelprojektion einer Ebene

(s. LEO S.91)

Eine Ebene kann im Raum festgelegt werden durch

- (a) drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen,
- (b) eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt,
- (c) zwei parallele oder sich schneidende Geraden.

**Aufgabe 3.4** Durch die Punkte  $A, B, C$  ist eine Ebene  $\varepsilon$  gegeben (Abb. 3.12). Von einem Punkt  $P \in \varepsilon$  ist  $P''$  bekannt. Bestimme  $P'$ .

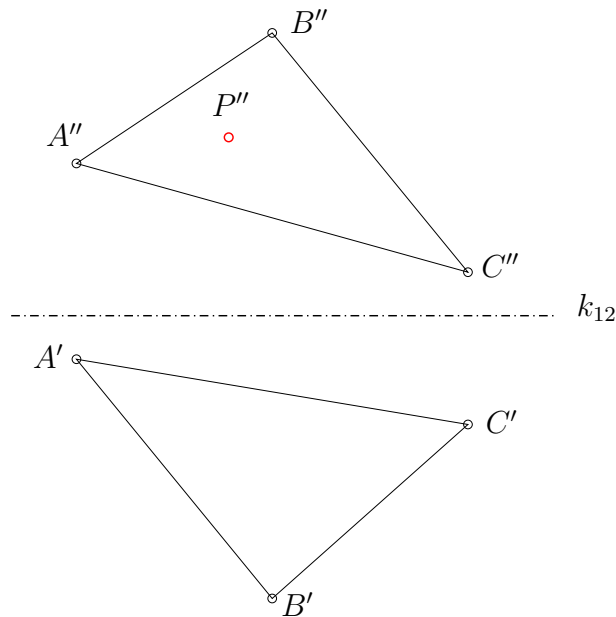


Abbildung 3.12: Punkt in einem Dreieck

Die Schnittgeraden einer Ebene  $\varepsilon$  mit den Risstafeln, falls sie existieren, heißen die **Spuren** von  $\varepsilon$ .

**Aufgabe 3.5** Die Ebene  $\varepsilon$  ist durch die Hauptgeraden  $h_1, h_2$  durch den Punkt  $P$  gegeben (Abb. 3.13). Bestimme die Spuren von  $\varepsilon$ .

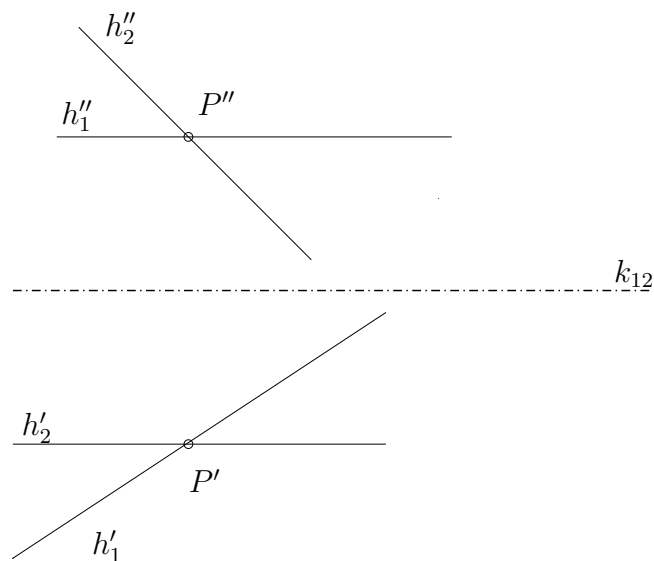


Abbildung 3.13: Spur einer Ebene

**Aufgabe 3.6** Die Ebene  $\varepsilon$  ist durch ihre Spuren  $s_1, s_2$  gegeben (Abb. 3.14). Von dem Punkt  $P$  ist der Aufriss  $P''$  bekannt. Bestimme  $P'$  und die Hauptgeraden durch  $P$ .

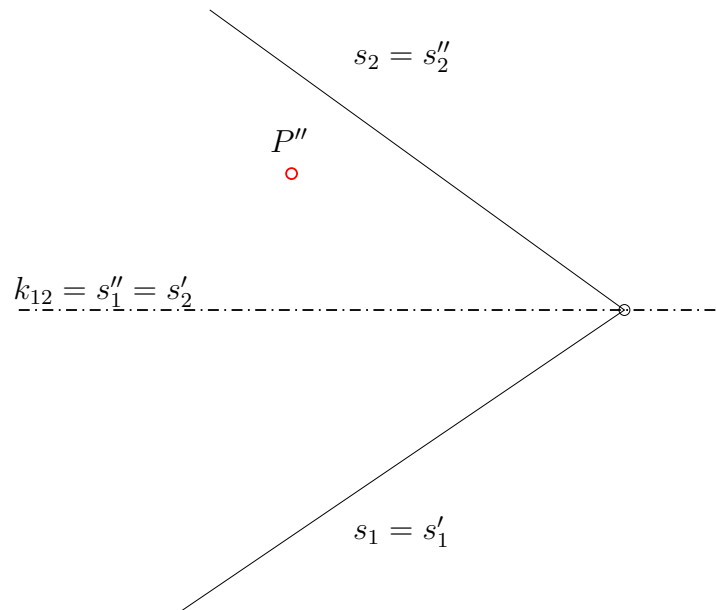


Abbildung 3.14: Punkt und Hauptgeraden in einer Ebene

**Aufgabe 3.7** Gegeben: Satteldach eines Hauses und der Grundriss zweier Reklamebuchstaben auf einer Dachfläche (Abb. 3.15). Gesucht: Aufriss der Buchstaben.

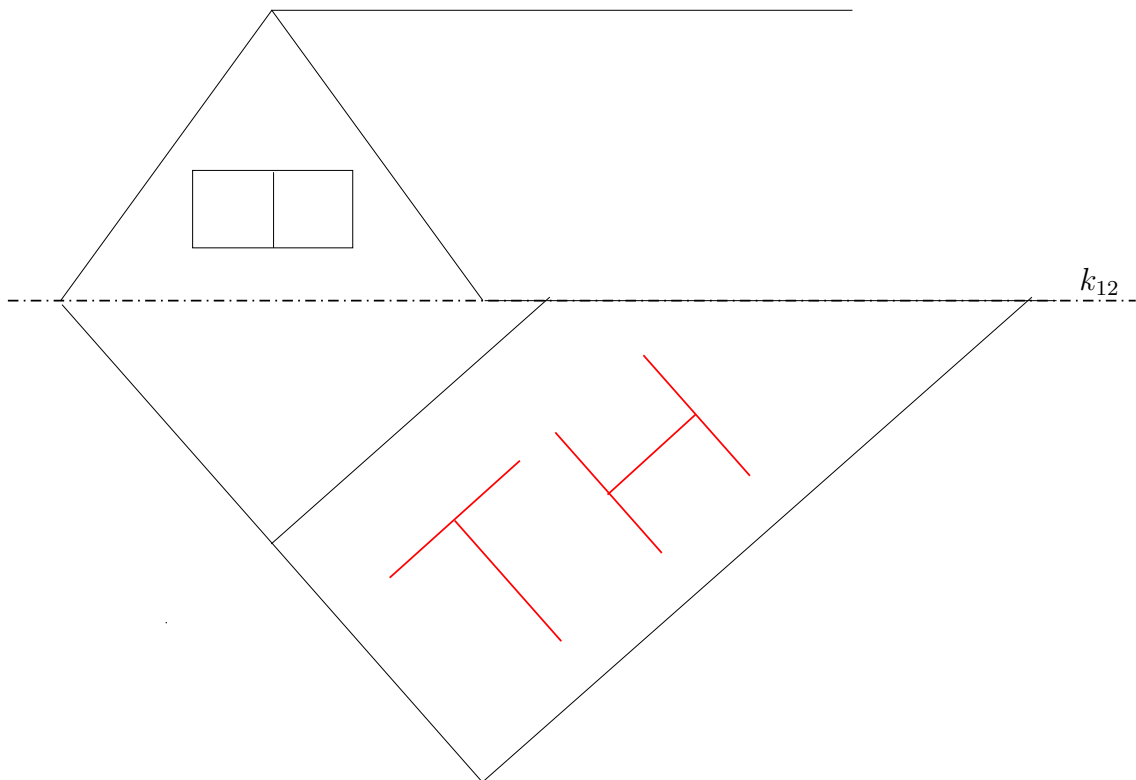


Abbildung 3.15: Reklame auf einem Dach

Einige Sonderlagen für Ebenen (Abb. 3.16):

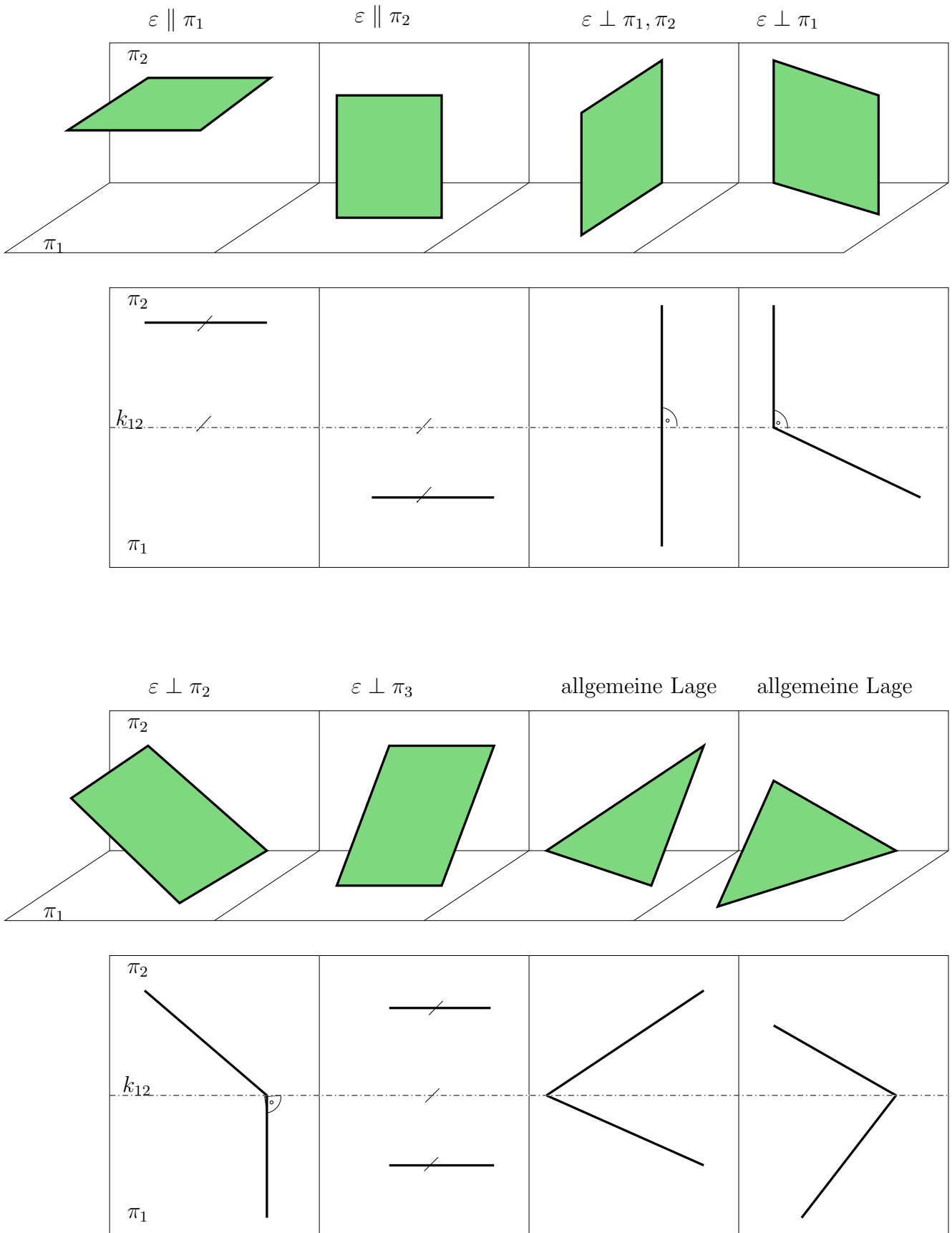


Abbildung 3.16: Sonderlagen von Ebenen

### 3.4 Weitere Risse (Umprojektionen)

(s. LEO S.96)

Man kommt oft nicht mit Grund- und Aufriss aus, wenn z.B.

- (a) gelehnte Lagen auftreten, da dann ohne Zusatzangaben Projektionen nicht eindeutig sind, oder wenn
- (b) Grund- und Aufriss nicht „anschaulich“ sind.

Mit Hilfe weiterer Risstafeln lassen sich in Sonderlagen Konstruktionen (z.B. Antragen eines Winkels oder einer Länge) leichter ausführen.

Im Folgenden heißen zwei Risse (senkrechte Parallelprojektionen) einander **zugeordnet**, wenn die zugehörigen Risstafeln senkrecht zueinander stehen.

**Prinzip:** Man führt eine neue Risstafel  $\pi_3$  so ein, dass sie entweder  $\pi_1$  oder  $\pi_2$  zugeordnet ist. In jedem Fall wird  $\pi_3$  um die neue Risskante  $k_{13}$  oder  $k_{23}$  in die Zeichenebene geklappt.

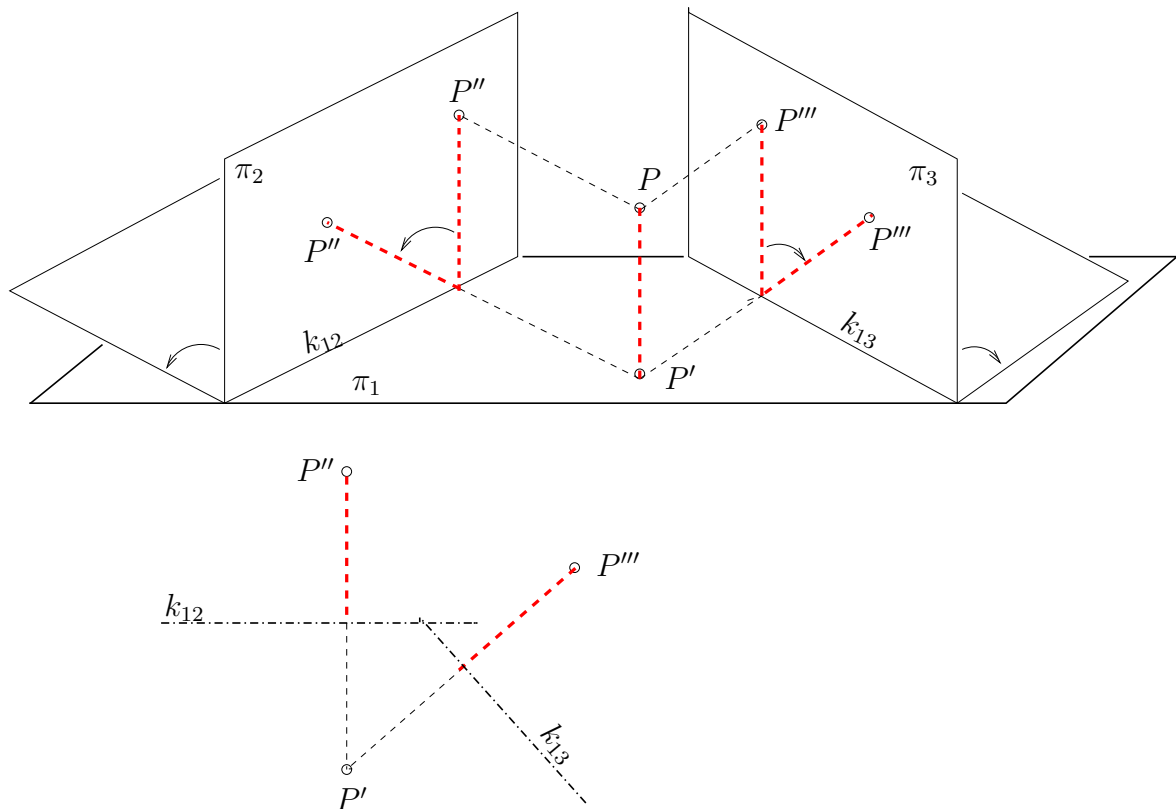


Abbildung 3.17: Umprojektion eines Punktes

**Durchführung**, falls  $\pi_3$  der Tafel  $\pi_1$  zugeordnet ist.

In diesem Fall kann man  $\pi_3$  als eine neue Aufrisstafel auffassen.

- (1) Zeichne die neue Risskante  $k_{13}$ .
- (2) Der (neue) Riss  $P'''$  des Punktes  $P$  liegt auf der Senkrechten zu  $k_{13}$  durch  $P'$  (neuer Ordner) und hat denselben Abstand von der neuen Risskante  $k_{13}$  wie  $P''$  (der alte Aufriss) von (der alten Risskante)  $k_{12}$ .

Der neue Riss in  $\pi_3$  ist über die Risskante  $k_{13}$  dem Riss in  $\pi_1$  zugeordnet.



**Aufgabe 3.8** Stelle durch Umprojektion ein anschauliches Bild eines Hauses her (Abb. 3.18).

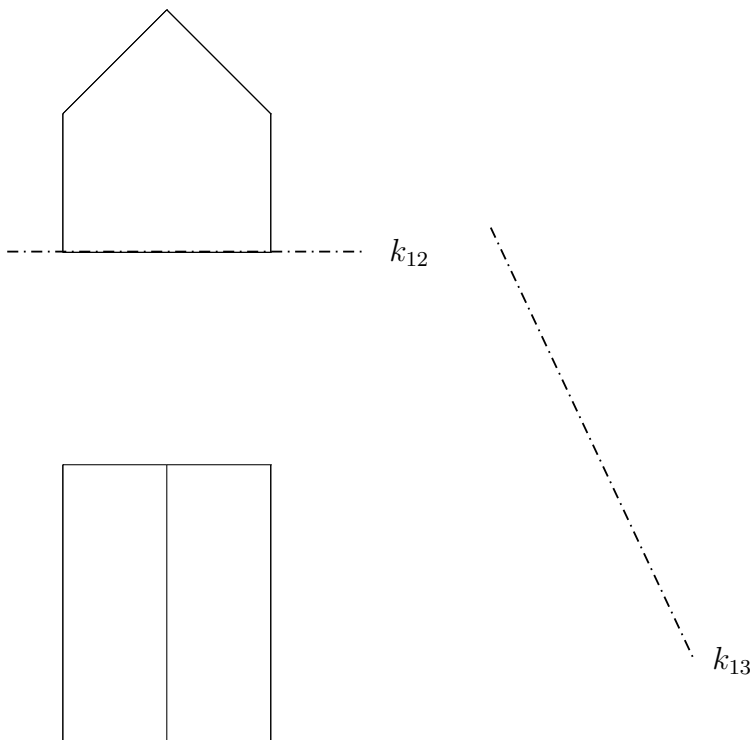


Abbildung 3.18: Umprojektion eines Hauses

Die Durchführung für den Fall, dass  $\pi_3$  der Aufrisstafel zugeordnet ist, verläuft analog (Abb. 3.19).

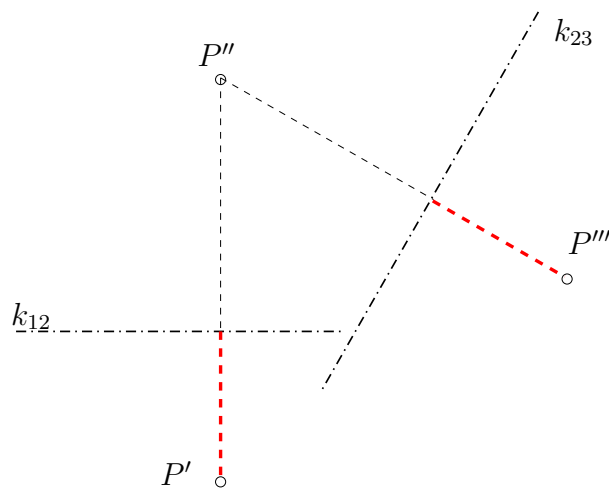


Abbildung 3.19: Umprojektion eines Punktes (Grundriss wird ersetzt)

**Aufgabe 3.9** Stelle durch Umprojektion ein anschauliches Bild einer Pyramide her (Abb. 3.20).

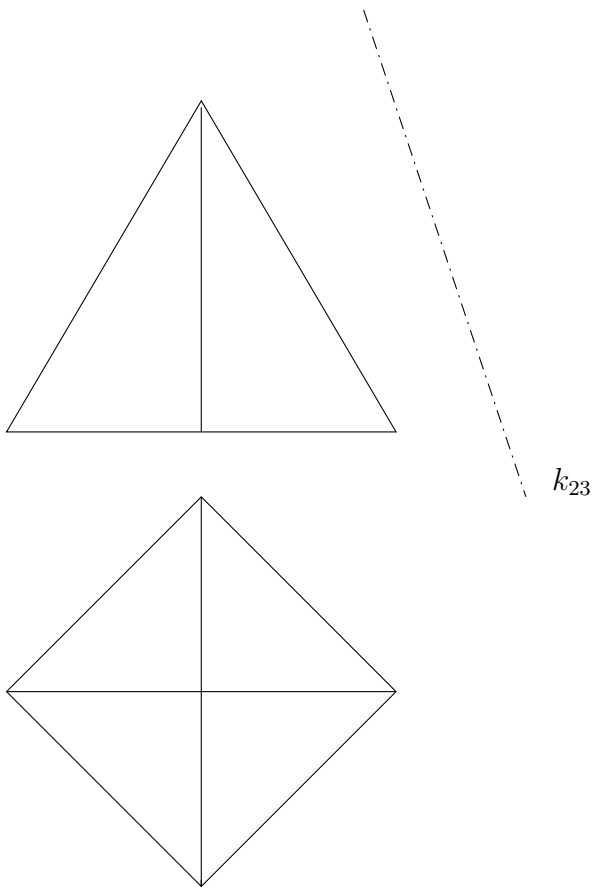


Abbildung 3.20: Umprojektion einer Pyramide (Grundriss wird ersetzt)

Umprojektionen können mehrfach hintereinander durchgeführt werden. Dabei muss man auf folgendes achten:

- (a) Man muss von zwei **zugeordneten Rissen** ausgehen.
- (b) Aus dem **wegfallenden** Riss muss der in (2) notwendige Abstand zur Risskante entnommen werden.

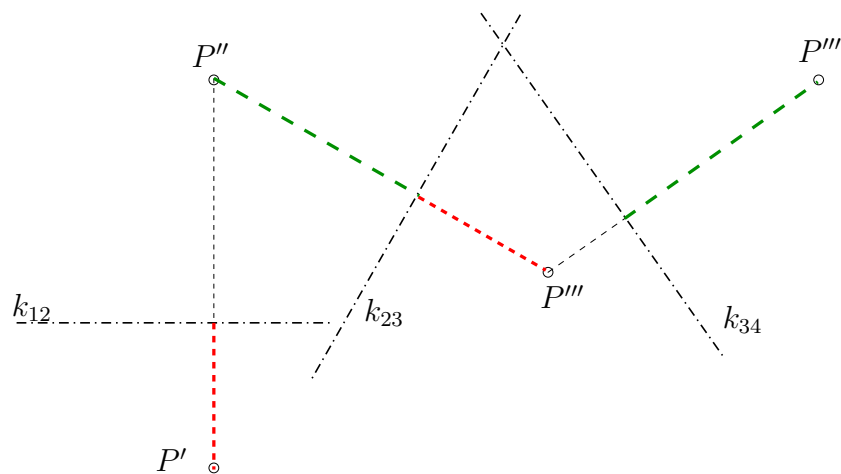


Abbildung 3.21: Mehrfachumprojektion eines Punktes

## 3.5 Grundaufgaben

### 3.5.1 Schnittpunkt (Durchstoßpunkt) Gerade–Ebene

(s. LEO S.92)

Gegeben: Gerade  $g$  durch Grundriss  $g'$  und Aufriss  $g''$ ,

Ebene  $\varepsilon$  durch drei Punkte  $A, B, C$  in Grund- und Aufriss (Aufgabe 3.10).

Gesucht: Schnittpunkt  $D = g \cap \varepsilon$ .

Lösungs**idee**: Es sei  $\mu$  die zu  $\pi_1$  (oder  $\pi_2$ ) senkrechte Ebene, die  $g$  enthält. Sie schneidet  $\varepsilon$  in der Schnittgeraden  $s = \mu \cap \varepsilon$ . Dann gilt für den gesuchten Durchstoßpunkt  $D = s \cap g$ .

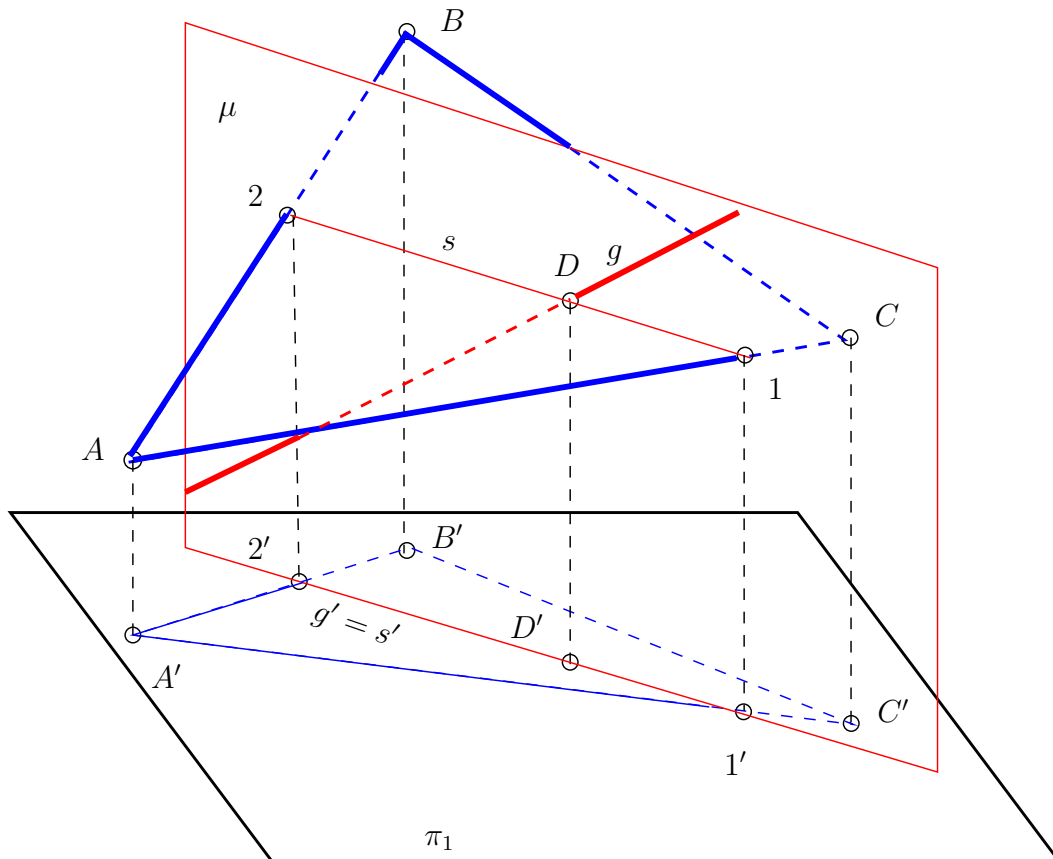


Abbildung 3.22: Schnitt Gerade–Ebene

**Durchführung**, falls  $\mu \perp \pi_1$  gewählt ist:

- (1) Wähle zwei Geraden  $e_1, e_2$  der Ebene  $\varepsilon$ , die nicht zu  $g'$  parallel sind.  $e'_1, e''_1, e'_2, e''_2$  seien ihre Risse.
- (2) Der Schnitt von  $g'$  mit  $e'_1$  bzw.  $e'_2$  liefert  $E'_1$  bzw.  $E'_2$ .
- (3) Bestimme (mit Ordern)  $E''_1, E''_2$  auf  $e''_1, e''_2$ .
- (4) Die Gerade durch  $E''_1$  und  $E''_2$  ist der Aufriss  $s''$  der Hilfsgeraden  $s$ .
- (5)  $D'' = s'' \cap g''$  ist der Aufriss des Durchstoßpunktes  $D$ .
- (6)  $D'$  ist der Schnittpunkt des Ordners durch  $D''$  mit  $g'$ .

Die Durchführung für den Fall, dass  $\mu \perp \pi_2$  gewählt wurde, verläuft analog; man muss nur die Rollen von Grund- und Aufriss vertauschen.

**Aufgabe 3.10** Bestimme den Schnittpunkt einer Gerade mit der durch ein Dreieck gegebenen Ebene (Abb. 3.23).

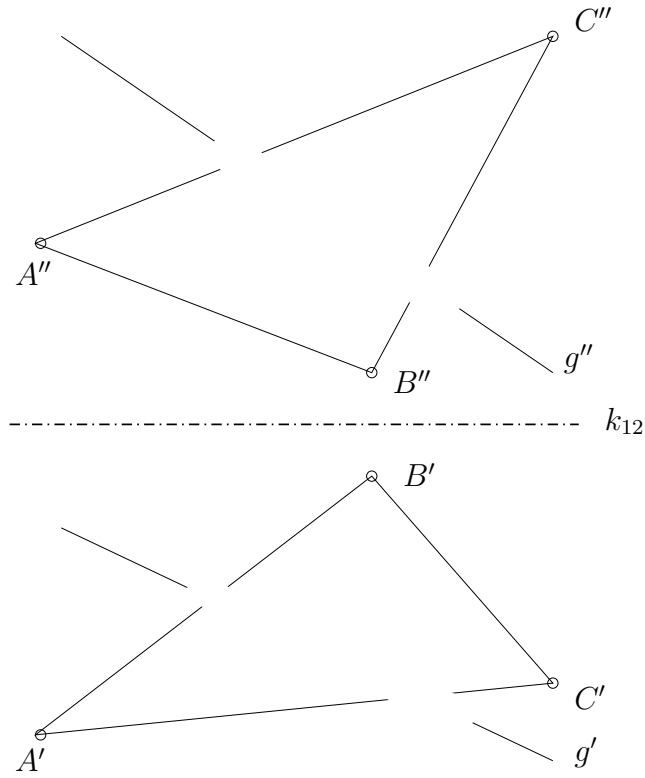


Abbildung 3.23: Schnitt Gerade–Ebene

**Aufgabe 3.11** In Grund- und Aufriss ist ein dreikantiger Balken und ein ebenes Viereck gegeben (Abb. 3.24). Bestimme Grund- und Aufriss der Schnittfigur.

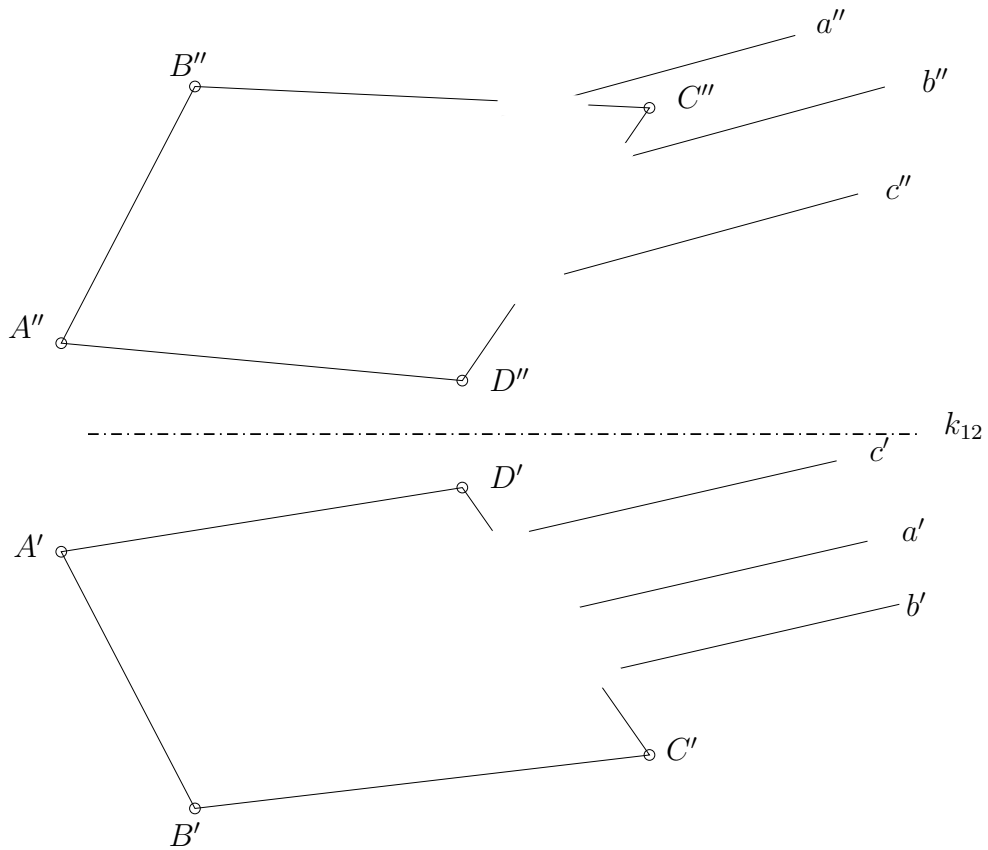


Abbildung 3.24: Schnitt Balken–Ebene

### 3.5.2 Wahre Länge einer Strecke

(s. LEO S.100)

Gegeben: Strecke  $\overline{AB}$  in Grund- und Aufriss.

Gesucht: Die wahre Länge dieser Strecke.

Lösungs**idee**: Eine Strecke erscheint im Aufriss (bzw. Grundriss) in wahrer Länge, wenn die Strecke zur Aufrisstafel (bzw. Grundrisstafel) parallel ist.

Wir geben hier zwei Möglichkeiten an, die Strecke „tafelparallel“ zu machen:

#### 1. Möglichkeit:

Man dreht die Strecke um eine zur Grundrisstafel (bzw. Aufrisstafel) senkrechte Achse bis sie parallel zur Aufrisstafel (bzw. Grundrisstafel) ist.

**Durchführung** der Drehung um eine zu  $\pi_1$  senkrechte Achse durch  $B$ :

- (1) Drehe  $A'$  um  $B'$ , bis die gedrehte Strecke parallel zu  $k_{12}$  ist. Der gedrehte Punkt sei  $\tilde{A}'$  (Grundriss von  $\tilde{A}$ , dem um  $B$  gedrehten Punkt  $A$ ).
- (2)  $\tilde{A}''$  liegt auf dem Ordner durch  $\tilde{A}'$  und auf der Parallelen durch  $A''$  zur Risskante (bei der Drehung bleibt  $\tilde{A}$  auf der gleichen Höhe wie  $A$ !).
- (3)  $|\tilde{A}'' B''|$  ist die wahre Länge der Strecke  $\overline{AB}$ .

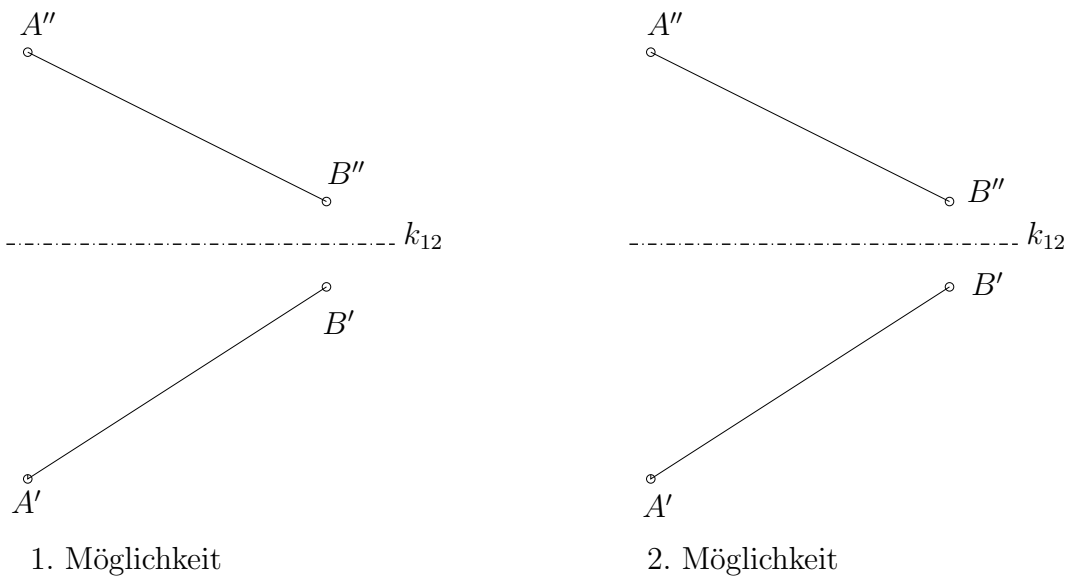


Abbildung 3.25: Wahre Länge einer Strecke

#### 2. Möglichkeit:

Man legt durch die Strecke  $\overline{AB}$  eine zu  $\pi_1$  (bzw.  $\pi_2$ ) senkrechte Ebene  $\mu$  und dreht  $\mu$  um eine Höhenlinie (Frontlinie) in eine horizontale (senkrechte) Lage.

**Durchführung** der Drehung um eine Höhenlinie durch  $B$ :

- (1) Zeichne den Aufriss  $C''$  des Punktes  $C$ , der senkrecht unter  $A$  liegt und dieselbe Höhe wie  $B$  hat. Es ist  $C' = A'$ .
- (2) Man drehe das rechtwinklige Dreieck  $A, B, C$  um die Kathete  $\overline{BC}$  um  $90^\circ$  parallel zu  $\pi_1$ , indem man in  $A' (= C')$  senkrecht die Strecke  $\overline{C''A''}$  anträgt. Die Hypotenuse des entstandenen Dreiecks ist die wahre Länge der Strecke  $\overline{A, B}$ .

(Entspricht der Einführung einer neuen Risstafel parallel zur Strecke  $\overline{AB}$ .)

**Aufgabe 3.12** Von einem Punkt  $P$  und einer Geraden  $g$  sind Grund- und Aufriss gegeben (Abb. 3.26). Trage auf  $g$  eine in  $P$  beginnende Strecke der Länge 3 cm ab.

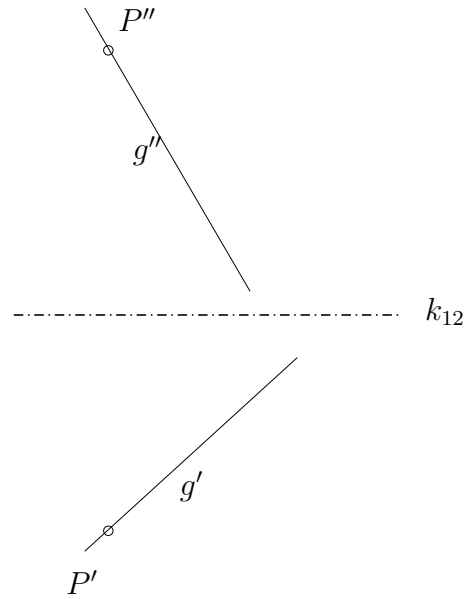


Abbildung 3.26: Antragen einer wahren Länge einer Strecke

**Aufgabe 3.13** Gegeben: Satteldach, Kaminkopf ( $K$ ) und die Richtung der Sonnenstrahlen ( $S$ ) (Abb. 3.27). Gesucht: a) Schnitt des Kamins mit der Dachfläche. b) Schatten des Kamins auf der Dachfläche. c) Wahre Länge der Strecke  $\overline{AB}$  und die Dachneigung  $\alpha$ .

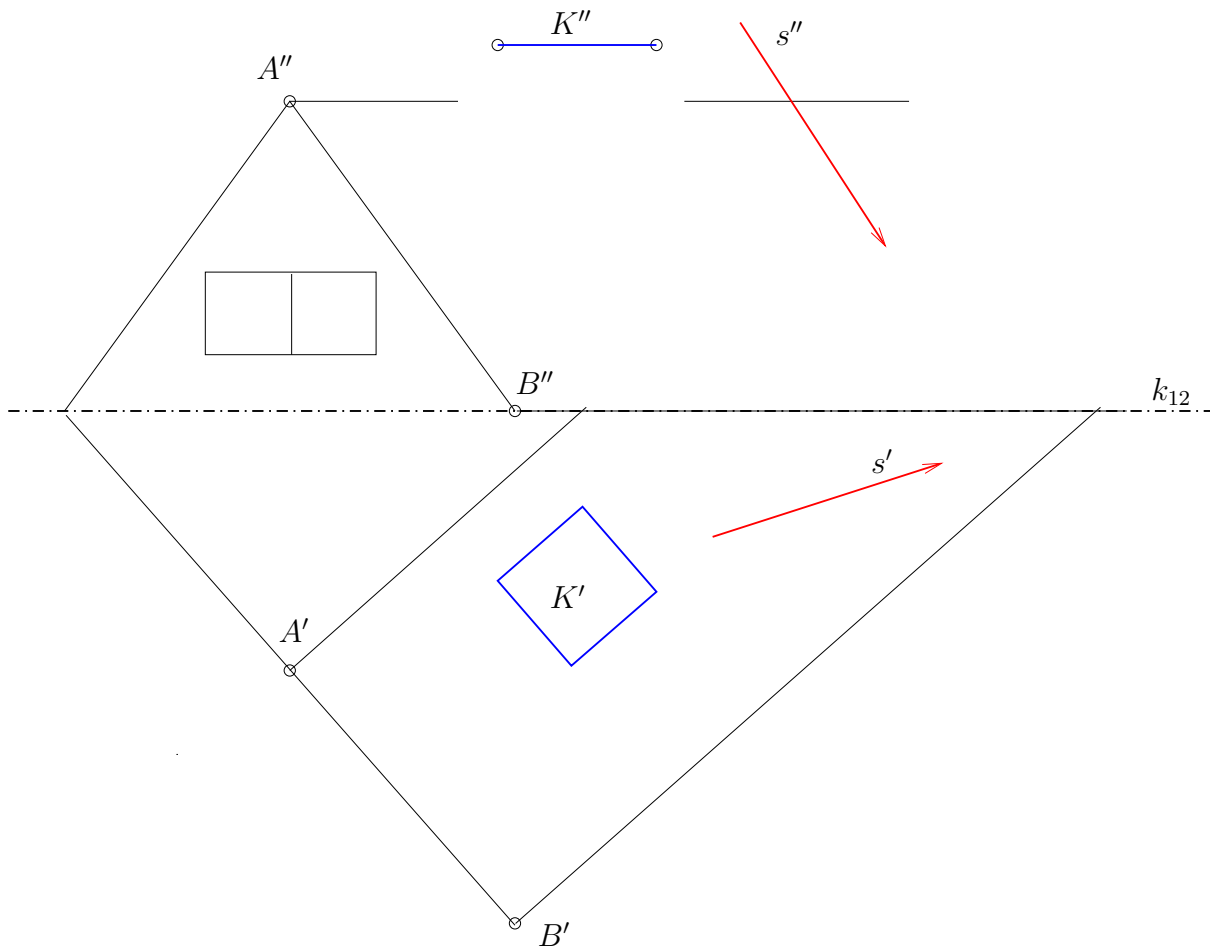


Abbildung 3.27: Schatten eines Kamins

### 3.5.3 Wahre Gestalt einer ebenen Figur

(s. LEO S.103)

Gegeben: Das Dreieck  $A, B, C$  in Grund- und Aufriss.

Gesucht: Die Wahre Gestalt des Dreiecks.

**Lösungsidee:** Einführung einer Risstafel  $\pi_3$  senkrecht zum Dreieck. Der Riss des Dreiecks erscheint in  $\pi_3$  als Strecke. Jetzt lässt sich eine Risstafel  $\pi_4$  parallel zu dem Dreieck einführen und das Dreieck erscheint in  $\pi_4$  in wahrer Gestalt.

**Durchführung,** falls  $\pi_3$  der Grundrisstafel zugeordnet wird:

- (1) Bestimme eine Höhenlinie  $h$  des Dreiecks.
- (2) Neue Risskante  $k_{13} \perp h'$ . Umprojektion des Dreiecks.  
 $A'''$ ,  $B'''$ ,  $C'''$  liegen auf einer Geraden  $d'''$ .
- (3) Neue Risskante  $k_{34} \parallel d'''$ . Der neue Riss zeigt das Dreieck in wahrer Gestalt.

**Aufgabe 3.14** Bestimme die wahre Gestalt eines in Grund- und Aufriss gegebenen Dreiecks (Abb. 3.28).

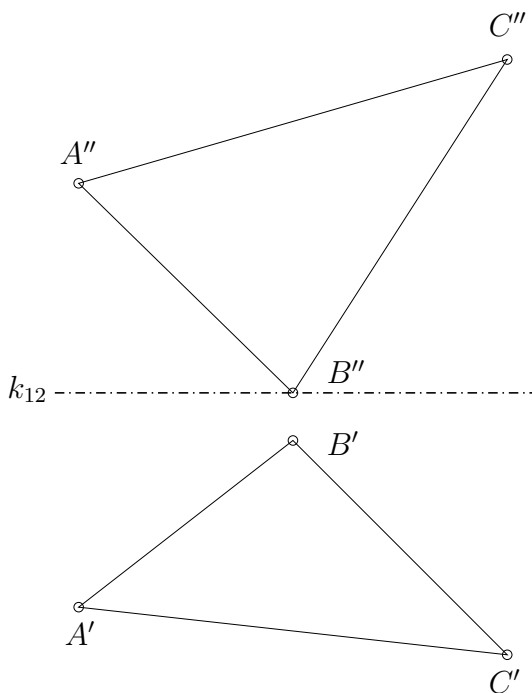


Abbildung 3.28: Wahre Gestalt eines Dreiecks

## 3.5.4 Lot auf eine Ebene

(s. LEO S.105)

Gegeben: Ebene  $\varepsilon$  durch drei Punkte  $A, B, C$  und Punkt  $P$ .Gesucht: Lot  $l$  auf  $\varepsilon$  durch  $P$ .Lösungsidee: Ein rechter Winkel erscheint in einer senkrechten Parallelprojektion wieder als rechter Winkel, wenn ein Schenkel parallel zur Bildtafel ist. Höhenlinien (bzw. Frontlinien) sind parallel zu  $\pi_1$  (bzw.  $\pi_2$ ).**Durchführung:**

- (1) Zeichne die Höhenlinie  $h$  und die Frontlinie  $f$  von  $\varepsilon$  durch (z.B.)  $C$  in Grund- und Aufriss.
- (2) Das Lot von  $P'$  auf  $h'$  ist der Grundriss  $l'$  und das Lot von  $P''$  auf  $f''$  ist der Aufriss  $l''$  des Lotes  $l$  von  $P$  auf  $\varepsilon$ .

**Aufgabe 3.15** Bestimme den Fußpunkt des Lotes vom Punkt  $P$  auf die durch ein Dreieck bestimmte Ebene (Abb. 3.29, links).

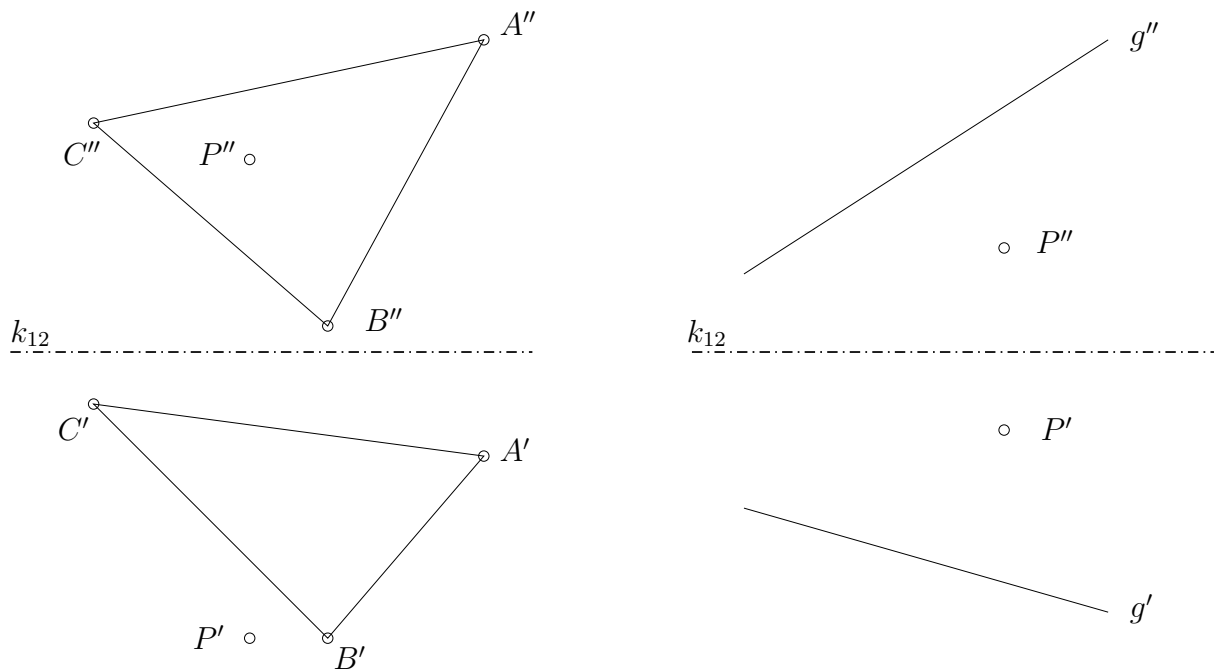


Abbildung 3.29: Lot auf Ebene bzw. Lotebene

**Aufgabe 3.16 :**Gegeben: Gerade  $g$ , Punkt  $P$ ,  $P \notin g$  (Abb. 3.29 rechts).Gesucht: Die Hauptgeraden der Lotebene  $\mu$  zu  $g$  durch  $P$ .



### 3.6 Einschneideverfahren bei senkrechter Axonometrie

(s. LEO S.199,204,208)

Bei der **senkrechten** Axonometrie stehen die Projektionsstrahlen senkrecht zur Bildtafel. Da senkrechte Projektionen auf die Koordinatenebenen meistens nur unanschauliche Bilder liefern (z.B. bei einem Haus: Grund- Auf- und Seitenriss) machen wir hier die folgende Annahme:

**Keine** Koordinatenebene ist **parallel** zur Bildtafel !!

Wesentlich für die Orientierung der Risse, um ein **senkrecht** axonometrisches Bild beim Einschneiden zu erhalten, ist das *Spurdreieck*  $S_x, S_y, S_z$ . Es besteht aus den Schnittpunkten der Bildtafel mit den Koordinatenachsen (s. Fig. 3.30).

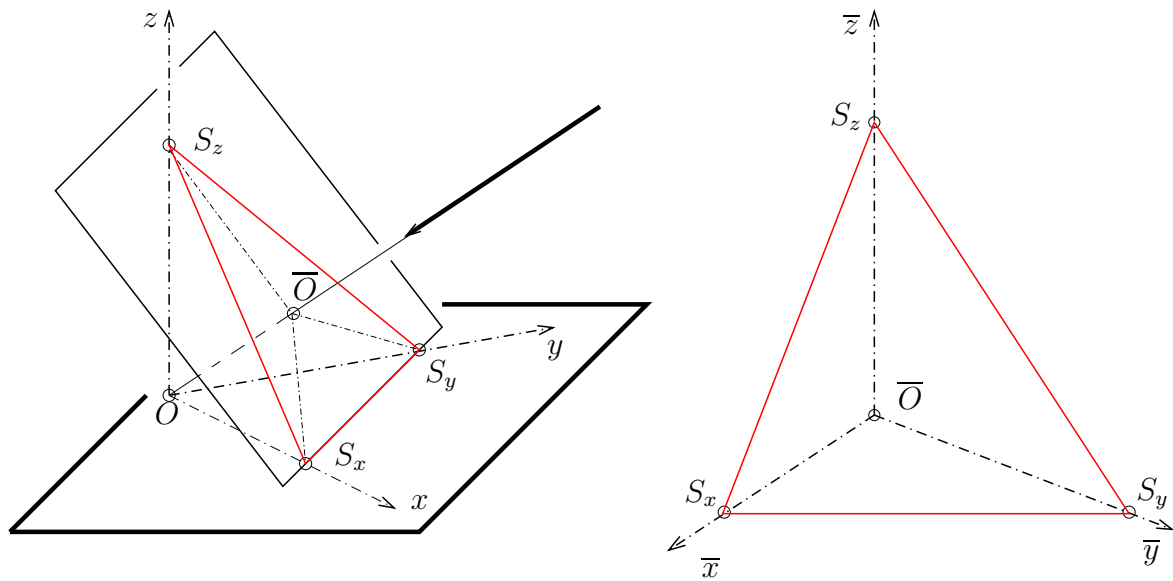


Abbildung 3.30: Senkrechte Axonometrie: Spurdreieck

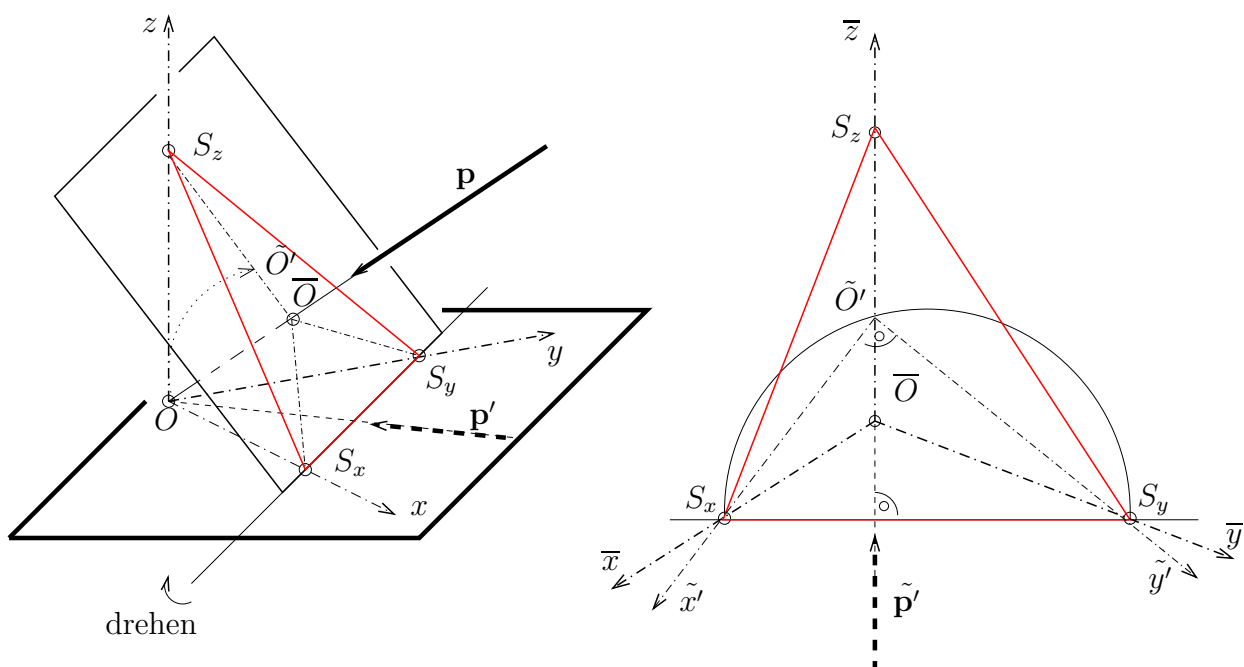


Abbildung 3.31: Senkrechte Axonometrie: Grundriss in Bildtafel drehen

Für das Einschneideverfahren muss der Grundriss und die Bildtafel in derselben Zeichenebene liegen. Also drehen wir den Grundriss um die Grundrissspur in die Bildebene (Fig. 3.31).

Aus dem rechten Bild von Fig. 3.31 erkennen wir

- wie wir den Grundriss in die Zeichenebene legen müssen und in welche Richtung wir einschneiden müssen (senkrecht zur Grundrissspur).
- nach analogen Überlegungen für die Aufrisse:  
Das Bild  $\bar{O}$  des Koordinatenursprungs ist der Schnittpunkt der Höhen des Spurdreiecks und die Höhen sind die Bilder der Koordinatenachsen.

Es gibt nun drei Möglichkeiten die Orientierung für das Einschneideverfahren (bei senkrechter Axonometrie) vorzugeben:

- Man legt das Spurdreieck  $S_x, S_y, S_z$  (im Einschneidebild) fest. Dann sind die Höhen des Spurdreiecks die Bilder der Koordinatenachsen und der Höhenschnittpunkt ist  $\bar{O}$ .  
Der Nullpunkt des Grundrisses findet man über den Thaleskreis (s. Fig. 3.31). Durch Herausziehen des umgeklappten Grundrisses in Richtung  $\bar{\mathbf{p}}'$  liegt die Position und die Einschneiderichtung für den Grundriss fest. Analog verfährt man mit einem der Aufrisse.
- Man legt das Bild des Koordinatendreiecks fest, wählt irgendeinen Punkt der x-Achse als  $S_x$  und ergänzt  $S_y, S_z$  so, dass die Koordinatenbilder die Höhen des Spurdreiecks sind. Der Rest verläuft wie in a).
- Man legt in Grund- und Aufriss die Projektionsrichtung und (z.B.) den Spurpunkt  $S_x$  fest. Die Grundrissspur muss senkrecht zum Grundriss der Projektionsrichtung sein (s. Fig.3.32). Damit findet man  $S_y$  im Grundriss und Aufriss. Die Aufrissspur muss senkrecht zum Aufriss der Projektionsrichtung sein. Damit findet man  $S_z$ . Also sind von dem Spurdreieck die Seiten  $S_x S_y, S_y S_z$  und die Höhe auf der Seite  $S_x S_y$  bekannt (s. Fig. 3.32). Mit der Länge von  $S_y S_z$  lässt sich  $S_z$  im Einschneidebild zeichnen. Der Rest verläuft wie bei a). Statt der Höhe auf  $S_x S_y$  kann man auch die wahre Länge von  $S_x S_z$  verwenden (sie muss zuerst bestimmt werden !).

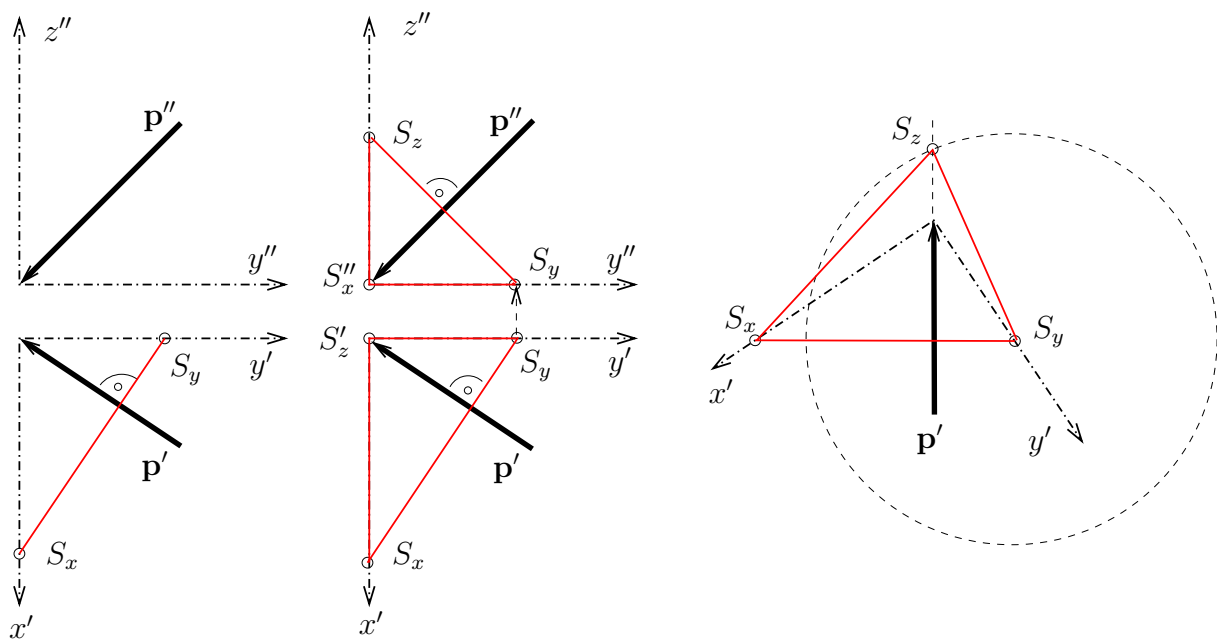


Abbildung 3.32: Konstruktion des Spurdreiecks aus der Projektionsrichtung

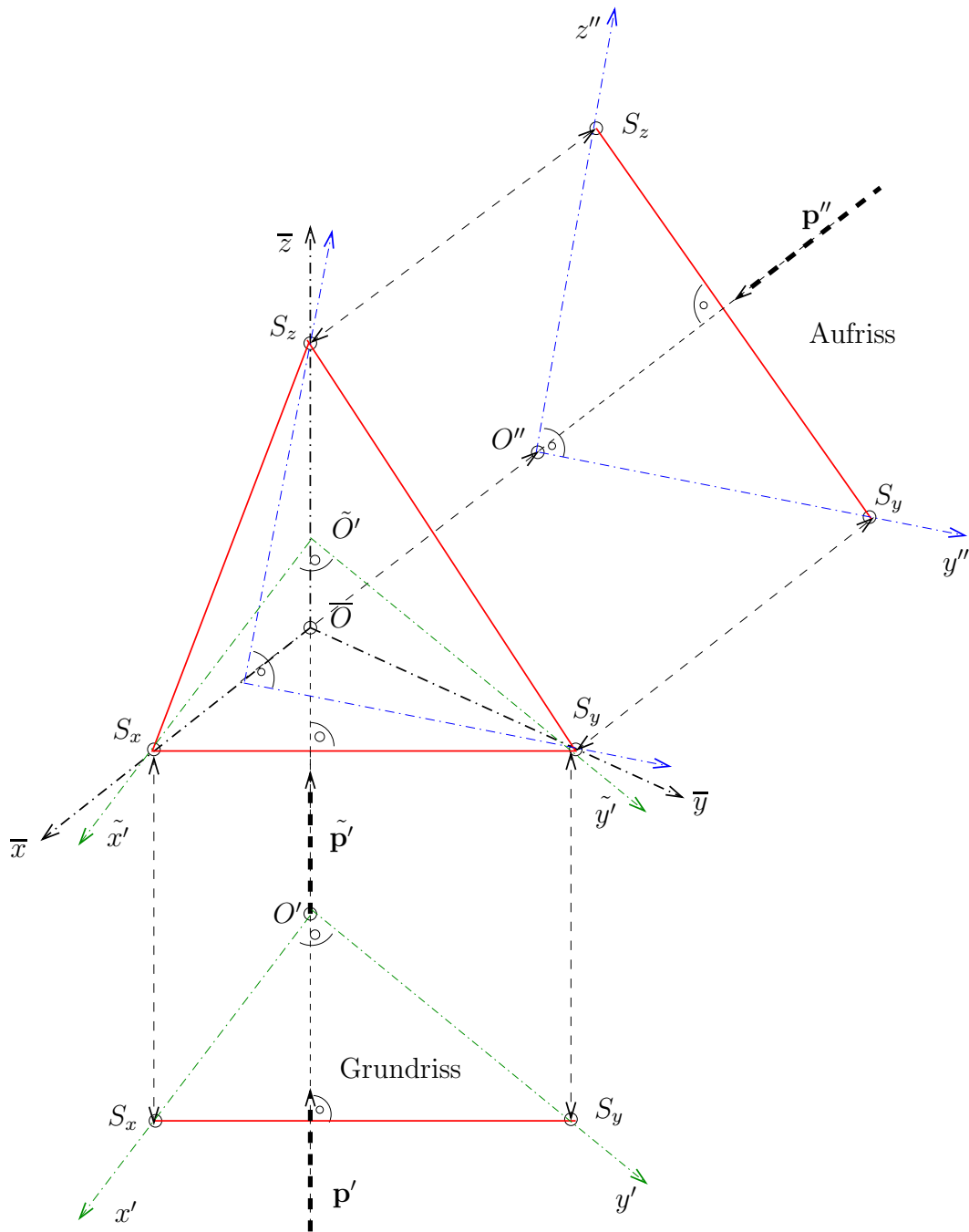


Abbildung 3.33: Senkrechte Axonometrie: Einschneideverfahren

**Aufgabe 3.17** Gegeben: Grund- und Afriss eines "halben" Würfels und die Bilder der Koordinatenachsen.  
 Gesucht: Ein anschauliches Bild in senkrechter Axonometrie mit Hilfe des Einschneideverfahrens. Gib die Projektionsrichtung in Grund- und Aufriss an.

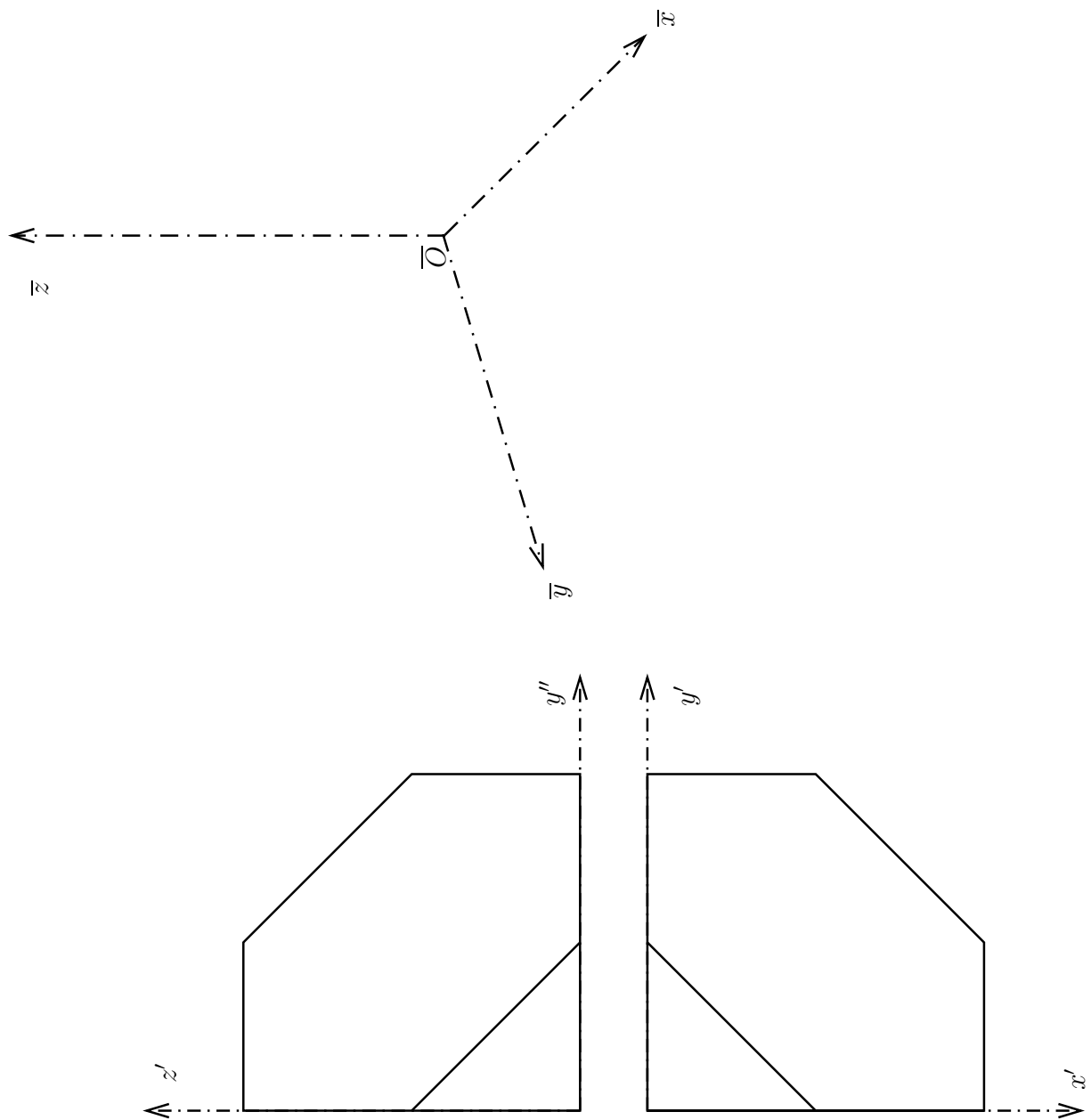


Abbildung 3.34: Senkrechte Axonometrie: Beispiel "halber" Würfel

**Aufgabe 3.18** Gegeben: Grund- und Afriss eines Hauses und die Projektionsrichtung für eine senkrechte Axonometrie.

Gesucht: Das zugehörige senkrechte axonometrische Bild mit Hilfe des Einschneideverfahrens.

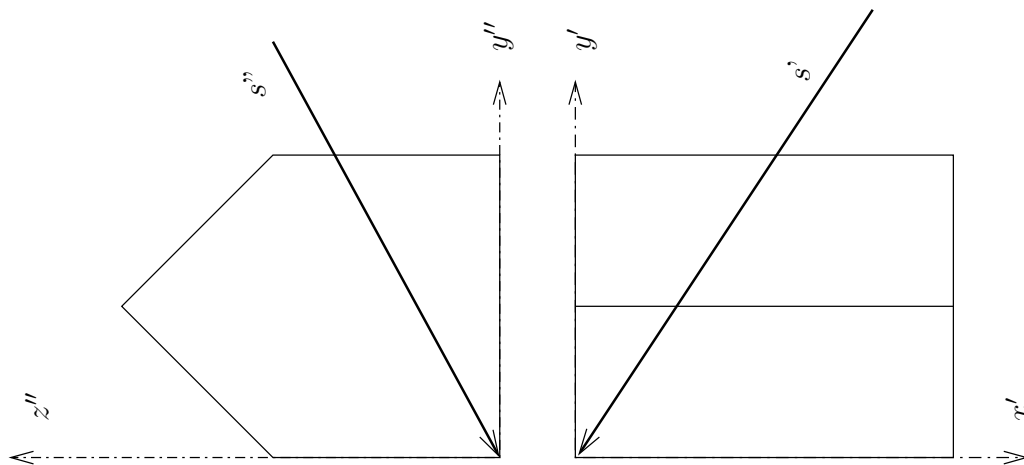


Abbildung 3.35: Senkrechte Axonometrie: Haus mit vorg. Projektionsrichtung

### 3.7 Dachausmittelung

(s. LEO S.195,197)

Ein Dach besteht i.a. aus ebenen geradlinig begrenzten Flächenstücken. Wir nehmen an, dass die unteren Begrenzungsstrecken, die **Traufkanten**, horizontal sind und auf **gleicher Höhe** liegen. Wir nennen zwei sich auf der Traufkante schneidende Dachflächen *benachbart*. Eine Schnittgerade benachbarter Dachebenen heißt **Grat-** oder **Kehllinie**, je nachdem sie von einer ‐auspringenden‐ oder ‐einspringenden‐ Ecke der Traufe ausgeht. Die Schnittgerade zweier nicht benachbarter Dachebenen heißt **First**.

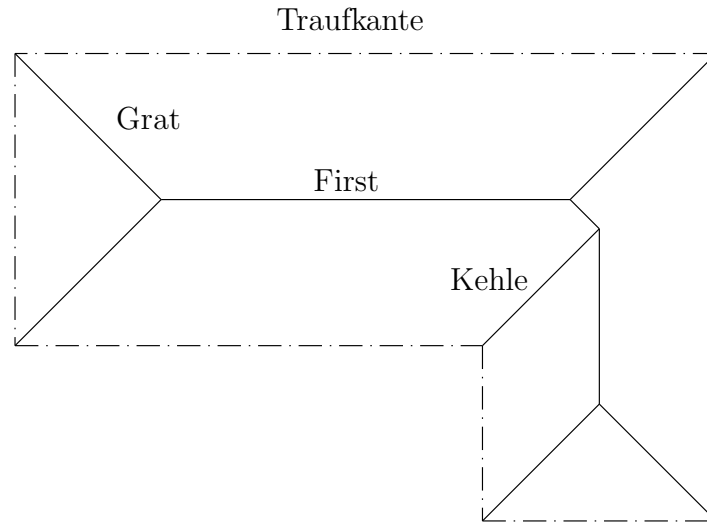


Abbildung 3.36: First, Grat- und Kehllinien eines Daches (Dachausmittelung)

Die **Aufgabe** der Dachausmittelung besteht darin, First, Grat- und Kehllinien sowie die wahre Gestalt der einzelnen Dachflächen zu bestimmen.

#### Lösungsprinzip:

Eine horizontale Hilfsebene  $\varepsilon$  wird in geeigneter Höhe durch das Dach gelegt.  $\varepsilon$  schneidet das Dach in Höhenlinien. Die Höhenlinien schneiden sich in Grat- und Kehllinien. Und Grat- und Kehllinien schneiden sich in Firstlinien.

#### Durchführung:

- (1) Wähle die Höhe der Ebene  $\varepsilon$  so, dass die Höhenlinien im Grundriss einen Abstand von wenigstens 1-2 cm von der Traufkante haben.  
Bei *gleicher Dachneigung* haben Höhenlinien überall den gleichen Abstand von der Traufkante !
- (2) Zeichne die Höhenlinien für jede Dachebene in den Grundriss.
- (3) Schneide die Höhenlinien benachbarter Dachflächen und verbinde die Schnittpunkte mit den entsprechenden Ecken des Traufpolygons. Dadurch erhält man die Grat- und Kehllinien.  
Bei *gleicher Dachneigung* sind Grat- und Kehllinien Winkelhalbierenden der zugehörigen Traufkanten !
- (4) Schnitt von „entsprechenden“ Grat- oder Kehllinien ergeben Punkte von Firstlinien.
- (5) Fehlende Firstlinien ergeben sich, indem man die entsprechenden (nicht benachbarten) Dachebenen (mit Hilfe der Höhenlinien) schneidet.
- (6) Die wahre Gestalt einer bestimmten Dachfläche erhält man durch Drehen der Ebene um die Traufkante in die Zeichenebene. Der wahre Abstand eines Punktes von der Traufkante ergibt sich als Hypotenuse des zugehörigen Stützdreiecks.

**Aufgabe 3.19 :**

Gegeben: Grundriss der Traufkanten eines Daches mit Dachneigungen  $\alpha, \beta$  (Abb. 3.37).

Gesucht: a) Grat-, First- und Kehllinien,

b) die wahre Gestalt der Dachfläche, die an der Traufkante  $\overline{AB}$  anliegt.

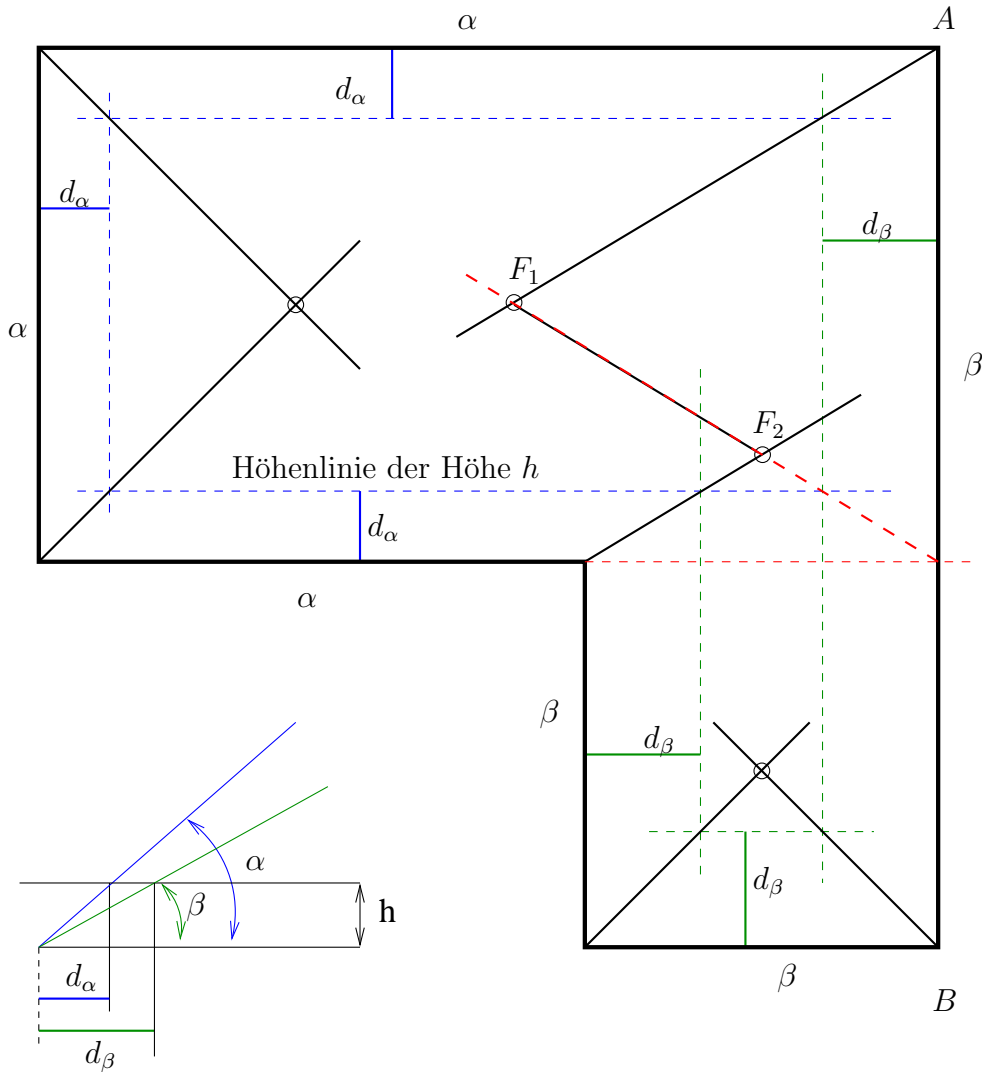


Abbildung 3.37: Grad- und Kehllinien zu Aufgabe 1

**Beachte die Konstruktion der Strecke  $F_1F_2$  als Grat zweier nicht benachbarter Dachflächen !**

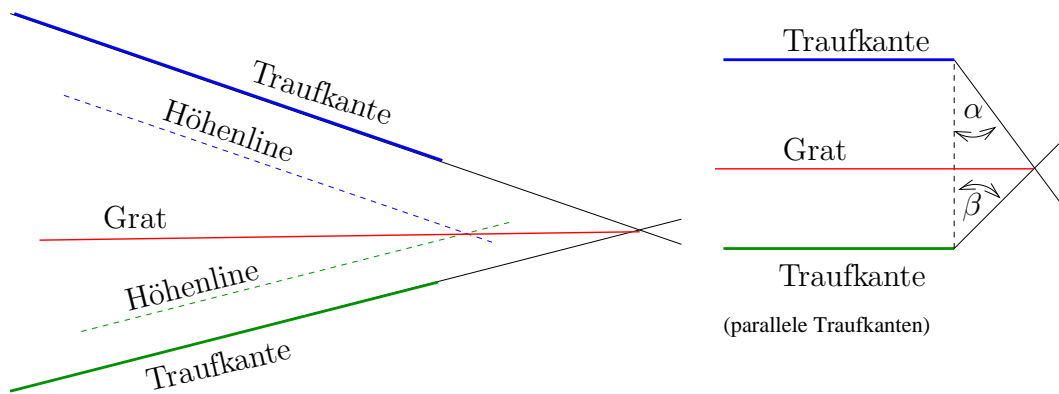


Abbildung 3.38: Konstruktionsprinzip einer Grat/Kehl-linie

**Aufgabe 3.20 :**

*Gegeben:* Grundriss der Traufkanten eines Daches mit Dachneigungen in Grad (Abb. 3.39).

*Gesucht:* Grat-, First- und Kehllinien.

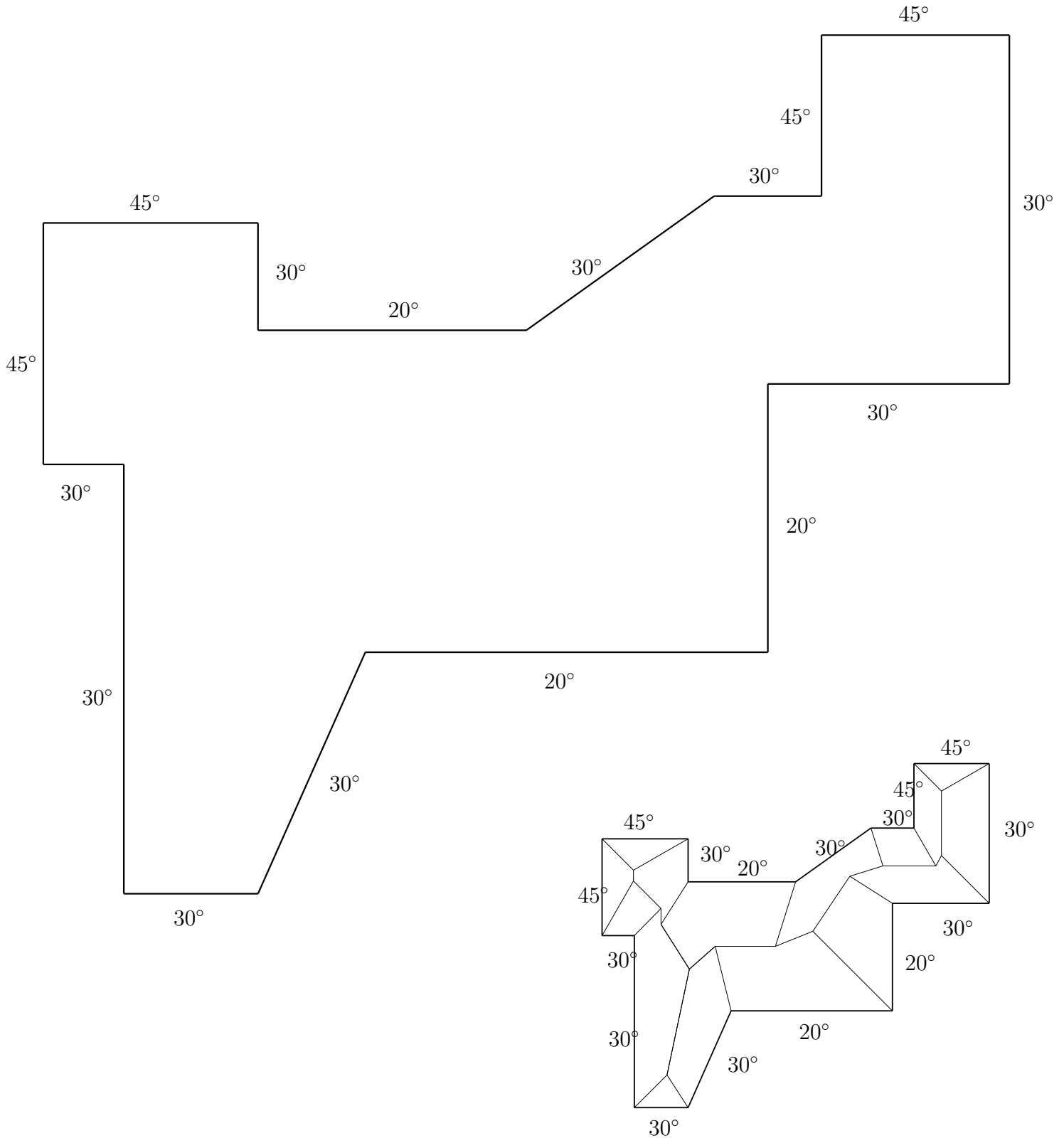


Abbildung 3.39: Aufgabe 2 zur Dachausmittelung



# Kapitel 4

## Projektion von Kurven und Flächen

### 4.1 Kreis und Ellipse

(s. LEO S.55)

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem lässt sich ein **Kreis** mit Mittelpunkt  $(0,0)$  und Radius  $r$  durch die **Gleichung**:  $x^2 + y^2 = r^2$  oder durch die

**Parameterdarstellung**:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  beschreiben.

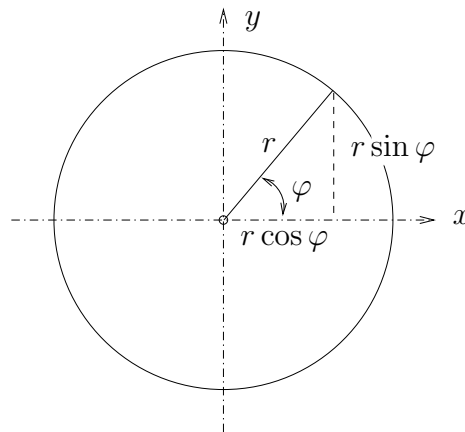


Abbildung 4.1: Parameterdarstellung eines Kreises

Es gibt viele Möglichkeiten, eine Ellipse zu definieren. Wir wollen hier die folgende Definition wählen:

Eine ebene Kurve  $k$ , die sich in einem geeigneten rechtwinkligen Koordinatensystem durch eine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a, b > 0$$

beschreiben lässt, ist eine **Ellipse** mit **Mittelpunkt**  $(0,0)$  und den **Halbachsen**  $a, b$ . Für  $a = b$  erhält man einen Kreis.

Die Strecke zweier Ellipsenpunkte heißt **Sehne** der Ellipse.

Eine Sehne durch den Mittelpunkt heißt **Durchmesser** der Ellipse.

Die Punkte  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(0, -b)$  sind die **Scheitel** der Ellipse.

Im Fall  $a \neq b$  sind die  $x$ -Achse und die  $y$ -Achse die einzigen Symmetriegeraden der Ellipse, d.h., nur die Spiegelungen an  $x$ - und  $y$ -Achse bilden die Ellipse auf sich ab. Die Durchmesser auf den Symmetrieachsen heißen die **Hauptachsen** der Ellipse.

Die **Parameterdarstellung** der Ellipse  $k$  ist:  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$  mit  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

### Ellipsenkonstruktionen

a) **Scheitelkreiskonstruktion.**

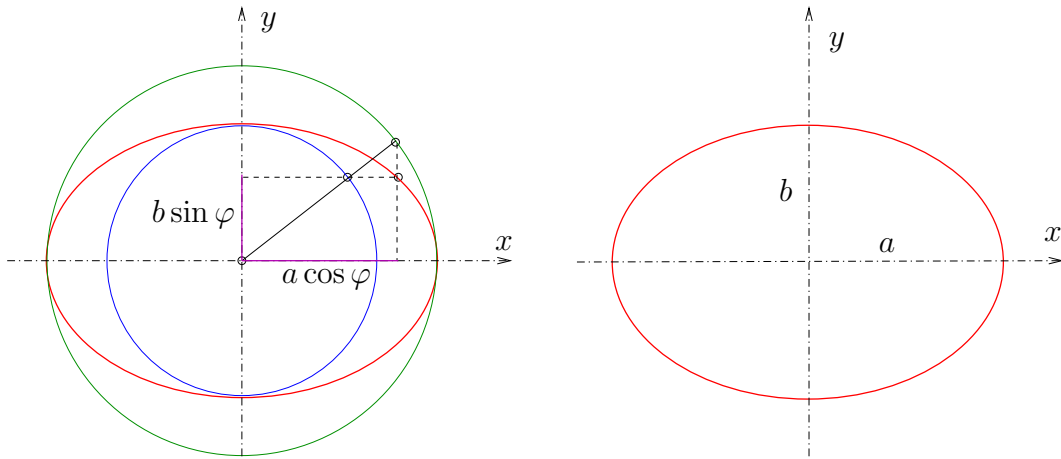


Abbildung 4.2: Parameterdarstellung einer Ellipse

Aus der Parameterdarstellung der Ellipse erkennt man, dass der Ellipsenpunkt  $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$  dieselbe  $x$ -Koordinate wie der Punkt  $(a \cos \varphi, a \sin \varphi)$  des Kreises  $x^2 + y^2 = a^2$  und dieselbe  $y$ -Koordinate wie der Punkt  $(b \cos \varphi, b \sin \varphi)$  des Kreises  $x^2 + y^2 = b^2$  zum Parameter  $\varphi$  hat. Die beiden Kreise  $x^2 + y^2 = a^2$  und  $x^2 + y^2 = b^2$  heißen die **Scheitelkreise** der obigen Ellipse.

Daher kann man Ellipsenpunkte konstruieren, indem man die  $y$ -Koordinate eines Punktes des großen Scheitelkreises mit dem Faktor  $b/a$  staucht (bzw. die  $x$ -Koordinate des kleinen Scheitelkreises mit dem Faktor  $a/b$  streckt):

**Voraussetzung:** Mittelpunkt und Scheitel sind bekannt.

- (1) Zeichne die beiden Scheitelkreise der Ellipse.
- (2) Wähle einen Strahl durch den Mittelpunkt der Ellipse.
- (3) Der Strahl schneidet den kleinen (bzw. großen) Kreis in einem Punkt  $P$  (bzw.  $Q$ ).
- (4) Fülle das Lot von  $P$  ( $Q$ ) auf die kleine (große) Achse. Der Schnittpunkt dieser Lote ist ein Punkt der Ellipse.

Eine Abbildung, die nur eine Koordinate streckt oder staucht, nennt man **Affinität**.

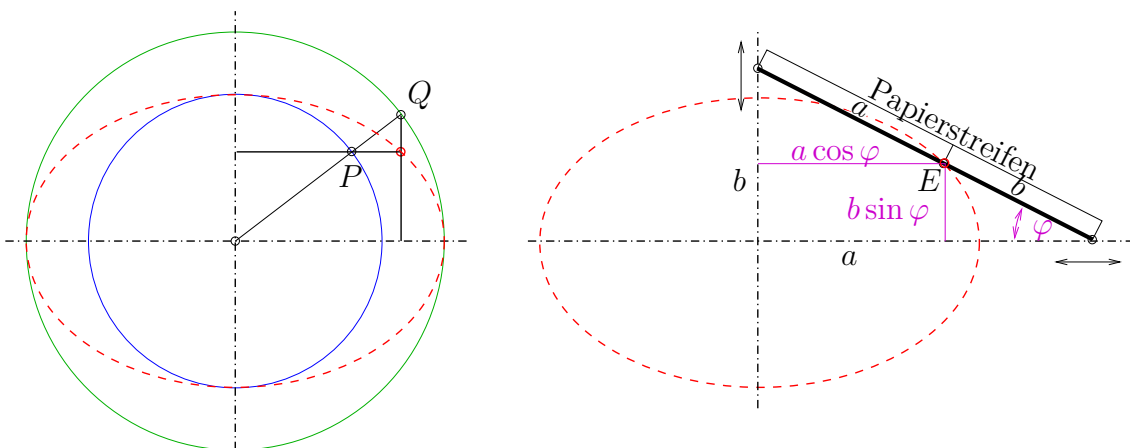


Abbildung 4.3: Konstruktion von Punkten einer Ellipse

b) **Papierstreifenmethode.** (Abb. 4.3, rechts)

(s. LEO S.60)

**Voraussetzung:** Mittelpunkt und Scheitel sind bekannt.

- (1) Schneide einen Papierstreifen der Länge  $a+b$  aus und markiere die Stelle, an denen die Strecken der Länge  $a$  und  $b$  zusammengesetzt sind, durch  $E$ .
- (2) Gleitet der Papierstreifen wie in der Skizze auf den Achsen der Ellipse, so beschreibt der Punkt  $E$  in jeder Lage einen Ellipsenpunkt.

c) **Gärtner- oder Fadenkonstruktion.** (Abb. 4.4, links)

**Voraussetzung:** Die „Brennpunkte“  $F_1, F_2$  und die große Halbachse  $a$  der Ellipse sind bekannt.

- (1) Schneide einen Faden der Länge  $2a$  zurecht.
- (2) Befestige die Enden des Fadens in den Punkten  $F_1, F_2$ .
- (3) Ziehe den Faden wie in der Skizze straff. Der Punkt, an dem sich die Bleistiftspitze befindet, ist ein Ellipsenpunkt.
- (4) Für die Brennweite  $e = \frac{1}{2}|F_1F_2|$  gilt:  $e^2 = a^2 - b^2$ .

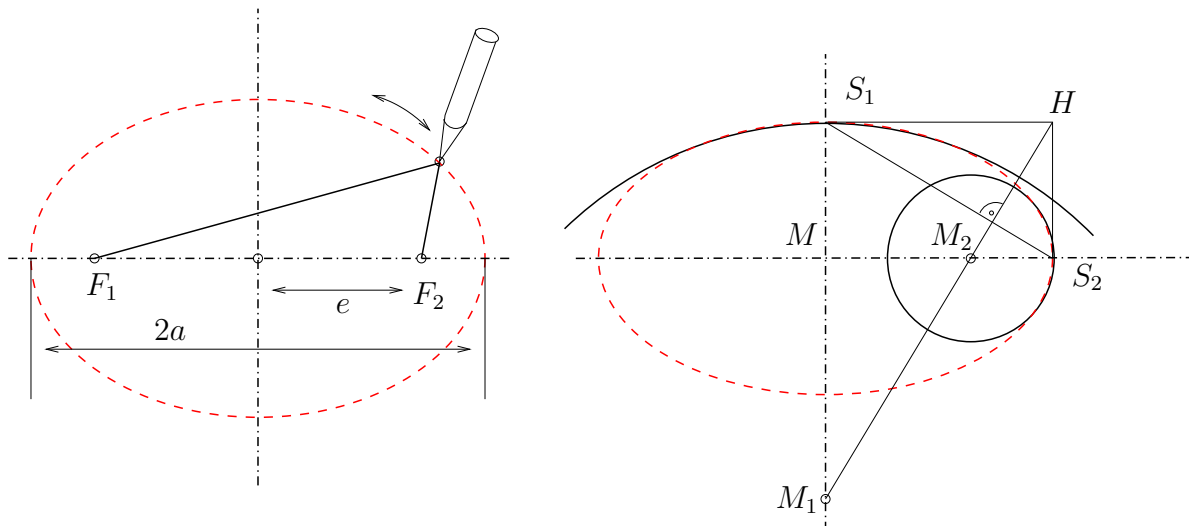


Abbildung 4.4: "Gärtnerkonstruktion" und Krümmungskreise einer Ellipse

d) **Scheitelkrümmungskreismethode.** (Abb. 4.4, rechts)

(s. LEO S.64)

Die Methoden a), b), c) bestimmen Ellipsenpunkte exakt. Wir geben nun noch eine sehr praktische Näherungsmethode an:

**Idee:** Man bestimmt Mittelpunkte und Radien der Krümmungskreise für die Scheitel der Ellipse, zeichnet die Scheitelkrümmungskreise und nähert die Ellipse durch tangentielle Kurvenbögen an.

**Voraussetzung:** Mittelpunkt  $M$  und Scheitel sind bekannt.

- (1) Wähle zwei nicht auf einem Durchmesser liegende Scheitel  $S_1, S_2$ .
- (2) Ergänze das rechtwinklige Dreieck  $M, S_1, S_2$  durch den Punkt  $H$  zu einem Rechteck.
- (3) Fülle das Lot von  $H$  auf die Gerade durch  $S_1, S_2$ .
- (4) Die Schnittpunkte  $M_1, M_2$  des Lotes mit den Achsengeraden sind die Mittelpunkte der Scheitelkrümmungskreise für die Scheitel  $S_1, S_2$ .
- (5) Zeichne die Scheitelkrümmungskreise in allen Scheiteln.
- (6) Zeichne eine Kurve durch die Scheitel, die die Krümmungskreise von innen bzw. von außen berührt.

## 4.2 Normalriss eines Kreises

Der Normalriss eines Kreises ist i.a. eine Ellipse, deren Mittelpunkt das Bild des Kreismittelpunktes ist. Die große Halbachse der Ellipse ist gleich dem Kreisradius.  
(Falls der Kreis in einer projizierenden Ebene liegt, ist das Bild eine Strecke.)

Um dies einzusehen, betrachten wir die folgende Zweitafelprojektion eines Kreises:

Gegeben: Kreis  $k \perp \pi_2$  durch seinen Aufriss  $k''$ .

Gesucht: Grundriss  $k'$  des Kreises.

Zur Lösung führen wir  $x - y$ -Koordinaten in der Kreisebene und  $\xi - \eta$ -Koordinaten im Grundriss ein (s. Skizze). Die Kreisgleichung ist dann  $x^2 + y^2 = r^2$ . In der Skizze erkennt man, dass ein Punkt  $(x, y)$  der Kreisebene den Grundriss  $(\xi, \eta)$  mit  $\xi = x$  und  $\eta = y \cos \alpha$  hat. Wegen  $x^2 + y^2 = r^2$  gilt

$$\xi^2 + (\eta / \cos \alpha)^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \xi^2 / r^2 + \eta^2 / (r \cos \alpha)^2 = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren große Halbachse gleich  $r$  ist.

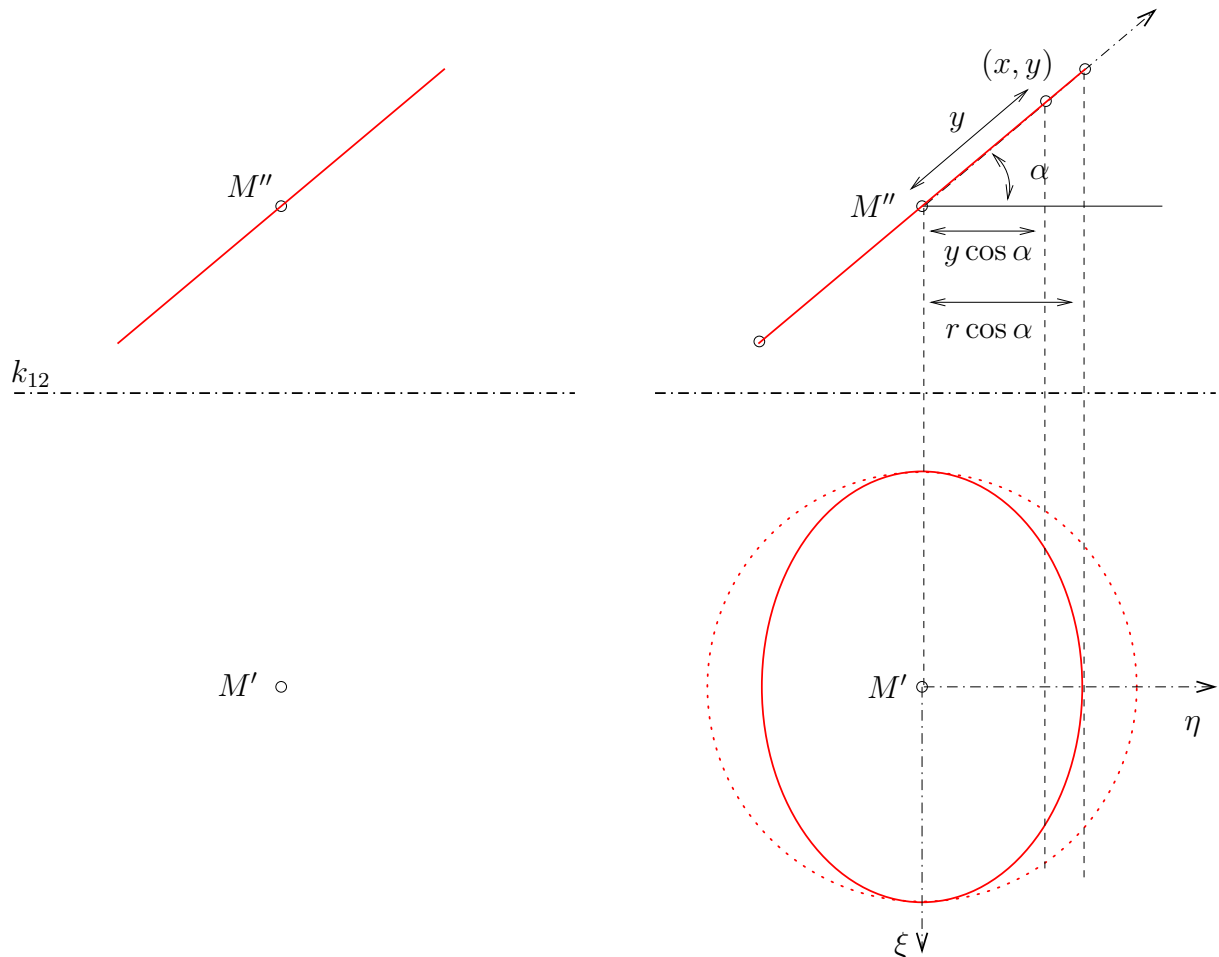


Abbildung 4.5: Projektion eines Kreises

**Aufgabe 4.1** Zeichne den Grundriss des obigen Kreises (Abb. 4.5, links) mit Hilfe der Schrittelkrümmungskreismethode.

## 4.3 Parallelprojektion einer Ellipse

Die Parallelprojektion einer Ellipse ist eine Ellipse oder eine Strecke. Der Mittelpunkt geht in den Mittelpunkt der Bildellipse über. Da rechte Winkel i.a. nicht auf rechte Winkel abgebildet werden, sind die Bilder der Scheitel i.a. **nicht** die Scheitel der Bildellipse. Deshalb führt man eine Verallgemeinerung des Begriffs „senkrechte Durchmesser“ einer Ellipse ein:

Zwei Durchmesser einer Ellipse heißen **konjugiert**, wenn die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers parallel zum anderen Durchmesser sind.

Die Hauptachsen einer Ellipse sind spezielle konjugierte Durchmesser.  
Je zwei senkrechte Durchmesser eines Kreises sind konjugiert.

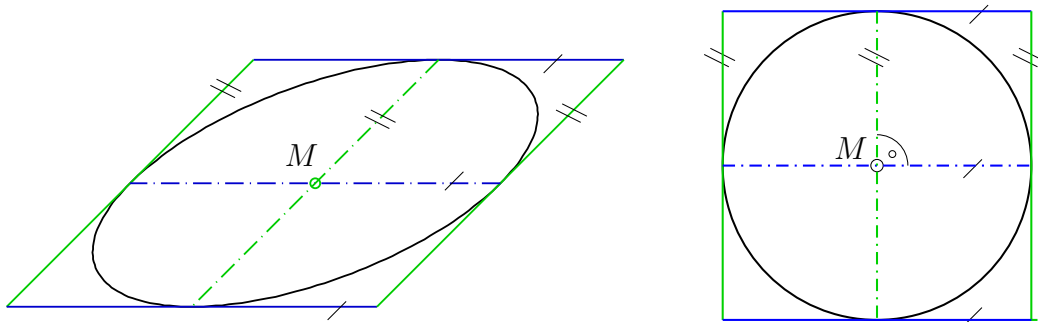


Abbildung 4.6: Konjugierte Durchmesser einer Ellipse

Für die Konstruktion des Bildes einer Ellipse bei Parallelprojektion sind die folgenden Aussagen wichtig:

Bei **Parallelprojektion** einer Ellipse werden

- a) der **Mittelpunkt** auf den Mittelpunkt und
- b) **konjugierte** Durchmesser auf konjugierte Durchmesser

der Bildellipse abgebildet.

Die oben beschriebenen Verfahren, eine Ellipse zu zeichnen, verlangen alle die Kenntnis des Mittelpunktes und der Scheitel der Ellipse. Deshalb benötigen wir noch eine Methode, um aus dem Mittelpunkt und zwei konjugierten Durchmessern die Scheitel zu bestimmen.

**Rytzsche Konstruktion:**

(s. LEO S.62,63)

Gegeben: Mittelpunkt  $M$  und zwei konjugierte Halbmesser  $\overline{MP}$ ,  $\overline{MQ}$  einer Ellipse (Abb. 4.7).

Gesucht: Scheitel der Ellipse.

- (1) Drehung von  $\overline{MQ}$  um  $90^\circ$  in  $\overline{MQ'}$  so, dass der Winkel zwischen  $\overline{MP}$  und  $\overline{MQ'}$   $< 90^\circ$  ist.
- (2) Mittelpunkt  $R$  der Strecke  $\overline{PQ'}$  bestimmen.
- (3) Kreis um  $R$  durch  $M$ .
- (4) Schnitt dieses Kreises mit der Geraden durch  $P, Q'$  liefert die Punkte  $A, B$ .
- (5) Die Geraden  $\overline{MA}$  durch  $M, A$  und  $\overline{MB}$  durch  $M, B$  geben die *Richtung* der Hauptachsen an.
- (6) Die *Längen* der Hauptachsen sind  $b = |AP|$  und  $a = |BP|$ .
- (7) Die Scheitel ergeben sich aus (6) und dem "Papierstreifen"  $AB$  (vgl. mit Fig 4.3) .

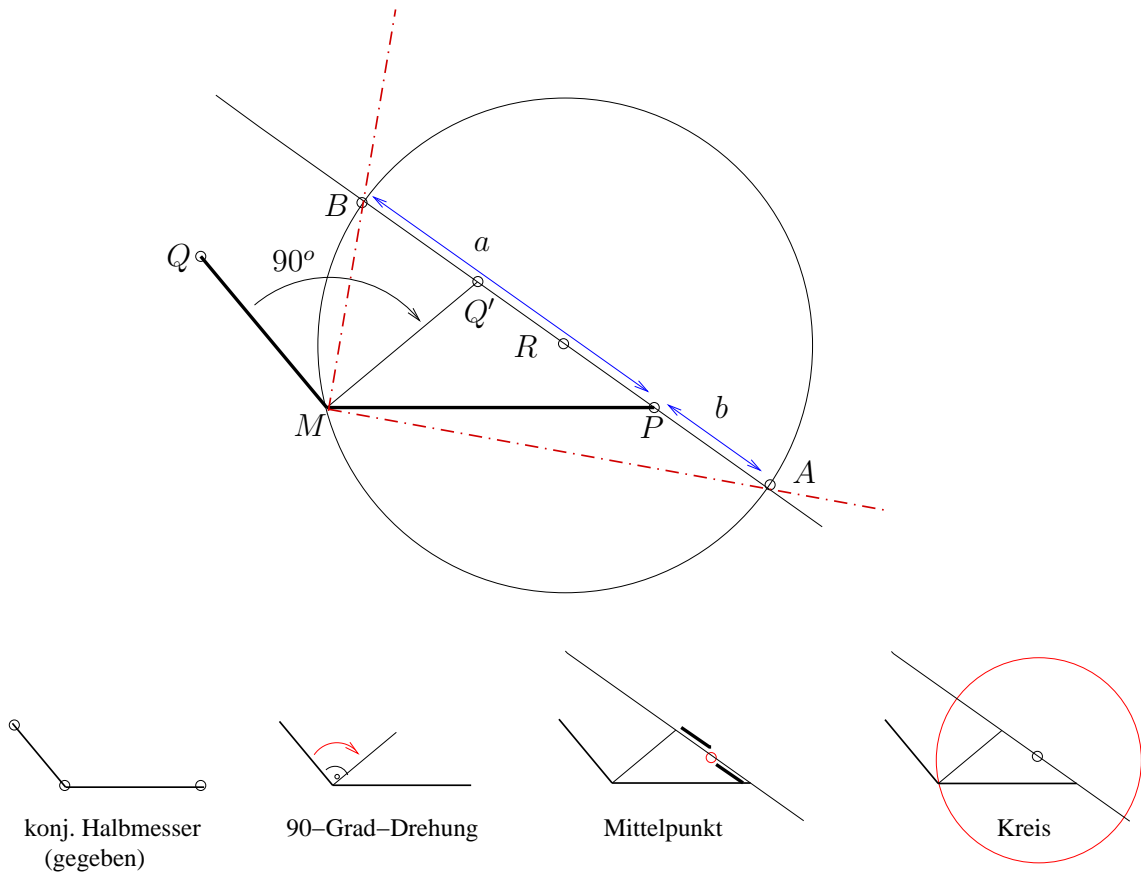


Abbildung 4.7: Rytz-Konstruktion

**Aufgabe 4.2** Bestimme in Abb. 4.8 jeweils zu vorgegebenem Mittelpunkt  $M$  und konjugierten Halbmessern  $\overline{MP}, \overline{MQ}$  die Scheitel der zugehörigen Ellipse.



Abbildung 4.8: Aufgaben zur Rytz-Konstruktion

**Aufgabe 4.3** Es sind Grund- und Aufriss eines Kreises und eine weitere Risskante  $k_{23}$  gegeben. Bestimme das Bild des Kreises in  $\pi_3$ .

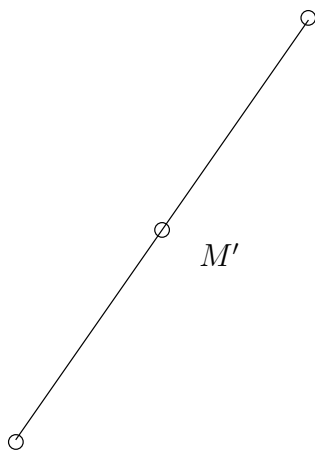
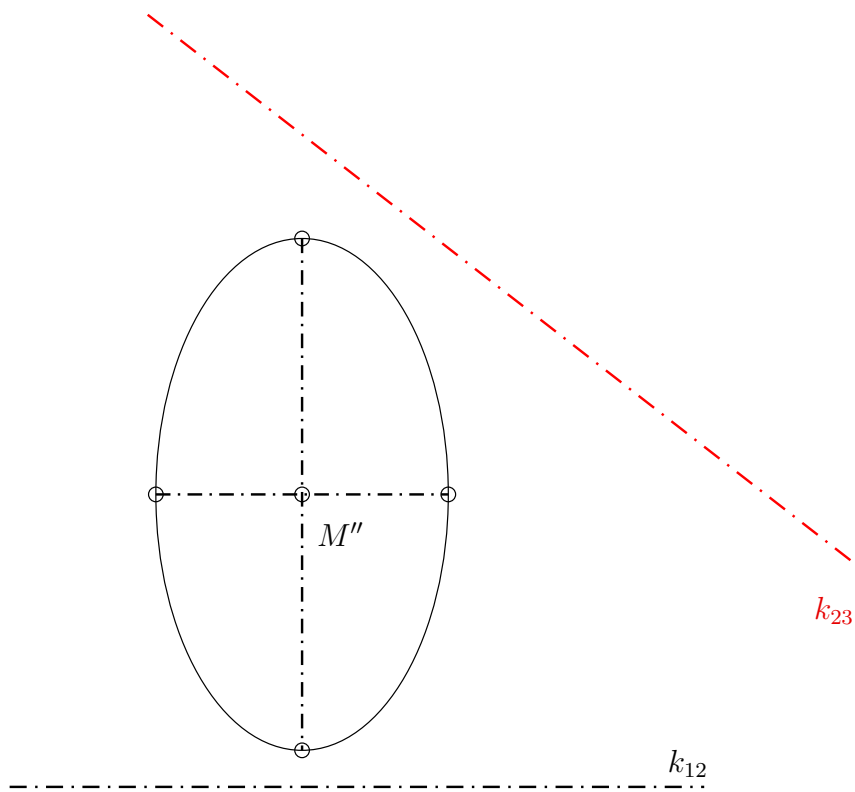


Abbildung 4.9: Umprojektion eines Kreises

## 4.4 Kreis und Ellipse in der Axonometrie

Das axonometrische **Bild** eines Kreises oder einer Ellipse ist eine **Ellipse** oder eine Strecke.  
Im **allgemeinen** Fall geht man so vor:

- (1) Bestimme das Bild des Mittelpunktes.
- (2) Wähle zwei **konjugierte** Halbmesser im Urbild und bilde diese ab.  
(Bei einem Kreis wählt man zwei senkrechte Halbmesser, die sich „leicht“ abbilden lassen. Bei einer Ellipse wählt man zwei senkrechte Haupthalbachsen.)
- (3) Bestimme die Hauptachsen der Bildellipse mit Hilfe der **Rytz-Konstruktion**.
- (4) Zeichne die Ellipse z.B. mit Hilfe der Scheitelkrümmungskreismethode.

Es gibt einige Sonderfälle:

- a) Falls die Ellipse **parallel zur Bildtafel** liegt, wird sie **unverzerrt** abgebildet.
- b) Der zur Bildtafel parallele Durchmesser eines **Kreises** wird unverzerrt abgebildet und ist im Falle einer **senkrechten** Projektion gleich der großen Halbachse der Bildellipse.

### Aufgabe 4.4 :

*Gegeben: Grund- und Aufriss eines Zylinderstumpfes (Abb. 4.10).*

*Gesucht: Isometrische Vogelperspektive des Zylinderstumpfes.*

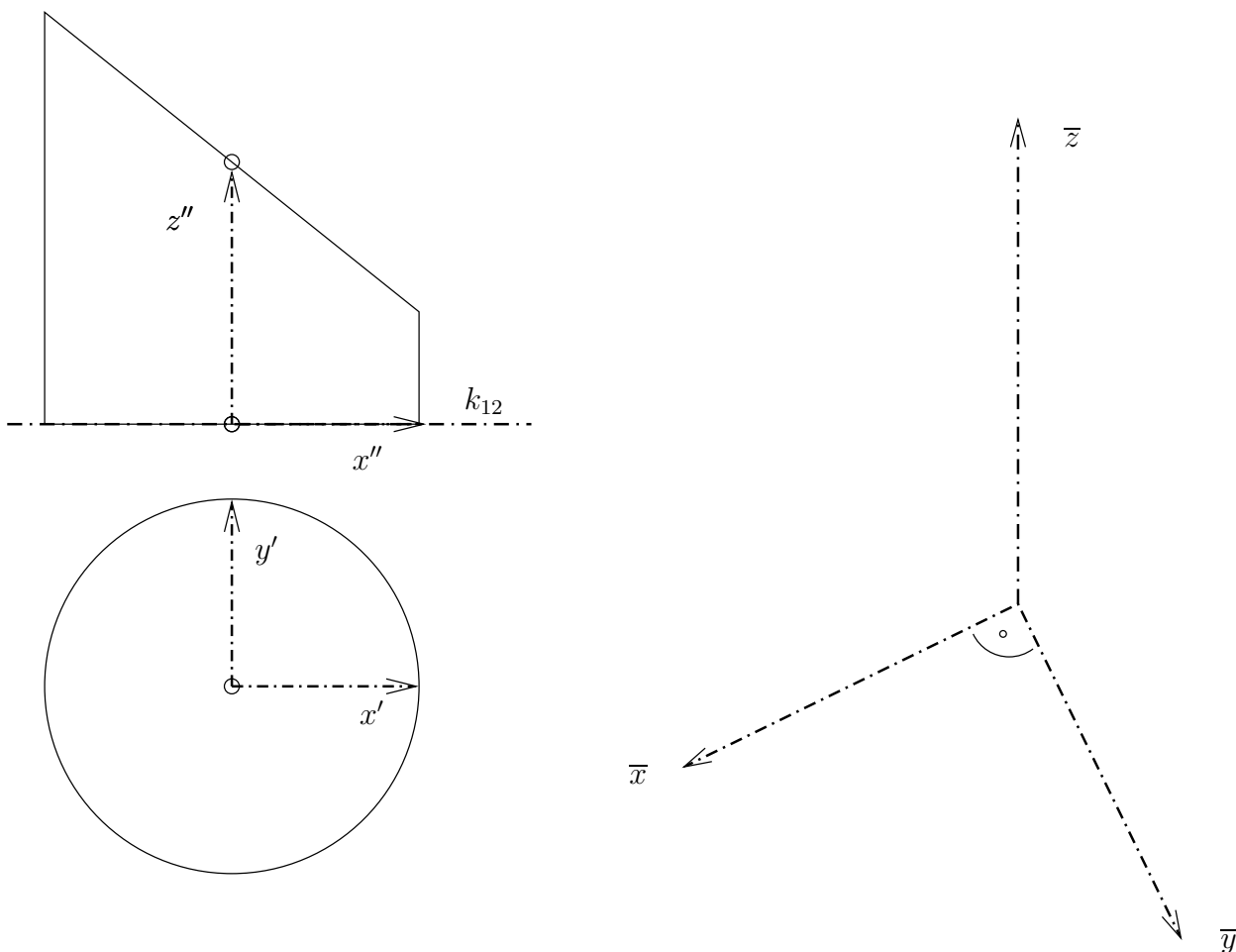


Abbildung 4.10: Vogelperspektive eines Zylinderstumpfes



**Aufgabe 4.5 :**

Stelle den in Grund- und Aufriss gegebenen Zylinder mit aufgesetzter Kugel mit Hilfe des Einschneideverfahrens in **senkrechter** Axonometrie dar (s. Abschnitt 3.6). (Für die Bildellipsen der Zylinder-Kreise ist kein Rytz nötig !)

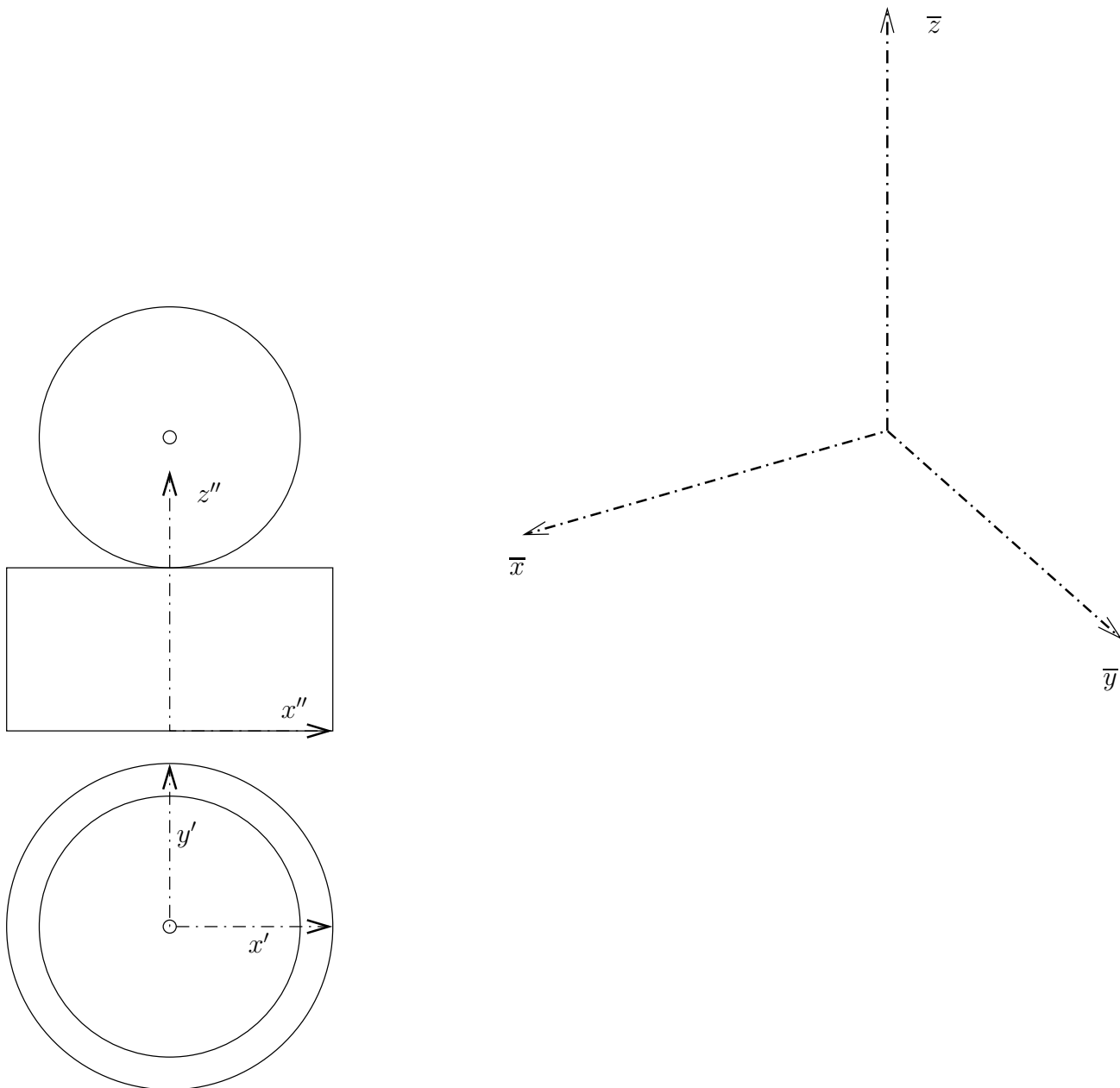


Abbildung 4.11: Zylinder mit Kugel in senkrechter Axonometrie

## 4.5 Zylinder und Kegel

(s. LEO S.137,140)

Durch Parallelverschieben einer Geraden  $g$  (**Erzeugende**) längs einer ebenen Kurve  $c$  (**Leitkurve**) entsteht eine **allgemeine Zylinderfläche** (Abb. 4.12 a)).

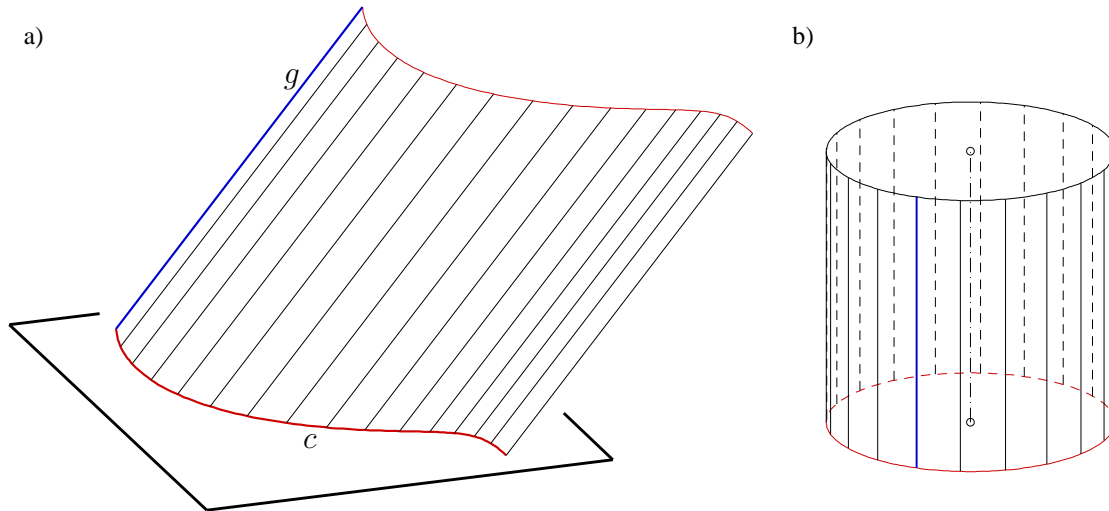


Abbildung 4.12: Erzeugung eines a) allgemeinen Zylinders b) senkrechten Kreiszyinders

Ist  $c$  speziell ein **Kreis** und stehen die Erzeugenden **senkrecht** zur Kreisebene, entsteht ein **senkrechter Kreiszyinder** (Abb. 4.12 b)). Die Leitkurve heißt **Basiskreis**, die Erzeugenden heißen **Mantellinien**. Die Symmetriegerade  $a$  heißt **Achse**. Da der senkrechte Kreiszyinder auch durch Drehung einer Erzeugenden um die Achse  $a$  erzeugt werden kann, nennt man diese Fläche auch **Dreh-** oder **Rotationszyinder**.

Eine **Ebene schneidet** einen senkrechten Kreiszyinder in einem Kreis, in einer Ellipse, oder in ein oder zwei Mantellinien (Abb. 4.13).

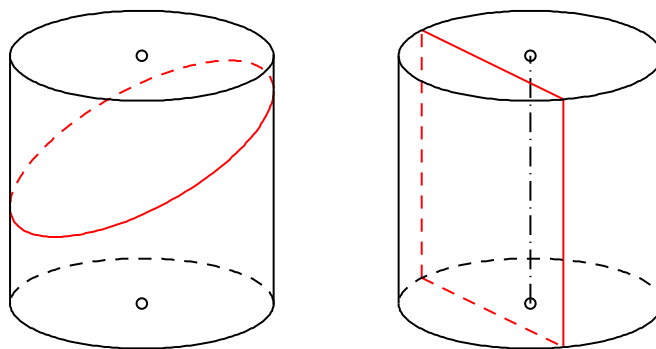


Abbildung 4.13: Ebene Schnitte eines Kreiszyinders

Gleitet eine Gerade  $g$  auf einer ebenen Kurve  $c$  und geht  $g$  stets durch einen festen Punkt  $S$  (**Kegelscheitel** oder **-spitze**), so entsteht eine **allgemeine Kegelfläche** (Abb. 4.14 a)).

Ist  $c$  speziell ein **Kreis** und liegt  $S$  auf einer Senkrechten zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt  $M$ , so entsteht ein **senkrechter Kreiskegel** (Abb. 4.14 b)). Die Gerade  $a$  durch  $M, S$  steht senkrecht auf der Kreisebene und heißt **Kegelachse**. Da der senkrechte Kreiskegel auch durch Rotation einer Geraden durch  $S$  um  $a$  erzeugt werden kann, nennt man ihn auch **Dreh-** oder **Rotationskegel**.

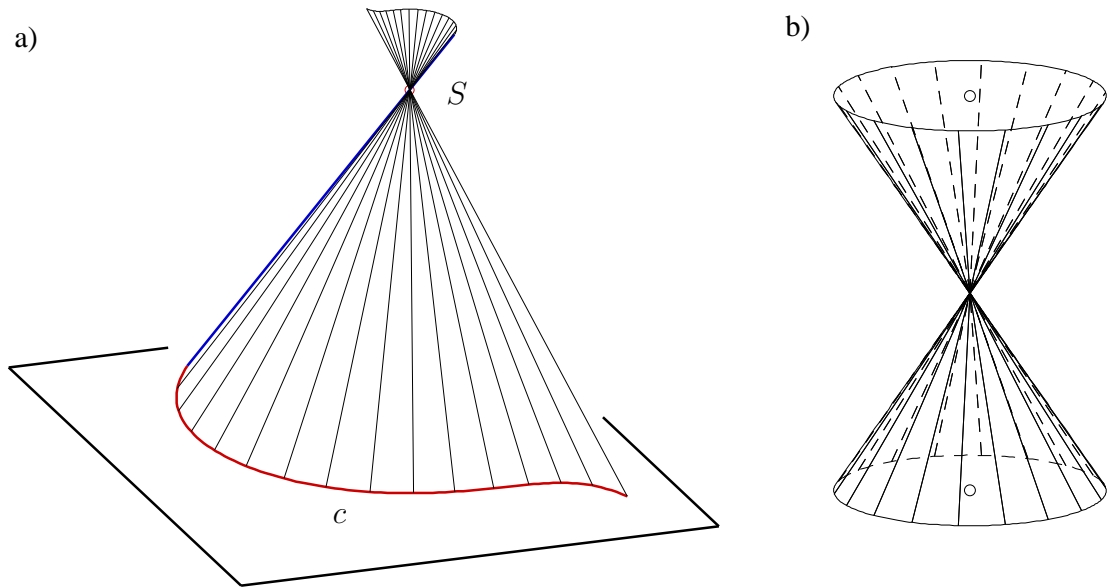


Abbildung 4.14: Erzeugung eines a) allgemeinen Kegels b) senkrechten Kreiskegels

Den Schnitt einer **Ebene**  $\varepsilon$  mit einem Drehkegel nennt man **Kegelschnitt**:

Falls die Kegelspitze  $S$  nicht in der Ebene  $\varepsilon$  liegt, so sind, je nach Steilheit von  $\varepsilon$ , folgende Kegelschnitte möglich:

- |             |  |              |  |
|-------------|--|--------------|--|
| (a) Kreis   | ( $\varepsilon \perp a$ )              | (b) Ellipse  | ( $\varepsilon$ flacher als Mantellinie) |
| (c) Parabel | ( $\varepsilon \parallel$ Mantellinie) | (d) Hyperbel | ( $\varepsilon$ steiler als Mantellinie) |

Ebenen durch  $S$  schneiden den Kegel in zwei, einer oder keiner Geraden.

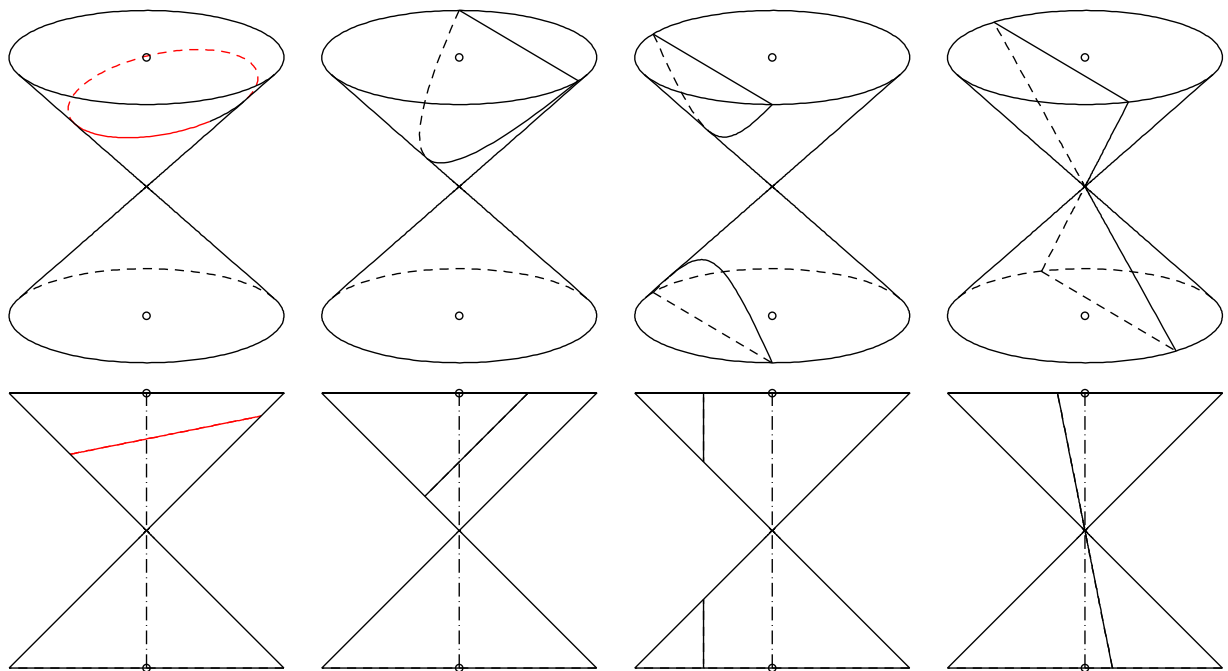


Abbildung 4.15: Ebene Schnitte eines Kreiskegels: Ellipse, Parabel, Hyperbel, Geradenpaar

## 4.6 Abwickelbare Flächen

(s. LEO S.162,164)

Eine Fläche nennt man **abwickelbar**, wenn sie sich **längentreu** in die Ebene abbilden lässt, d.h. man kann sie unter Erhaltung der Längen sämtlicher auf ihr liegender Kurven in die Ebene ausbreiten.

**Beispiele:** a) Zylinder b) Kegel

c) die von den Tangenten einer Raumkurve erzeugte Fläche (Tangentialfläche).

### 4.6.1 Abwicklung eines Drehzylinders

Gegeben: Ein Drehzylinder und ein Punkt darauf in Grund- und Aufriss.

Gesucht: Die Abwicklung des Drehzylinders und des Punktes  $P$ .

**Lösungsidee:** Man nähert den Zylinder durch ein **Prisma** (Querschnitt ist ein regelmäßiges  $n$ -Eck) an, „schneidet“ das Prisma längs einer Kante auf und wickelt es in die Ebene ab.

**Durchführung:** (Abb. 4.16)

- (1) Teile den Basiskreis in  $n$  ( $\geq 12$ ) Teile und zeichne das  $n$ -Eck.
- (2) Nimm die Länge  $d$  einer Seite des  $n$ -Ecks in den Zirkel und zeichne ein Rechteck der Höhe  $h$  (Zylinderhöhe) und Breite  $n \cdot d$ .
- (3) Der Punkt  $P$  liegt auf oder zwischen zwei Kanten des Prismas. Zeichne diese zwei Kanten in der Abwicklung, nimm den kleineren Abstand von  $P$  zu einer dieser Kanten und zeichne die entsprechende „Zwischenkante“  $k$  in die Abwicklung.
- (4) Übertrage  $P$  in die Abwicklung auf die Zwischenkante. Die Höhe des Punktes  $P$  ergibt sich aus dem Aufriss.

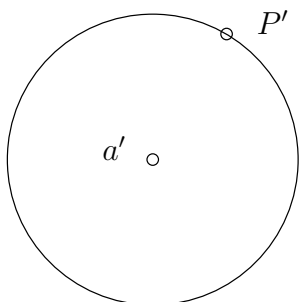
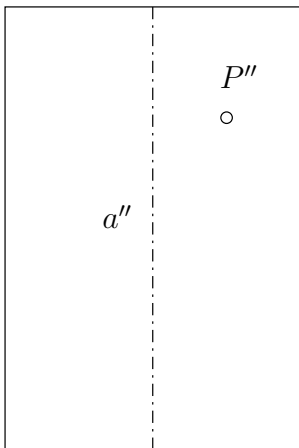


Abbildung 4.16: Abwicklung eines Zylinders

### 4.6.2 Abwicklung eines Drehkegels

Gegeben: Ein Drehkegel und ein Punkt darauf in Grund- und Aufriss (Abb. 4.17).

Gesucht: Die Abwicklung des Kegels und des Punktes  $P$ .

Lösungsidee: Annäherung des Kegels durch eine  $n$ -kantige **Pyramide**. Die Abwicklung des Kegels ist ein Kreissektor, dessen Öffnungswinkel  $\alpha = 2\pi r/l$  durch den entsprechenden Winkel der abgewickelten Pyramide angenähert wird. Die Abwicklung des Punktes  $P$  erhält man durch eine zur Zylinderabwicklung analogen Näherungskonstruktion. Die notwendige wahre Länge der Strecke  $\overline{SP}$  erhält man durch Paralleldrehen zu  $\pi_2$ .

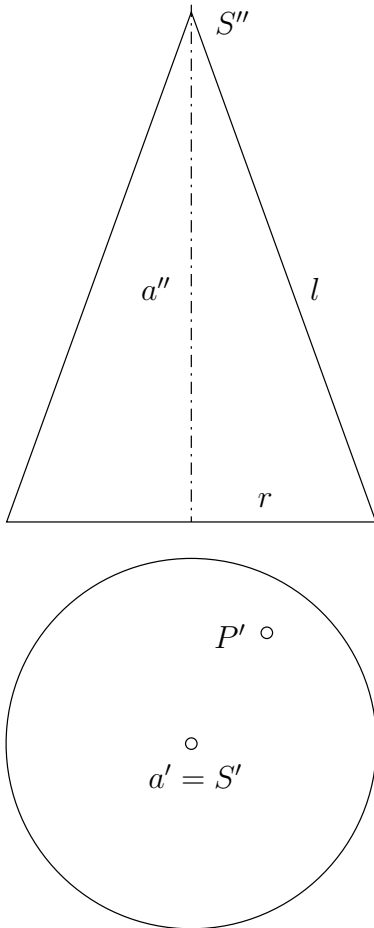
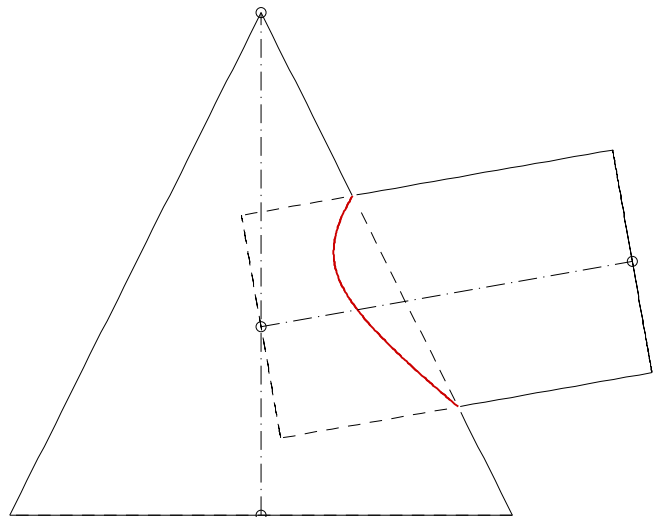


Abbildung 4.17: Abwicklung eines Kegels

**Aufgabe 4.6** Wickle Kegel- und Zylinder-  
teil aus Abb. 4.33 (Durchdringung Kegel-  
Zylinder) ab, schneide die Abwicklungen aus  
und bastele ein Modell.



## 4.7 Schraublinien und Schraubflächen

Wird ein Punkt  $P$  um eine Achse  $a$ , der **Schraubachse**, **gedreht** (Winkel  $\varphi$ ) und dabei proportional (Faktor  $c$ ) zum Drehwinkel in Richtung  $a$  **verschoben** (**Schiebstrecke**  $s = c\varphi$ ), so beschreibt  $P$  eine **Schraublinie**. Die Schiebstrecke nach einer vollen Umdrehung ( $\varphi = 2\pi$ ) nennt man **Ganghöhe**  $h$ . Der Quotient  $h/2\pi$  heißt **reduzierte Ganghöhe**.

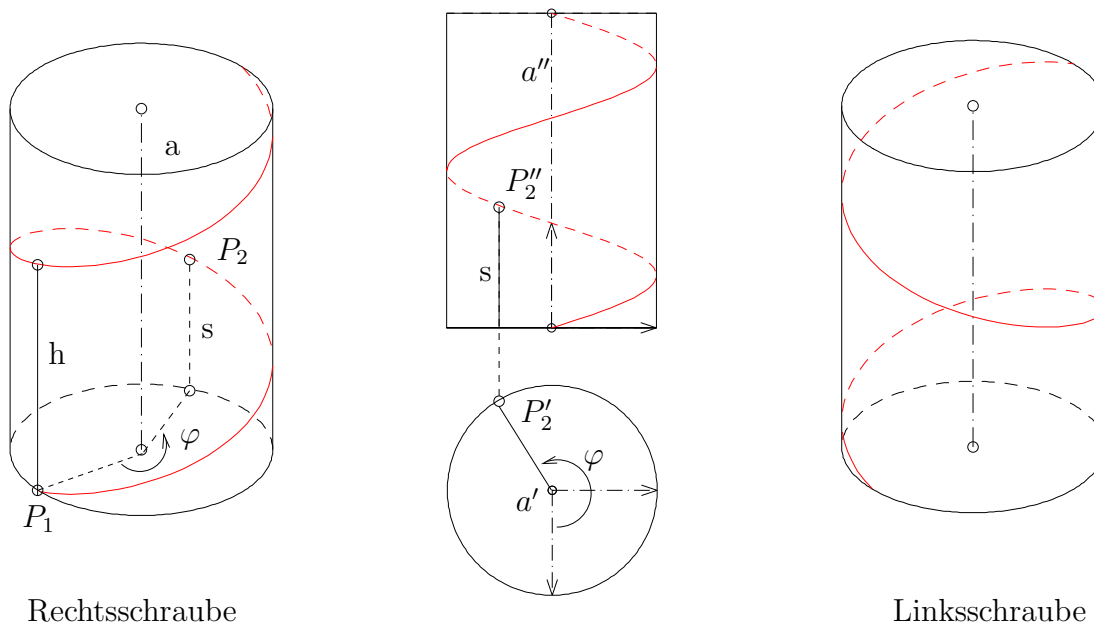


Abbildung 4.18: Schraublinien

Bewegt sich der Grundriss von  $P$  in der  $x$ - $y$ -Ebene (eines Rechtssystems) in mathematisch positivem Sinn (Gegen die Uhr) und wird  $P$  entlang der positiven  $z$ -Achse verschoben, so entsteht eine **Rechtsschraube** ( $h > 0$ ). Wird  $P$  in negativer  $z$ -Richtung verschoben, entsteht eine **Linksschraube** (s. Abb. 4.18).

**Aufgabe 4.7** Gegeben: Punkt  $P$ , Schraubachse  $a$ , Ganghöhe  $h$  in Grund und Aufriss (Abb. 4.20).  
Gesucht: Verschraubung von  $P$  um Achse  $a$  mit Ganghöhe  $h$  als Rechtsschraube.

Man kann auch eine Gerade oder eine Kurve verschrauben. Es entsteht dann eine **Schraubfläche**.

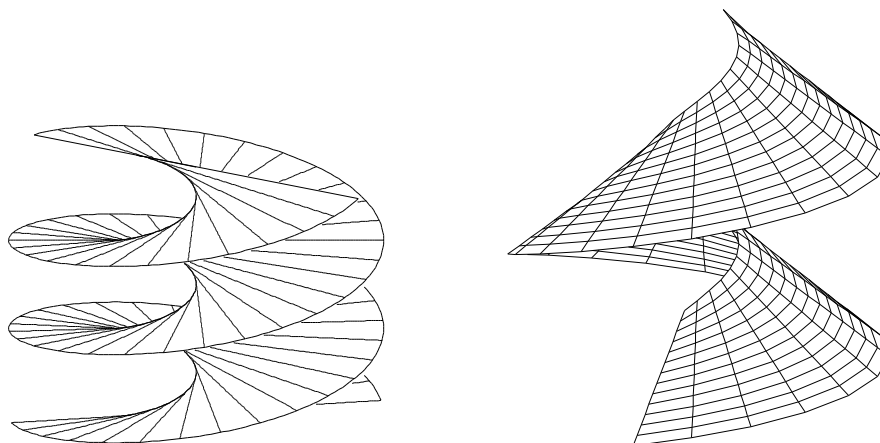


Abbildung 4.19: Verschraubung von Strecken

**Aufgabe 4.8** Gegeben: Strecke  $l$ , Schraubachse  $a$ , Ganghöhe  $h$  in Grund- und Aufriss. (Abb. 4.20, rechts).  
Gesucht: Verschraubung von  $l$  um  $a$  mit Ganghöhe  $h$  als Rechtsschraube.

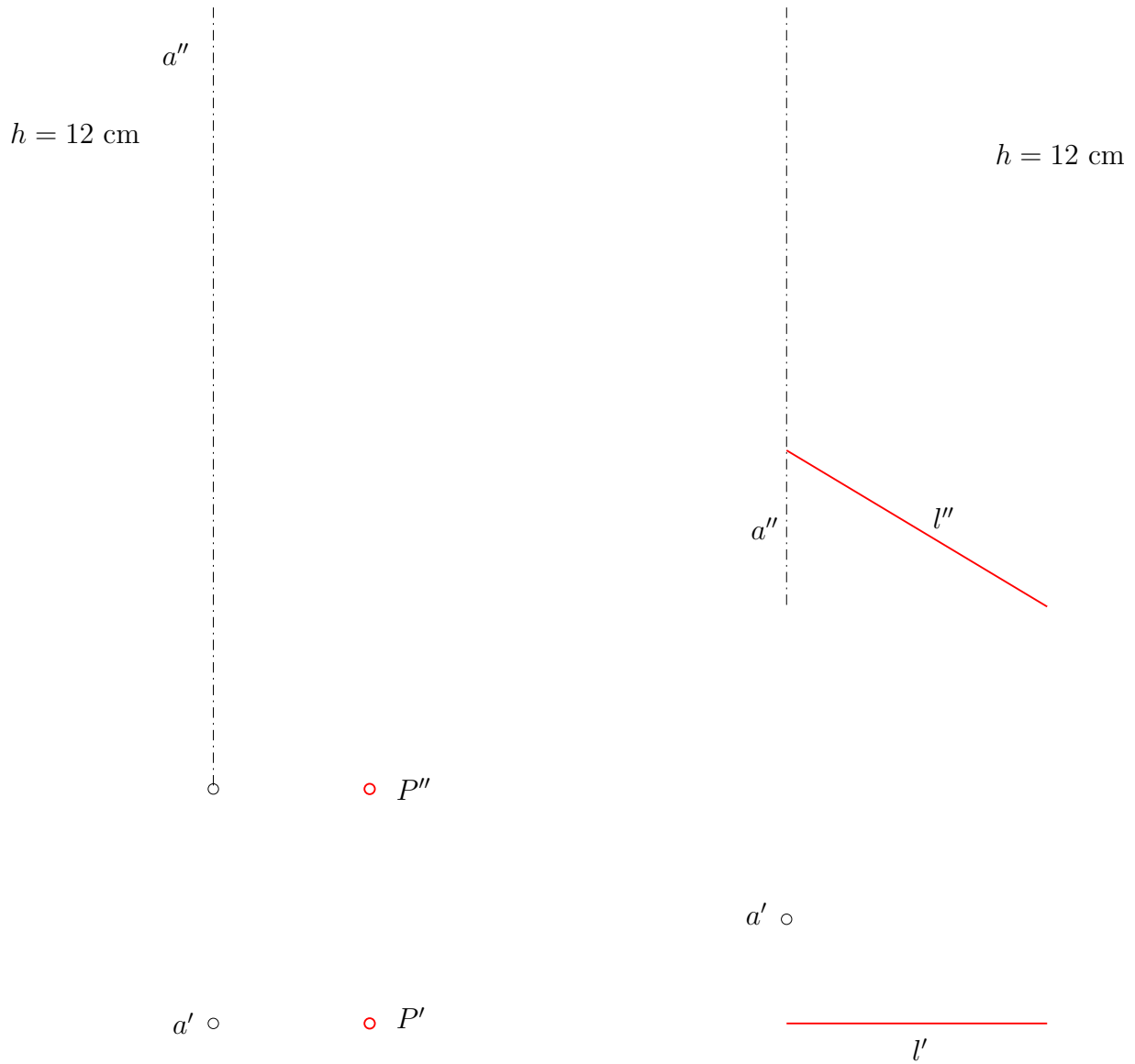


Abbildung 4.20: Verschraubung eines Punktes bzw. einer Strecke

**Aufgabe 4.9** Gegeben: Zwei Stufen einer Wendeltreppe in Grund- und Aufriss (Abb. 4.21).  
Gesucht: Grund- und Aufriss der 10-stufigen Treppe.

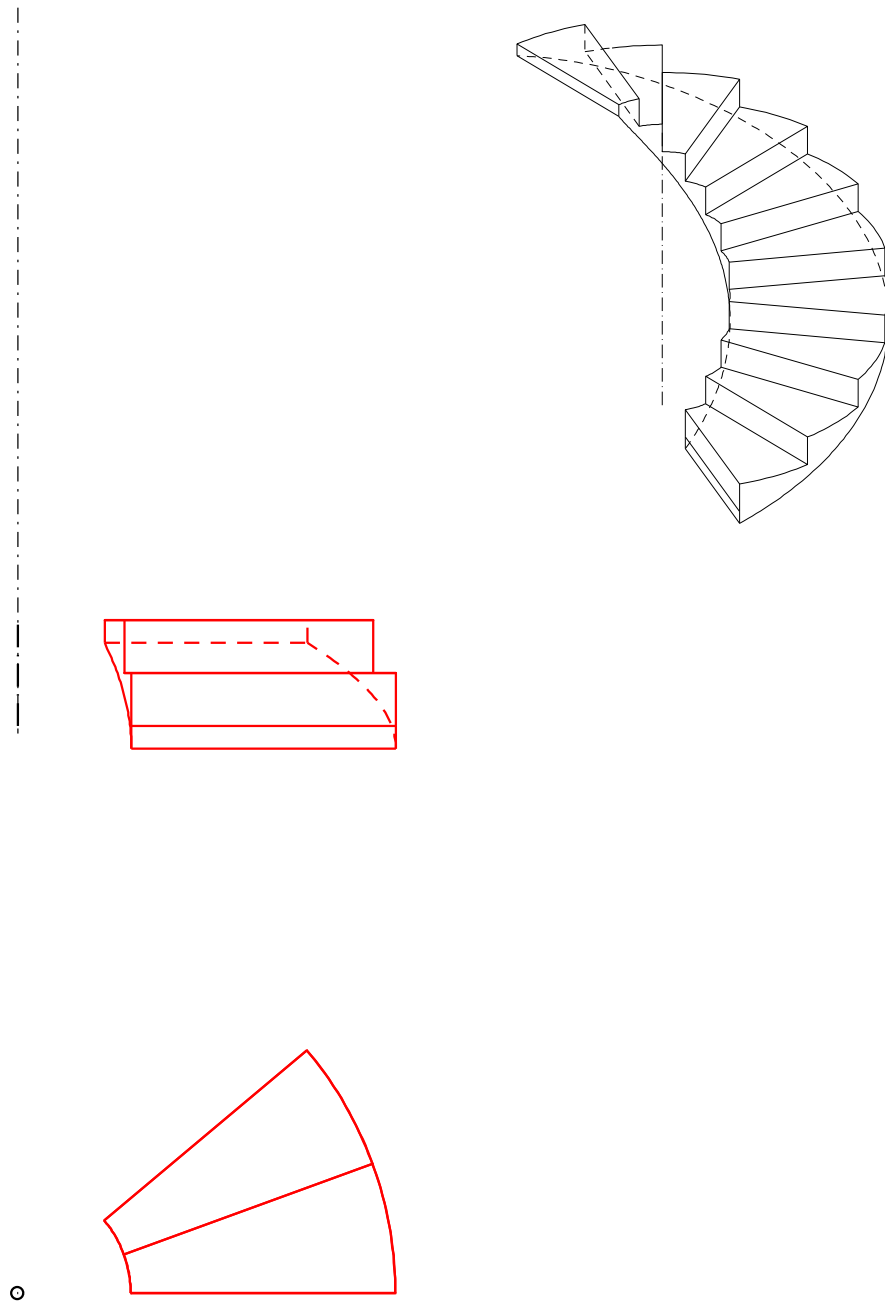


Abbildung 4.21: Verschraubung einer Treppenstufe



## 4.8 Rotationsflächen

Eine Fläche, die bei der Drehung um eine Achse, der *Rotationsachse*, in sich übergeht heißt **Rotationsfläche**.

Eine Rotationsfläche kann durch Drehung einer Kurve  $k$  um eine Rotationsachse  $a$  erzeugt werden. Jeder Punkt von  $k$  beschreibt bei der Drehung einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf  $a$  liegt und der senkrecht zu  $a$  steht.

Eine Ebene, die die Rotationsachse  $a$  enthält, schneidet aus der Rotationsfläche  $\Phi$  eine (ebene) Kurve  $m$ , den **Meridian** aus. Alle Meridianschnitte sind kongruent. Ist die Achse einer Rotationsfläche parallel zu einer Risstafel, so ist der Umriss in dieser Risstafel ein Meridian (Hauptmeridian).

**Beispiel 4.1** *Abb. 4.22 zeigt Beispiele von Rotationsflächen.*

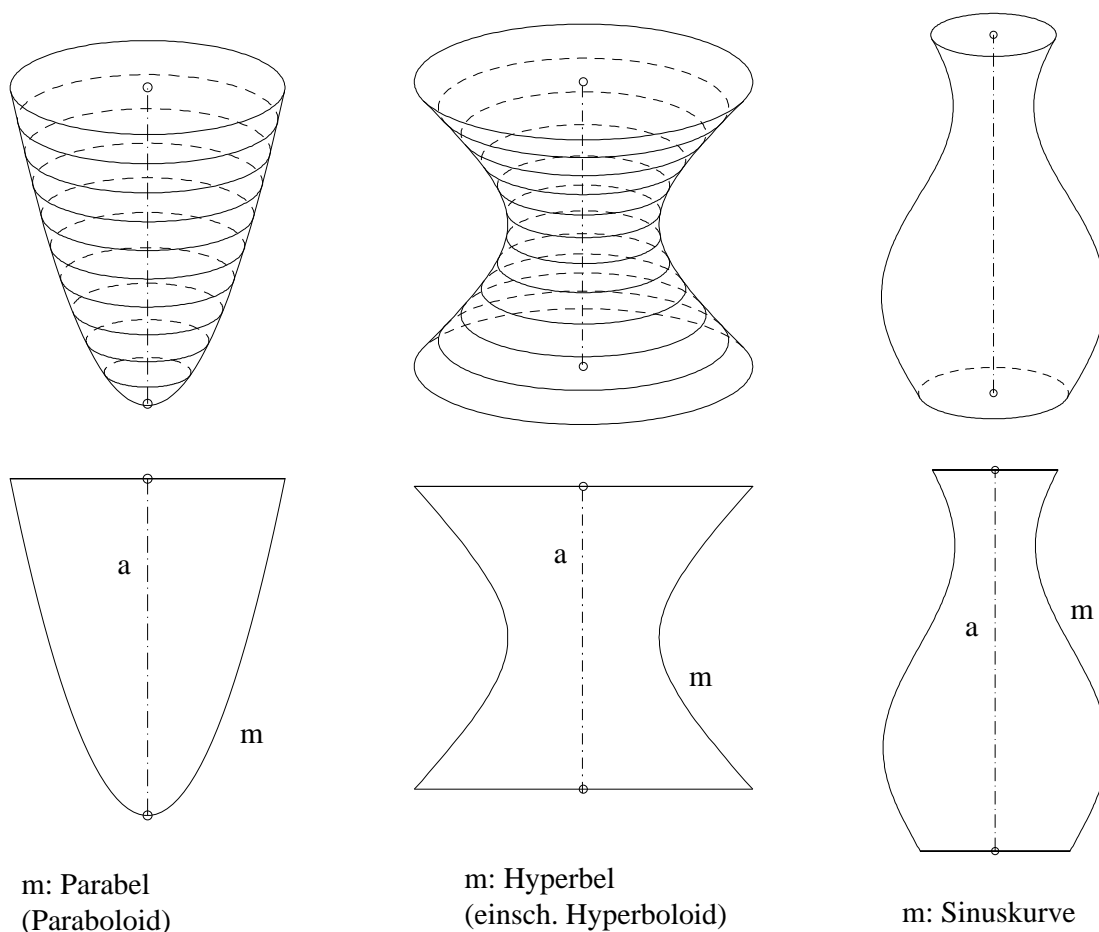


Abbildung 4.22: Rotationsflächen

**Umriss-Konstruktion mit Hilfe von Berührungskugeln:**

Gegeben: Achse und Meridian einer Rotationsfläche  $\Phi$  im Aufriss.

Gesucht: Umriss der Rotationsfläche im Grundriss.

**Lösungsidee:** Zu jedem Querschnittkreis  $k$  der Rotationsfläche  $\Phi$  gibt es eine Kugel  $\Gamma$ , die die Fläche in dem Kreis berührt. Der Mittelpunkt der Kugel liegt auf der Achse  $a$  von  $\Phi$ . Überträgt man genügend viele Berührungskugeln in den Grundriss, so ergibt sich der Umriss als Einhüllende der Kugelumrisse.

**Durchführung** für das Beispiel in Figur 4.23 (Der Meridian besteht aus zwei Kreisbögen !):

- (1) Wähle im Aufriss einen Querschnittskreis  $k$ .  $k''$  ist eine Strecke senkrecht zu  $a''$ .
- (2) Bestimme den Mittelpunkt  $M_k$  der Berührkugel durch  $k$ .  $M_k$  liegt auf der Flächennormalen eines beliebigen Punktes  $P \in k$  und der Achse  $a$ . Wir wählen  $P$  auf dem Meridian.  $M_k''$  ist hier also der Schnittpunkt der Gerade  $P''M_u''$  mit  $a''$ .
- (3) Zeichne  $M_k'$  auf  $a'$  und den Umrisskreis der Berührkugel im Grundriss.
- (4) Führe (1)–(3) “genügend” oft für verschiedene Querschnittskreise durch.
- (5) Zeichne die **Einhüllende** der so bestimmten Kreise.
- (6) Aufriss des Umrisses: Für jede Berührkugel schneide man den Berührkreis mit dem Umriss der Kugel (Äquatorkreis). Dies liefert jeweils zwei hintereinander liegende Punkte des gesuchten Umrisses.

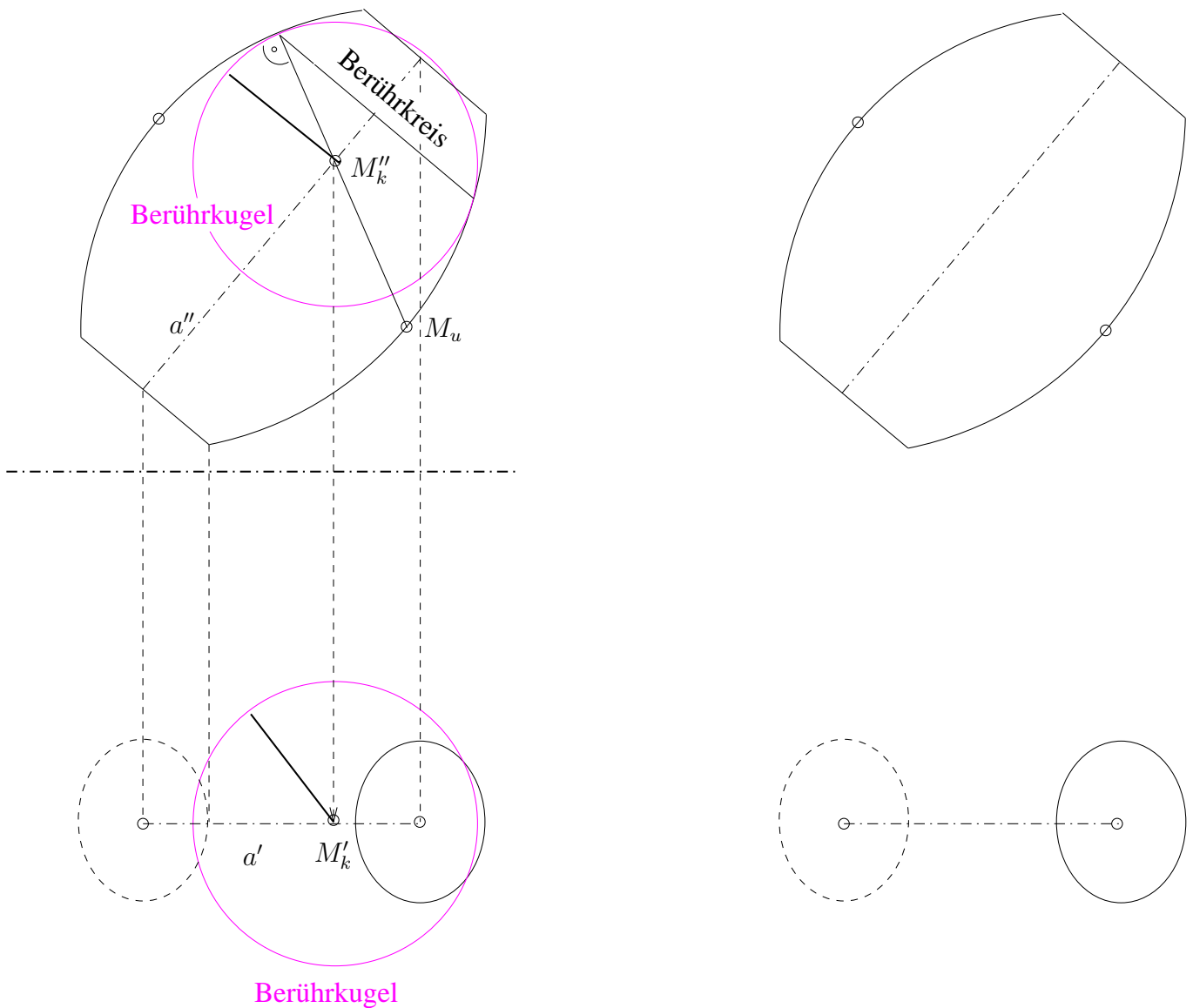


Abbildung 4.23: Umriss einer Rotationsfläche

## 4.9 Regelflächen

Als **Regelfläche** wird eine Fläche bezeichnet, die durch Bewegung einer Geraden erzeugt wird. Um ein **anschauliches Bild** einer Regelfläche zu erhalten, genügt es meistens, die erzeugende Gerade in “genügend” vielen Lagen zu zeichnen.

**Beispiel 4.2** *Einfache Beispiele sind Zylinder und Kegel.*

a) Abb. 4.24a) zeigt ein **einschaliges Hyperboloid**, das durch Rotation einer nicht zur  $z$ -Achse parallelen Gerade um die  $z$ -Achse entsteht. b) Abb. 4.24b) zeigt ein **hyperbolisches Paraboloid**, das durch Bewegung einer Strecke mit Endpunkten auf zwei gegebenen Strecken entsteht.

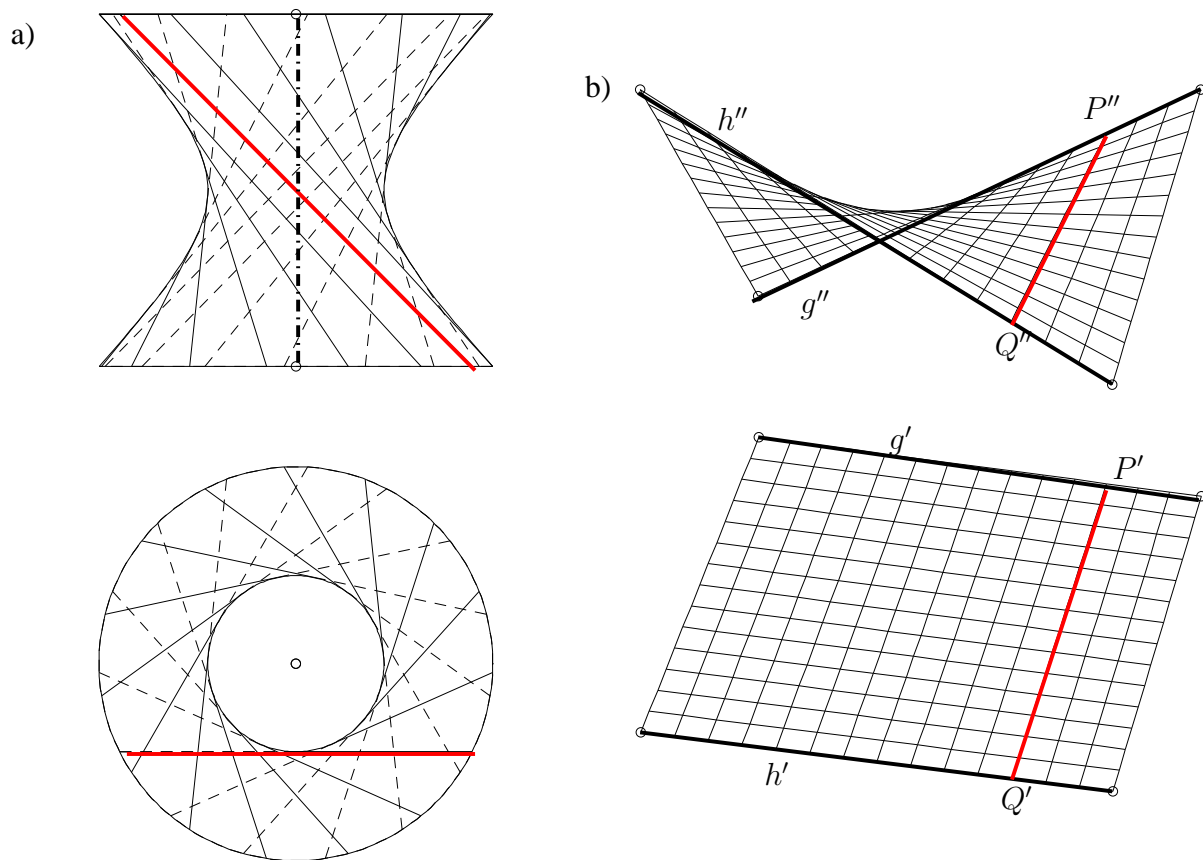


Abbildung 4.24: a) einschaliges Hyperboloid b) hyperbolisches Paraboloid

**Aufgabe 4.10** a) Gegeben ist in Grund- und Aufriss eine erzeugende Strecke und die Rotationsachse eines einschaligen Hyperboloids. Zeichnen Sie den Umriss in Grund- und Aufriss.

b) Gegeben ist in Grund- und Aufriss das Randviereck eines hyperbolischen Paraboloids. Zeichnen Sie den Umriss.

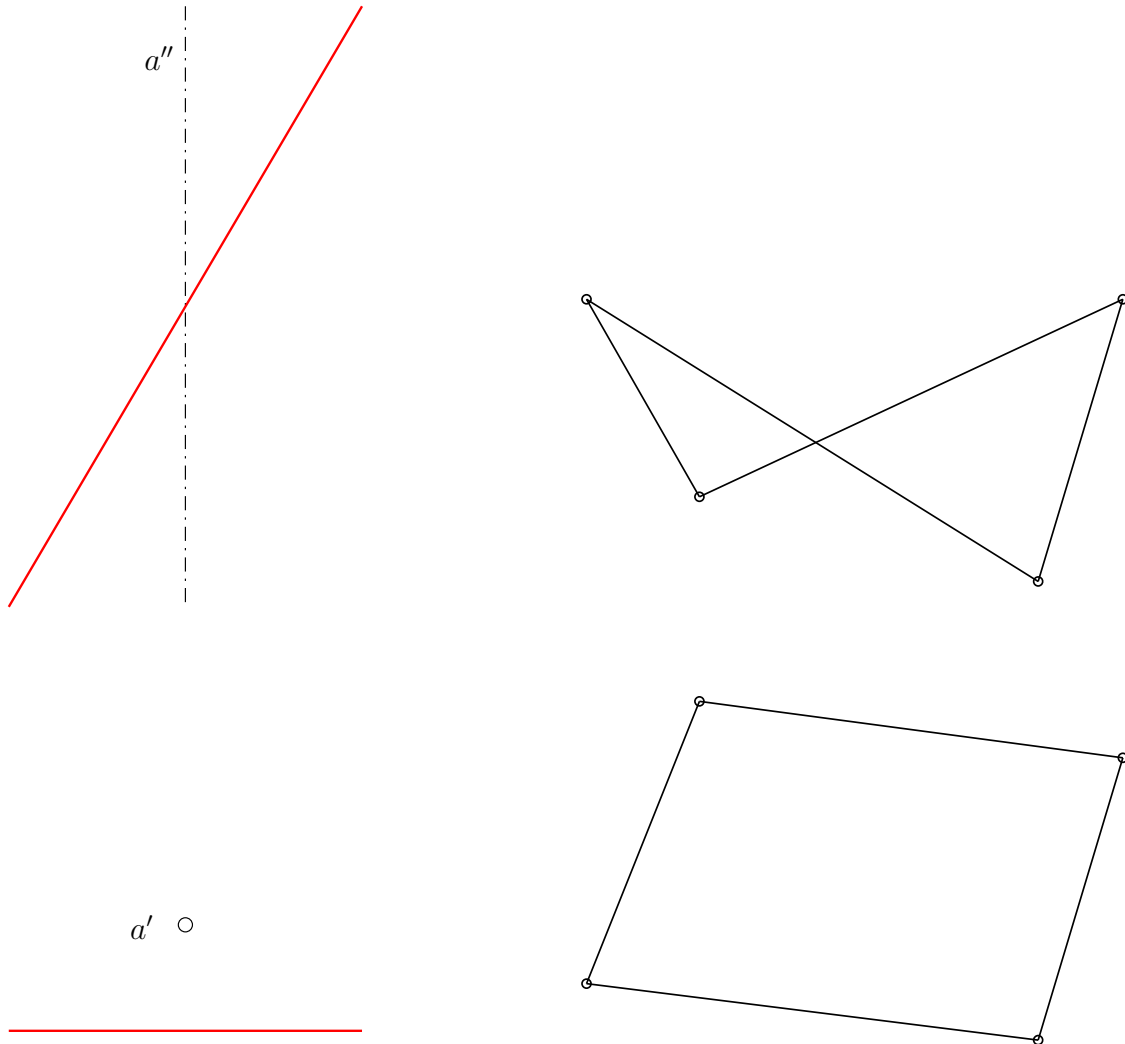


Abbildung 4.25: Regelflächen: a) einschal. Hyperboloid b) hyperbol. Paraboloid

## 4.10 Rohrflächen

Eine **Rohrfläche** entsteht durch Bewegung einer Kugel (mit festem Radius) durch den Raum so, dass der Mittelpunkt jeweils auf einer fest vorgegebenen Kurve liegt.

**Beispiel 4.3** Abb. 4.26 zeigt eine Rohrfläche, deren Leitkurve ein Teil einer Schraublinie ist.

Den **Umriss** einer Rohrfläche in Grund- und Aufriss erhält man als Einhüllende der Kugelumrisse (Kreise).

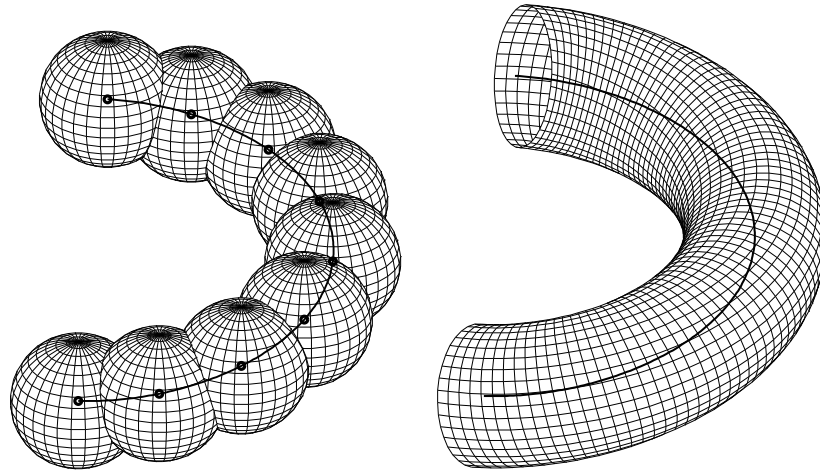


Abbildung 4.26: Rohrfläche

**Aufgabe 4.11** Gegeben: In Grund- und Aufriss die Leitkurve eines Torus (Kreis, Abb. 4.27). Zeichne den Umriss des Torus, der durch Bewegung einer Kugel mit Radius 1cm erzeugt wird.

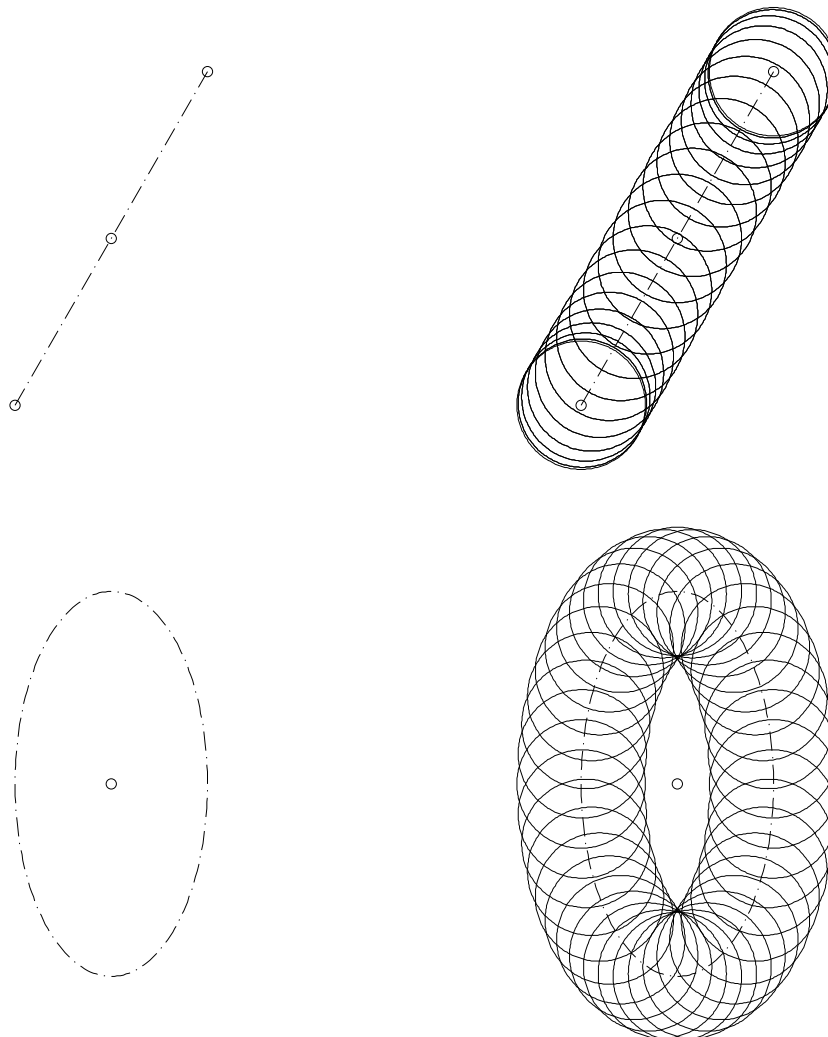


Abbildung 4.27: Rohrfläche: Torus

## 4.11 Durchdringungen

Gegeben: Kurve  $k$  und Fläche  $\Phi$ .

Gesucht: Durchstoßpunkt  $S = k \cap \Phi$ .

Lösungsidee: Die Kurve wird in eine Hilfsfläche  $\Psi$  (meistens: Ebene oder Kugel) so eingebettet, dass die Schnittkurve  $h := \Psi \cap \Phi$  (Gerade oder Kreis) einfach zu konstruieren ist. Der/die Durchstoßpunkt(e) ergeben sich dann aus  $k \cap h$ .

### 4.11.1 Beispiel 1: Gerade $g$ – Kugel $\Phi$

Gegeben: Gerade  $g$ , Kugel mit Mittelpunkt  $M$  in Grund- und Aufriss.

#### Durchführung:

1. Führe eine neue Risstafel  $\pi_3$  so ein, dass die Gerade  $g$  zu  $\pi_3$  parallel ist.
2. Wir nehmen an, dass  $\pi_3$  der Grundrisstafel  $\pi_1$  zugeordnet ist. Als **Hilfsfläche** wählen wir die Ebene  $\varepsilon$ , die  $g$  enthält und parallel zu  $\pi_3$  ist.  $\varepsilon$  schneidet aus der Kugel einen **Kreis**  $c$  aus, dessen Mittelpunkt  $M_c$  in  $\pi_3$  mit  $M'''$  (der Kugel) zusammenfällt.
3.  $c''' \cap g$  liefert die Durchstoßpunkte  $D_1''', D_2'''$  zunächst in  $\pi_3$ .
4. Konstruiere  $D_1', D_2'$  und dann  $D_1'', D_2''$ .

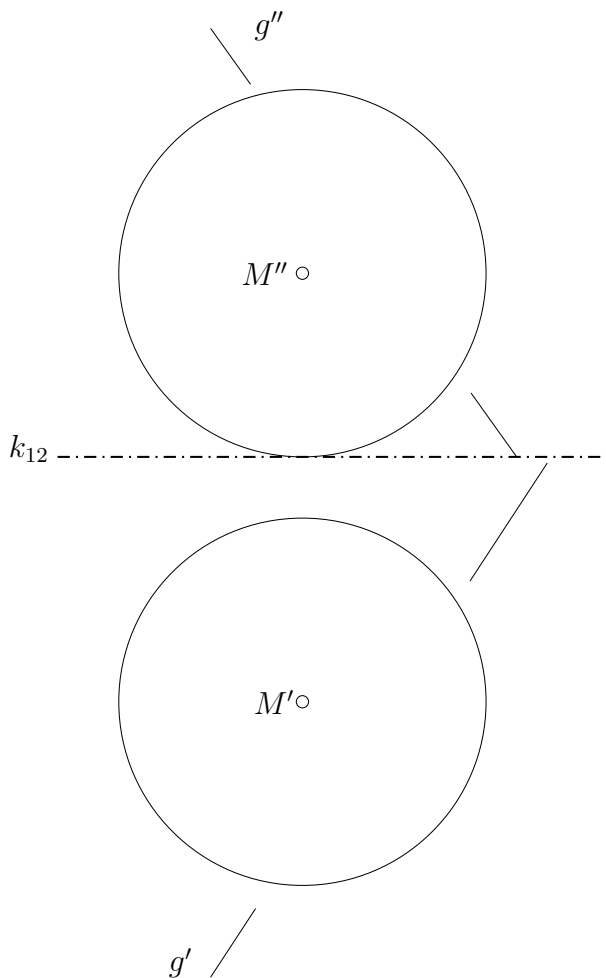


Abbildung 4.28: Schnitt:  
Kugel–Gerade

### 4.11.2 Beispiel 2: Gerade $g$ – Kegel $\Phi$

Gegeben: Gerade  $g$ , Kegel mit Spitze  $S$ , Achse  $a$ , Basiskreis  $c$  in Grund– und Aufriss.

#### Durchführung:

1. Als **Hilfsfläche** wählen wir die Ebene  $\varepsilon$  durch die Kegelspitze  $S$  und  $g$ .  $\varepsilon$  schneidet aus dem Kegel zwei Mantellinien  $l_1, l_2$  aus.  $l_1, l_2$  bestimmt man über die Spur  $s'_\varepsilon$  der Ebene  $\varepsilon$ . Hierzu schneidet man zwei Geraden von  $\varepsilon$  (eine Gerade kann  $g$  sein) mit  $\pi_1$ .
2.  $s'_\varepsilon \cap c'$  liefert Punkte  $L_1, L_2$ . Die Gerade durch  $S$  und  $L_1$  bzw.  $L_2$  ist die Gerade  $l_1$  bzw.  $l_2$ .
3.  $D_1 = l_1 \cap g$  und  $D_2 = l_2 \cap g$  sind die gesuchten Durchstoßpunkte.

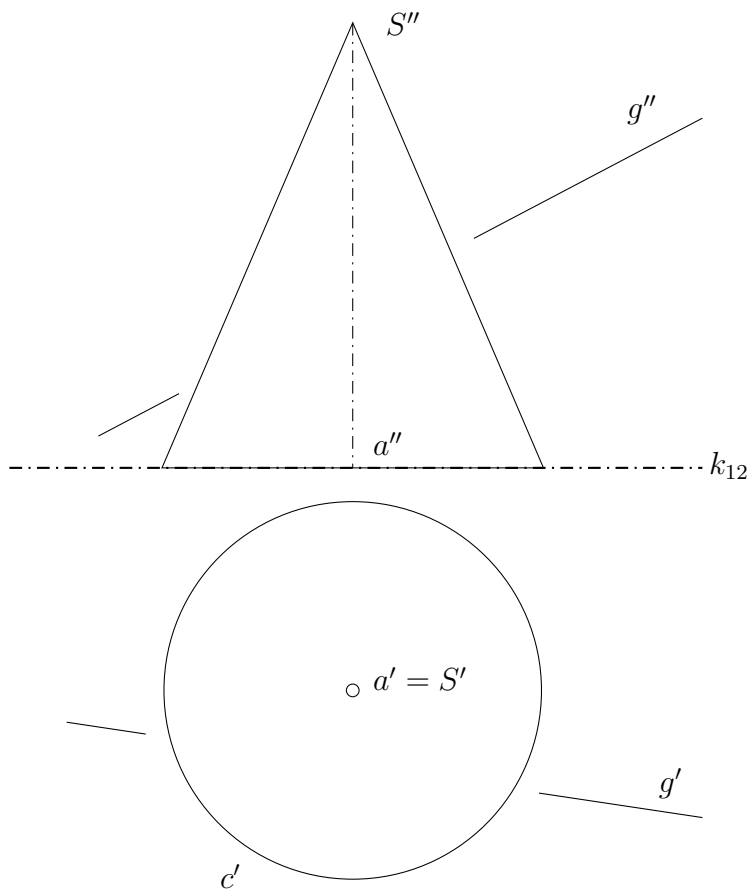


Abbildung 4.29: Schnitt: Kegel–Gerade

## 4.12 Durchdringungskurve zweier Flächen

Die Durchdringungs– oder Verschneidungskurven zweier Flächen  $\Phi_1, \Phi_2$  wird i.a. punktweise konstruiert.

**Prinzip:** Man wählt eine **Hilfsfläche**  $\Psi$ , die die gegebenen Flächen  $\Phi_1, \Phi_2$  in einfachen Kurven (Geraden, Kreise)  $k_1$  und  $k_2$  schneidet. Der Schnitt  $k_1 \cap k_2$  liefert einen oder mehrere Punkte von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ . Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis man eine “genügende” Anzahl von gemeinsamen Punkten gefunden hat.

## 4.12.1 Beispiel 1: Hilfsebenen

(s. LEO S.152)

Gegeben: Kegel  $\Phi_1$  (Achse  $a_1$ ), Zylinder  $\Phi_2$  (Achse  $a_2$ ) (Abb. 4.30).Gesucht: Durchdringungskurve  $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$ .Lösungsidee: Hilfsebene  $\varepsilon \perp a_1$  schneidet den Kegel in einem Kreis und den Zylinder in einem Geradenpaar.**Durchführung:**

1. Wähle eine geeignete Ebene  $\varepsilon$  und zeichne  $\varepsilon''$ .
2. Zeichne den Grundriss  $c'$  des Schnittkreises  $\varepsilon \cap \Phi_1$  (Radius  $r$ ).
3. Ziehe im Grundriss die Parallelen  $g', h'$  zu  $a'_2$  im Abstand  $d$ .
4. Die (max. vier) Schnittpunkte  $P', Q', R', S'$  des Kreises  $c'$  mit  $g', h'$  sind die Grundrisse von Punkten der Durchdringungskurve.
5. Auf  $\varepsilon''$  erhält man dann  $P'', Q'', R'', S''$ .
6. Wiederhole 1.–5.  $n$ -mal.
7. Verbinde die Punkte in der "richtigen" Reihenfolge mit einer Kurve.

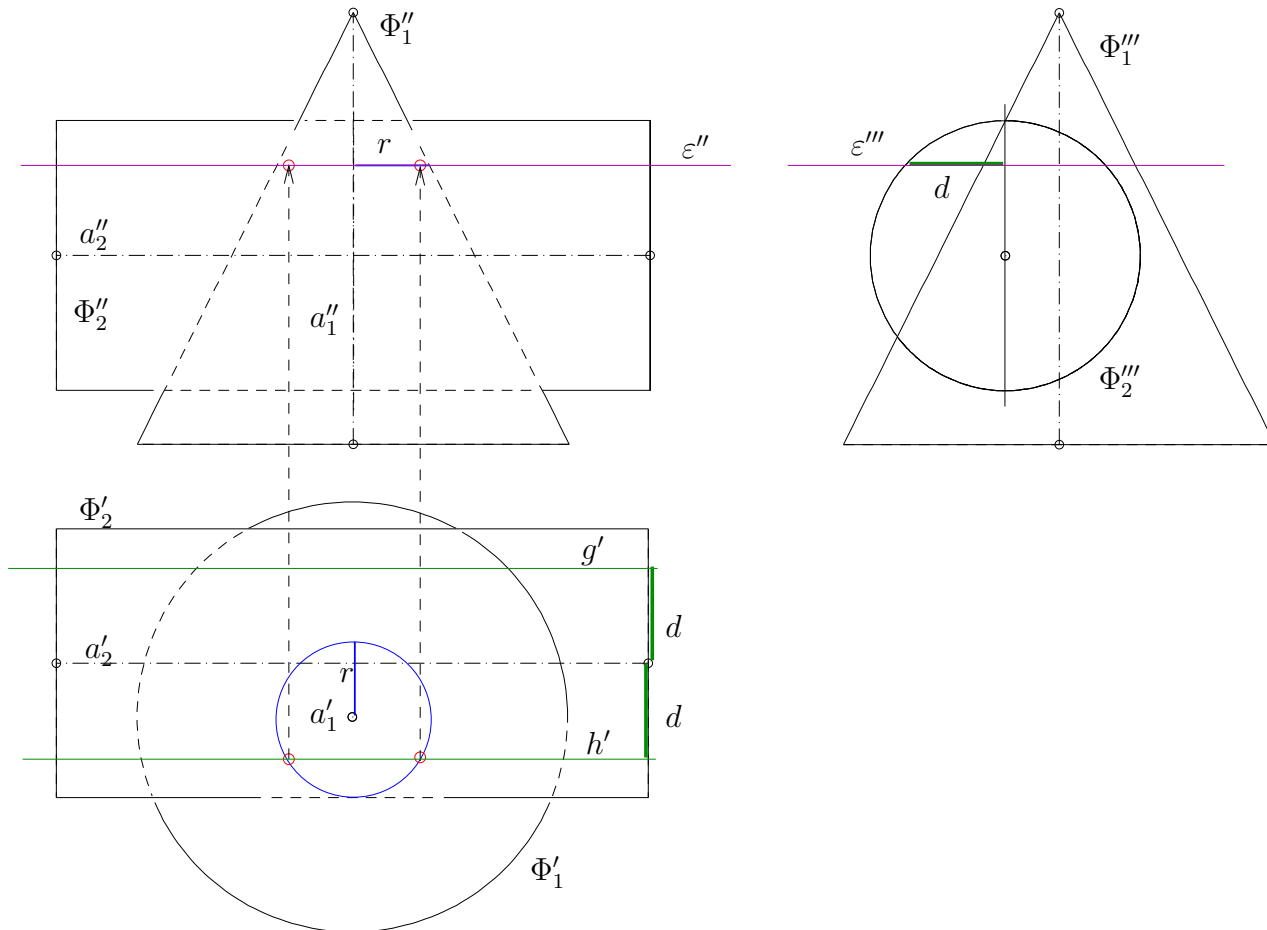


Abbildung 4.30: Schnitt: Kegel–Zylinder

**Aufgabe 4.12 :**

Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund- und Aufriss (Abb. 4.31).

Gesucht: Durchdringungskurve in Grund- und Aufriss.



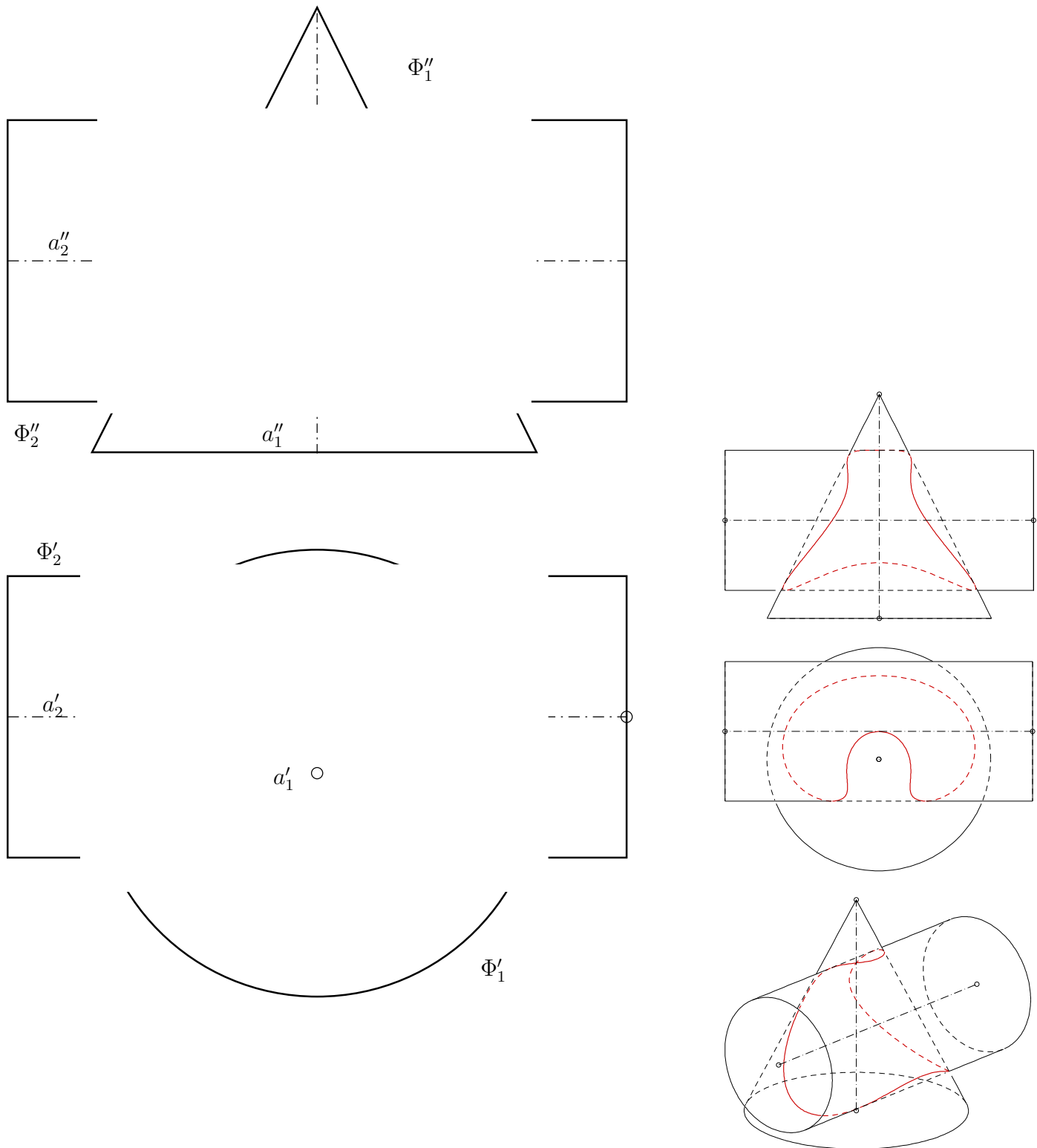


Abbildung 4.31: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfsebenenverfahren)

### 4.12.2 Beispiel 2: Hilfskugeln

(s. LEO S.155)

Gegeben: Kegel  $\Phi_1$  (Achse  $a_1$ ), Zylinder  $\Phi_2$  (Achse  $a_2$ ). Die Achsen schneiden sich! (Abb. 4.30).

Gesucht: Durchdringungskurve  $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$ .

Lösungsidee: In diesem Beispiel liefern horizontale Schnitte mit dem Zylinder Ellipsen, d.h. nicht einfach zu zeichnende Kurven. Deshalb benutzen wir eine andere Idee: Wir wählen als Hilfsflächen **Kugeln** mit dem

Schnittpunkt  $M = a_1 \cap a_2$  der Achsen als Mittelpunkt. Solche Kugeln mit geeigneten Radien schneiden sowohl den Kegel als auch den Zylinder in **Kreisen** als Hilfskurven. Diese Kreise sind alle senkrecht zur Aufrisstafel.

**Durchführung:**

1. Wähle eine Kugel  $\Psi$  mit Mittelpunkt  $M$ , die beide Flächen schneidet.
2. Bestimme im Aufriss die Schnittkreise  $k_1, l_1$  der Kugel mit dem Kegel  $\Phi_1$  und  $k_2, l_2$  der Kugel mit dem Zylinder  $\Phi_2$ . Wir verwenden hier nur  $k_2$ .  
 $k_1'', l_1'', k_2'', l_2''$  sind Strecken, da alle Kreise zu  $\pi_2$  senkrecht sind.
3.  $k_1'' \cap k_2''$  und  $l_1'' \cap k_2''$  liefern den Aufriss von max. vier Punkten  $P, Q, R, S$  der Durchdringungskurve. Es ist  $P'' = Q'', R'' = S''$ .
4. Zeichne  $k_1', l_1'$  und übertrage  $P, Q, R, S$  in den Grundriss.  $P', Q', R', S'$  liegen auf  $k_1', l_1'$ .
5. Wiederhole 1.–4.  $n$ -mal.
6. Verbinde die Punkte in der "richtigen" Reihenfolge mit einer Kurve.

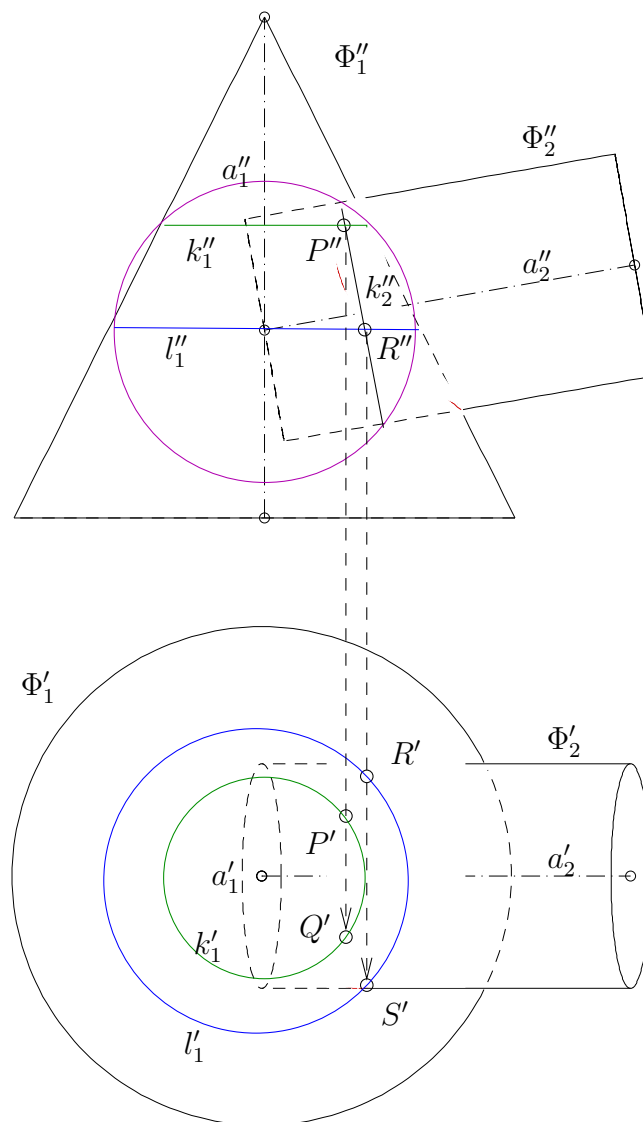


Abbildung 4.32: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfskugelverfahren)

**Aufgabe 4.13 :**

Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund- und Aufriss (Abb. 4.33).

Gesucht: Durchdringungskurve in Grund- und Aufriss.

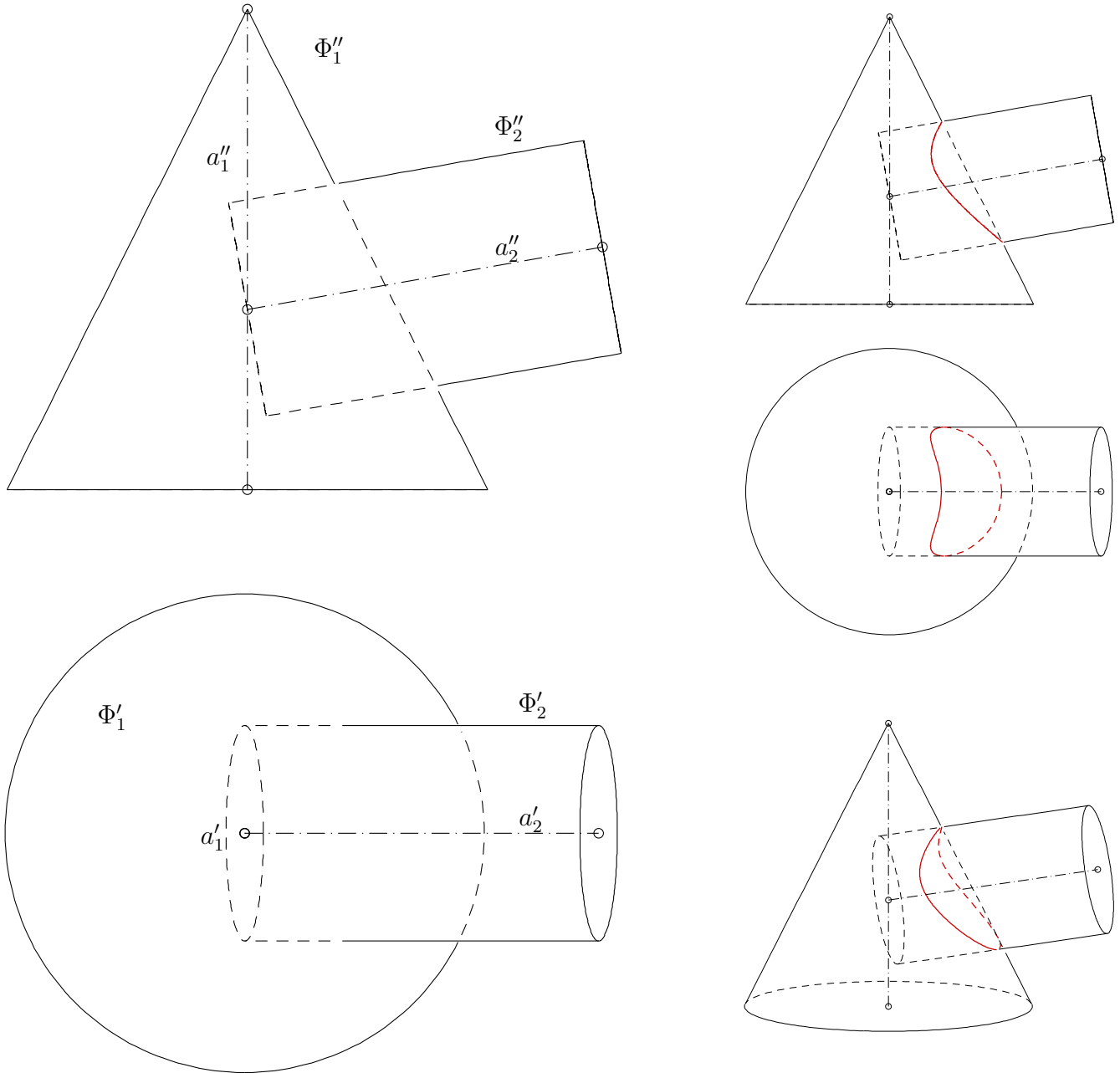


Abbildung 4.33: Schnitt: Kegel-Zylinder (Hilfskugelverf.)

**Bemerkung 1:**

a) Das **Hilfskugelverfahren** ist auf alle Rotationsflächen mit sich **schneidenden Achsen** anwendbar. Hilfskurven sind dann immer Kreise.

b) Die Voraussetzung für das **Hilfsebenenverfahren** ist: Es müssen sich **einfach** zu zeichnende **Hilfskurven** bei Schnitten mit geeigneten Ebenen ergeben. Meistens werden die Hilfsebenen senkrecht zu einer Risstafel gewählt.

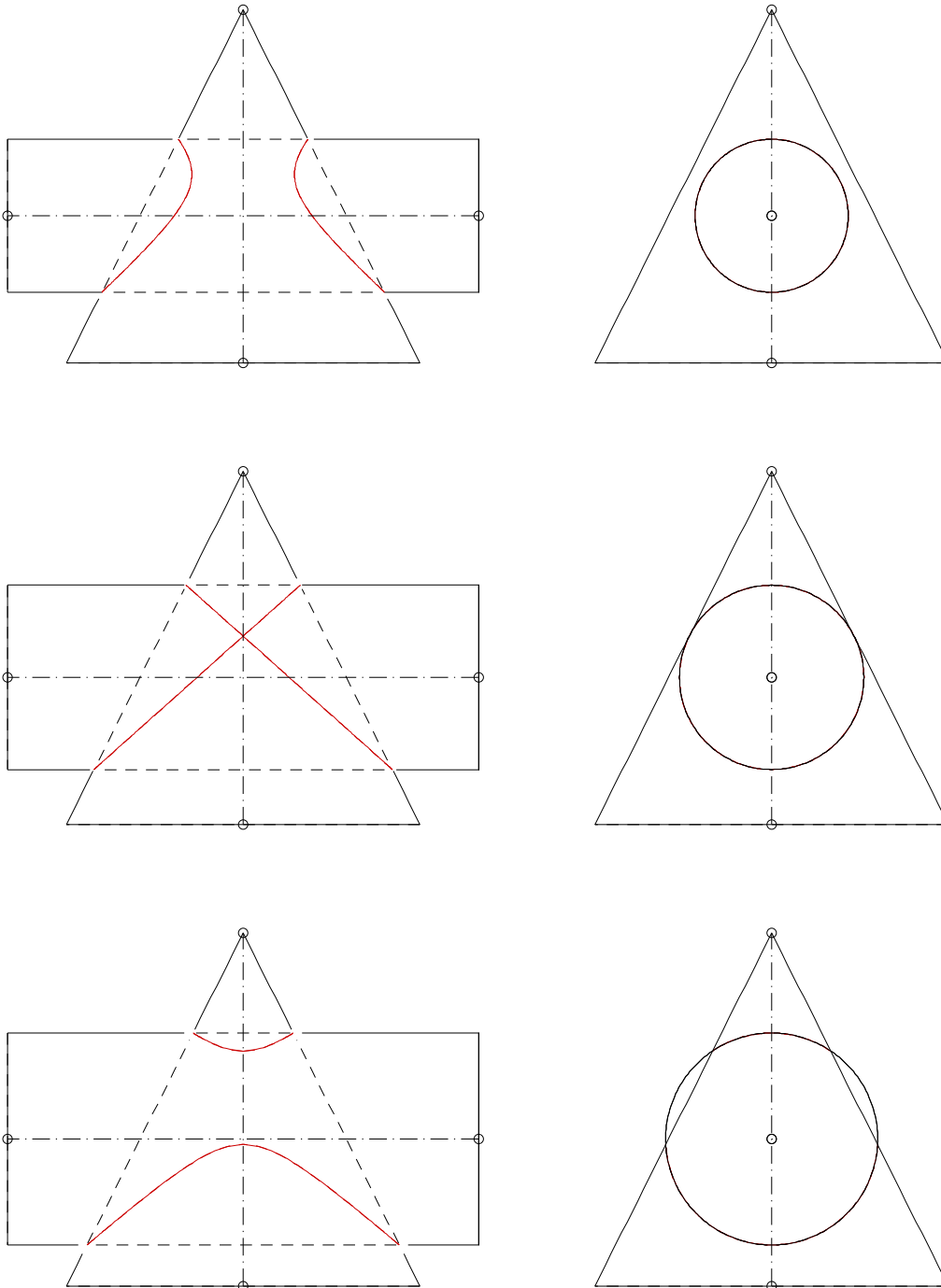


Abbildung 4.34: Schnitt: Kegel–Zylinder (weitere Beispiele)

**Bemerkung 2:**

a) Haben Flächen in einem Punkt  $P$  eine gemeinsame **Berührebene**, so hat ihre Durchdringungskurve in  $P$  eine **Spitze** (Abb. 4.34, Mitte).

b) Haben zwei sich schneidende **Drehzylinder** und/oder **Drehkegel** eine gemeinsame **Berührkugel**, so zerfällt die Durchdringungskurve in zwei **Ellipsen** (Beispiele sind das Kreuzgewölbe, Abb. 4.35, und der in der Mitte dargestellte Schnitt von Abb. 4.34).

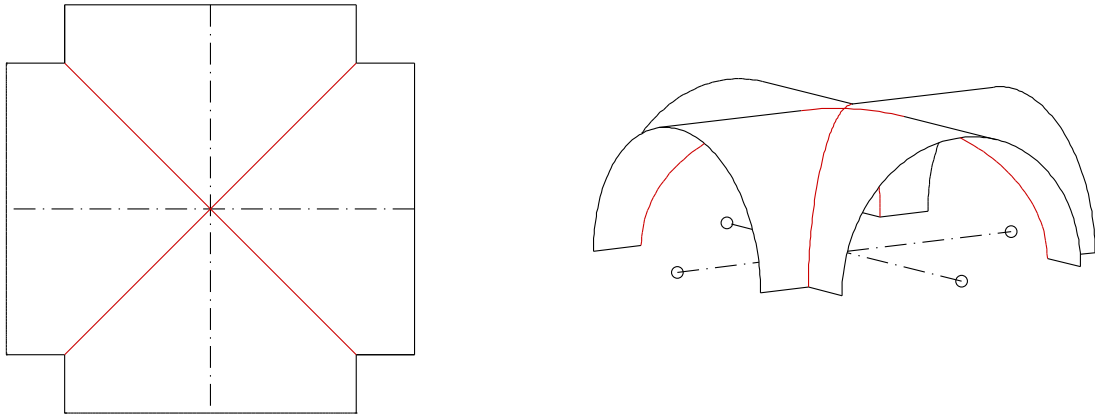


Abbildung 4.35: Kreuzgewölbe (Schnitt zweier Zylinder mit gleichen Radien und sich schneidenden Achsen)

**Aufgabe 4.14 :**

*Gegeben: Lichtkegel  $K$ , Zylinder  $Z$ , Ebene (Wand)  $E$  und Rotationsfläche (Vase)  $R$  in Grund- und Aufriss (Abb. 4.37).*

*Gesucht: Durchdringungskurven in Grund- und Aufriss (sind dies genau die Schattengrenzen?).*

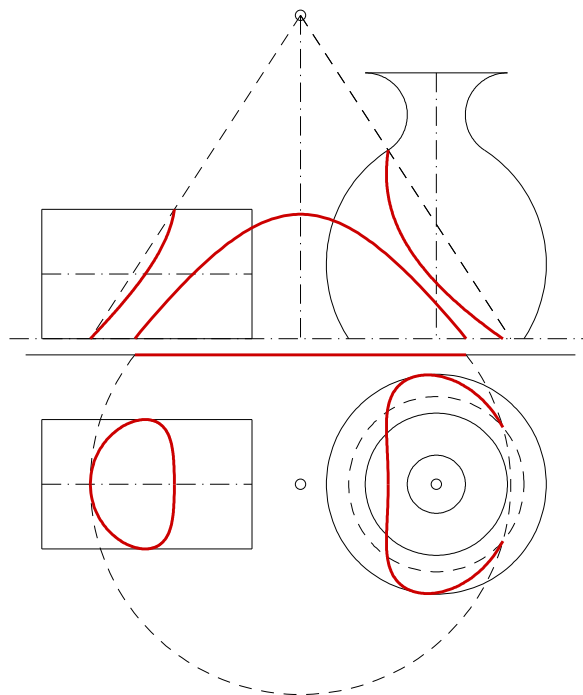


Abbildung 4.36: Durchdringungskurven: Lösung zu Abb. 4.37

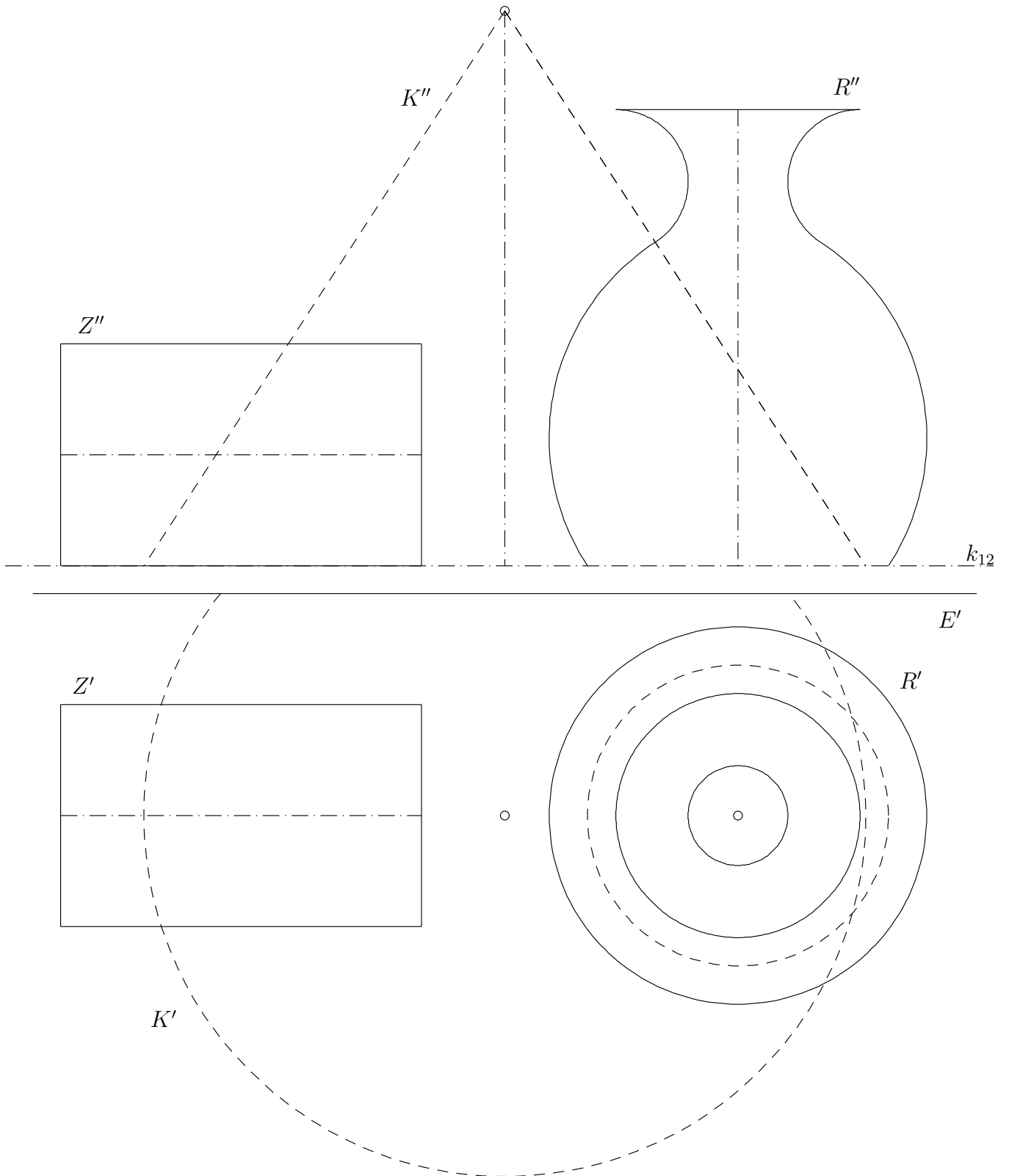


Abbildung 4.37: Durchdringungskurven